

33. LE RUOTE DENTATE

Le ruote dentate sono elementi di macchina utilizzati per la trasmissione del moto rotatorio e della potenza mediante alberi non coassiali, cioè paralleli (ruote cilindriche), incidenti (ruote coniche) o sghembi (ruote a vite). Nella trasmissione generalmente viene modificata la velocità angolare degli elementi.

Tra i vari sistemi di trasmissione del moto rotatorio (cinghie, catene, ecc.) le ruote dentate hanno:

- maggiore rendimento (fino al 98%),
- maggiore affidabilità e durata,
- minore ingombro,
- maggior costo.

Geometria delle ruote dentate

Si considerino due cilindri con assi paralleli tra loro e a contatto in un punto P (fig.1a) entrambi liberi di ruotare attorno al proprio asse di simmetria. Supponiamo che uno sia posto in rotazione attorno al suo asse e che il moto sia trasmesso all'altro per attrito in assenza di strisciamento: i due cilindri costituiscono una coppia di ruote di *frizione*, delle quali la più piccola è definita *pignone*.

I due cilindri ruotano con diversa velocità angolare a causa delle differenti lunghezze delle circonferenze, in particolare la velocità angolare è inversamente proporzionale al diametro; si definisce *rapporto di trasmissione* il rapporto tra le due velocità angolari. Nel *moto relativo* del pignone rispetto alla ruota, la circonferenza esterna di quest'ultimo rotola su quella esterna della ruota che sta ferma. L'atto di moto è di *rotazione pura* con *centro di istantanea rotazione* al punto di contatto tra le circonferenze che si sposta lungo la circonferenza della ruota. Quest'ultima è la *polare fissa* (luogo dei centri di istantanea rotazione sul piano fisso) mentre la circonferenza esterna del pignone è la *polare mobile* (luogo dei centri di istantanea rotazione sul piano mobile solidale al pignone). Entrambe le polari sono definite *primitive* (in questo caso *circonferenze primitive*) e caratterizzano il moto relativo delle ruote, in particolare, come detto, il rapporto di trasmissione.

Per mantenere inalterate le caratteristiche del moto, ma garantire una maggiore capacità di trasmissione della forza, il contorno esterno delle ruote viene profilato in forma di *denti* che si estendono a cavallo della polare tramite i quali avviene il contatto. In particolare tutti i tipi di ruote dentate hanno oggi profilo dei denti ad *evolvente* di cerchio che viene generato come luogo delle successive posizioni di un punto P appartenente ad una retta (detta *linea generatrice*, o *di pressione* o *d'azione*) che viene fatta rotolare su una circonferenza (detta *circonferenza di base*) concentrica alla polare (fig.1a). In questo caso i raggi di curvatura delle superfici dei denti coincidono con il segmento della retta d'azione compreso tra il punto di contatto e il punto di tangenza della retta generatrice con la circonferenza di base. Il diametro della circonferenza di base è determinato dall'inclinazione iniziale della retta pari a ϕ , detto *angolo di pressione* o *d'azione*. Il profilo del dente viene fatto estendere in altezza in parte esternamente alla primitiva (*addendum*) e in parte internamente alla primitiva (*dedendum*). Come è noto, il profilo ad evolvente è caratterizzato da diversi vantaggi quali facile costruzione, possibilità di tollerare spostamenti relativi degli assi di rotazione, costanza del rapporto di trasmissione durante il contatto.

Naturalmente nella coppia di ruote in contatto, una delle due trasmette la forza all'altra: la ruota che trasmette la forza è detta *cedente* e l'altra *ricevente*. Il contatto tra due denti durante il moto avviene esclusivamente lungo la retta d'azione e le forze scambiate sono dirette lungo tale retta stessa. Come detto, l'inclinazione della retta d'azione rispetto alla retta tangente alle polari nel punto di contatto delle stesse è pari all'angolo ϕ in modulo, mentre il verso di rotazione di ϕ risulta *opposto rispetto al verso di rotazione della ruota cedente*. Si noti che in tutti i punti del contatto vi è strisciamento dovuto al moto relativo delle ruote, ad eccezione del punto di intersezione tra le polari e la retta d'azione, essendo questo il centro di istantanea rotazione. Nell'analisi delle forze agenti nelle ruote, l'effetto dell'attrito viene trascurato e si assume che le forze agiscano nella direzione della retta d'azione.

Parametri geometrici

Il dimensionamento delle ruote dentate è di tipo modulare: quasi tutti i parametri geometrici della ruota fanno riferimento al *modulo* m definito come rapporto tra il diametro primitivo d ed il numero di denti N della ruota, cioè:

$$m = d/N \quad (33.1)$$

Dal modulo (cioè dal numero di denti e dal diametro della primitiva) risulta direttamente determinato il *passo* (circolare o circonferenziale) che è la distanza tra punti omologhi di due denti consecutivi misurato sulla primitiva:

$$p = \pi d/N = \pi m \quad (33.2)$$

Il passo è anche dato dalla somma della larghezza del dente e dell'ampiezza del vano. Ovviamente possono ingranare esclusivamente ruote aventi lo stesso modulo. Dalla (2) si osserva che a moduli crescenti corrispondono denti di dimensione maggiore. Tutti i parametri geometrici della ruota, ad eccezione della larghezza della ruota nella direzione dell'asse di rotazione, che varia generalmente tra 6 e 20 volte il modulo essendo 7-10 i valori più comuni, sono legati al modulo.

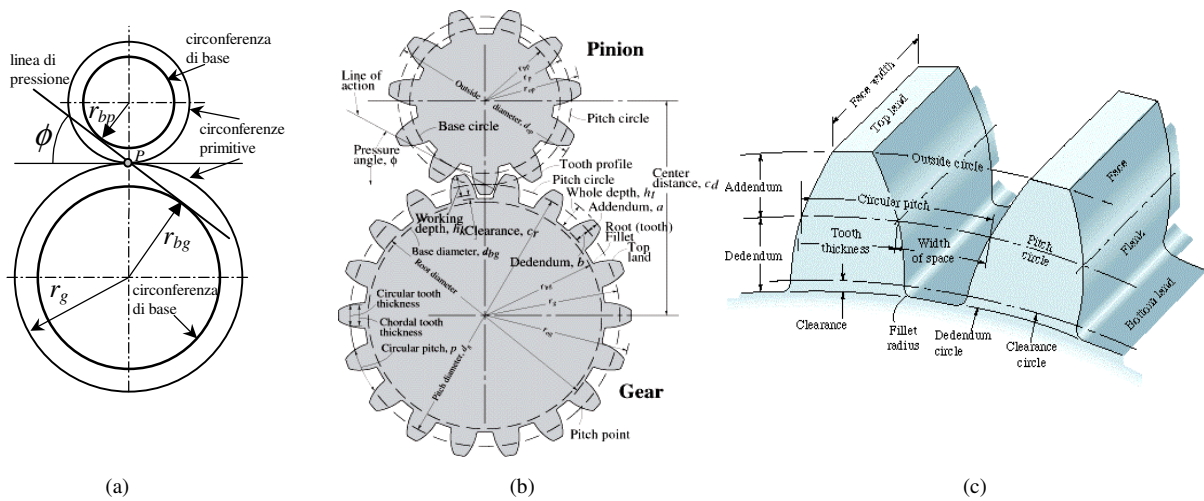


Figura 33.1 – Geometria delle ruote dentate e nomenclatura.

Riepilogo delle principali definizioni geometriche delle ruote dentate

- Circonferenza primitiva (pitch circle) _____ luogo dei centri di istantanea rotazione, diametro d , raggio r , in particolare r_p , r_g (p : pinion, g : gear);
- Circonferenza base (base circle - root circle) _____ circonferenza da cui viene generata l'evolvente, diametro $d_b=d\cos\phi$, raggio r_b ;
- Linea d'azione o pressione (line of action) _____ retta tangente alla circonferenza di base lungo cui agiscono le forze e lungo la quale avvengono i contatti tra i denti;
- Archi d'azione, di accesso, di recesso _____ archi della circonferenza primitiva corrispondenti all'intervallo tra il primo e l'ultimo punto di contatto tra i denti sulla linea d'azione (fig.4);
- Angolo di pressione ϕ (pressure angle) _____ angolo della linea d'azione rispetto all'orizzontale (20° , anche 25°);
- Evolvente (involute) _____ linea che costituisce il profilo del dente, parte dalla circonferenza di base e arriva a quella di testa;
- Interasse $c=O_1O_2=r_p+r_g$ (center distance) _____ distanza tra i centri delle primitive delle due ruote;
- Spessore trasversale (tooth thickness) _____ spessore del dente nel piano della primitiva misurato in corrispondenza della primitiva stessa;
- Vano (space) _____ spazio fra i denti misurato in corrispondenza della primitiva, di dimensione pari allo spessore trasversale;
- Passo (circular pitch) _____ distanza tra punti omologhi di due denti consecutivi misurato sulla primitiva, pari alla somma dello spessore del dente più ampiezza del vano;
- Addendum - $ad=m$ _____ estensione in altezza del dente esternamente alla primitiva;
- Dedendum - $de=1.25 m$ _____ estensione in altezza del dente internamente alla primitiva;
- Altezza totale del dente= $ad+de$ _____ estensione in altezza totale del dente;
- Circonferenza di testa - $r_t=r+ad$ (outside circle) _____ circonferenza che limita superiormente il dente $D_t=mN+2m=m(N+2)$;
- Circonferenza di piede - $r_p=r-de$ (bottom circle) _____ circonferenza che limita inferiormente il dente;
- Altezza profilo attivo= $ad+de-gi$ _____ estensione in altezza della parte attiva del dente;
- Gioco - gi (clearance) _____ spazio tra il profilo attivo e la circonferenza di piede;
- Raggio di raccordo al piede - $m/3$ (fillet radius) _____ raggio di raccordo del profilo del dente in corrispondenza alla circonferenza di base;
- Larghezza $9m < b < 14m$ o $3p < b < 5p$ (face width) _____ larghezza della ruota o spessore del dente nel piano normale alla primitiva;
- Costa (face) _____ superficie del dente tra primitiva e circonferenza di testa;
- Fianco (flank) _____ superficie del dente tra primitiva e circonferenza di dedendum.

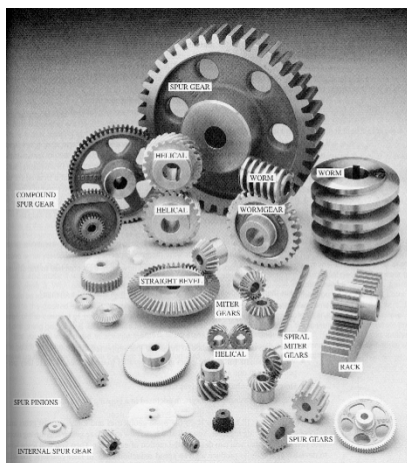


Figura 33.2 – Vari tipi di ruote dentate.

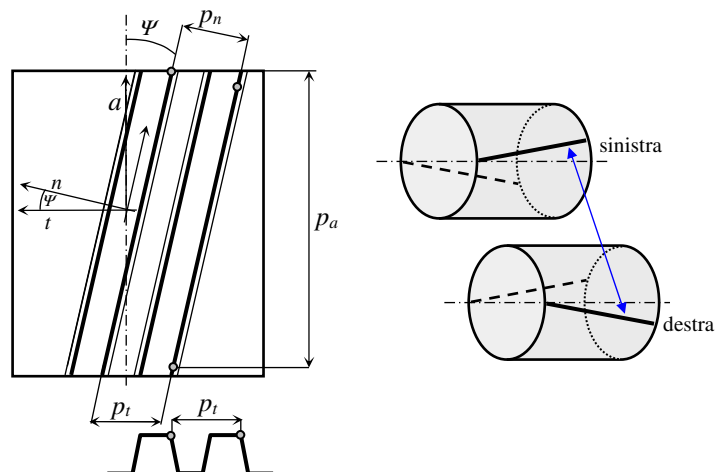


Figura 33.3 - Geometria delle ruote elicoidali.

Moduli normalizzati sono:

- 0.2-1.0 a passi di 0.10
- 1.0-4.0 a passi di 0.25
- 4.0-5.0 a passi di 0.50

Il rapporto di trasmissione può essere espresso mediante la seguente relazione

$$\rho = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (33.3)$$

Un parametro utilizzato nei paesi anglosassoni è il *passo diametricale* definito come:

$$P = N/d = \pi/p = 1/m \quad (33.4)$$

che si vede coincidere con l'inverso del modulo.

Le ruote dentate (fig.2) vengono classificate in ruote:

- cilindriche a denti dritti (basse velocità di rotazione, fabbricazione semplice, rumorosità, no forze assiali);
- cilindriche a denti elicoidali (alta velocità di rotazione, forze elevate, bassa rumorosità, forze assiali);
- cilindriche a denti bieloidali (vantaggi delle elicoidali senza spinta assiale);
- coniche (utilizzate per assi di rotazione incidenti);
- a vite (utilizzate per assi di rotazione ortogonali sghembi).

Ruote a denti elicoidali

Nelle ruote a denti elicoidali i denti sono avvolti ad elica su un cilindro. L'elica ha un'inclinazione definita dall'angolo ψ (fig.3) misurato sulla primitiva, valori tipici del quale sono compresi tra 15° e 30° . In base alla direzione di avvolgimento dell'elica, gli ingranaggi elicoidali possono essere *destri* o *sinistri*. L'appartenenza all'una o all'altra categoria è definita dalla direzione (destra o sinistra) di avvolgimento dell'elica a partire dal basso, ad es. in fig.3 l'elica è destra. Affinché due ruote elicoidali possano ingranare, le eliche *devono avere direzione opposta* e uguale angolo ψ .

Con riferimento alla fig.3a, per le ruote elicoidali, si definiscono:

- p_t o p : passo circolare trasversale, misurato in un piano ortogonale all'asse della ruota,
- p_n : passo circolare normale, misurato in un piano normale all'elica,

$$p_n = p_t \cos \psi \quad (33.5)$$

- p_a : passo circolare assiale, misurato in un piano diametricale

$$p_a = p_t / \tan \psi \quad (33.6)$$

La retta d'azione è ortogonale alla superficie del dente. L'angolo di pressione nel piano ortogonale all'asse della ruota è ϕ mentre quello misurato nel piano normale all'elica è ϕ_n . Tra detti angoli sussiste la seguente relazione:

$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi} \quad (33.7)$$

Grado di ricoprimento

Con riferimento alla fig.4, il contatto tra i denti inizia e finisce nei punti a e b di intersezione tra la retta di pressione e le circonferenze di addendum delle due ruote; il segmento della retta di pressione compreso tra tali punti è l'insieme dei punti di contatto tra i denti e ha lunghezza L_{ab} . In corrispondenza ai punti a e b è possibile individuare due punti A e B all'intersezione tra la circonferenza primitiva e il profilo del dente nelle due posizioni. L'arco della primitiva compreso tra A e B è detto *arco di contatto* q_c . L'arco tra A e la verticale è detto *arco di accesso* q_a , mentre quello tra la verticale e B è detto *arco di recesso* q_r .

Il grado di ricoprimento r_c è definito come rapporto tra la lunghezza dell'arco di contatto e il passo circonferenziale p . In definitiva esso rappresenta il numero medio di denti in contatto: nell'ipotesi che $q_c = p$ si ha un solo una coppia di denti in contatto alla volta. In generale è bene che sia $r_c > 1$.

A causa della difficoltà di misura dell'arco di contatto, al posto di quest'ultimo si può introdurre la lunghezza del segmento AB . Quest'ultimo è ottenibile come ipotenusa di un triangolo rettangolo un cui cateto è dato dal segmento L_{ab} con cui forma l'angolo ϕ .

$$r_c = \frac{q_c}{p} \approx \frac{L_{ab}/\cos \phi}{p} = \frac{L_{ab}}{p \cos \phi} = \frac{L_{ab}}{p_b} \quad (33.8)$$

p_b è il *passo di base* è analogo al passo diametricale, ma riferito alla circonferenza di base invece che a quella primitiva, ed è la distanza tra punti omologhi di due denti consecutivi misurato sulla circonferenza di base:

$$p_b = \pi d_b / N \tag{33.9}$$

mentre la lunghezza L_{ab} è ottenibile dalla geometria delle ruote in contatto come

$$L_{ab} = \sqrt{r_{tp}^2 - r_{bp}^2} + \sqrt{r_{tg}^2 - r_{bg}^2} - c \sin \phi \tag{33.10}$$

essendo $r_{tp,g}$ i raggi delle circonferenze di testa e c l'interasse.

Interferenza

Nel caso in cui le circonferenze di testa si estendano oltre i punti a e b di fig.4 si verifica una interferenza tra le due ruote in contatto. In questo caso è necessario ridurre l'addendum delle ruote. Questo eventualità può accadere per pignoni aventi $\phi=20^\circ$ e $N<18$ o $\phi=25^\circ$ e $N<12$. Il massimo valore della circonferenza di testa affinché non si abbia interferenza è dato da

$$r_{a\max} = \sqrt{r_b^2 + c^2 \sin^2 \phi} \tag{33.11}$$

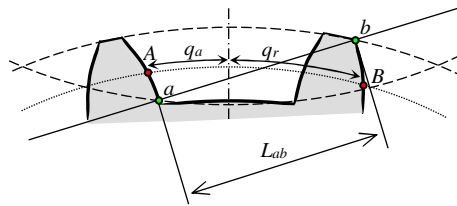


Fig.33.4 – Grado di ricoprimento.

Analisi delle forze

Usualmente nelle catene cinematiche di trasmissione del moto la potenza trasmessa P si mantiene costante: essa rappresenta il dato di base per il calcolo delle forze in gioco. Nei casi in cui vi sia strisciamento fra gli elementi a contatto parte della potenza viene dissipata per vincere le forze o le coppie d'attrito e la trasmissione avviene con un certo rendimento η . Tale rendimento è dato dal prodotto dei rendimenti di ogni singola coppia di elementi a contatto. La potenza ricevuta dall'utilizzatore risulta pari alla quantità ηP .

Per assegnata velocità angolare ω in radianti al secondo (o n in numero di giri al minuto, con $n=60\omega/2\pi=9.55\omega$), la coppia torcente trasmessa T può essere valutata con la seguente relazione:

$$T = \frac{P}{\omega} = 9.55 \frac{P}{n} \tag{33.12}$$

Come visto, la forza F scambiata tra le ruote dentate al contatto agisce nella direzione della retta d'azione che è inclinata dell'angolo ϕ rispetto alla direzione tangenziale. Dalla (9) è possibile ricavare immediatamente la componente della forza utile alla trasmissione della potenza che agisce in direzione tangenziale a distanza $d/2$ (con d diametro della ruota) dall'asse di rotazione:

$$F_t = 2 \frac{T}{d} = 2 \frac{P}{\omega d} = 19.1 \frac{P}{n d} \tag{33.13}$$

Ruote cilindriche a denti dritti

In figura (4) è mostrato il caso delle ruote cilindriche a denti dritti: l'azione mutua è rappresentata dalla forza F che agisce lungo la retta d'azione. Come detto, l'inclinazione della retta d'azione rispetto alla retta tangente alle polari nel punto di contatto delle stesse è pari all'angolo ϕ in modulo e il verso di rotazione di ϕ è opposto al verso di rotazione della ruota cedente. Ad esempio, in fig.5 è mostrato il caso in cui la ruota cedente è la superiore e il verso di rotazione è antiorario.

La forza F può essere scomposta nelle componenti tangenziale F_t e radiale F_r . La

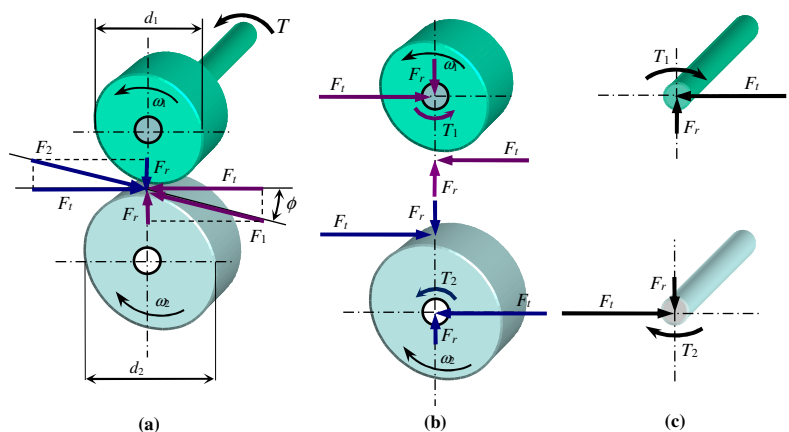


Fig.33.5 - (a) Azioni mutue tra le ruote dentate, (b, c) azioni scambiate con l'albero.

prima, come già detto, è la componente utile per la trasmissione del momento torcente, e può essere ottenuta tramite la (13).

La componente radiale *non è utile per la trasmissione di potenza* e può essere ottenuta mediante la seguente espressione:

$$F_r = F_t \tan \phi \quad (33.14)$$

L'equilibrio delle ruote soggette alla forza F richiede che gli alberi trasmettano alle stesse delle forze uguali e contrarie e delle coppie inversamente proporzionali ai diametri delle ruote: in fig.5(b) sono rappresentate tutte le azioni su ciascuna ruota dentata.

Naturalmente le azioni ricevute dagli alberi sono a loro volta opposte a quelle trasmesse dagli stessi alle ruote (cioè risultano concordi con le forze ricevute dalle ruote). In fig.5(c) sono riportate le forze trasmesse dalle ruote ai rispettivi alberi: è evidente che le componenti F_t ed F_r provocano nell'albero delle sollecitazioni di flessione in piani tra di loro *ortogonali*. Nell'esempio di fig.5 gli assi delle ruote sono disposti nel piano verticale: in tal caso la F_t provoca una flessione dell'albero nel piano verticale e la F_r in quello orizzontale.

Ruote cilindriche a denti elicoidali

La fig.6a fornisce una vista tridimensionale delle forze agenti sul dente di una ruota dentata a denti elicoidali. La forza F agisce in direzione normale al contatto e il punto di applicazione è sul piano diametrale nel centro della ruota.

Indicando con

- F la forza totale,
- F_t la componente tangenziale,
- F_r la componente radiale,
- F_a la componente assiale o carico di spinta,

in base alla geometria illustrata in fig.6a si ottengono le seguenti relazioni tra la forza totale e le componenti:

$$F_t = F \cos \phi_n \cos \psi \quad F_r = F \sin \phi_n \quad F_a = F \cos \phi_n \sin \psi \quad (33.15-17)$$

Usualmente è possibile ottenere direttamente F_t dai dati di progetto tramite la (13) e le altre forze sono ottenibili con le seguenti espressioni:

$$F_r = F_t \tan \phi_t = F_t \frac{\tan \phi_n}{\cos \psi} \quad F_a = F_t \tan \psi \quad F = \frac{F_t}{\cos \phi_n \cos \psi} \quad (33.18-20)$$

Il verso della componente assiale dipende dal verso di rotazione delle ruote (orario o antiorario) e dal verso di avvolgimento delle eliche (destro o sinistro), ricordando che entrambi i versi sono opposti per la ruota cedente e ricevente. In fig.6a il verso di rotazione della ruota *ricevente* è orario e la ruota è destra. Se si inverte il verso di rotazione *oppure* si utilizza una ruota con elica di verso opposto, il verso della spinta assiale si inverte, mentre, se si modificano *entrambi i fattori*, esso rimane invariato.

In fig.6b sono mostrate le 4 possibili combinazioni di rotazione ed angolo dell'elica della ruota *cedente* e le corrispondenti spinte assiali sull'albero *cedente* (F_{a1}) e quello *ricevente* (F_{a2}). Le direzioni delle spinte sono indipendenti dalla *posizione* della ruota ricevente rispetto alla cedente, cioè dalla direzione del piano che contiene gli assi delle ruote. Come è ovvio, la ruota ricevente di fig.6a può essere accoppiata alla ruota cedente in basso a sinistra di fig.6b, avente verso di rotazione antiorario ed elica sinistra (vedi anche fig.3).

È opportuno sottolineare che, così come la forza tangenziale genera un momento *torcente* sull'albero per via del braccio $d/2$ rispetto all'asse dell'albero stesso (il momento utile alla trasmissione della potenza), la forza assiale provoca un *momento flettente concentrato* sull'albero, agente nello stesso piano dei momenti provocati dalla forza *radiale* (fig.6c) e avente modulo

$$M_a = F_a d/2 = F_t \tan \psi d/2 = T \tan \psi \quad (33.21)$$

Di conseguenza, nella valutazione della sollecitazione di flessione sull'albero nel piano in cui agiscono le componenti radiali devono essere considerati anche i momenti concentrati (21). Si deve anche notare che, mentre le forze agenti sulla ruota cedente e ricevente sono uguali e contrarie per il noto principio di azione e reazione, i momenti (21) applicati agli alberi sono proporzionali al raggio della primitiva di ciascuna ruota.

In fig.6c sono mostrate le azioni prodotte da una coppia di ruote elicoidali sui rispettivi alberi. Il caso corrisponde a quello di fig.6b in basso a sinistra, cioè ruota cedente (in alto) posta in rotazione antioraria, con elica sinistra, ed è analogo a quello della fig.5c, nel quale gli assi delle ruote giacciono in un piano verticale. Le sollecitazioni sulla ruota ricevente sono analoghe a quelle rappresentate in fig.6a. I momenti M_a agiscono nel piano verticale.

Se su un albero vengono calettate 2 ruote elicoidali di differente diametro, al fine di ricevere una certa potenza P e trasmetterla variando velocità ω e coppia T , è opportuno che abbiano la stessa direzione dell'elica, affinché le spinte F_a e i momenti M_a agenti sull'albero risultino contrapposti, limitando lo sforzo sui supporti. Da notare che se l'angolo ψ è uguale per entrambe le ruote, le spinte (19) F_a risultano diverse in modulo, in quanto sono diverse le forze F_t agenti sulle 2 ruote (13), ma i moduli dei momenti M_a risultano uguali, come si vede dal termine di destra della (21).

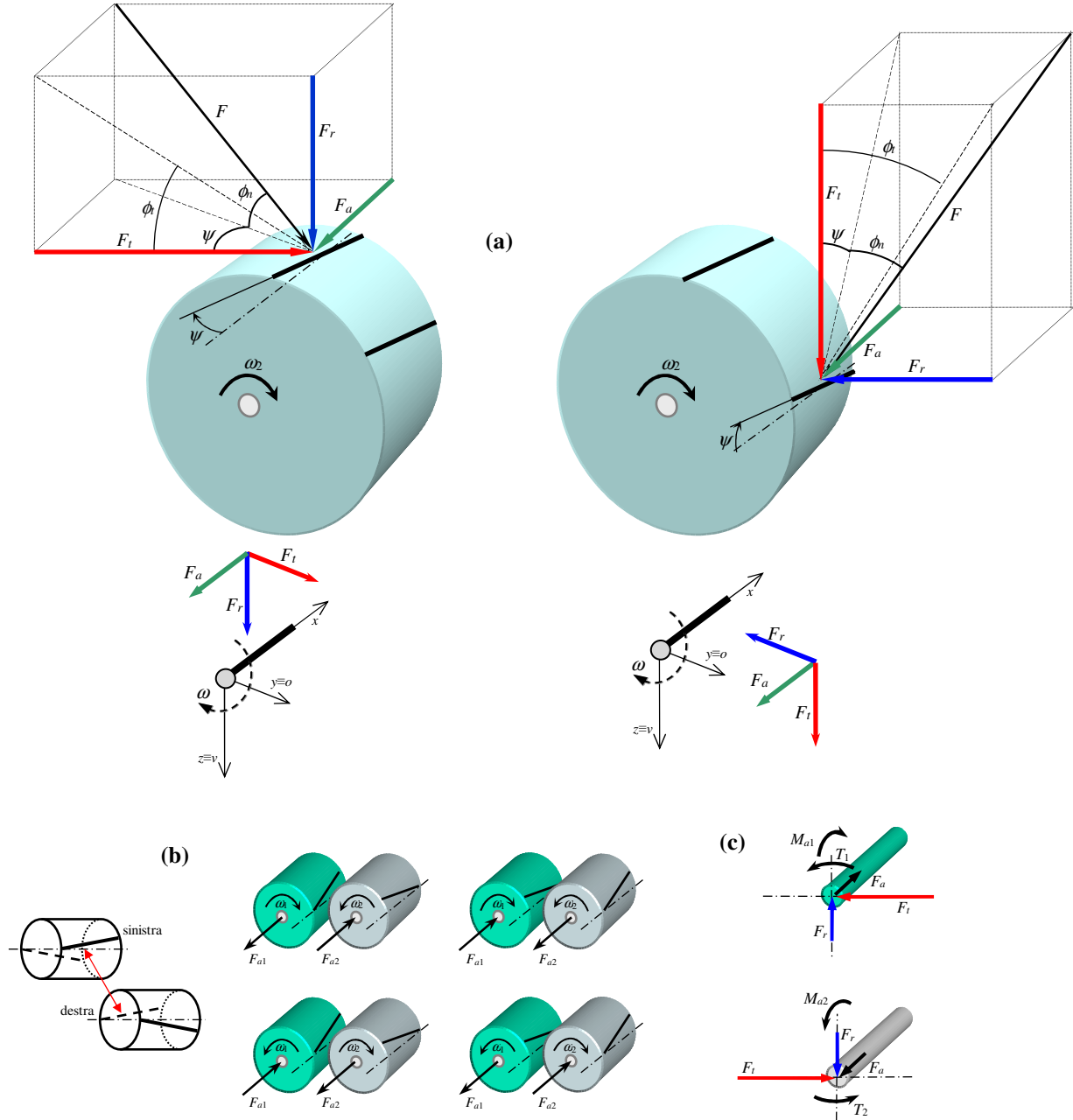


Fig.33.6 – Forze scambiate dalle ruote a denti elicoidali: (a) forze agenti su una ruota ricevente destra in rotazione oraria; (b) direzioni delle spinte assiali sugli alberi della ruota cedente (1) e ricevente (2) per ruote cedenti rotanti in senso orario (in alto) o antiorario (in basso), con elica sinistra (a sinistra) o destra (a destra); (c) azioni compressive sugli alberi.

Resistenza delle ruote dentate

Le ruote dentate, nel loro funzionamento, sono soggette alle seguenti sollecitazioni:

- sollecitazione statica e a fatica del dente a flessione (massima alla circonferenza di piede),
- fatica superficiale delle superfici coniugate dei denti (nella zona di contatto tra i denti),
- usura per asportazione di materiale,
- alta temperatura a causa del calore generato durante il contatto,
- vibrazioni a causa dell'alta velocità.

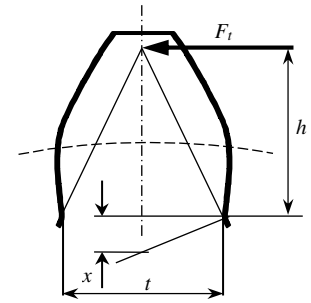


Fig.33.7- Resistenza a flessione del dente.

Resistenza a flessione- Formula di Lewis

La formula per il calcolo delle tensioni di flessione nel dente di una ruota è stata proposta da Lewis; essa è basata sulle seguenti ipotesi semplificative e/o cautelative:

- carico agente sulla sommità del dente (momento flettente massimo),
- una sola coppia di denti in presa (massima forza sul dente),
- componente radiale della forza Ft, trascurabile,
- effetto del taglio trascurabile,
- carico Ft distribuito uniformemente sulla larghezza b,
- forza d'attrito trascurabile,
- concentrazione di tensione trascurabile.

Il dente (fig.7) viene assimilato ad una trave incastrata nella quale

- t è lo spessore
- h è l'altezza,
- b è la larghezza (in direzione perpendicolare alla figura).

Il dente di una ruota, lungo la sua altezza, ha sezioni maggiori di quelle del solido di uniforme resistenza a flessione (di profilo parabolico) avente la stessa sezione in corrispondenza della base. La tensione massima si ha quindi nel punto più sollecitato alla base del dente ed è data da:

$$\sigma = \frac{M t/2}{I} = \frac{Fh t/2}{b t^3/12} = 6 \frac{h F}{t^2 b} \tag{33.22}$$

Poiché l'altezza e lo spessore del dente sono legate al modulo m, la (22) può essere riscritta come

$$\sigma = \frac{6 h F_t}{t^2 b} = \frac{1}{m Y} \frac{F_t}{b} \tag{33.23}$$

nella quale Y prende il nome di *fattore di forma adimensionale di Lewis*; esso dipende dalla geometria del dente. La tab.1 mostra i valori di Y per ruote unificate. Ulteriori informazioni su Y sono riportate in appendice.

Per tenere conto della presenza della concentrazione di tensione alla base del dente, dovuta alla variazione di sezione, al posto del coefficiente Y si introduce il *fattore geometrico J* che contiene sia Y che il fattore di concentrazione delle tensioni ottenendo

$$\sigma = \frac{1}{m J} \frac{F_t}{b} \tag{33.24}$$

J è fornito in forma di grafici in funzione del numero di denti della ruota. Poiché la tensione varia con il numero di denti in presa, per ruote di precisione, esistono più curve di J al variare di N, ciascuna riferita al numero di denti della ruota accoppiata.

Si noti che il dente, ad ogni giro, è soggetto ad una tensione di fatica di tipo pulsante, che varia tra il livello 0, prima e dopo il contatto, e un valore massimo dato dalla (24). Com'è noto, per questo tipo di sollecitazione la tensione media e quella alternata sono uguali e pari alla metà del valore massimo.

Resistenza alla fatica e all'usura superficiale

Le superfici dei denti a contatto sono soggette ad usura superficiale dovuta alle tensioni di contatto variabili nel tempo e allo strisciamento mutuo, la cui velocità cresce con la distanza dal centro di istantanea rotazione delle ruote.

N denti	Y	N denti	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	dentiere	0.485

Tab.33.1 – Fattore di Lewis.

Il danneggiamento può avvenire come:

- abrasione, dovuta alla presenza di particelle di materiale estraneo;
- rigatura superficiale (scoring), dovuto ad alta velocità e lubrificazione imperfetta (con conseguente alto valore del coefficiente di attrito), è influenzata dalla finitura superficiale;
- vaiolatura (pitting), dovuto a fatica superficiale per elevate tensioni di contatto.

Le tensioni di contatto possono essere ottenute mediante la teoria di Hertz, nella quale si è mostrato che la massima pressione di contatto fra due cilindri è data dall'equazione (9.7) qui riscritta:

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{q}{\pi} \frac{\Delta}{\rho}} = \sqrt{\frac{q}{\pi} \frac{1/R_1 + 1/R_2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} \quad (33.25)$$

- q è la forza ad unità di lunghezza che pressa i due cilindri l'uno contro l'altro,
- ν_1, ν_2, E_1, E_2 sono le costanti elastiche dei materiali dei cilindri,
- R_1 e R_2 sono i diametri dei cilindri.

La relazione (25) deve essere adattata alla notazione relativa alle ruote dentate. In primo luogo si introducono

- b larghezza della faccia del dente,
- $q = F/b = F_t/(b \cos \phi)$,
- $R_{1,2}=r_{1,2}$ valori istantanei dei raggi di curvatura dei profili dei denti del pignone e della ruota nel punto di contatto,

ottenendo

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{F_t}{b \cos \phi} \frac{1/r_1 + 1/r_2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} = \sqrt{\frac{F_t}{b} \frac{1/r_1 + 1/r_2}{\cos \phi} \frac{1/\pi}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}} \quad (33.26)$$

La (26) può essere risolta per ognuno dei punti dall'inizio alla fine del contatto fra i denti. Naturalmente il rotolamento puro esiste solo in corrispondenza delle primitive, negli altri punti il moto è un misto fra rotolamento e strisciamento; la (26), ovviamente, non tiene conto delle tensioni dovute allo strisciamento. Solitamente la prima evidenza dell'usura si ha in corrispondenza delle primitive; i raggi di curvatura dei profili dei denti in corrispondenza delle primitive sono:

$$r_1 = \frac{d_p \sin \phi}{2} \quad r_2 = \frac{d_g \sin \phi}{2} \quad (33.27)$$

dove d_p e d_g sono i diametri delle primitive del pignone e della ruota rispettivamente.

Il 2° termine sotto la radice a destra della (26) può essere riscritto come

$$\frac{1/r_1 + 1/r_2}{\cos \phi} = \frac{2/d_p + 2/d_g}{\cos \phi \sin \phi} = \frac{1}{d_p I} \quad (33.28)$$

essendo I il *fattore geometrico* adimensionale dato da

$$I = \frac{\sin \phi \cos \phi}{2} \frac{R}{R+1} \quad R = d_g/d_p \quad (33.29,30)$$

Il 3° termine sotto radice contiene quattro costanti elastiche, due per il pignone e due per la ruota; al fine di utilizzare comodi dati già tabulati per varie combinazioni di materiali, si definisce il coefficiente elastico C_p come:

$$C_p = \sqrt{\frac{1/\pi}{\frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}}} \quad (33.31)$$

Infine, introducendo le (27-28) e la (31) nella (26), si ottiene:

$$p_{\max} = C_p \sqrt{\frac{1}{d_p I} \frac{F_t}{b}} \quad (33.32)$$

Formule finali per il calcolo delle ruote dentate

Le formule ottenute devono essere modificate con appositi coefficienti per tenere conto di vari effetti che si manifestano durante l'utilizzazione. Poiché le sollecitazioni sono di fatica anche le tensioni ammissibili di fatica devono essere dedotte da quelle del materiale con opportuni fattori correttivi.

Fattori correttivi delle tensioni agenti

Tipicamente le (24) e (32) vengono moltiplicate per opportuni coefficienti maggiori dell'unità consigliati da normative (tipo le AGMA americane) e/o suggeriti dai fabbricanti; ad esempio nel modo seguente

$$\sigma = \frac{1}{mJ} \frac{K_o K_m F_t}{K_v b} \quad P_{\max} = C_p \sqrt{\frac{1}{d_p I} \frac{K_o K_m F_t}{K_v b}} \quad (33.33,34)$$

introducendo i seguenti coefficienti:

- K_v fattore dipendente dalla dinamica di applicazione del carico e dipendente dalla velocità V misurata sulla primitiva in m/s, calcolabile come

$$K_v = \frac{6.1}{6.1 + V} \quad (33.35)$$

- K_o fattore di sovraccarico dipendente dalla irregolarità nell'applicazione della coppia motrice, fornito con tabella ($K_o=1.00 \div 2.25$),
- K_m fattore di montaggio dipendente dalla precisione di allineamento, dipendente dai supporti dell'albero (cuscinetti) e dalla precisione delle ruote, fornito con tabella ($K_m=1.00 \div 2.5$).

Fattori correttivi delle tensioni ammissibili

La tensione ammissibile per la flessione si ottiene modificando σ_f con gli appositi coefficienti:

$$\sigma_{amm} = k_a k_c k_d k_e \sigma_f \quad (33.36)$$

- k_a è il fattore di finitura superficiale relativo al raccordo alla base del dente (tipicamente finitura alle macchine utensili),
- k_c è il fattore relativo al gradiente di tensione ($k_c=1.0$ per $m < 0.2$, $k_c=0.85$ per $m \geq 0.2$),
- k_d è il fattore relativo alla temperatura di esercizio ($k_t=1.0$ per $T < 120^\circ$, riferirsi a tabelle per $T > 120^\circ$),
- k_e è il fattore relativo all'affidabilità (intesa come percentuale di ruote che sopravvivono al numero di cicli richiesto per il carico assegnato); è fornito in forma di tabella e decresce al crescere dell'affidabilità richiesta.

Per quanto concerne la pressione di hertz ammissibile, se non si hanno curve di fatica superficiale che forniscano la σ_{lc} al variare del numero di cicli N per il materiale utilizzato o la ruota, la tensione ammissibile si ottiene modificando il valore σ_{lc} disponibile del materiale (vedi eq.9.18) con appositi coefficienti:

$$P_{amm} = C_{Li} C_R \sigma_{lc} \quad (33.37)$$

- C_{Li} è un fattore dipendente dal numero di cicli di vita richiesto rispetto al valore relativo ad σ_{lc} , fornito mediante un diagramma in funzione di N ,
- C_R è un fattore relativo all'affidabilità; $C_R=1.25$ per affidabilità del 50%, $C_R=1.00$ per affidabilità del 99%, $C_R=0.80$ per affidabilità del 99,9%.

APPENDICE**A1. Il fattore Y**

Come già detto il coefficiente Y dipende dalla geometria del dente, cioè dal profilo dell'evolvente, e può essere posto in riferimento al punto a della figura; dalla similitudine dei triangoli si può scrivere:

$$\frac{t/2}{x} = \frac{h}{t/2} \quad \text{da cui} \quad \frac{t^2}{h} = 4x; \quad (\text{A.1})$$

la formula della tensione diventa

$$\sigma = \frac{3}{2x} \frac{F_t}{b}; \quad (\text{A.2})$$

ponendo $y=2x/3p$ si può scrivere

$$\sigma = \frac{3p}{2x} \frac{1}{p} \frac{F_t}{b} = \frac{1}{y} \frac{1}{p} \frac{F_t}{b} \quad (\text{A.3})$$

e, in definitiva, si ottiene:

$$\sigma = \frac{1}{p y} \frac{F_t}{b} \quad (\text{A.4})$$

In essa y prende il nome di fattore di forma adimensionale di Lewis e può essere ottenuto per via grafica o analitica. Questa equazione può essere scritta usando il passo diametrale $P=\pi p$ piuttosto che quello circonferenziale; ponendo $Y=\pi y$ si ottiene:

$$\frac{1}{p y} = \frac{\pi}{\pi p y} = \frac{P}{Y} = \frac{1}{m Y} \quad (\text{A.5})$$

da cui

$$\sigma = \frac{1}{p y} \frac{F_t}{b} = \frac{P}{Y} \frac{F_t}{b} = \frac{1}{m Y} \frac{F_t}{b} \quad (\text{A.6})$$

con:

$$Y = \pi y = \frac{2x}{3} P = \frac{2x}{3} \frac{1}{m} \quad (\text{A.7})$$

Y può essere calcolato tramite la (7) oppure ottenuto graficamente.