Le scelte del consumatore

L. Balletta S. Modica 2023

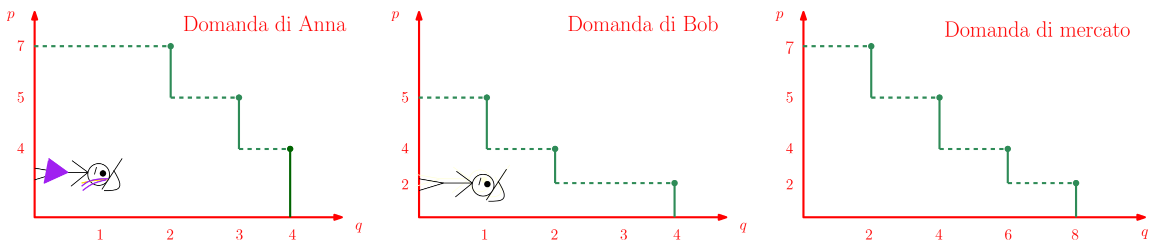
Nel capitolo precedente abbiamo visto come interagiscono domanda e offerta nel mercato di un bene. Adesso guarderemo più da vicino al lato della domanda, cioè alle scelte dei consumatori che ci stanno dietro. Abbiamo detto che la domanda di un bene dipende, oltre che negativamente dal prezzo del bene, dalle preferenze dei consumatori, dal loro reddito e dai prezzi degli altri beni; in questo capitolo approfondiremo questo. Concretamente la questione è: in che modo un consumatore deve allocare il suo reddito nell'acquisto dei vari beni per massimizzare l'utilità che deriva dal loro consumo? Lo studio del problema, oltre a mettere in luce i principi generali che devono guidare le scelte di consumo (e risparmio), confermerà che le domande dei vari beni sono decrescenti, ma con qualche eccezione. Cominceremo tralasciando i "dettagli tecnici", che sono esposti alla fine (sezione 5). Dopo aver studiato il problema di scelta del consumatore possiamo tornare sul risultato di efficienza dei mercati competitivi; lo enunceremo, in modo generale per economie di scambio, in appendice (sezione 7).

Indice del capitolo

1 Come arriva Anna alla sua funzione di domanda?

Ti ricordi Anna e Bob della figura 1.1 qui sotto? Parleremo ancora di loro e della loro domanda. Li abbiamo lasciati al mercato delle arance, c'era il banditore che faceva scendere il prezzo, a $p = 7$ Anna si impegnava a comprare due unità, poi a $p = 5$ Bob ne chiedeva altre due, eccetera. Che conti facevano per arrivare a queste scelte?

Figura 1.1: La quantità domandata sul mercato è somma di quantità individuali



Salutiamo Bob e restiamo con Anna. Sopra $p = 7$ resta zitta e a sette chiede 2. Perché? Okay: gusti e budget. Ma vediamo più nel dettaglio. Evidentemente sopra sette preferisce comprare mandarini, o preferisce conservarsi i soldi per posate che le mancano, o comprare una maglietta, o chissà cos'altro. La verità è che noi l'abbiamo vista all'asta del mercato delle arance, ma lei contemporaneamente era alle aste di un sacco di altri mercati! In effetti, *Anna è nei mercati di tutti i beni che le interessano.* Deve considerare tutto insieme per decidere su ogni particolare, da questo non si scappa - lo fai anche tu quando sei al supermercato: guardi in giro i prezzi dei beni che ti interessano, e cosa metti nel carrello dipende anche da cosa dovrai comprare per esempio in farmacia, eccetera eccetera. Ingrandiamo allora sul problemone di Anna e guardiamo più da vicino. Assumeremo che Anna sia in un mercato competitivo. Questo come sappiamo vuol dire che non può influenzare il prezzo. In questo contesto lo reinterpretiamo nel senso che *non può influenzare nessun prezzo*: ha di fronte offerta perfettamente elastica per ogni bene, quindi considera i prezzi come dati esogenamente.

Dunque date le sue preferenze, il suo reddito e i prezzi di mercato, *deve scegliere fra panieri di beni*: tante arance, tanta benzina... Supponendo che vi siano n beni possiamo allora rappresentare un paniere come un punto/vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$: x_1 unità del primo bene, x_2

unità del secondo e così via. E anche i prezzi sono punti $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$: il primo bene ha prezzo p_1 eccetera. Il suo reddito è $m > 0$.[1]

1.1 Preferenze: la funzione di utilità

Prima di tutto le preferenze: Anna *è definita* dalle sue preferenze. È caratterizzata dal fatto che preferisce un paniere x a un altro $y = (y_1, \dots, y_n)$ che magari invece a Bob piace di più. Come rappresentiamo le preferenze di Anna su tutte le possibili coppie di panieri x ed y? Molto semplicemente con una funzione di utilità $u\colon x \mapsto u(x)$. Anna preferisce x ad y se $u(x) > u(y)$.[2] Sulla funzione di utilità *assumeremo* fondamentalmente due cose (oltre alla derivabilità quante volte si vuole):

- (A1) Ognuno dei beni di cui si parla è gradito, se ne ho di più sto meglio. Formalmente, $u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) > u(x)$ per ogni x, i ed $h > 0$. Per inciso, per questo è sufficiente che $\partial u/\partial x_i \equiv u_i > 0$ (teorema di Lagrange), che assumeremo.

- (A2) Per ogni coppia di beni i, j se x_i sale ed x_j scende - consumo di più di i e meno di j - l'utilità marginale di i scende relativamente a quella di j, cioè u_i/u_j scende. Intuitivamente, se ho un sacco di vino e poco pane, per un bicchiere di vino in più non darei via una briciola, mentre se ho un sacco di pane e niente vino per un bicchierino darei via un bel po' di pane. Su questo saremo più precisi nella sezione 2.3.1.

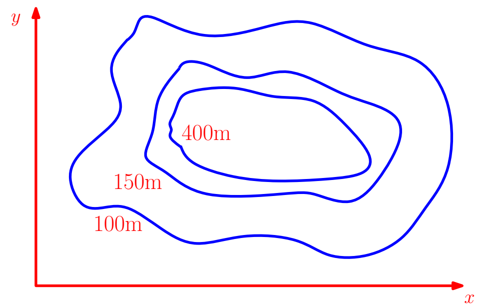
Osservazione importante: il ruolo della funzione di utilità è quello di rappresentare le preferenze del soggetto; quindi se u rappresenta certi gusti altrettanto fa per esempio $10u$ - perché $10u(x) > 10u(y) \iff u(x) > u(y)$. Più in generale qualunque trasformazione monotona di u funziona uguale, cioè se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è crescente $g(u(x))$ rappresenta le stesse preferenze di u.

Che aspetto ha una funzione di n variabili? Per n generale ovviamente non lo possiamo sapere perché il suo grafico sta nello spazio ad $n+1$ dimensioni (come il grafico delle funzioni di una variabile sta in $\mathbb{R}^2$). Il massimo che possiamo visualizzare è $\mathbb{R}^3$, dove stanno grafici di funzioni di due variabili.

Visualizzare questi grafici è fondamentale. Esempi sono il tetto dell'aula, una zuppiera, la superficie di una montagna, una lastra di vetro, eccetera. Prendi per esempio la montagna. Ti serve capire com'è perché ci vuoi andare a fare trekking. Che fai, ti compri un plastico in 3D e te lo metti nello zaino? No. Ti compri una cartina in 2D e *capisci tutto dalla mappa dalle curve di livello.* Nel caso di una montagna saranno curve chiuse come nella figura qui sotto, dove vediamo che la montagna sale dolcemente dai 100 ai 150 (le due curve sono lontane) e poi molto più ripida dai 150 ai 400 (curve vicine). Nota che per semplificare la lettura nel caso di due variabili invece di usare x_1, x_2 possiamo usare x ed y così non ci portiamo dietro sottoscritti.

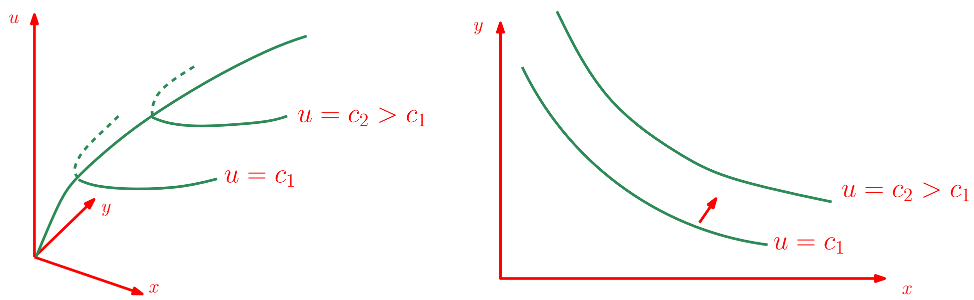
[1] Vedi *Geometria della tangenza* (d'ora in poi *GdT*) per i dettagli su $\mathbb{R}^n_+$, funzioni di più variabili, derivate parziali, tangenza eccetera.

[2] Quando (se...) studierai le preferenze in modo più approfondito vedrai che la rappresentazione "primitiva" è una relazione binaria $\succeq$ che si interpreta leggendo $x \succeq y$ come "x è preferito ad y". Questa deve avere delle proprietà per poter essere rappresentata da una funzione di utilità. Per farti un'idea, deve essere transitiva: $x \succeq y$ & $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$. Questa è naturale, ma se non è soddisfatta se ci pensi non esiste u che la rappresenta - perché $u(x) \geq u(y)$ & $u(y) \geq u(z) \Rightarrow u(x) \geq u(z)$.



Tornando al consumo, nota che due variabili significa che nel mondo ci sono soltanto due beni, le cui quantità stiamo indicando con x ed y.[3] Il caso dell'utilità $u(x, y)$ è diverso dalla montagna in un aspetto cruciale: man mano che ci si allontana dall'origine la u diventa sempre più alta, perché aumentano le quantità dei beni e Anna è più contenta. Il suo grafico è come una montagna che continua sempre a salire. Vedi figura 1.2 parte sinistra: *le curve di livello più lontane dall'origine corrisponderanno a livelli di u più alti.*

Figura 1.2: La funzione u e la sua mappa di indifferenza



Che forma hanno queste curve di livello? Facciamo prima mente locale su cosa rappresentano. Intanto sono insiemi di punti (ovvero panieri di beni); una curva di livello al livello $c \in \mathbb{R}$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = c\}$.[4] Dunque per definizione i panieri su una curva di livello di u danno tutti la stessa utilità; cioè, *il consumatore u è indifferente fra i panieri su una curva di livello.* Non sarai quindi sorpreso di sapere che si chiamano "curve di indifferenza". Andiamo alla loro forma. Dall'assunzione di monotonia di u segue che le curve di indifferenza devono essere *decrescenti*, come nella parte destra della figura. Questo lo possiamo dimostrare in mezzo rigo: prendi sulla curva di livello u due punti $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ e supponi che $x' > x$; se fosse $y' \geq y$ avremmo $u(x', y') \geq u(x', y) > u(x, y)$; quindi poiché $u(x', y') = u(x, y)$ deve essere $y' < y$. Vedremo fra un po' che l'altra assunzione su u - quella su u_i/u_j - implica che le curve di indifferenza sono *convesse* (come nella figura).

1.2 Prezzi, valore e vincolo di bilancio

Date le sue preferenze, Anna deve decidere cosa consumare in base a prezzi e reddito. I prezzi determinano le possibilità di scambio. Più precisamente, un sistema di prezzi $(p_1, \ldots, p_n)$ descrive gli scambi possibili se a quei prezzi due panieri $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ed $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono scambiabili se hanno lo stesso *valore*, nel senso che $\sum_i p_i x_i = \sum_i p_i y_i$. Nota che il valore di un

[3] Useremo x ed y anche per indicare il nome dei beni: "bene x, bene y".
[4] Lo stesso discorso vale in $\mathbb{R}^n$: la curva di livello $c \in \mathbb{R}$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = c\}$.

paniere x è definito in modo del tutto naturale: x_1 unità del bene 1 valgono p_1x_1, x_2 unità del bene 2 valgono p_2x_2, eccetera, quindi x vale $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i$. Assumeremo che i prezzi siano tutti strettamente positivi (per evitare divisioni per zero).

Prendi in particolare un paniere contenente soltanto 1 unità del bene i e un altro contenente soltanto y_j unità del bene j (tutte le altre coordinate siano zero). Dalla definizione segue che questi due panieri sono scambiabili se $p_i \cdot 1 = p_jy_j$ cioè $y_j = p_i/p_j$; dunque una unità del bene i è scambiabile con p_i/p_j unità del bene j. Questo dice che se $(p_1, \ldots, p_n)$ sono i prezzi di mercato, *p_i/p_j è il prezzo del bene i in termini del bene j.* I prezzi relativi sono quello che conta: quando fai la spesa se le arance ti sembrano care è perché pensi "aspetta, con un chilo di arance ci vengono due chili di mandarini" - cioè pensi che il prezzo $p_{arance}/p_{mandarini} = 2$ è alto.

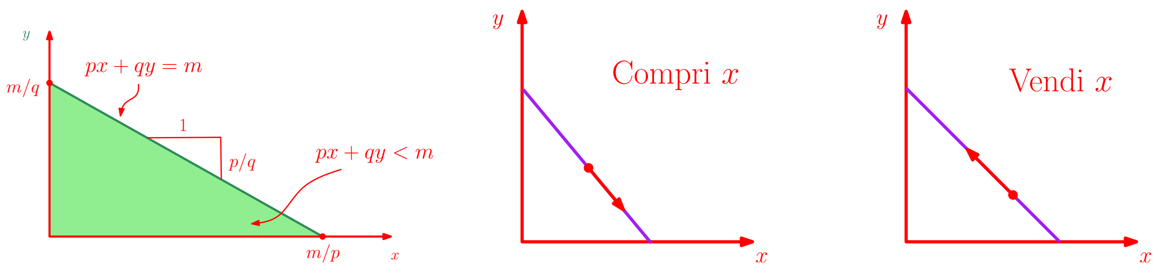
Nota che il fatto che Anna può scambiare una unità del bene i con p_i/p_j unità del bene j vuol dire che p_i/p_j è il valore che *il mercato* dà al bene i (in termini del bene j). Come vedremo questo Anna lo confronterà col valore che dà *lei* ad i; vedremo che baserà le proprie scelte confrontando valori "oggettivi" con valore "soggettivi".

Il reddito di Anna è il valore di cui dispone, che indicheremo con m. Più di tanto non può spendere. Quindi deve rispettare il *vincolo di bilancio $\sum_i p_ix_i \leq m$.*

Il vincolo di bilancio nel caso di due beni

Visualizziamo il caso di due variabili. Le quantità le indicheremo con $x, y \geq 0$, e i prezzi li chiameremo p e q. Quindi il vincolo di bilancio è $px + qy \leq m$. Vedi figura 1.3 a sinistra. È composto dalla *retta* $px + qy = m$ e dalla parte colorata in verdino nella figura, sotto la retta, $px + qy < m$, ma sempre nel primo quadrante.

Figura 1.3: Vincolo di bilancio

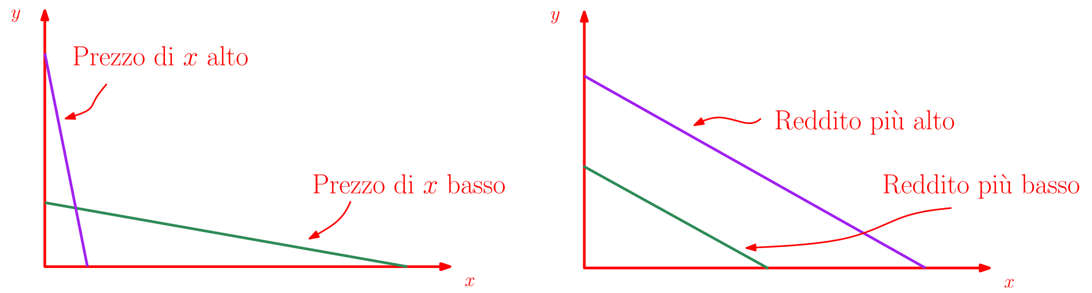


Nota che la pendenza del vincolo $px + qy = m$ è (in valore assoluto) p/q, cioè il prezzo di x in termini di y; vedi figura 1.3 sinistra. Rimanendo sul vincolo (cioè a spesa invariata) si può comprare una unità di x in cambio di p/q unità di y. Spostandoti lungo il vincolo compri o vendi x in cambio di y - in figura centro e destra.

Nota anche i due punti di angolo nel pannello sinistro della figura 1.3: se compri solo x ne puoi comprare al massimo m/p unità; se compri solo y ne puoi comprare m/q. Tieni presente infatti che se un bene costa p con una spesa di 1 ne compri $1/p$ unità, quindi con una spesa di m ne compri $m \cdot (1/p)$ unità.

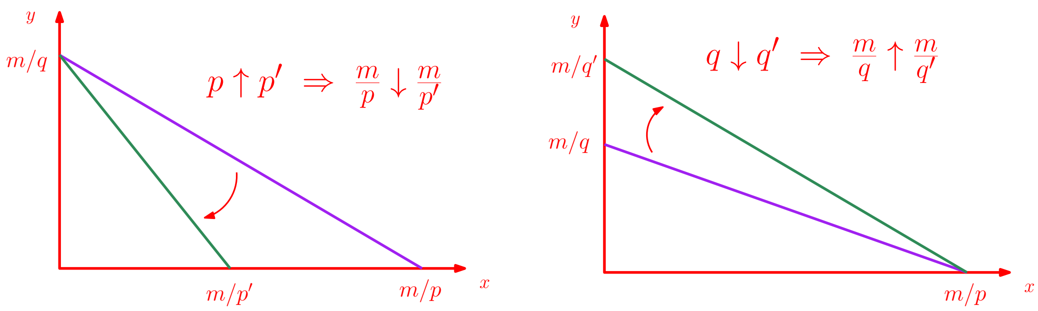
La posizione del vincolo dipende da m e p/q. La pendenza misura il valore di x, quindi vincolo ripido vuol dire prezzo di x alto (sempre in termini di y). Vedi figura 1.4 sinistra. Variazioni di m, che lasciano la pendenza invariata, generano traslazioni parallele del vincolo, con valori più alti di m corrispondenti a vincoli più lontani dall'origine; vedi parte destra della figura.

Figura 1.4: Posizione del vincolo



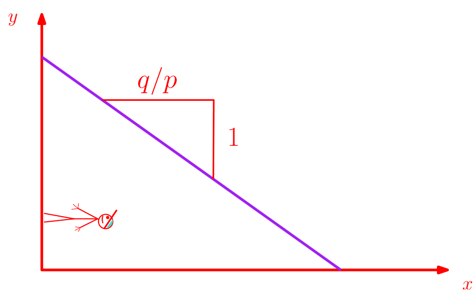
Quando si muove un solo prezzo il vincolo ruota intorno al punto in cui la quantità del bene corrispondente è zero. Per esempio se cambia p la massima quantità di y che ti puoi comprare resta m/q. La figura 1.5 illustra a sinistra il caso $p \uparrow p'$ e a destra il caso $q \downarrow q'$. Ovviamente nel primo caso il vincolo si contrae, nel secondo si espande.

Figura 1.5: Variazioni di un prezzo



Osservazione (Il prezzo di y). Se ti metti sull'asse y vedi una retta di pendenza q/p che è il prezzo di y in termini di x, vedi la figura 1.6. Il discorso dovrebbe essere chiaro: se con un'unità di x compri 3 unità di y, cioè $p/q = 3$, con un'unità di y compri 1/3 di unità di x, cioè $q/p = 1/3$.

Figura 1.6: Prezzo di y

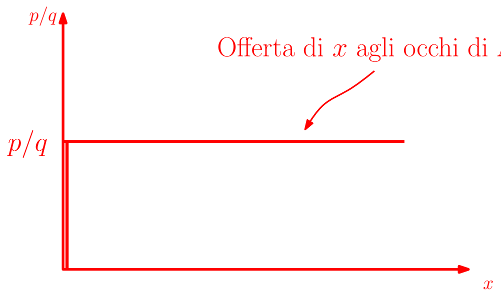


Esempio. Un esempio con i numeri può essere utile. Supponi che Anna ha 25 Euro che spende interamente per comprare 5 chili di ciliegie (prezzo al chilo 3 Euro) e 5 chili di mele (prezzo al chilo 2 Euro). Se Anna vuole comprare un chilo in più di ciliegie, a quanti chili di mele deve rinunciare (cioè, quanti chili ne deve vendere) se vuole continuare a spendere 25 Euro in totale? Risposta: il prezzo delle ciliegie in termini di mele è 3/2, quindi deve rinunciare a un chilo e mezzo di mele. Verifica: se in effetti Anna compra $5+1=6$ chili di ciliegie e $5-1.5=3.5$ chili di mele spende ancora $6 \cdot 3 + 3.5 \cdot 2 = 25$ euro.

Linearità del bilancio = concorrenza dal lato dei compratori

Anna può comprare 2 unità di x pagando $2(p/q)$ unità di y, 3 unità di x pagando $3(p/q)$ unità di y eccetera; cioè a prezzo relativo p/q Anna può scambiare qualunque quantità di x sul vincolo di bilancio. E questo vuol dire che la curva di offerta che ha di fronte è perfettamente elastica - vedi figura 1.7. *La conclusione che è che la linearità del vincolo di bilancio equivale all'assunzione che c'è concorrenza dal lato dei compratori.* Nota che a prezzo inferiore a quello di mercato l'offerta è zero: Anna non potrebbe comprare a prezzo inferiore perché ci sarebbe un'altra Anna pronta a pagare il prezzo di mercato.

Figura 1.7: Vincolo di bilancio lineare = Concorrenza perfetta (lato domanda)



Il contesto normativo

Osservazione banale ma cruciale: perché il consumatore deve rispettare il vincolo di bilancio? La risposta è semplice: non rispettarlo vorrebbe dire rubare, e stiamo assumendo che se ruba viene condannato a una pena che non è disposto a subire. Dunque i mercati che studiamo operano entro un contesto in cui ci sono norme e istituzioni che le fanno rispettare. Per inciso, scrivere norme e farle rispettare costa, e questo è uno dei motivi per i quali esistono le tasse. Ovviamente esistono anche i ladri (e non solo ladri di mele), che non rispettano i vincoli di bilancio perché sono disposti a rischiare le relative condanne, ma studiare il loro problema di scelta sarebbe anche interessante ma più complicato, e noi non lo faremo.

Puntini sulle i: reddito e moneta

In che unità di misura è espresso il reddito m? Se abbiamo parlato di Euro lo abbiamo fatto (e continueremo a farlo) per comodità, ma impropriamente. Nell'economia in cui vivono i consumatori di cui stiamo parlando *non c'è moneta*, ci sono solo gli n beni di cui sopra. Il valore m è in realtà il valore del paniere di cui Anna dispone inizialmente, che può scambiare con altri panieri di valore non superiore. Vista così - cioè se $m = \sum_i p_i x_i^0$ con $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$ paniere in dotazione - se moltiplichiamo tutti i prezzi per una costante il vincolo resta invariato; quindi potremmo per esempio usare $\tilde{p} = p/p_1$ moltiplicando tutti i prezzi per $1/p_1$ riducendo il prezzo del primo bene ad 1, in modo che quello faccia da unità di conto (in quanto a quel punto tutti i prezzi sarebbero espressi in termini del bene 1 perché $\tilde{p}_i = p_i/p_1$).

Ma uno dei beni non può essere l'Euro? La risposta è *no.* Prendi il caso di due beni e immagina che uno sia Mele e l'altro Euro, e supponi di non avere Euro ma solo mele; quante ne daresti in cambio di un Euro? Se ci pensi, la risposta è esattamente *zero.* Altrimenti ti ritroveresti con meno mele da mangiare e un mucchio di pezzi di carta. E cosa te ne fai di questi pezzi di carta? Ci compri altri beni? No, ci sono solo mele. Se ci ripensi e torni da quello che te li ha dati in cambio delle mele ti risponde stai fresco! Il punto è delicato, ma se ci pensi è ovvio. La moneta non ha utilità in sé, nella realtà la tieni perché sai che la potrai usare in futuro per comprare altri beni, e pensi che sarà accettata perché chi la accetta a sua volta penserà che la potrà usare, e così via all'infinito. Esattamente *all'infinito*: per giustificare la presenza della moneta nell'economia dobbiamo avere un modello di un'economia con *infiniti* periodi (che è ovviamente al di là di quello che possiamo fare qui). Perché se il mondo finisse al tempo T nessuno ovviamente vorrebbe moneta a T; ma allora nessuno ne vorrebbe a $T-1$ perché ci resterebbe fregato il periodo successivo; ma allora neanche a $T-2$... e neanche oggi. Continueremo dunque a studiare una semplice economia di baratto.

Osservazione. Nell'analisi che segue considereremo variazioni dei prezzi *dato il reddito* m. Se $m=\sum_i p_i x_i^0$, quando un prezzo cambia in generale cambia anche m. Per giustificare le nostre derivazioni assumeremo che la dotazione x^0 consista di un bene il cui prezzo non cambia. Per semplicità di notazione non lo includeremo come argomento della funzione u.

1.3 Il problema di scelta

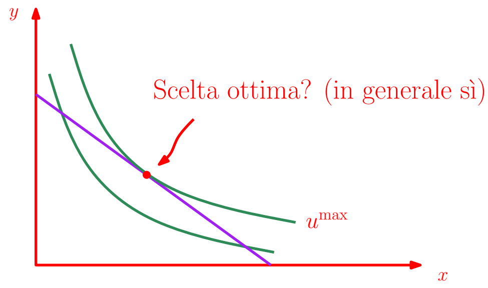
È il "problemone" di cui parlavamo. Date le sue preferenze, Anna deve scegliere contemporaneamente le sue domande di tutti i beni in funzione di tutti i prezzi (e del suo reddito). Obiettivo? Raggiungere la maggior soddisfazione/utilità possibile nel rispetto del vincolo di bilancio. Quindi formalmente il problema è: massimizza $u(x)$ scegliendo $x \in \mathbb{R}^n_+$ tale che $px \leq m$. Date le preferenze *la soluzione del problema dipende da* p *e da* m, che sono i parametri che definiscono il contesto in cui il consumatore sceglie, e la indicheremo perciò con $x(p,m)$. *Questa è alla base delle alzate di mano di Anna alle varie aste*: dato m, per ogni p Anna comunica la sua scelta $x(p,m)$. Come si risolve il problema dobbiamo impararlo, vedremo che è meno complesso di quanto possa sembrare.

Intanto osserviamo che la monotonia di u implica che la soluzione sta *sul* vincolo: non può essere che un x con $px < m$ sia scelta ottima, perché per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo il paniere x' con $x'_i = x_i + \epsilon$ sta ancora nel vincolo - cioè $px' \leq m$ - e d'altra parte essendo un paniere più ricco di x avremo $u(x') > u(x)$. Ciò contraddice l'ottimalità di x. Possiamo allora concentrarci a cercare la soluzione sul vincolo, cioè in effetti *il problema è il seguente:*

$$\text{massimizza } u(x) \text{ sull'insieme } \{x \in \mathbb{R}^n_+ : px = m\} \tag{PC}$$

La soluzione è $x(p,m)$. Per inciso: se si spende tutto il risparmio dov'è? Aspetta che arriva, nell'esempio sulla scelta intertemporale a pagina 20. Tornando al caso di due variabili riguardiamo le figure 1.2 e 1.3: vogliamo stare su curve di indifferenza più alte possibili (direzione alto-destra per salire) ma dobbiamo restare dentro il vincolo. Sembra proprio che la curva più alta debba essere tangente al vincolo, come nella figura 1.8. Come vedremo, così è "tipicamente".

Figura 1.8: Curva e vincolo tangenti



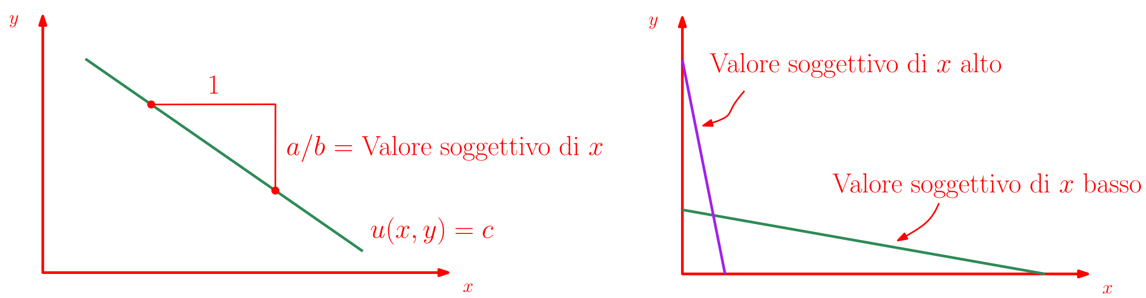
2 La scelta con due beni

Studieremo nel dettaglio la scelta con due beni perché visualizzando è tutto più facile, e tutto sommato i principi fondamentali emergono già in questo caso particolare. Procederemo senza badare troppo ai dettagli formali, poi quando nella sezione 5 metteremo nero su bianco dimostreremo quasi tutto quello che c'è da dimostrare direttamente per il caso generale.

2.1 Utilità lineare: valore soggettivo e valore di mercato

Per due beni useremo come prima (x, y) e (p, q) per quantità e prezzi. Cominciamo dal caso di $u(x, y) = ax + by$. Le curve di indifferenza sono del tipo $ax + by = c$ con $c \in \mathbb{R}$, quindi sono rette con pendenza a/b (in valore assoluto).[5] Vedi figura 2.1 sinistra: se x aumenta di 1, lungo la curva y scende di a/b. Cioè: per avere una unità in più di x sei disposto a pagare a/b unità di y. In altre parole *la pendenza a/b della curva di indifferenza è il valore soggettivo di x,* il valore che x ha nelle tue preferenze (in termini di y). Più ripida è la curva di indifferenza più alto è il valore che dai ad x. Nota che $a/b = u_x/u_y$, quindi la pendenza delle curve di indifferenza (in valore assoluto) è u_x/u_y. Come vedremo lo stesso vale per le u non lineari.

Figura 2.1: Valore soggettivo di x

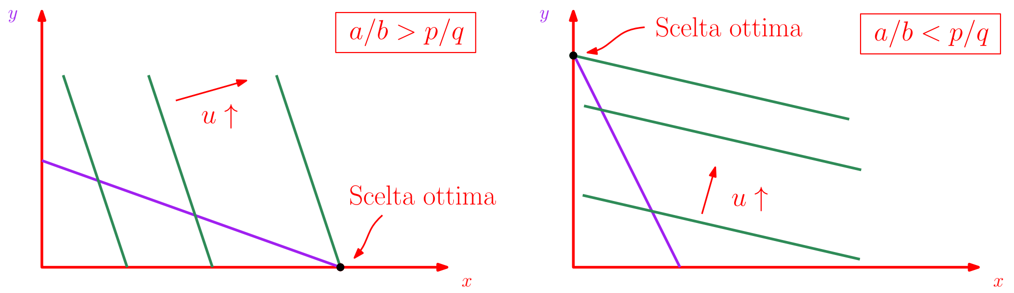


Il problema di scelta è rappresentato nella figura 2.2. La soluzione è chiara dal punto di vista geometrico: vuoi raggiungere la curva di indifferenza più alta, quindi nel caso raffigurato a sinistra compri x finché puoi; nel caso raffigurato a destra vendi x finché puoi. Più interessante per noi, *la soluzione è chiara dal punto di vista economico:* nel caso a sinistra il valore che ad x dai tu è più alto del valore che gli dà il mercato (che come sappiamo è rappresentato dalla

[5] Nota che avendo assunto che tali curve sono convesse il presente è un caso limite: dell'infinità di curve convesse che esistono solo una è retta, quindi il caso è tutt'altro che tipico. Tuttavia è fondamentale perché tutte le curve localmente sono rette (come l'orizzonte dalla spiaggia che è curvo ma lo vedi retto); il suo studio sarà istruttivo.

pendenza del vincolo di bilancio), quindi *compri* x; nel caso di destra il valore di mercato di x è maggiore del valore che ha per te, quindi *vendi.*

Figura 2.2: Scelta con utilità lineare

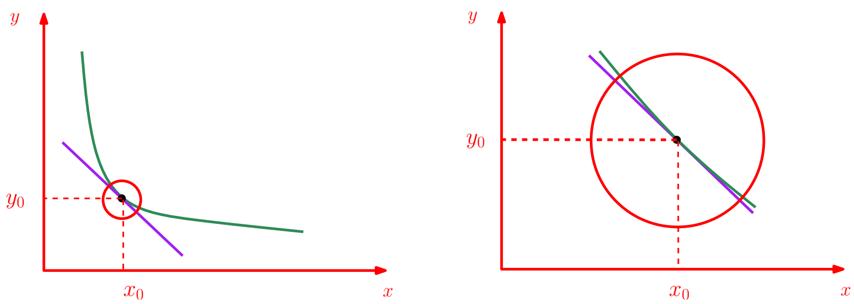


Cosa farà Anna alle aste di x ed y se le sue preferenze sono lineari? Deve rispondere a ogni coppia di prezzi (p, q), e in questo caso la scelta è quella raffigurata nella figura 2.2: se $p/q < a/b$ allora sottoscrive $x = m/p, y = 0$; se $p/q > a/b$ dirà $x = 0, y = m/p$; se infine $p/q = a/b$ sarà indifferente fra ogni allocazione di m fra i due beni.

2.2 Utilità non lineare e valore soggettivo locale

Che succede se le curve di indifferenza di u non sono lineari, come nella figura 1.2? La risposta è che *tutto quello che abbiamo detto finora vale localmente.* Il punto è che qualunque curva, ingrandita abbastanza in un intorno di un punto, è approssimativamente una retta. La figura 2.3 dà l'idea.

Figura 2.3: Tangenza e approssimazione

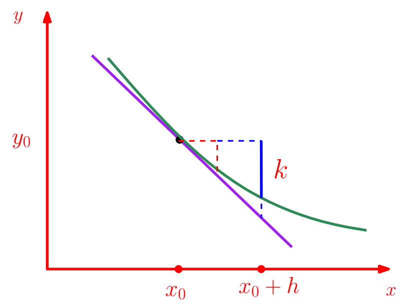


2.2.1 Il valore soggettivo locale

In particolare *la pendenza di una curva di indifferenza in un punto darà il valore soggettivo locale di x,* locale nel senso di valido approssimativamente per piccole variazioni a partire dal punto; vedi figura 2.4.

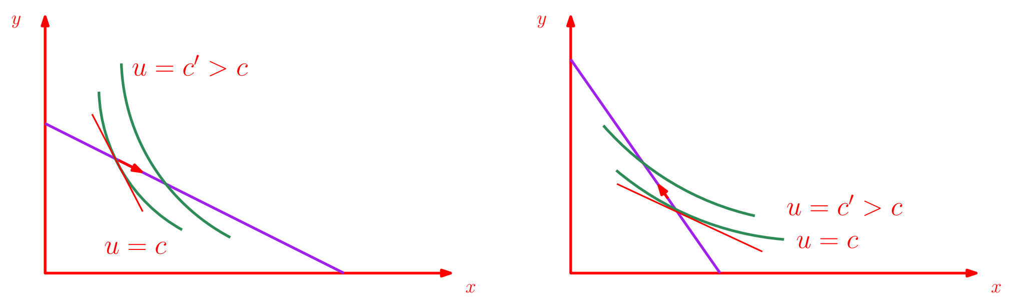
Nota le due restrizioni: primo parliamo di *piccole variazioni*, perché se ci si allontana significativamente dal punto la variazione lungo la tangente si discosta significativamente dalla variazione lungo la curva (che è quella che misura il valore soggettivo); nella figura il valore di h unità aggiuntive di x è k - la variazione lungo la curva - che in generale si allontana dall'incremento lungo la tangente al crescere di h. Secondo, per quanto restiamo vicini al punto la differenza fra curva tangente c'è sempre, piccola per quanto sia, quindi dobbiamo parlare di

Figura 2.4: Approssimazione e valore locale



valore *approssimato.* D'altra parte, come nel caso delle tangenti delle funzioni di una variabile questo errore tende a zero "velocemente" (saremo più precisi fra un po'), e come nel caso delle funzioni di una variabile i test sulle tangenti saranno sufficienti a guidare le scelte.[6] *Per la precisione:* se in un punto il valore soggettivo locale è maggiore del valore di mercato, come a sinistra nella figura 2.5, almeno per piccole quantità ti conviene comprare; se viceversa come nel pannello destro il valore per te è inferiore a quello di mercato se vendi un po' l'utilità aumenta.

Figura 2.5: Valore soggettivo locale e prezzo di x



La dimostrazione di questo è nella sezione 5, per ora è più importante registrarne la seguente semplice conseguenza:

Se in un punto interno al vincolo (cioè con $x, y > 0$) c'è un massimo, allora il valore soggettivo locale di x deve essere uguale al suo prezzo, cioè curva di indifferenza e vincolo devono essere tangenti.

Dimostrazione: se così non fosse ti converrebbe spostarti, cosa che potresti fare essendo in un punto interno. Vedremo presto come questo risultato aiuta a risolvere il problema di scelta.

Osservazione. Pensa al valore soggettivo di y. Per vederlo ti devi mettere sull'asse y (come per il suo prezzo, vedi figura 1.6). Per esempio nel caso del pannello sinistro della figura 2.5 qui sopra il valore soggettivo di y (la pendenza della curva vista dall'asse y) è più basso del suo prezzo q/p (pendenza del vincolo vista da lì), quindi vuoi venderlo.

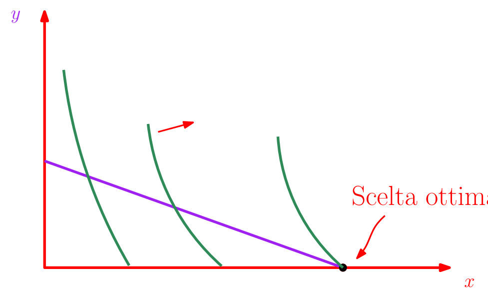
Nota bene. Il nome che si dà di solito a quello che noi abbiamo chiamato valore soggettivo è *"Saggio marginale di sostituzione"*. A noi non piace il nome "saggio" ma il nome in italiano è giusto, puoi controllare nel vocabolario. Per esempio il prezzo di x in termini di y è il saggio di scambio fra x ed y.

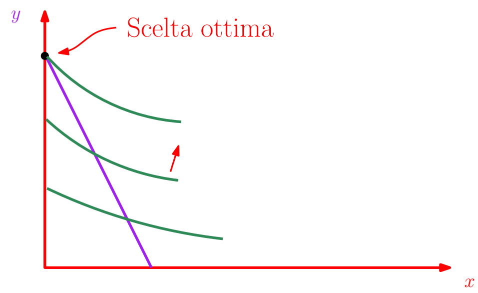
[6] Essenzialmente si sviluppa l'idea del caso univariato che se una funzione ha derivata positiva in un punto allora in quel punto, cioè localmente, è crescente (per $x < x'$ abbastanza vicini al punto $f(x) < f(x')$).

2.2.2 La scelta

Può essere che ti convenga sempre comprare come nel caso lineare della figura 2.2 sinistra, o che come nel pannello destro di quella figura ti convenga sempre vendere. Questi casi sono analoghi a quelli lineari, vedi figura 2.6.

Figura 2.6: Scelte di angolo

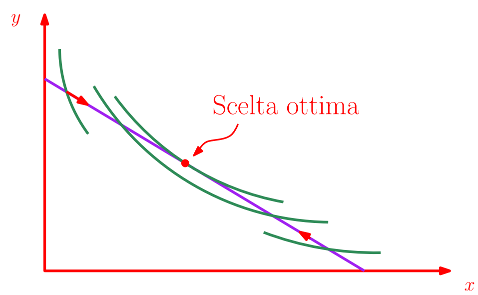




Nota che nel caso in cui la scelta ottima di x è zero il valore soggettivo di x in quel punto è finito (è minore del prezzo di mercato) nonostante che tu stia consumando *zero* di x. Analogamente (mettiti sull'asse verticale) se la scelta ottima di y è zero, in quel punto il valore soggettivo di y è finito (minore del prezzo di y). Se il valore soggettivo di un bene può essere finito quando ne consumi zero possiamo dire che quel bene è *inessenziale.* Possiamo invece parlare di *bene essenziale* quando il suo valore soggettivo tende a infinito se la quantità consumata tende a zero su qualunque curva di indifferenza.

Sotto questo aspetto il caso lineare è estremo: entrambi i beni sono inessenziali. Invece *se entrambi i beni sono essenziali:* per x piccolo abbastanza il valore soggettivo di x sarà maggiore del suo prezzo p/q, quindi vuoi comprare x; e per y piccolo abbastanza il suo valore soggettivo sarà maggiore del suo prezzo q/p quindi vuoi comprare y. Vedi figura 2.7. Dunque il massimo non può che essere interno, e quindi - come abbiamo visto poco fa - in un punto di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo. Confermeremo più formalmente nella sezione 5.

Figura 2.7: Scelta con curve convesse e beni essenziali

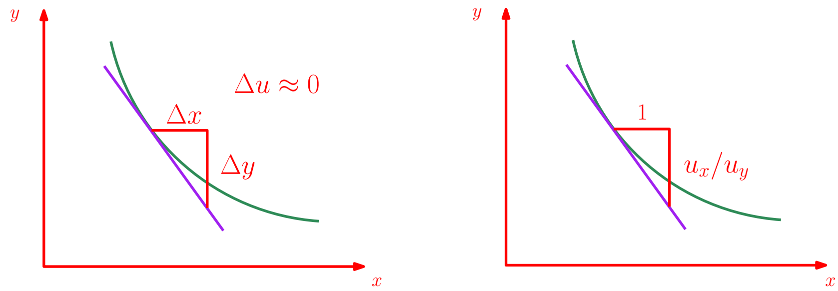


2.3 Come si misura la pendenza di una curva di livello in un punto

Per risolvere in pratica il problema di scelta dobbiamo sapere come misurare la pendenza di una curva di indifferenza, e per farlo l'argomento non rigoroso ma giusto è il seguente. Ricorda che per una funzione f di *una* variabile se x sale di h allora $\Delta f \approx hf'$ (approssimativamente perché prendiamo incrementi lungo la tangente). La stessa cosa vale per funzioni di due variabili *quando ci si sposta lungo un asse,* dove la derivata f' diventa la derivata nella direzione dello spostamento. Per esempio se x varia di Δx avremo $\Delta u \approx u_x \cdot \Delta x$. Supponi ora che $u_x = 10, u_y = 2$; se $\Delta x = 1$ abbiamo $\Delta u \approx 1 \cdot u_x = 10$; quante unità di y ci vogliono per avere lo stesso incremento di utilità? Ce ne vogliono $5 = u_x/u_y$: infatti se $\Delta y = 5$ abbiamo $\Delta u \approx 5 \cdot u_y = 10$; quindi un'unità di x vale (soggettivamente!) u_x/u_y unità di y. Controlliamo: in effetti se $\Delta u \approx 1 \cdot u_x = 10$ con $\Delta y = u_x/u_y$ avremo $\Delta u \approx (u_x/u_y) \cdot u_y = u_x = 10$. La conclusione generale è che *il valore soggettivo locale di x è u_x/u_y.*

Avvicinandoci alla geometria del problema possiamo metterla così - vedi figura 2.8, sinistra. Ricorda che per una funzione di una variabile $f(x)$ l'incremento lungo la tangente è $hf'(x)$ se x si muove di h. Quindi per u - prendendo le derivate nelle due direzioni x e y - se x si muove di Δx l'incremento di u è $\Delta u(\Delta x) \approx u_x \Delta x$ e se y si muove di Δy l'incremento è $\Delta u(\Delta y) \approx u_y \Delta y$. Muovendoci sulla tangente a una curva di indifferenza - orizzontalmente di Δx e verticalmente di Δy - abbiamo un incremento totale $0 \approx \Delta u = \Delta u(\Delta x) + \Delta u(\Delta y) = u_x \Delta x + u_y \Delta y$. Da questo otteniamo $\Delta y/\Delta x \approx -u_x/u_y$. Passando al limite per $\Delta x \to 0$ si ottiene la pendenza $-u_x/u_y$, vedi figura 2.8 destra.

Figura 2.8: Pendenza curva di indifferenza

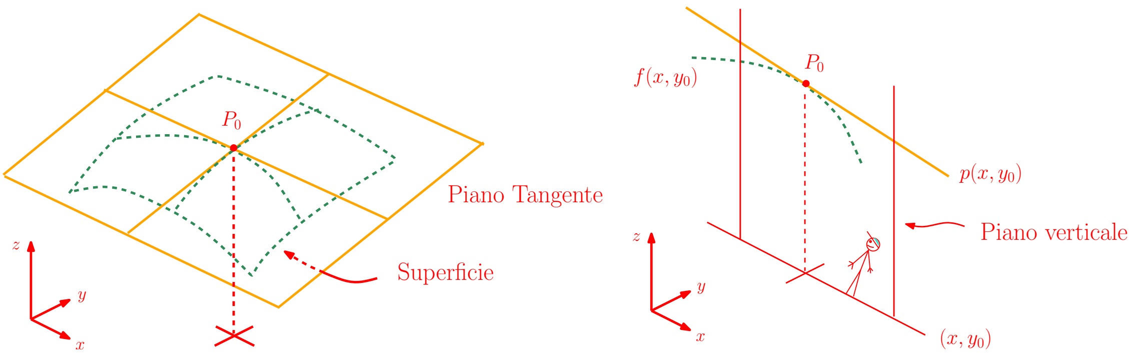


Mettiamo il tutto in 3D. per qualunque funzione $f(x, y)$ con derivate parziali continue in (x_0, y_0), la situazione è la seguente. Useremo la lettera f e parleremo di curve di livello piuttosto che di indifferenza, così ci ritroveremo i risultati quando parleremo di produzione imprese. Per prima cosa dobbiamo vedere qual è il piano tangente a una superficie. Ripasso veloce del caso di una variabile: una retta per (x_0, y_0) è il grafico in $\mathbb{R}^2$ della funzione $r(x) = y_0 + a(x - x_0)$; se x si sposta di Δx la r si sposta di $r(x_0 + \Delta x) - r(x_0) = a\Delta x$; e come ricordato poco sopra la tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza $a = f'(x_0)$; quindi la tangente ad f in x_0 è la retta $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

In $\mathbb{R}^3$, un piano per (x_0, y_0, z_0) è il grafico della funzione lineare che generalizza direttamente la retta: $p(x, y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$; ha due “pendenze” a e b nelle direzioni x ed y, che nota sono le sue derivate parziali: $p_x = a, p_y = b$. Il piano tangente a una curva $f(x, y)$ in un punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è raffigurato nella figura 2.9.

Se parti da (x_0, y_0) e cammini lungo x tenendo y fissato ad y_0 ti ritrovi nella situazione dell'omino nel pannello destro, e vedi due funzioni della sola variabile x: la sezione della funzione, $f(x, y_0)$; e la sezione del piano, $p(x, y_0)$. E sono tangenti, quindi la loro pendenza è contemporaneamente $p_x = a$ ed $f_x(x_0, y_0)$. Lo stesso come puoi immaginare succede lungo y. Conclusione

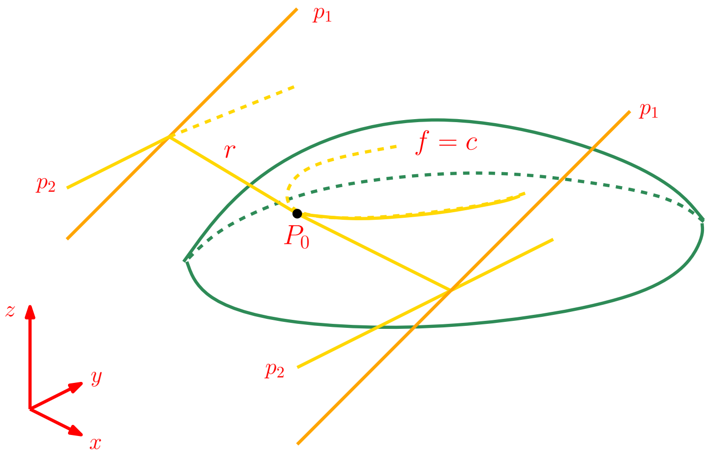
Figura 2.9: Piano tangente



(che in GdT viene dimostrata): il piano tangente ad f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è

$$p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Figura 2.10: Piano tangente e curva di livello



Nella figura sono rappresentati: il grafico di una funzione $z = f(x, y)$; una sua curva di livello, $f = c$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su di essa; il piano tangente alla superficie, p_1; il piano orizzontale p_2 ad altezza c, che contiene la curva di livello $f = c$; e la retta r che è la curva di livello del piano p_1 (intersezione fra p_1 e p_2). La retta r è tangente alla curva $f = c$.

A questo punto, guarda la figura 2.10, *definiamo tangente alla curva di livello $f = c$ in un punto la curva di livello del piano tangente ad f in quel punto.* La curva di livello del piano tangente è $p(x, y) = p(x_0, y_0)$; ma $p(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, quindi (guarda l'espressione di p) è data dall'equazione $f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. È la retta per (x_0, y_0) di pendenza $-f_x(x_0, y_0)/f_y(x_0, y_0)$. La conclusione è dunque quella anticipata sopra:

La pendenza di una curva di livello di una funzione f nel punto (x_0, y_0) è

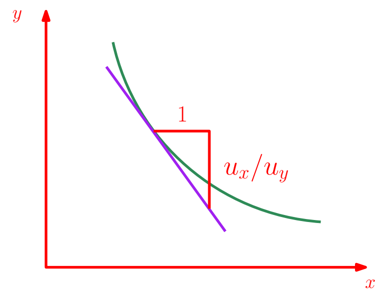
$$-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Nel caso dell'utilità abbiamo confermato che il valore soggettivo locale di x è u_x/u_y.

2.3.1 L'assunzione di convessità delle preferenze

Disegniamo il caso di u da cui siamo partiti nella figura 2.8. L'abbiamo disegnata convessa, e a questo proposito è venuto il momento di precisare l'assunzione (A2) di pagina 3. La nostra assunzione è che *u_x/u_y decresce lungo una curva di indifferenza al crescere di x.* Adesso sappiamo che questo vuol dire che lungo la curva il valore soggettivo di x è decrescente in x. E dal punto di vista geometrico, che la pendenza della curva decresce vuol dire per l'appunto che la curva è *convessa.*

Figura 2.11: Pendenza curva di indifferenza



2.4 Come si risolve il problema di scelta

Possiamo adesso affrontare il problema (PC) di pagina 8, almeno nel caso di due beni. In questo caso il problema è

$$\max u(x, y) \text{ sul vincolo } px + qy = m$$

e per risolverlo possiamo procedere come segue:

1. Verifica se le curve di indifferenza sono convesse. Per questo è sufficiente che u_x/u_y decresca quando x sale ed y scende, che in generale è facile da verificare. Se non è questo il caso vedi sezione 2.7. Se lo sono passa al punto successivo.

2. Verifica se entrambi i beni sono essenziali. Per questo è sufficiente che $u_x/u_y \to \infty$ per $x \to 0$ e $u_x/u_y \to 0$ per $y \to 0$. Se questo è il caso, la soluzione è il punto di tangenza interno al vincolo.[7] Come lo troviamo? Abbiamo due incognite x ed y, ci servono due equazioni. Una è la condizione di tangenza $u_x/u_y = p/q$, l'altra è che il punto si trovi sul vincolo. Dunque la scelta ottima è soluzione del sistema

$$\begin{cases} u_x/u_y = p/q & (TG) \\ px + qy = m & (VB) \end{cases}$$

3. Se uno o entrambi i beni sono inessenziali la soluzione potrebbe essere di angolo. In particolare: se $u_x/u_y > p/q$ su tutto il vincolo la soluzione sarà $x = m/p, y = 0$; se su tutto il vincolo $u_x/u_y < p/q$ la soluzione sarà $x = 0, y = m/q$. Se u_x/u_y passa da sopra p/q a sotto quando x cresce, la soluzione è nel punto di tangenza interno al vincolo come nel caso di beni essenziali.

[7] Questo punto è unico nel caso in cui u_x/u_y è *strettamente* decrescente, come stiamo implicitamente assumendo. Dettagli nella sezione 5.

2.5 Tangenza e utilità marginale della spesa

Torniamo all'idea di base di paragonare valore soggettivo locale e valore di mercato. Nota che

$$\frac{u_x}{u_y} \gtrless \frac{p}{q} \iff \frac{u_x}{p} \gtrless \frac{u_y}{q}.$$

Cos'è u_x/p? Per interpretarlo ricorda che u_x è (approssimativamente) l'incremento di utilità che si ottiene con una unità aggiuntiva di x - precisamente l'incremento lungo la tangente in direzione x. Un'unità di x costa p, dunque se la *spesa* su x aumenta di p allora $\Delta x = 1$ e $\Delta u \approx u_x$; se la spesa su x aumenta di una unità si ottiene $\Delta x = 1/p$ (la quantità di x che compri spendendo $1/p$) l'incremento di utilità è $\Delta u \approx u_x \cdot \Delta x = u_x/p$. Dunque *$u_x/p$ è l'utilità marginale della spesa su x, cioè l'incremento di utilità che si ottiene con un incremento unitario di spesa su x.*

Il principio di base che abbiamo usato è che se il valore soggettivo di x è localmente maggiore del suo prezzo ti conviene comprare. Adesso vediamo che ciò equivale a dire che *ti conviene comprare x - cioè trasferire fondi da y ad x - se l'utilità marginale della spesa è maggiore su x che su y.* Il margine è calcolato sull'unità di spesa, che è naturale: se per esempio $u_x/p = 4$ e $u_y/q = 3$, trasferendo un'unità di spesa da y ad x si perde circa 3 di utilità su y e si guadagna 4 su x - che ovviamente conviene.

La condizione di tangenza fra curva e vincolo è che l'utilità marginale della spesa è uguale su x ed y. Se $u_x/p > u_y/q$ conviene trasferire fondi su x, e se le curve sono convesse così facendo le utilità marginali della spesa su x ed y si avvicinano. E finché sono diverse c'è margine di miglioramento, che va sfruttato. *In un massimo interno ci si ferma quando le utilità marginali della spesa sono uguali, perché il margine di miglioramento è esaurito.*

Il principio è generale, vale per qualunque problema di scelta di allocazione di fondi limitati in cui x ed y danno un rendimento di qualche tipo - sia esso utilità o profitto. In generale, invece di utilità marginale della spesa si parla di *rendimento* marginale della spesa, e c'è margine di miglioramento finché al margine la spesa non ha lo stesso rendimento sulle due attività.

2.6 Esempi tipici

Qui facciamo quello che c'è scritto nel titolo: vedere come si procede in pratica nei casi tipici.

Esempio (Utilità Cobb-Douglas). La funzione di utilità Cobb-Douglas (studiala perché c'è in quasi tutti i compiti di esame) è

$$u(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

con $\alpha, \beta > 0$. Le curve di indifferenza $u(x, y) = c \in \mathbb{R}_+$ soddisfano $y = cx^{-\alpha/\beta}$ e quindi sono delle iperboli che non toccano gli assi. Calcolando le utilità marginali otteniamo $u_x/u_y = \alpha y/\beta x$, e da questo deduciamo che non vi possono essere soluzioni d'angolo nel problema di scelta. Siccome la scelta ottima è sempre interna risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p}{q} & \textit{tangenza} \\ px + qy = m & \textit{vincolo} \end{cases}$$

La prima condizione si può scrivere come $qy = (\beta/\alpha)px$; sostituendo nel vincolo otteniamo $(1+\beta/\alpha)px = m$, da cui $px = m\alpha/(\alpha+\beta)$, e poi usando questo nell'equazione per qy otteniamo

$$px = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}m \quad qy = \frac{\beta}{\alpha+\beta}m$$

Questa è la proprietà che caratterizza la scelta Cobb-Douglas: il consumatore indipendentemente da prezzi e reddito spende una frazione costante del reddito per consumare ciascun bene, e le frazioni sono determinate dagli esponenti. Ad esempio, se $\alpha = 2, \beta = 1$ il consumatore spende i $2/3$ del reddito per consumare il bene x e $1/3$ per consumare il bene y. Dobbiamo riconoscere che è una scelta molto particolare: per esempio se x è pane ed y l'affitto della casa è ragionevole supporre che in generale la frazione di reddito spesa in pane decresce con m. Per trovare le quantità ottime dividiamo per i prezzi e otteniamo

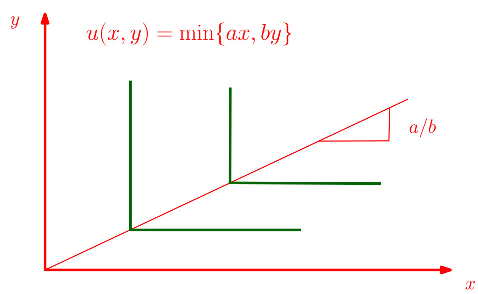
$$x(p,q;m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p} \quad y(p,q;m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{q}$$

che sono le scelte ottime di quantità nel caso Cobb-Douglas. Nota un'altra particolarità (per niente generale): la scelta di x non dipende dal prezzo di y, e viceversa.

Osservazione (Importante). La funzione $\ln u(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$ è ancora Cobb-Douglas, perché come già detto qualunque trasformazione crescente della funzione di utilità rappresenta le stesse preferenze - e quindi conduce sempre alle stesse scelte.

Esempio (Utilità Leontief). Le curve di indifferenza lineari sono un caso limite di curve convesse (meno convesse possibile), e all'altro estremo troviamo funzioni con mappa di indifferenza a forma di L come nella figura 2.12.

Figura 2.12: Utilità Leontief



Le funzioni con una mappa così sono del tipo

$$u(x,y) = \min\{ax, by\}$$

che si chiamano di Leontief dall'economista che le ha considerate per primo. Per vedere che le curve di indifferenza sono come nella figura considera la curva $\min\{ax, by\} = c$ per un dato $c \geq 0$; un punto sulla curva è la coppia (x,y) tale che $ax = by = c$, *lungo la retta* $y = (a/b)x$; da lì se aumenti solo y l'utilità resta $ax = c$, e così pure se aumenti solo x l'utilità resta $by = c$. Quindi le curve di indifferenza sono come in figura, con gli angoli lungo la retta $y = (a/b)x$. Questa funzione rappresenta preferenze su beni per cui si trae utilità dal consumarli insieme e nella proporzione fissa $y/x = a/b$. Il termine tecnico è che i beni sono *perfetti complementi.* Un esempio può essere caffè x e zucchero y con un consumatore a cui piace una tazzina di caffè con due cucchiaini di zucchero - proporzione $y/x = 2$. Se c'è una tazzina e un sacco di zucchero lui ne usa due cucchiaini e il resto lo lascia; se ci sono due cucchiaini di zucchero e un sacco di tazzine di caffè ne zucchera una e le altre le lascia. Le coppie (x, y) in cui non si butta niente, quelle con $y/x = 2$, sono sulla retta $y = 2x$. Assumendo per esempio che l'utilità sia uguale al numero di tazzine consumate avremo $u(x, y) = \min\{x, y/2\}$.[8]

Come si risolve il problema di scelta del consumatore? Qui il procedimento di sopra non si può applicare perché le curve di indifferenza non sono ovunque differenziabili. Tuttavia guardando il grafico la soluzione è immediata. La curva di indifferenza più alta che può raggiungere rispettando il vincolo è chiaramente quella che ha l'angolo sul vincolo. L'angolo ha $ax = by$, e sul vincolo $px + qy = m$; quindi la scelta ottima è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax = by \\ px + qy = m \end{cases}$$

risolvendo il quale otteniamo $x = mb/(bp + aq), y = ma/(bp + aq)$. Nota qui la dipendenza dai prezzi. Il consumo di un bene è decrescente nel prezzo di quel bene, e anche dell'altro. Anche questo ha senso economicamente: i due beni vengono consumati assieme, quindi se aumenta il prezzo di uno diminuisce il consumo di tutti e due. Nell'esempio, se aumenta il prezzo dello zucchero diminuisce il consumo sia di zucchero che di caffè.

Per concludere: possiamo paragonare questo caso di "massima"convessità al caso di convessità "minima" che è quello di utilità lineare $u(x, y) = ax + by$. In quel caso si parla di *perfetti sostituti* perché su ogni curva di indifferenza $ax + by = c$ i panieri $(0, u/b)$ e $(u/a, 0)$ sono indifferenti a loro combinazioni lineari $\lambda(0, u/b) + (1 - \lambda)(u/a, 0) = ((1 - \lambda)u/a, \lambda u/b)$ con $0 < \lambda < 1$.

Esempio (La u dei ricchi e poveri: beni di prima necessità e beni di lusso). In pratica i beni che abbiamo chiamato essenziali ($u_x/u_y \to \infty$ per $x \to 0$) sono i beni di prima necessità, mentre i non essenziali sono i beni di lusso. Il comportamento tipico, di ognuno di noi, è che se siamo poveri compriamo solo beni di prima necessità mentre se siamo ricchi compriamo anche beni di lusso. Una funzione che fa vedere questo molto chiaramente con due beni è

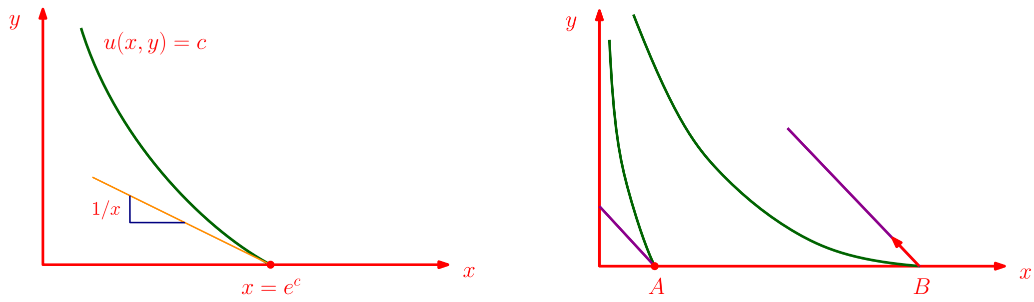
$$u(x, y) = \ln x + y$$

In questo caso che il bene essenziale sia x si intuisce subito dal fatto che l'utilità marginale $u_x = 1/x \to \infty$ se $x \to 0$, mentre $u_y = 1$ resta limitata anche per $y = 0$. Per confermare: il valore soggettivo di x è $u_x/u_y = 1/x$ che tende a infinito per $x \downarrow 0$, quindi x è essenziale. Per vedere che il bene y non lo è considera una curva di indifferenza $u(x, y) = c$; su questa il punto in cui $y = 0$ ha $x = e^c$, e lì il valore soggettivo di y è $u_y/u_x = e^c < \infty$. Per capire la scelta osserva che se sei ricco (m grande) il livello c raggiunto sarà alto, quindi e^c - valore di y ad $y = 0$ - sarà maggiore di q/p e ti converrà comprare almeno un po' di y. D'altra parte se sei povero -

[8] Ricordando che trasformazioni monotone rappresentano le stesse preferenze, va bene anche $2 \cdot \min\{x, y/2\} = \min\{2x, y\}$.

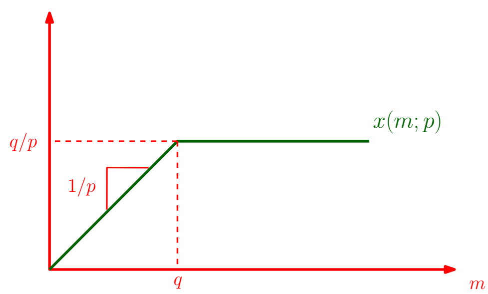
m piccolo - il massimo che puoi consumare di x è poco e il valore di x, che è $u_x/u_y = 1/x$, sarà maggiore di p/q anche con $y = 0$ quindi comprerai solo x. La figura 2.13 illustra. Nel pannello sinistro è disegnata la pendenza della curva di indifferenza sull'asse x che è $1/e^c$, quindi la curva è più piatta al crescere di c; nel pannello destro è raffigurata la scelta in funzione del reddito: nel punto A sei povero, il valore di x è maggiore di p/q in ogni punto del vincolo e compri solo x; in B sei ricco, il valore di y ad $y = 0$ è maggiore di q/p quindi compri anche y.

Figura 2.13: Beni di prima necessità e beni di lusso



Vediamo più precisamente. Sul vincolo $px + qy = m$, se $y = 0$ sarà $x = m/p$ quindi il valore soggettivo di y è $u_y/u_x = x = m/p$; se questo è maggiore del suo valore di mercato q/p - cioè se $m/p > q/p$, equivalentemente $m > q$ - compri y (come nel punto B in figura); in questo caso la scelta ottima è dunque interna, caratterizzata dalle solite due uguaglianze *(TG)* e *(VB)*. Risolvendo la condizione di tangenza $1/x = p/q$ insieme al vincolo di bilancio otteniamo $x = q/p$, e per y sostituendo abbiamo $m = px + qy = q(y + 1)$ da cui $y = m/q - 1$. Se invece $m \leq q$ la scelta ottima è $x = m/p, y = 0$ (come nel punto A in figura) perché per ogni $x \leq m/p$ abbiamo $u_x/u_y = 1/x \geq p/m \geq p/q$. La soglia alla quale sei indifferente è dunque $m = q$. Nota che il consumo di x cresce linearmente in m per $m \leq q$ e poi resta costante a q/p: per soluzioni interne il consumo di x è indipendente dal reddito - consumi quello che ti serve e il resto lo lasci per y. La figura qui sotto illustra la scelta x come funzione di m.

Figura 2.14: Consumo in funzione del reddito



Esempio (Utilità quasi-lineare). Le funzioni di utilità quasi-lineari hanno la forma

$$u(x, y) = v(x) + y$$

con $v(x)$ funzione crescente, concava e che assumiamo differenziabile per x strettamente positivi. Nota che la funzione dell'esempio precedente è quasi-lineare. La caratteristica che definisce la quasi-linearità è che l'utilità marginale di uno dei due beni è costante (e che possiamo fissare a 1, senza perdita di generalità, giusto?) mentre l'utilità marginale dell'altro è decrescente. Con la nostra funzione, $u_x = v'(x)$ e $u_y = 1$. Nota che sia l'utilità marginale del bene x che il rapporto tra le utilità marginali non dipendono dal consumo del bene y. La mappa delle curve di indifferenza è data dalle funzioni $y = k - v(x)$, che sono convesse siccome v è concava. La forma di v determina se ci sono soluzioni d'angolo o meno.[9] Supponiamo che la soluzione sia interna. In questo caso la condizione di tangenza è $v'(x) = p/q$; da questa la scelta di x è completamente determinata. In altri termini, la domanda di x dipende solo dai prezzi relativi *e non* dal reddito. Questa è la proprietà più importante delle preferenze quasi-lineari. La scelta di y si trova poi usando il vincolo di bilancio: $y = m/q - pv'^{-1}(p/q)/q$, e nota che y dipende anche dal reddito. *Nota anche che* se $q = 1$ in questo caso la scelta ottima dà esattamente $u_x = p$, utilità marginale uguale prezzo.

Esempio (Scelta intertemporale: consumo e risparmio). Una scelta importante è quella di come distribuire il consumo nelle varie fasi della vita in funzione del reddito che ci si aspetta di guadagnare. Tipicamente quando si è giovani si prende a prestito per non consumare troppo poco quando ci si può godere la vita, pensando di guadagnare di più in futuro e poter ripagare i debiti contratti. Il caso generale è complicato, qui ne consideriamo una versione giocattolo. Ci sono due beni, consumo presente c_1 e consumo futuro c_2, quindi $u = u(c_1, c_2)$, che assumiamo con curve di indifferenza convesse. Il nostro ha un reddito di m_1 *unità di consumo* nel primo periodo ed m_2 nel secondo. Il prezzo interessante è quello di c_1 in termini di c_2, che dice quante unità di c_2 ottieni in cambio di una unità di c_1. In altre parole: se rinunzi a un'unità di consumo oggi quante te ne danno domani? Se ci pensi stiamo parlando di *prestare* beni oggi in cambio di beni domani. Cosa ottieni domani? Quello che hai prestato più *gli interessi.* Se il tasso di interesse è r, se presti c_1 unità del bene oggi ti danno domani $c_2 = c_1 + r \cdot c_1 = (1+r)c_1$. Dunque il prezzo di c_1 in termini di c_2 è $1 + r$. La stessa cosa vale qui per m_1 - che rappresenta m_1 unità di consumo oggi. Per scrivere il vincolo di bilancio dobbiamo scegliere un'unità di conto: consumo oggi o consumo domani. Scegliamo il consumo oggi. Il prezzo di c_2 in termini di c_1 è il reciproco di $1 + r$, quindi il vincolo è [10]

$$c_1 + (1+r)^{-1}c_2 = m_1 + (1+r)^{-1}m_2.$$

Nota che il punto $(c_1, c_2) = (m_1, m_2)$ soddisfa il vincolo: rappresenta la scelta possibile di consumare in ogni periodo esattamente quello che si guadagna. A questo punto vediamo che la pendenza del vincolo è proprio $1 + r$, e il problema si presenta come nel pannello sinistro della figura 2.15, dove è disegnato il caso in cui nel punto (m_1, m_2) il valore soggettivo di c_1 è più alto del suo valore di mercato $1 + r$ e il nostro prende a prestito $c_1^\star - m_1$. Nota dal vincolo che dovrà restituire $m_2 - c_2^\star = (1+r)(c_1^\star - m_1)$, quello che ha preso a prestito con gli interessi.

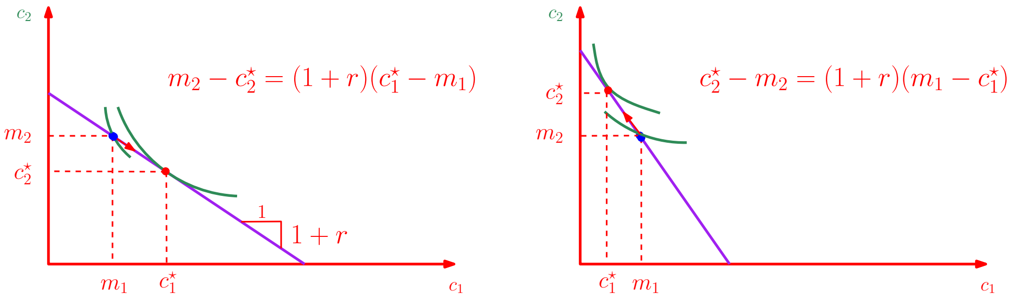
[9] Per curiosità, le proprietà che generano la soluzione ricchi-poveri dell'esempio precedente sono:

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0} v'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} v'(x) = 0$$

come succede per esempio per $v(x) = \ln x$.

[10] *Esercizio al volo:* scrivilo in termini di consumo domani.

Figura 2.15: Scelta intertemporale



La scelta con curve convesse e soluzione interna è quindi caratterizzata dall'uguaglianza

$$\frac{\partial u/\partial c_1}{\partial u/\partial c_2} = 1 + r$$

più ovviamente l'equazione del vincolo. Il significato del vincolo lineare qui è importante, vuol dire che puoi prestare o prendere a prestito agli stessi termini. È un'assunzione che può essere vera per piccole somme, ma in generale non è soddisfatta (quando andrai in banca a chiedere un prestito te ne accorgerai subito). Negli esercizi vedremo cosa succede con tasso attivo diverso da quello passivo.

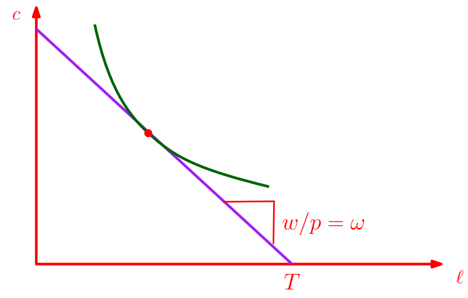
Questo problema è in realtà un po' diverso da quelli considerati finora perché il reddito dipende esplicitamente dal prezzo relativo dei beni. Riscrivendo il vincolo come $c_2 - m_2 = -(1+r)(c_1 - m_1)$ ti rendi subito conto che se cambia r il vincolo *ruota* intorno al punto (m_1, m_2). All'aumentare di r prendere a prestito costa di più, e per r alto abbastanza il nostro consumatore presterà soldi lui - e nel secondo periodo potrà consumare $c_2^\star = m_2 + (1+r)(m_1 - c_1^\star)$, come nel pannello destro della figura.

Esempio (Lavoro e tempo libero). Più tempo libero ti prendi meno lavori quindi meno consumi. In realtà i due "beni" che dànno utilità sono consumo c e tempo libero ℓ, quindi consideriamo la semplice funzione di utilità $u(\ell, c) = \ell(48 + c - \ell)$ dove c è il consumo giornaliero ed ℓ le ore di tempo libero. Hai a disposizione $T = 24$ ore che devi dividere fra ore di tempo libero $\ell \leq T$ e ore di lavoro $h = T - \ell$. Nota che u è monotona in c ma in ℓ è una parabola: troppo tempo libero alla fine stanca.

Il prezzo del consumo è p, il salario orario w. Il vincolo di bilancio è che puoi consumare quello che ricavi lavorando: $pc \leq wh$. Nota che lo possiamo riscrivere - usando le due variabili da cui la u dipende - come $pc + w\ell \leq wT$. Questo esprime il fatto che puoi "comprare" tempo libero a costo opportunità w (perché più ti riposi meno guadagni); al massimo puoi lavorare T ore e ricavi wT, quindi il reddito è wT che puoi distribuire fra c ed ℓ. Dato che u è monotona in c il vincolo - leggiamolo come $pc \leq wh$ - sarà soddisfatto con uguaglianza quindi il problema di scelta è standard.

Tornando a $pc + w\ell \leq wT$, la sua pendenza è w/p. Questo è salario in termini di consumo, cioè *quante unità di consumo puoi comprare con una unità di lavoro* (quello che ti interessa!), che impareremo a chiamare salario *reale*; lo indicheremo con $\omega = w/p$. La situazione è raffigurata nella figura 2.16.

Figura 2.16: Consumo e tempo libero



Con la funzione di utilità che stiamo usando la relazione di tangenza $u_\ell/u_c = \omega$ dà $\omega = [2(T-\ell)+c]/\ell$, che messa a sistema col vincolo $c+\omega\ell = \omega T$ risolve il problema (puoi verificare):

$$\ell(\omega) = 12 \cdot \frac{2+\omega}{1+\omega}, \quad c(\omega) = 12 \cdot \frac{\omega^2}{1+\omega}.$$

Le ore di lavoro $h = T - \ell$ che scegli sono dunque (sottrazione)

$$h(\omega) = 12 \cdot \frac{\omega}{1+\omega}$$

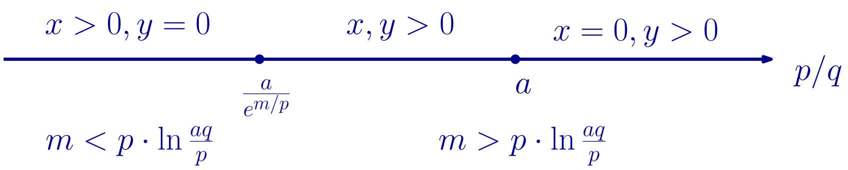
che vanno da 0 a 12 quando ω cresce da 0 ad infinito.

C'è un modo più diretto di arrivare ad $h(\omega)$ ma non si vede il 2D che è istruttivo, esprimendo tutto in funzione di h. Scrivi il vincolo come $c = \omega h$ e sostituisci questo ed $\ell = T - h$ nella u, che diventa $u(\omega h, T-h) = (T-h)[24 + (\omega+1)h]$ funzione di h (parabola!) che vogliamo massimizzare; dato che $u''(h) < 0$ la scelta ottima è data da $u'(h) = 0$, che dà la $h(\omega)$ di sopra.[11]

Esempio (Più complicato: entrambi beni non essenziali). Un consumatore abbia funzione di utilità $u(x,y) = -e^{-x} + y/a$. Il vincolo di bilancio sia il solito $px + qy = m$. Qui entrambi i beni sono non essenziali: abbiamo infatti

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{a}{e^x}$$

e da qui troviamo $x = 0$ se $p/q \geq a$, ed $y = 0$ se $p/q \leq a/e^{m/p}$; per $a/e^{m/p} < p/q < a$ la scelta è interna. Nota che $p/q \leq a/e^{m/p} \iff m \leq p\ln(aq/p)$. La figura è questa:



Quindi la situazione è la seguente: se $m \leq p\ln(aq/p)$ consumi solo x; se $m > p\ln(aq/p)$: se $p/q < a$ consumi entrambi i beni; se $p/q \geq a$ consumi solo y. La scelta interna data da tangenza più vincolo è determinata come al solito: la tangenza è $a/e^x = p/q$ che dà $x = \ln(aq/p)$ (indipendente da m) ed $y = (m - px)/q$.

[11] Punto medio fra i due zeri $h = T = 24$ ed $h = -24/(\omega+1)$, che dà appunto $(24 - 24/(\omega+1))/2 = 12\omega/(\omega+1)$.

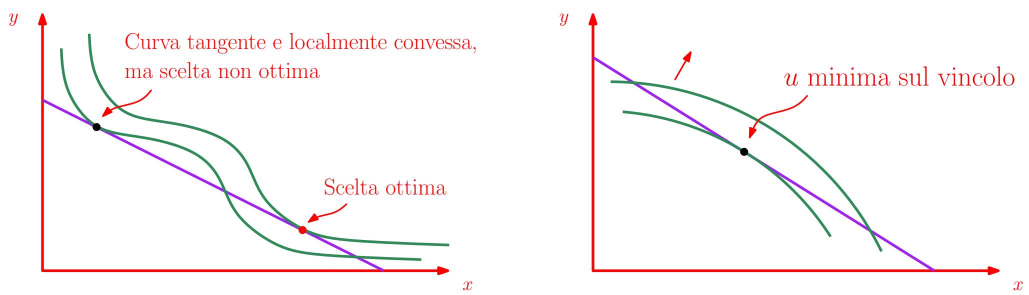
2.7 Pozzanghere

Il caso tipico è quello delle curve di indifferenza convesse ma dobbiamo sapere anche come fare se non lo sono. E dopotutto per esempio curve *concave* - cioè con valore soggettivo crescente al crescere del peso relativo del bene nel paniere consumato - risultano dai beni che danno dipendenza (più ne consumi più faresti di tutto per averne di più), o dai beni che più ne consumi più "impari ad apprezzare" (pensa al vino di alta qualità).

Intanto ricorda il caso di utilità lineare in cui le curve di indifferenza non sono *strettamente* convesse e la soluzione è di angolo (eccetto il caso in cui la pendenza delle curve è identica alla pendenza del vincolo nel qual caso tutti i punti sul vincolo hanno la stessa utilità).

Con u non lineare, se le curve di indifferenza non sono convesse i punti di tangenza fra curva e vincolo non sono necessariamente di massima utilità. Un esempio è nel pannello sinistro della figura 2.17. Se le curve sono così irregolari devi confrontare l'utilità nei punti di tangenza e negli angoli e vedere qual è quella più alta.

Figura 2.17: Tangenza $\neq$ Massima u



Se le curve sono *concave* (come nel pannello destro), il punto di tangenza è di *minima* utilità sul vincolo.[12] In questo caso la scelta ottima è necessariamente di angolo - dimostrazione: se è interna o è tangente ed è minima o non è tangente e allora ti vuoi spostare. Quindi devi solo confrontare i livelli di utilità nei due punti di angolo - $u(0, m/q)$ ed $u(m/p, 0)$, - e la più alta risolve il problema.

Esempio. Considera, per $x, y \geq 0$, l'utilità data da $u(x, y) = ax^2 + by^2$ con $a, b > 0$. È monotona, ma le curve di indifferenza sono archi di ellissi con centro l'origine, dunque concave. Da $u_x/u_y = ax/by$ vediamo subito che la loro pendenza *aumenta* se x sale ed y scende, quindi siamo nel caso del pannello destro della figura qui sopra. Dobbiamo confrontare $u(m/p, 0) = am^2/p^2$ ed $u(0, m/q) = bm^2/q^2$. Il nostro consumatore comprerà solo x se $am^2/p^2 > bm^2/q^2$ cioè $p/q < \sqrt{a/b}$, eccetera. La soluzione in questi casi è banale.

3 Il caso di *n* beni e l'utilità marginale del reddito

Nel caso di n beni (notazione x, p) dimostreremo nella sezione 5 che in un massimo interno - cioè con $x_i > 0$ per ogni i - l'utilità marginale della spesa u_i/p_i deve essere uguale su tutti i beni. Sotto ipotesi di convessità simili alla convessità delle curve di indifferenza nel caso di due beni, questa condizione è anche sufficiente. La dimostrazione di questo non è alla nostra portata, ma

[12] Dimostrazione nella sezione 5.

resta istruttivo vedere come si trova il paniere in questione e l'intuizione per la sua ottimalità. Il problema di cui parliamo è sempre (PC) di pagina 8.

Cerchiamo un paniere sul vincolo in cui le utilità marginali della spesa sono uguali su tutti i beni. Abbreviamole con $UMS(i) \equiv u_i(x)/p_i$, dove la x ti ricorda che tutto dipende da x. Ci sono n incognite, servono n equazioni. Una è il vincolo, le altre sono le condizioni che $UMS(i) = UMS(j)$ per tutte le coppie di i, j. Quante equazioni sono queste? Se ci pensi, sono $n - 1$: $UMS(1) = UMS(i), i = 2, \dots, n$. Per trovare x si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_i}{p_i} & i = 2, 3, \dots n \\ p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = m \end{cases}$$

Immaginiamo in concreto *il processo* di massimizzazione dell'utilità del consumatore sul vincolo di bilancio nel caso di tre beni x_1, x_2, x_3. Assumiamo che quando si trasferisce spesa da j a i il valore soggettivo di i in termini di j, cioè u_i/u_j, scende. Dunque se $UMS(i) > UMS(j)$ e si vende j per comprare i la differenza $UMS(i) - UMS(j)$ si riduce.

Per ogni i deve essere $0 \leq x_i \leq m/p_i$. Se c'è un i tale che per $x_i = m/p_i$ (quindi $x_j = 0, j \neq i$) si ha $UMS(i) > UMS(j)$, $j \neq i$, chiaramente ti conviene comprare solo x_i e il paniere ottimo ha $x_j = 0$ per $j \neq i$. Se così non è il passo successivo è vedere se c'è un ottimo con *una* coordinata nulla; per far questo prendi x_i, ponilo uguale a zero, distribuisci il reddito fra gli altri due x_j e x_k in modo che $UMS(j) = UMS(k) \equiv \lambda_{jk}$ e calcola $UMS(i)$; se $UMS(i) \leq \lambda_{jk}$ allora $x_i = 0$ è un massimo locale; se c'è un solo massimo locale con una coordinata nulla quello è globale; se ce n'è più di uno paragona le utilità e scegli il migliore. Se invece hai trovato che non ci sono massimi locali con coordinate nulle il punto di ottimo sarà interno. Per arrivarci puoi procedere così: sappiamo che se $x_1 = m/p_1$ ed $x_2 = 0$ si ha $UMS(1) < UMS(2)$. Tieni per adesso $x_3 = 0$ e distribuisci il reddito fra x_1 e x_2 in modo che $UMS(1) = UMS(2) = \lambda_{12}$; in quel punto avremo $0 < x_i < m/p_i$, $i = 1, 2$ ed $UMS(3) > \lambda_{12}$; allora trasferisci spesa da x_1 e x_2 verso x_3, mantenendo $UMS(1) = UMS(2)$, finché questo valore comune non scende fino ad $UMS(3)$ che così facendo sta salendo; il processo termina in un paniere in cui $UMS(1) = UMS(2) = UMS(3) \equiv \lambda$. Questo valore comune si chiama *utilità marginale del reddito.*

Il nome è appropriato, perché per quanto appena visto una unità marginale di spesa, indipendentemente dal bene in cui è impiegata, vale un incremento di utilità uguale a λ. Quindi tanto deve valere un incremento marginale del reddito. Su questo possiamo essere più precisi. La soluzione di (PC) dipende da m e da p; tralasciamo p e indichiamola con $x(m)$. L'utilità che si raggiunge in $x(m)$ è $u(x(m)) \equiv U(m)$. Quello che abbiamo appena detto sul valore comune $\lambda = UMS(i)$ è per la precisione che $U'(m) = \lambda$:

Proposizione 1 (Utilità marginale del reddito). *Assumi che in $x(m)$ è $UMS(i) = \lambda$ per ogni i e che le $x_i(m)$ siano derivabili. Allora $U'(m) = \lambda$.*

Dimostrazione. Usiamo la derivazione di funzioni composte (vedi *GdT*). Poiché $x(m)$ sta sul vincolo abbiamo $\sum_i p_i x_i(m) = m$ per ogni m, il che implica $\sum_i p_i x_i'(m) = 1$. Dunque poiché l'ipotesi $UMS(i) = \lambda$ è che $\frac{\partial u(x(m))}{\partial x_i} = \lambda p_i$ otteniamo

$$U'(m) = \sum\nolimits_i \frac{\partial u(x(m))}{\partial x_i} \cdot x_i'(m) = \lambda \sum\nolimits_i p_i x_i'(m) = \lambda$$

che è quanto si voleva. □

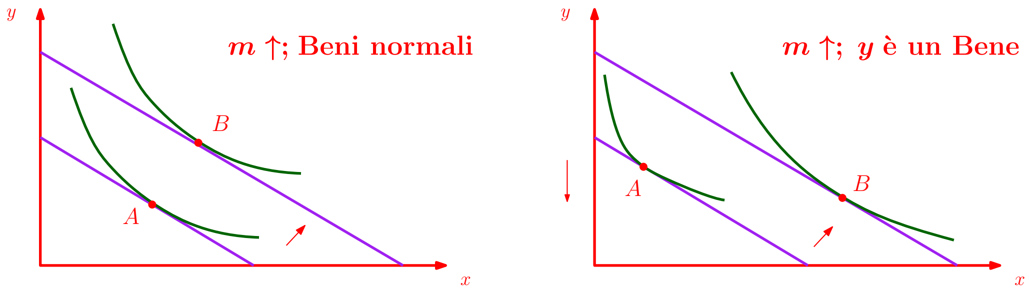
4 Effetto reddito, effetto sostituzione

Abbiamo detto nella sezione 1.3 che la soluzione del problema di scelta dipende dai parametri di contesto che sono i prezzi e il reddito. Vediamo meglio.

4.1 Beni normali e beni inferiori

Quando aumenta il reddito "normalmente" si consuma di più di entrambi i beni - come nel pannello sinistro della Figura 4.1. Per esempio nella Cobb-Douglas $x^\alpha y^\beta$ da $x(p,q,m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p}$ vediamo che il consumo di x aumenta linearmente con m; e lo stesso vale per y. Questo tipo di beni - il cui consumo aumenta col reddito - sono appunto detti *normali.* Ma di alcuni beni se diventi più ricco ne consumi di meno, come nel pannello destro della figura - tipicamente compri meno roba di brutta qualità, e in economia questi beni si chiamano *inferiori.* Nel pannello destro della figura il bene inferiore è y, fanne un'altra in cui il bene inferiore è x per esercizio.

Figura 4.1: Effetto reddito



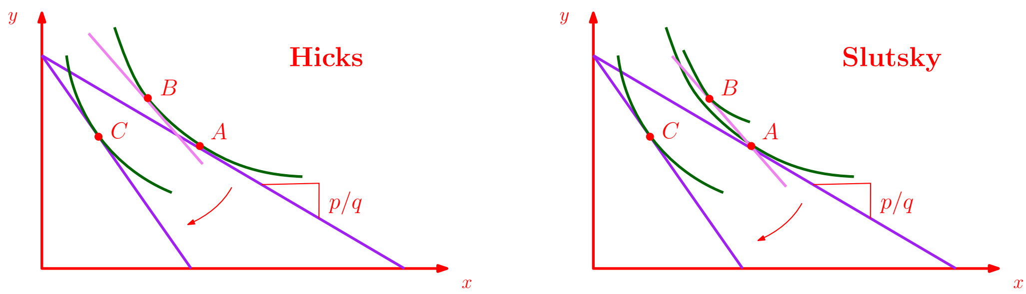
Nota che se ci sono due beni almeno uno deve essere normale. Dimostrazione: se aumenta il reddito aumenta la spesa totale, mentre se consumassi di meno di entrambi i beni a prezzi invariati spenderesti di meno.

4.2 Decomposizione dell'effetto di una variazione di prezzo

Illustriamo graficamente l'idea nel caso di un aumento del prezzo p di x nella Figura 4.2. Il consumatore passa dal punto A al punto C. Nota che quando p aumenta succedono due cose: uno, x diventa più caro; due, tu diventi più povero nel senso che l'insieme delle scelte possibili si riduce. Assumendo che alla fine nel punto C il consumo di x si sia ridotto, quanto è dovuto al fatto che sei diventato più povero, e quanto alla "pura" variazione del prezzo? Il problema è come separare le due cose, e l'idea è che l'effetto della variazione di prezzo si vede "neutralizzando" l'effetto della contrazione dell'insieme di scelta, che si può ottenere vedendo cosa sceglieresti ai nuovi prezzi se restassi al livello di utilità originale, come nel pannello sinistro della Figura 4.2.

Dalla figura (in entrambi i casi) si vede che la tangente nel punto B è un vincolo di bilancio "ausiliare" *parallelo a quello con prezzi nuovi* (tangente a C) ma con reddito superiore. La differenza rispetto al nuovo vincolo è una compensazione monetaria per la contrazione dell'insieme delle scelte possibili conseguente all'aumento del prezzo di x. Il passaggio da A a B che si chiama *effetto sostituzione* è quello dovuto alla sola variazione dei prezzi relativi; il passaggio da B a C che si chiama *effetto reddito* è dovuto alla effettiva perdita di potere d'acquisto.

Figura 4.2: Effetto reddito e sostituzione, beni normali

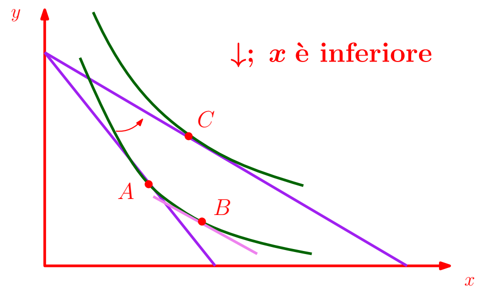


La differenza fra le parti sinistra e destra è l'ammontare della compensazione monetaria Δm. Con il metodo di Hicks (pannello di sinistra) la compensazione è calcolata in modo che il consumatore resti, a prezzi nuovi, sulla curva di indifferenza originaria. Con il metodo di Slutsky (pannello di destra) si mette il consumatore in grado di ricomprare a prezzi nuovi il paniere scelto prima della variazione del prezzo. Dalla figura è chiaro che con il metodo di Slutsky la compensazione è "eccessiva" nel senso che consente al consumatore di arrivare su una curva di indifferenza più alta di quella originale; ma per Δp piccolo la differenza fra i due metodi tende a zero, e il metodo di Slutsky è più facile da applicare come vedremo nell'esempio Cobb-Douglas qui sotto.[13]

In entrambi i casi con curve di indifferenza convesse l'effetto sostituzione è negativo, nel senso che se p aumenta il passaggio da A a B comporta una riduzione del consumo. Nel caso di Hicks questo è chiaro perché una curva di indifferenza ha pendenza maggiore solo se x diminuisce; nel caso di Slutsky nel punto A con il nuovo vincolo ti conviene vendere x perché il tuo valore diventa inferiore al prezzo di mercato. L'effetto reddito - da B a C - invece può essere positivo o negativo, nel senso che per beni normali si cumula con l'effetto sostituzione (come nella Figura 4.2), ma per beni inferiori va in direzione opposta: per esempio se x è inferiore, se aumenta il suo prezzo per l'effetto sostituzione ne consumi di meno ma l'effetto reddito (che ti fa diventare più povero) te ne fa consumare di più; quindi l'effetto totale è ambiguo. Vedi Figura 4.3, dove p diminuisce; per effetto sostituzione se ne consuma di più - passaggio da A a B - ma per effetto reddito il consumo si riduce - passaggio da B a C. Nel caso in figura l'effetto totale - da A a C - è comunque un aumento del consumo di x perché l'effetto sostituzione è più forte dell'effetto reddito.

[13]Una storiella che può servire a chiarire l'effetto sostituzione è questa. Hai fatto la spesa e ti avvii alla cassa, con 10 barattoli di Nutella che hai comprato a 3 Euro e 50 perché il prezzo ti era sembrato particolarmente conveniente. Ma alla cassa arriva un commesso e ti dice che c'era uno sbaglio e la Nutella in realtà costa 4 Euro. "Cavolo", dici "così i soldi non mi bastano, mi mancano 5 Euro, devo tornare indietro e rifare tutto". Ma accanto a te c'è Slutzki e ti dice "Ehi, qui ci sono 5 Euro, te li regalo". Tu ringrazi, stai per pagare ma ci pensi meglio e capisci che a 4 Euro 10 barattoli non li vuoi più comprare, a quel prezzo preferisci comprarne meno e sostituirli con un po' più di altre cose. Quindi torni indietro, posi un po' di Nutella e metti in carrello più marmellata, prosciutto, banane... Quanta Nutella hai posato? Quella che hai posato l'hai posata per l'effetto sostituzione - di Slutzki. Non solo: siccome te la potevi permettere e hai cambiato paniere in verità stai anche meglio che col paniere originale, quindi per farti rimanere al livello di utilità originale bastavano meno di 5 Euro; se accanto a te c'era Hicks te ne regalava un po' meno - giusto quanto bastava a farti uscire con la stessa utilità che ti dava la spesa che avevi raggiunto prima della brutta notizia sull'aumento del prezzo della Nutella.

Figura 4.3: Effetto reddito e sostituzione con x inferiore



Questo è il caso più comune, ma ci possono in linea di principio essere beni inferiori con effetto reddito così forte da più che bilanciare l'effetto sostituzione, col risultato che se diminuisce il prezzo di x ne consumi di meno. In questo caso si parla di beni *di Giffen* dall'economista che per primo ha fatto notare la cosa. Puoi fare una figura analoga alla 4.3 con effetto reddito forte abbastanza da far sì che il consumo di x *scenda* in conseguenza di una riduzione del suo prezzo. Per beni di Giffen dunque la curva di domanda può *non* essere decrescente nel prezzo.

Per calcolare la compensazione monetaria col metodo di Slutsky, partendo dal vincolo $px + qy = m$ supponiamo che p passi da p_0 a p_1; porremo $p_1 - p_0 = \Delta p$ (il livello iniziale del reddito è m). Poiché q è fisso omettiamo la dipendenza della scelta ottima da q e scriviamo $x = x(p, m), y = y(p, m)$. A prezzi nuovi il paniere originale costa

$$p_1 x(p_0, m) + qy(p_0, m) = (p_0 + \Delta p)x(p_0, m) + qy(p_0, m) = m + \Delta p \cdot x(p_0, m)$$

sicché $\Delta m = \Delta p \cdot x(p_0, m)$, l'ammontare necessario a poter ricomprare $x(p_0, m)$. Con il metodo di Hicks, ponendo $U(p, m) = u(x(p, m), y(p, m))$ - il livello di utilità nella scelta ottima - il Δm è definito dalla relazione $U(p_1, m + \Delta m) = U(p_0, m)$.

In entrambi i casi ***la scomposizione in effetto reddito ed effetto sostituzione*** è ottenuta semplicemente aggiungendo e togliendo $x(p_1, m + \Delta m)$:

$$x(p_1, m) - x(p_0, m) = [x(p_1, m + \Delta m) - x(p_0, m)] + [x(p_1, m) - x(p_1, m + \Delta m)]$$

Il primo termine fra parentesi quadre è l'effetto sostituzione, il secondo l'effetto reddito. Nota che per beni normali se il prezzo aumenta entrambi i termini sono negativi (il primo per quanto visto nella figura 4.2).

Esempio (Cobb-Douglas). Calcoliamo effetti reddito e sostituzione con utilità Cobb-Douglas $u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ secondo i due metodi. Sappiamo che $x(p, m) = \alpha m/p$. Osserviamo che l'effetto totale è

$$\Delta x \equiv \alpha \frac{m}{p_1} - \alpha \frac{m}{p_0} = -\frac{\alpha m \Delta p}{p_0 p_1}$$

Cominciamo con Slutsky. Abbiamo $\Delta m = \alpha \Delta p \cdot m/p_0$ da cui $m + \Delta m = m(1 + \alpha \Delta p/p_0)$, quindi effetto sostituzione ed effetto reddito sono dati rispettivamente da

$$\alpha\frac{m(1+\alpha\Delta p/p_0)}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_0}=\frac{\alpha m}{p_0}\cdot\frac{p_0+\alpha\Delta p-p_1}{p_1}=-(1-\alpha)\frac{\alpha m\Delta p}{p_0p_1}=(1-\alpha)\Delta x$$
$$\alpha\frac{m}{p_1}-\alpha\frac{m(1+\alpha\Delta p/p_0)}{p_1}=-\alpha\frac{\alpha m\Delta p}{p_0p_1}=\alpha\Delta x$$

Abbiamo visto che il Δm con il metodo di Hicks è definito dalla relazione $U(p_1,m+\Delta m)=U(p_0,m)$. Nel caso in esame abbiamo (sappiamo che $y(p,m)=(1-\alpha)m/q$)

$$U(p,m)=\Big(\alpha\frac{m}{p}\Big)^{\alpha}\Big((1-\alpha)\frac{m}{q}\Big)^{1-\alpha}=m\Big(\frac{\alpha}{p}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}$$

quindi la relazione che vogliamo è

$$(m+\Delta m)\Big(\frac{\alpha}{p_1}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}=m\Big(\frac{\alpha}{p_0}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{1-\alpha}{q}\Big)^{1-\alpha}$$
$$\Delta m=m\Big[\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1\Big]$$

da cui $m+\Delta m=m(p_1/p_0)^{\alpha}$. Le formule che danno effetto sostituzione ed effetto reddito non sono illuminanti, le mettiamo in nota.[14] Per concludere, abbiamo osservato che la compensazione monetaria con il metodo di Slutsky è più generosa che col metodo di Hicks. Lo possiamo verificare nel caso presente - ma è una curiosità matematica, anche questo lo mettiamo in nota.[15]

Esempio (Utilità lineare). Ricorda che con utilità lineare si va sempre su un angolo. In questo caso la differenza fra Hicks e Slutsky per variazioni di prezzo non "piccole" può essere forte e mettere in luce l'errore insito nel metodo Slutsky. Perché se una variazione di prezzo fa saltare da un angolo all'altro il metodo di Slutsky può azzerare impropriamente l'effetto reddito. Il discorso è illustrato nella figura 4.4 con $u(x,y)=x+y$, dove se $p/q<1$ compri solo x e se $p/q>1$ compri solo y; se p scende da p_0 a p_1 in modo che $p_0/q>1>p_1/q$, il metodo di Hicks per effetto sostituzione giustamente fa saltare da solo y a solo x sulla curva di indifferenza originaria (nel pannello sinistro della figura da A a B), mentre Slutsky mettendoti in condizione di ricomprare il paniere A ti mette sul nuovo vincolo e quindi ti fa saltare direttamente alla scelta finale, vedi pannello destro, annullando l'effetto reddito che in effetti c'è ed è ben catturato da Hicks (pannello sinistro da B a C). Come vedremo nell'esercizio 36 il problema non sorge quando la variazione di prezzo non fa cambiare angolo - come tipicamente accade per variazioni "piccole" - nel qual caso i due metodi danno lo stesso risultato.

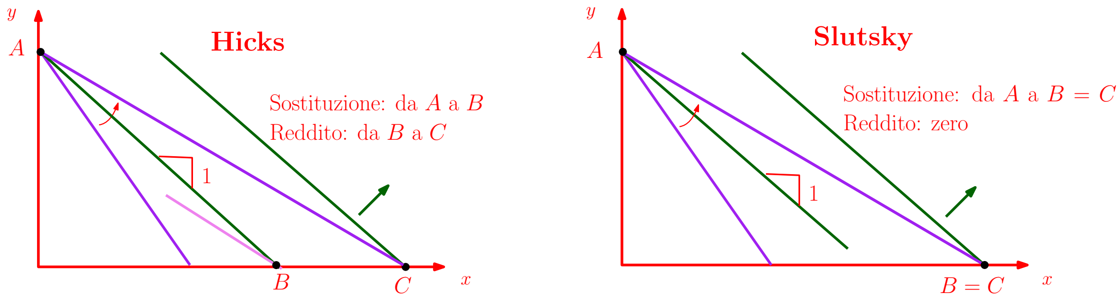
[14] Effetto sostituzione ed effetto reddito sono dati rispettivamente da

$$\alpha\frac{m(p_1/p_0)^{\alpha}}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_0}=\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}x(p_1,m)-x(p_0,m)=-x(p_0,m)\Big[1-\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}\Big]$$
$$\alpha\frac{m}{p_1}-\alpha\frac{m}{p_1^{1-\alpha}}\frac{1}{p_0^{\alpha}}=\frac{\alpha m}{p_1}-\frac{\alpha m}{p_0}\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}=\frac{\alpha m}{p_0}\frac{p_0}{p_1}-\frac{\alpha m}{p_0}\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}=-x(p_0,m)\Big[\Big(\frac{p_0}{p_1}\Big)^{1-\alpha}-\frac{p_0}{p_1}\Big]$$

Puoi verificare che la somma dei due effetti dà l'effetto totale.

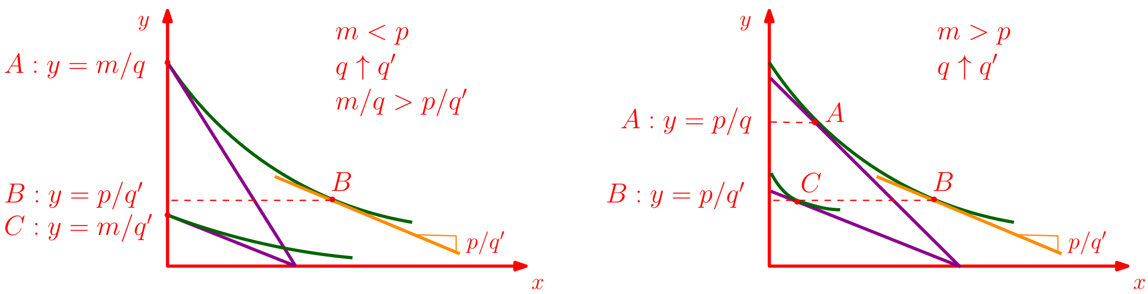
[15] La disuguaglianza è $\alpha\Delta p\cdot m/p_0>m\Big[\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1\Big]$ che si può riscrivere come $\alpha(\frac{p_1}{p_0}-1)>\Big(\frac{p_1}{p_0}\Big)^{\alpha}-1$. Ponendo $x\equiv p_1/p_0$ dobbiamo verificare che per $0<x\neq 1$ e $0<\alpha<1$ vale $\alpha(x-1)>x^{\alpha}-1$. Le due funzioni sono uguali per $x=1$. Al primo membro abbiamo una retta di pendenza α; la curva al secondo membro ha derivata prima $\alpha x^{\alpha-1}$ che è uguale ad α per $x=1$ quindi la retta è la sua tangente; e ha derivata seconda negativa quindi è concava, sicché sta tutta sotto la tangente.

Figura 4.4: $u(x, y) = x + y, \quad p_0 > q > p_1$



Esempio (Utilità quasilineare). Considera l'utilità quasilineare $u(x, y) = x + \log y$. Sappiamo già che x non è essenziale, e che per m sufficientemente basso non lo compri. In questo caso $u_x/u_y = y$ quindi la condizione che caratterizza $x = 0$ nella scelta ottima è che per $x = 0$ - cioè $y = m/q$ - si abbia $y \leq p/q$; dunque $x = 0$ se $m \leq p$. Assumiamolo: dunque la scelta iniziale è $x = 0, y = m/q$. Supponiamo che q aumenti a $q' > q$. La condizione $m \leq p$ resta valida quindi la scelta finale sarà $x = 0, y = m/q'$ (tieni presente che il valore u_x/u_y per $x = 0$ scende ad m/q').

Valutiamo effetti sostituzione e reddito su y secondo Hicks. Bisogna stabilire se nel punto iniziale il valore soggettivo di x è ancora inferiore al suo prezzo p/q' - cioè se $m/q \leq p/q'$ - o meno. Se questa condizione è verificata allora il punto sulla curva di indifferenza originale ai nuovi prezzi rimane il punto originale, cioè l'effetto sostituzione è zero e tutto l'effetto sulla variazione di y è effetto è reddito. Altrimenti - cioè se $m/q > p/q'$ - la curva di indifferenza originale è tangente alla retta di pendenza p/q' nel punto con $x > 0$ che soddisfa il sistema $x + \log y = \log(m/q), u_x/u_y = p/q'$ (la prima equazione dice che l'utilità resta quella iniziale e la seconda è la condizione di tangenza ai nuovi prezzi) che dà $y = p/q'$ ed $x = \log \frac{m/q}{p/q'}$. Questo è il caso disegnato nella figura qui sotto, pannello sinistro.

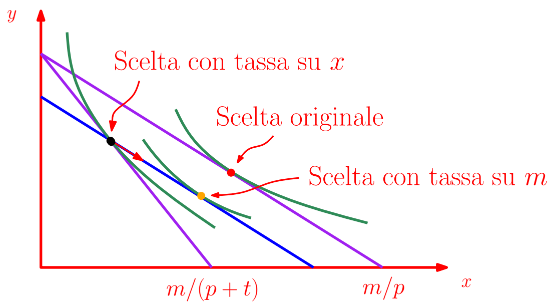


Se assumiamo invece $m > p$ - così $x > 0$ sia prima che dopo l'aumento di q - la scelta ottima di y è data direttamente dalla condizione di tangenza $y = p/q$ quindi l'effetto di un aumento di q è tutto effetto sostituzione. La figura è quella qui sopra, pannello destro.

Applicazione: tasse su un bene o sul reddito

Quando abbiamo parlato di tasse c'era solo un bene. Adesso capiamo che tassare il consumo di un bene, che equivale ad aumentarne il prezzo da p a $p + t$, fa ruotare il vincolo in senso antiorario come nella figura 4.5 e quindi - se è un bene normale - ne fa ridurre il consumo non solo per l'effetto negativo sul reddito ma anche per l'effetto distorsivo sul suo prezzo in termini di y. Quindi è legittimo chiedersi se non si possa ottenere, con una tassa sul reddito, lo stesso gettito a costo inferiore in termini di utilità per il consumatore.

Figura 4.5: Tassa su x o su m



Come illustra la figura 4.5 la risposta è sì. Infatti la scelta con la tassa su x, diciamo $(x^\star, y^\star)$, soddisfa il vincolo $(p+t)x^\star + qy^\star = m$ quindi anche $px^\star + qy^\star = m - tx^\star$ che è quello ottenuto con tassa sul reddito con gettito uguale. Ma su questo vincolo ci sono panieri con utilità maggiore di $(x^\star, y^\star)$ perché in quel punto il valore soggettivo di x è $(p+t)/q > p/q$ quindi puoi far salire u comprando x, vedi figura.

Tornando a pensare in termini di tassa sulla domanda, da quanto detto possiamo dedurre che: se la quantità relativa del bene x è più o meno omogenea nelle scelte dei vari consumatori, allora una tassa sul reddito raggiunge lo scopo a costi inferiori; se invece le scelte su x dei diversi consumatori hanno variabilità alta - c'è chi ne consuma tanto e chi niente - allora una tassa sul reddito calibrata sul consumatore "medio" di fatto favorisce chi di x consuma molto e penalizza chi ne consuma poco (per il consumatore limite con $x^\star = 0$ la tassa equivalente sul bene sarebbe zero). A questo punto possiamo pensare all'IVA, che è una tassa sul consumo. Sarebbe meglio eliminarla e sostituirla con una tassa sul reddito? Non è detto, perché dei vari beni c'è chi ne consuma molto e chi poco quindi variando l'aliquota da bene a bene puoi usarla a fini redistributivi: per esempio se vuoi favorire i poveri metti un'aliquota bassa sui beni di prima necessità e una alta sui beni di lusso. In generale funziona esattamente così, ma non dimentichiamo che se la domanda di beni di lusso è elastica c'è il problema che la tassa grava sui produttori.

4.3 La Legge della Domanda

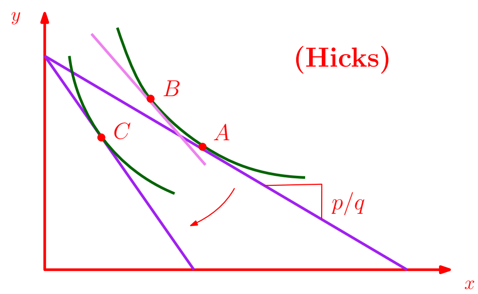
Ricorda che il problema che ci siamo posti all'inizio del capitolo era quello di verificare se la domanda di un bene è effettivamente decrescente, e a questo punto abbiamo la risposta: la domanda di un bene può *non* essere decrescente nel suo prezzo. Questo è il caso dei beni di Giffen, che sono casi particolari - l'esempio tipico è un bene inferiore che "pesa" molto nel paniere consumato, tipo le patate nell'Irlanda dell'800: siccome ne consumi un sacco se diminuisce il prezzo anche di poco risparmi tanto (quindi l'effetto sostituzione è esiguo), e siccome non ne puoi più le sostituisci con qualcos'altro. Che l'effetto reddito è più forte per beni che "pesano" di più nel paniere scelto lo possiamo vedere nel caso Cobb-Douglas visto prima: con $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ la spesa su x è αm, e l'effetto reddito (Slutsky) è $\alpha \Delta x$ - più alta è la frazione di m spesa su x più forte è l'effetto reddito, e se α è vicino ad 1 l'effetto sostituzione è irrilevante.

Particolari per quanto siano questi esempi la conclusione è che la domanda non è *sempre* decrescente. Però - e questa è la cosiddetta ***legge della domanda*** - *nel caso dei beni normali la domanda è decrescente nel prezzo*. Perché in quel caso effetto sostituzione ed effetto reddito vanno nella stessa direzione, e se un prezzo scende si consuma di più sia per l'uno che per l'altro effetto. Conclusione: si può affermare che "normalmente" - cioè per beni normali - la domanda è decrescente. Questo è quello che assumeremo di norma nel seguito del corso.[16]

4.4 Variazioni di prezzo nelle tre scelte (x, y), (ℓ, c) e (c_1, c_2).

Ovviamente parliamo di: bene 1 e bene 2; consumo e tempo libero; consumo presente e consumo futuro. Vogliamo ricordare che le variazioni di prezzo nelle tre scelte hanno effetti diversi, assumendo che tutti i beni sono normali. La differenza fondamentale è che nel primo caso il reddito non dipende dai prezzi, mentre negli altri due sì - e questo cambia tutto.

Figura 4.6: Beni Normali: effetto reddito e sostituzione si cumulano



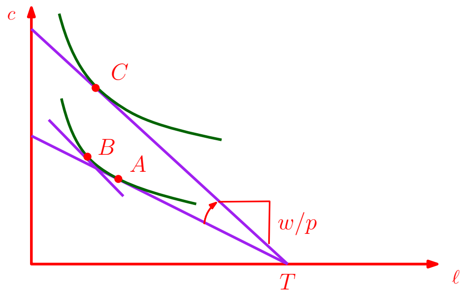
Nella Figura 4.6 è rappresentata la variazione della scelta del bene normale x nel caso standard $px + qy = m$, in cui come sappiamo se p aumenta la quantità consumata di x si riduce per l'effetto sostituzione e anche per l'effetto reddito: si riduce da A a B ed anche da B a C. Gli effetti si cumulano, e il consumo del bene sicuramente decresce.

Nel caso della scelta fra consumo e tempo libero anche se i beni sono normali l'effetto reddito e sostituzione vanno in direzione opposta. Questo dipende dal fatto che nel vincolo $pc + w\ell = wT$, dove p è il prezzo del consumo, w il prezzo del lavoro, ℓ è il tempo libero e T il tempo totale a disposizione, il reddito dipende dal prezzo w. Se w aumenta sale il prezzo di ℓ ma sale anche il reddito. Quindi l'effetto sostituzione fa ridurre ℓ ma l'effetto reddito lo fa aumentare, e l'effetto totale è ambiguo. Questo caso è rappresentato nella Figura 4.7: da A a B (effetto sostituzione) la quantità di ℓ si riduce; ma da B a C (effetto reddito) aumenta. In genere si assume che in questo caso l'effetto sostituzione domina, il che implica che un aumento del salario genera un aumento di offerta di lavoro (ℓ si riduce), cioè che la curva di offerta di lavoro è crescente.

Nel caso infine della scelta fra consumo presente e consumo futuro, con vincolo di bilancio $c_2 - m_2 = -(1 + r)(c_1 - m_1)$, l'effetto di un incremento di r (cioè del prezzo di c_1) è diverso a seconda che al prezzo iniziale il consumatore risparmia o prende a prestito, perché il vincolo *ruota* intorno al punto (m_1, m_2). Per un consumatore che al livello iniziale di r risparmia, cioè $c_1 < m_1$, l'effetto sostituzione fa ridurre c_1 ma l'effetto reddito lo fa aumentare (perché è

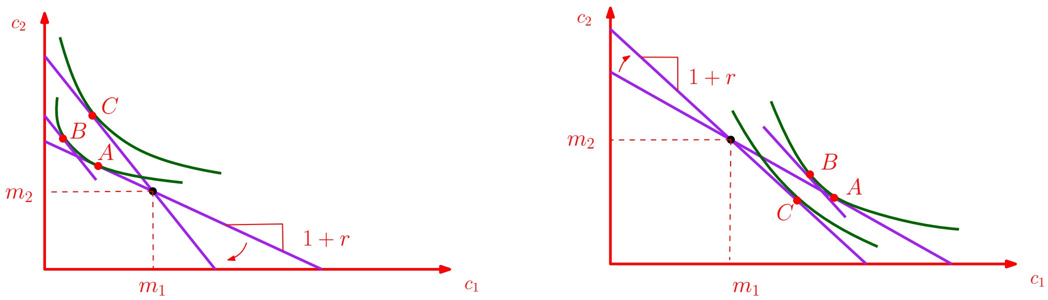
[16] La proposizione formale, che asserisce che la derivata parziale della domanda di x_i rispetto al suo prezzo è negativa nel caso di un bene normale, è alla fine della sezione 5.

Figura 4.7: Consumo e tempo libero: effetto reddito e sostituzione sono opposti



avvantaggiato dall'aumento del rendimento del risparmio). Vedi Figura 4.8 pannello sinistro. Per un consumatore che prende a prestito, $c_1 > m_1$, effetto reddito e sostituzione spingono entrambi verso una riduzione di c_1 perché l'aumento di r gli fa pesare di più il debito contratto, vedi pannello destro della figura.

Figura 4.8: Consumo presente e futuro



5 Nero su bianco

Abbiamo intuito e argomentato, adesso mettiamo un po' mano a carta e penna. Ci servono un paio di cose da *GdT* che cominceremo col riassumere brevemente per poterle usare. Poi vedremo nero su bianco i risultati sulla scelta che abbiamo usato tutto il tempo.

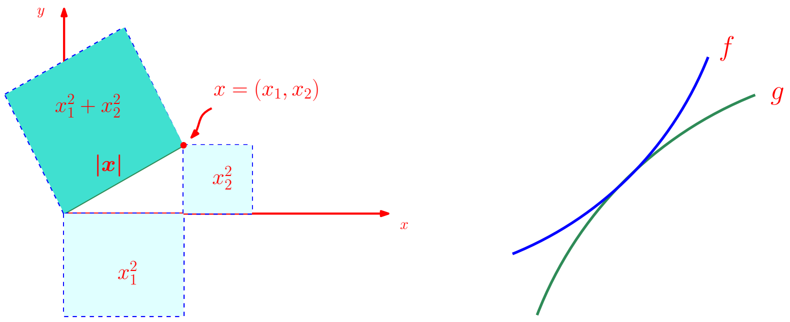
5.1 Preliminari

Intanto la lunghezza in $\mathbb{R}^n$: in $\mathbb{R}$ è semplicemente il valore assoluto, per esempio la lunghezza del segmento da zero a -3 è $3 = |-3|$; così in $\mathbb{R}^n$ si continua ad usare il simbolo $|x|$ per indicare la lunghezza di $x = (x_1, \ldots, x_n)$. In $\mathbb{R}^2$ ce la dà il Teorema di Pitagora, vedi pannello sinistro in figura 5.1: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; e in $\mathbb{R}^n$ la lunghezza di x è definita dalla versione in n coordinate della stessa formula:

$$|x| := \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Poi il concetto di tangenza fra due funzioni in un punto. L'idea è raffigurata nel pannello destro della figura 5.1, e l'idea è la stessa che in $\mathbb{R}^2$: quando da x ci si sposta ad $x + \Delta x$ la corrispondente differenza $\Delta f - \Delta g$ va a zero più veloce della lunghezza $|\Delta x|$; formalmente, con

Figura 5.1: Sinistra Pitagora; Destra Tangenza



$\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ e Δg analogo, abbiamo

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta f - \Delta g}{|\Delta x|} = 0.$$

In $\mathbb{R}^2$ quando g è una retta sappiamo che ciò equivale a dire che f è derivabile e la derivata nel punto di tangenza è uguale alla pendenza della retta (vedi *GdT* se vuoi ripassare). In $\mathbb{R}^n$ (vedi *GdT* per i dettagli) la situazione è la seguente: *se* in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un piano $p(x) = f(x^0) + \sum_i a_i(x_i - x_i^0)$ è tangente ad f, *allora* necessariamente deve essere $a_i = f_i(x^0)$ (quindi sempre pendenze uguali a derivate come in $\mathbb{R}^2$); e se le derivate f_i esistono *e sono continue in* x^0 allora il piano tangente esiste (ed è l'unico candidato appena visto). In $\mathbb{R}^3$ possiamo visualizzare, f è una superficie e il piano è un piano in $\mathbb{R}^3$. Dunque il risultato è il seguente:

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali continue in x^0 allora il piano $p^t(x) = f(x^0) + \sum_i f_i(x^0)(x_i - x_i^0)$ è tangente ad f in x^0, cioè (definizione di tangenza)

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta f - \sum_i f_i(x^0)\Delta x_i}{|\Delta x|} = 0 \tag{PTg}$$

Questo limite dice che per Δx piccolo l'incremento $\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ della funzione è ben approssimato dall'incremento $\Delta p^t = \sum_i f_i(x^0)\Delta x_i$ del piano tangente.

5.2 Risultati sulla scelta del consumatore

La notazione che riprendiamo è quella della scelta in $\mathbb{R}^n$: x paniere di beni e p vettore dei prezzi; x nel vincolo se $px = m$. La prima cosa che confermeremo usando (PTg) è che effettivamente se il valore soggettivo di un bene in termini di un altro è maggiore del valore di mercato allora conviene comprare, se minore conviene vendere.

Più precisamente, l'affermazione è che se per un certo x sul vincolo di bilancio risulta $u_i/u_j \neq p_i/p_j$ allora conviene spostarsi sul vincolo sostituendo i con j almeno per piccole quantità - sempre che ciò sia fattibile, nel senso per esempio che se vuoi vendere i deve essere $x_i > 0$. Ovviamente ti devi sempre spostare *sul vincolo,* e conviene vedere come si scrive questo. Spostarsi vuol dire passare da x ad $x + \Delta x$ per qualche $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \neq 0$; e spostarsi sul vincolo vuol dire che anche $x + \Delta x$ deve stare sul vincolo, cioè la spesa totale deve restare invariata: $p \cdot (x + \Delta x) = px$. Scambiare i con j vuol dire considerare Δx con $\Delta x_k = 0$ per $k \neq i, j$; quindi la restrizione di spesa invariata (srotola le somme e lo vedi subito) diventa

$p_i \Delta x_i + p_j \Delta x_j = 0$ che dice che quanto ti entra della vendita spendi per comprare. In termini di quantità $\Delta x_j = -(p_i/p_j)\Delta x_i$, e i conti tornano anche da questo punto di vista: analogamente a quanto visto con due beni, p_i/p_j è il valore di i in termini di j, che significa che puoi scambiare una unità di i con p_i/p_j unità di j - e per linearità, Δx_i unità di i con $(p_i/p_j)\Delta x_i$ unità di j; esattamente questo dice l'uguaglianza $\Delta x_j = -(p_i/p_j)\Delta x_i$.

Andando ad u, (PTg) dice che $\Delta u \approx \sum_i u_i(x^0)\Delta x_i \equiv \Delta p^t$ nel senso che $|\Delta u - \Delta p^t|/|\Delta x| \to 0$ con $|\Delta x|$. Nota che per lo scambio Δx appena visto abbiamo $\Delta p^t = u_i \Delta x_i + u_j \Delta x_j = \Delta x_i[u_i - u_j \cdot (p_i/p_j)]$. La dimostrazione del risultato che segue usa il fatto che siccome $\Delta u \approx \Delta p^t$ di fatto per avere il segno di Δu localmente basta guardare a Δp^t.

Proposizione 2. *Supponi che x stia sul vincolo e che x_i ed x_j siano strettamente positivi. Se $u_i/u_j \neq p_i/p_j$ allora esiste $x + \Delta x \neq x$ sul vincolo con $u(x + \Delta x) > u(x)$, dove Δx_i ha lo stesso segno di $u_i/u_j - p_i/p_j$.*

Dimostrazione. Dato che $x_i, x_j > 0$ lo scambio Δx appena visto è fattibile; nota che $|\Delta x|^2 = \sum_i \Delta x_i^2 = \Delta x_i^2(1 + (p_i/p_j)^2)$, e che questo implica $|\Delta x| \to 0 \iff \Delta x_i \to 0$. Inoltre, moltiplicando e dividendo per $|\Delta x|$ otteniamo

$$\Delta u - \Delta p^t = \Delta x_i \cdot \left\{ \frac{|\Delta u - \Delta p^t|}{|\Delta x|} \sqrt{1 + (p_i/p_j)^2} \right\} \equiv \Delta x_i \cdot \eta$$

dove per (PTg) $\lim_{|\Delta x| \to 0} \eta = \lim_{\Delta x_i \to 0} \eta = 0$. Quindi

$$\Delta u = \Delta p^t + \Delta u - \Delta p^t = \Delta x_i [u_i - u_j \cdot \frac{p_i}{p_j} + \eta]$$

dove per il teorema della permanenza del segno, per Δx_i piccolo abbastanza il fattore in parentesi quadre ha il segno di $u_i - u_j \cdot (p_i/p_j)$ (perché η diventa più piccolo di questo in valore assoluto). E a questo punto il risultato è dimostrato: $u_i/u_j \neq p_i/p_j \iff u_i - u_j \cdot (p_i/p_j) \neq 0$, nel qual caso per ottenere $\Delta u > 0$ basta prendere un Δx del tipo considerato con Δx_i dello stesso segno di $u_i - u_j \cdot (p_i/p_j)$, piccolo abbastanza. □

Per contraddizione, da questa proposizione deriva direttamente che per ogni coppia di beni consumati in quantità positive il valore soggettivo deve essere uguale al prezzo; di fatto è la condizione di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo che conosciamo (tieni fissi tutti gli altri beni e ti ritrovi in $\mathbb{R}^2$):

Corollario 1. *Se x è scelta ottima ed $x_i, x_j > 0$ allora $u_i/u_j = p_i/p_j$.*

Giusto per ricordarlo, sappiamo che questo equivale a dire che per ogni coppia di beni consumati in quantità positive l'utilità marginale della spesa sui due beni deve essere uguale. C'è d'altra parte da sottolineare che il risultato *assume* che il punto interno sia ottimo. La condizione di tangenza non implica ottimalità, come abbiamo visto nella sezione 2.7. Nel caso di due beni possiamo confermare che è sufficiente l'ipotesi di convessità:

Proposizione 3. *Nel caso di due beni e curve di indifferenza convesse, un punto sul vincolo in cui curva di indifferenza e vincolo sono tangenti è scelta ottima. Se le curve sono strettamente convesse il punto di tangenza sul vincolo è unico.*

Dimostrazione. Sia (x_0, y_0) il punto in questione. La curva di indifferenza passante per quel punto è decrescente, quindi la possiamo scrivere come $y = f(x)$. Nota che questo vuol dire $u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$. Per ipotesi questa f è tangente al vincolo in x_0, e poiché è convessa sta sopra la tangente; quindi per ogni altro punto (x, y) sul vincolo $y \leq f(x)$. Dalla monotonia di u segue allora che $u(x, y) \leq u(x, f(x)) = u(x_0, y_0)$. Nel caso di convessità stretta le curve stanno strettamente sopra le tangenti, quindi dall'argomento appena fatto segue che se per due punti A e B sul vincolo passassero curve di indifferenza tangenti dovrebbe essere sia $u(A) > u(B)$ che $u(B) > u(A)$. □

Come puoi indovinare lo stesso tipo di argomentazione vale per dimostrare che nel caso di curve di indifferenza *concave* (vedi figura 2.17) il punto di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo è di utilità *minima*: le funzioni concave stanno sopra la tangente, quindi ogni altro punto sul vincolo ha utilità superiore al punto di tangenza.

Anche nel caso di n beni un'analoga ipotesi di convessità delle preferenze garantisce che un paniere strettamente positivo in cui le utilità marginali della spesa sono uguali è ottimo; però la dimostrazione richiede strumenti che noi non abbiamo. Tanto per saperlo, l'argomento è "quasi-concave programming".

5.3 Equazione di Slutsky e Legge della Domanda

Lo scopo qui è di dimostrare che la domanda di un bene normale è decrescente nel suo prezzo. Per far questo ci serviremo della cosiddetta equazione di Slutsky che è la forma locale "seria" degli effetti reddito e sostituzione.

I panieri di scelta sono sempre $x \in \mathbb{R}^n_+$; e $p \cdot x \equiv \sum p_i x_i$, dove $p_i > 0 \, \forall i$. Come sempre avremo una funzione di utilità u continua e monotona; e assumeremo anche che curve di indifferenza siano strettamente convesse e che entrambi i beni siano essenziali, così avremo soluzioni uniche interne. Assumeremo inoltre che tutte le funzioni che appaiono siano differenziabili e che le soluzioni di tutti i problemi considerati siano uniche.

Dobbiamo considerare i due problemi seguenti; il primo è quello che abbiamo visto sempre, il secondo è nuovo: minimizza la spesa necessaria ad ottenere un dato livello di utilità:

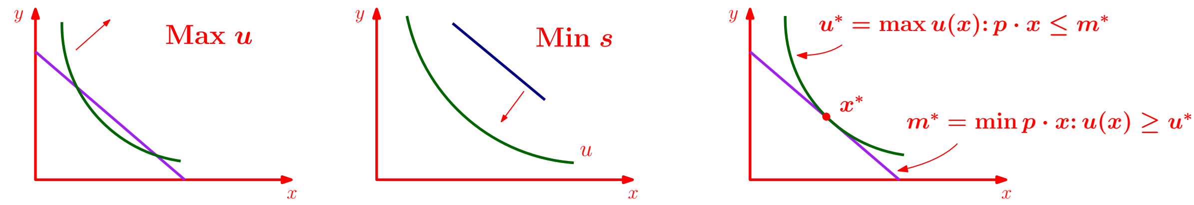
$$
\begin{array}{lll@{\qquad\qquad}lll}
(\mathrm{Max}u) & & \max u(x) & (\mathrm{Min}s) & & \min p \cdot x \\
& & s.a.\ p \cdot x \leq m & & & s.a.\ u(x) \geq u
\end{array}
$$

Il secondo problema è fondamentale per isolare l'effetto sostituzione perché tiene l'utilità costante. Assumendo $m > 0$ ed $u > u(0)$, servirà dimostrare che se la spesa minima per raggiungere utilità u è m allora se hai m l'utilità massima che puoi raggiungere è u. In realtà, come è illustrato nella Figura 5.2, la soluzione dei due problemi è la stessa.

Indica con $x(p, m)$ la soluzione del problema Max$u$ e con $U(p, m) = u(x(p, m))$ l'utilità massima; analogamente per Min$s$ indica con $\tilde{x}(p, u)$ la soluzione e con $S(p, u) = p \cdot \tilde{x}(p, u)$ la relativa spesa minima. Nota che poiché $u > u(0)$ abbiamo $S(p, u) > 0$; e che dalla continuità di u segue che $u(\tilde{x}(p, u)) = u$, perché se $u(x) > u$ puoi raggiungere u con quantità inferiori di beni e quindi con spesa inferiore. Quanto sopra asserito è formalizzato nel seguente

Lemma. *(i)* $\tilde{x}(p, u) = x(p, S(p, u))$; *(ii)* $x(p, m) = \tilde{x}(p, U(p, m))$; *(iii)* $U(p, S(p, u)) = u$.

Figura 5.2: Max u, Min s



Dimostrazione. La parte (iii) segue direttamente dalla (i) perché $U(p, S(p,u)) = u(x(p, S(p,u))) = u(\tilde{x}(p,u)) = u$. Per la parte (i): supponi che $\tilde{x} \equiv \tilde{x}(p,u)$ non risolva Max$u$ con reddito $p\cdot\tilde{x}$; allora c'è x tale che $p\cdot x \leq p\cdot\tilde{x}$ ed $u(x) > u(\tilde{x})$; ma allora per $\alpha < 1$ sufficientemente vicino ad 1 avremmo $p\cdot\alpha x < p\cdot\tilde{x}$ ed $u(\alpha x) > u(\tilde{x})$ (continuità di u), contraddizione dell'ottimalità di $\tilde{x}$. La (ii) si dimostra analogamente. □

Differenziando la (i), ponendo $m = S(p,u)$ e sostituendo $u = U(p,m)$ dalla (iii), otteniamo

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{p,m} + \left.\frac{\partial x_i}{\partial m}\right|_{p,m} \cdot \left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)}$$

Nota che la derivata al primo membro esprime bene l'effetto sostituzione perché $\tilde{x}$ risolve il problema con u costante - e dimostreremo che è sempre negativa. La derivata che ci interessa è la $\partial x_i/\partial p_i$ al secondo membro, ma per esprimerla in modo conveniente dobbiamo lavorare un minimo sull'ultimo termine.

Lemma. *Abbiamo*

$$(i)\ \left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} \leq 0\,; \qquad (ii)\ \left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} = x_i(p,m)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che S è concava in p, che cioè $S(\lambda p + (1-\lambda)p', u) \geq \lambda S(p,u) + (1-\lambda)S(p',u)$ per $0 \leq \lambda \leq 1$; ponendo $\tilde{x} = \tilde{x}(\lambda p + (1-\lambda)p', u)$ abbiamo $S(\lambda p + (1-\lambda)p', u) = (\lambda p + (1-\lambda)p')\cdot\tilde{x} = \lambda p\cdot\tilde{x} + (1-\lambda)p'\cdot\tilde{x}$, ma $p\cdot\tilde{x} \geq p\cdot\tilde{x}(p,m) = S(p,m)$ e $p'\cdot\tilde{x} \geq p'\cdot\tilde{x}(p',m) = S(p',m)$ da cui il risultato. Adesso la (ii): fissa $\tilde{x}^0 = \tilde{x}(p^0,u)$ e considera la funzione $\phi(p) = S(p,u) - px^0$; abbiamo $\phi(p) \leq \phi(p^0) = 0$, da cui $0 = \frac{\partial\phi}{\partial p_i}(p^0) = \frac{\partial S}{\partial p_i}(p^0,u) - \tilde{x}^0_i$; togliendo il soprascritto questo si legge $\left.\frac{\partial S}{\partial p_i}\right|_{p,u} = \tilde{x}_i(p,u)$; sostituendo $x(p,m) = \tilde{x}(p, U(p,m))$ dal lemma precedente otteniamo quanto voluto. Derivando adesso otteniamo $\partial\tilde{x}_i(p,u)/\partial p_i = \partial^2 S(p,u)/\partial p_i^2$, che è negativo per la concavità di S. □

Usando questo lemma e riarrangiando sopra otteniamo la ***equazione di Slutsky***:

$$\left.\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right|_{p,m} = \left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial p_i}\right|_{p,U(p,m)} - x_i(p,m)\cdot\left.\frac{\partial x_i}{\partial m}\right|_{p,m}$$

Questa è l'equazione che isola sostituzione e reddito: il primo termine a destra è l'effetto sostituzione - che abbiamo dimostrato essere sempre negativo - e il secondo l'effetto reddito - che può essere positivo se $\partial x_i/\partial m < 0$ e forte se $x_i(p,m)$ è grande. Ricordando che un bene normale è caratterizzato dalla $\partial x_i(p,m)/\partial m > 0$, l'equazione di Slutsky e la parte (i) dell'ultimo lemma implicano direttamente la ***legge della domanda:***

Teorema. *La domanda di un bene normale è decrescente nel suo prezzo.*

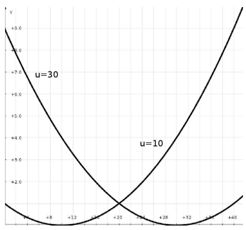
6 Esercizi

6.1 Utilità e vincolo di bilancio

Esercizio 1 (Curve di indifferenza). Dimostra che due curve di indifferenza non possono incontrarsi.

Esercizio 2. Disegna qualche curva di indifferenza della funzione di utilità $u(x, y) = 100 - (x - 10)^2 - (y - 10)^2$. Ti viene in mente qualche assunzione comune che le preferenze rappresentate da questa funzione *non* soddisfano?

Esercizio 3. Sia $u(x, y) = x + \sqrt{y}$. Considera la seguente costruzione delle curve di indifferenza $u = c$: $x + \sqrt{y} = c \iff \sqrt{y} = c - x \iff y = (c - x)^2 = (x - c)^2$. Per $c = 10, 30$ le curve così costruite sono riportate (riscalate per comodità di visualizzazione) nella figura di sotto. Ovviamente c'è errore, perché non sono decrescenti, si incrociano e d'altra parte se calcolo la pendenza è $-u_x/u_y = -2\sqrt{y} < 0$ (come deve essere). Dov'è l'errore? Trovalo e traccia approssimativamente la mappa giusta (diciamo per $c = 10, 20, 30$).



Esercizio 4 (Vincoli Multipli). Cercare lavoro costa tempo e denaro. Supponi di poter dedicare allo scopo, in una certa settimana, 30 ore e 75 Euro, e che ci sono due tipi di ricerca possibile: andare di persona o spedire una lettera. Ogni visita costa 7.5 Euro e 5 ore di tempo, e ogni lettera costa 1.5 Euro e mezz'ora di tempo. Supponendo che visite v e lettere ℓ possano assumere valori reali qualunque descrivi l'insieme delle scelte (v, ℓ) possibili.

Esercizio 5 (Ancora Vincoli Multipli). Una persona deve decidere come impiegare il suo tempo e il suo denaro in due attività a e b. Ha 20 ore e 50 Euro. Una unità di a prende un'ora e costa 10 Euro, una di b prende mezz'ora e costa 1 Euro. Descrivi l'insieme di scelte possibili nel piano (a, b).

Esercizio 6. Una giovane coppia che ha appena acquistato casa spende tutto il suo reddito, pari a 12.000 Euro, in spese di ristrutturazione dell'immobile e spese per l'acquisto di altri beni e servizi. Indichiamo con x le spese in ristrutturazioni e con y le altre spese. I prezzi dei due beni compositi siano $p_x = p_y = 1$). (a) Scrivi e disegna l'insieme delle scelte possibili (quelle al di sotto del vincolo di bilancio). (b) Il Governo offra adesso un rimborso del 50% della somma spesa per i lavori di ristrutturazione, rimborso che non può in ogni caso superare i 3000 Euro. Scrivi e disegna il nuovo insieme di scelte possibili.

6.2 Scelta

Esercizio 7 (Costi e benefici marginali). La mensa all'università costa 200 Euro di registrazione e poi si mangia quanto si vuole; gli studenti consumano in media 6kg di cibo a testa al mese. (a) Se il prezzo sale a 250 Euro il consumo di cibo dei registrati aumenta? (b) Se la registrazione diventa gratis ma si paga il cibo il consumo dei registrati varia?

Esercizio 8. Trova la scelta ottima nei seguenti casi: (a) $u(x,y) = xy, p = 2, q = 3, m = 5$; (b) $u(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, p = 3, q = 2, m = 9000$; (c) $u(x,y) = y + \ln x, p = 2, q = 3, m = 10$ (*R:* $(x,y) = (\frac{5}{4}, \frac{5}{6}); (1200, 2700); (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$)

Esercizio 9. Considera la scelta del consumatore con utilità $u(x,y) = xy^2$ e prezzi $p = 2, q = 1$ al variare di m. Sono entrambi beni normali? (*Sugg.* Trova $x(m), y(m)$ e lo vedi subito)

Esercizio 10. Considera un consumatore Cobb Douglas $u(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$con prezzi $p = (p_x, p_y)$ e tassa proporzionale t sul reddito m (cioè con vincolo $xp_x + yp_y = (1-t)m$). (a) Ricava la scelta $x(p,m,t)$. (b) Scrivi l'espressione dell'elasticità di x rispetto a t, diciamo η.

Esercizio 11. Considera un consumatore con utilità $u(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$ e reddito $m = 10$. Mostra che ottiene utilità maggiore con prezzi $(1,5)$ che con prezzi $(2,3)$.

Esercizio 12. (a) Assumi utilità $u(x,y) = xy$ e vincolo di bilancio $x + y = 10$. Il punto $(3,7)$ risolve il problema di ottimo vincolato di questo consumatore? Se no, di quale bene si consuma troppo poco in quel punto? (b) Qual è il punto di ottimo sul vincolo $4x + 6y = 10$?

Esercizio 13. Supponi che il nostro consumatore abbia $u_x/u_y = y/(x+1)$ e che $q = 2, m = 10$. trova la scelta di x in funzione di p (*R:* $x = \frac{5}{p} - \frac{1}{2}$)

Esercizio 14. Un consumatore ha utilità $u(x,y) = x^{1/3} + y^{2/3}$ e vincolo $x + 2y = m > 0$. Determina la scelta ottima in funzione di m.

Esercizio 15. Sia $u(x,y) = 2xy, p = 10, q = 5$. Quanto deve spendere questa persona per ottenere un'utilità di 400? Assumi come prima che la soluzione sia nel punto di tangenza fra curva di utilità e retta della spesa (*R:* 200)

Esercizio 16. (a) Maria ha un reddito $m = 100$ e deve scegliere una combinazione di due tipi di vacanza: x giorni del tipo più caro, $p_x = 4$ e y giorni del tipo più economico, $p_y = 1$. Disegna le possibilità di scelta (delimitate dagli assi e dal vincolo di bilancio). (b) Il dottore le prescrive almeno 30 giorni di vacanza. Disegna le possibilità di scelta con questo ulteriore vincolo. (c) Se l'utilità è $u(x,y) = 5x + y$, Maria cambia la scelta in conseguenza della prescrizione del dottore?

Esercizio 17. Calcola l'utilità nel punto di ottimo del consumatore che massimizza $u(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_1^2$ sul vincolo $x_1 + 2x_2 = 8$.

Esercizio 18 (Scelta Intertemporale). Un consumatore ha reddito 50 e 100 rispettivamente nei periodi 1 e 2; il tasso di interesse è del 5%, e la sua funzione di utilità è $u(c_1, c_2) = c_1^{0.2}c_2^{0.8}$. (a) Quanto risparmia nel primo periodo? (*R.* circa 21, è CD standard) (b) Se il tasso di interesse scende il consumo nel primo periodo sale (perché scende il suo prezzo $1+r$); a tasso $r = 0$ questo signore prende a prestito o risparmia lo stesso? (c) Sotto quale soglia deve scendere m_1 perché cominci a prendere a prestito? (*R(b).* risparmia lo stesso; *R(c).* $m_1 = 25$; per vederlo calcola u_1/u_2 nel punto m_1, m_2).

Esercizio 19. Considera un consumatore con utilità Cobb-Douglas $u(x,y) = \sqrt{xy}$ su due beni. Supponi che al tempo t prezzi e reddito siano p, q ed m, e al tempo $t + \Delta t$ diventino p', q' ed m'. Chiama U ed U' le utilità che il consumatore raggiunge nei due periodi. Dimostra che $U' > U$ se l'incremento relativo del reddito $(m' - m)/m$ è maggiore della media degli incrementi relativi dei due prezzi - che sono $(p' - p)/p$ e $(q' - q)/q$. Usa l'approssimazione $\ln x \approx x - 1$. (*Sugg.* Ti basta ottenere una disuguaglianza $m'/m > \dots$ e prendere i logaritmi)

Esercizio 20. Per il consumatore con utilità $u(x,y) = \min\{x,y\} + y$ disegna la mappa delle curve di indifferenza e trova la scelta ottima in funzione di $p_x/p_y \neq 1$.

Esercizio 21. Trova valori di prezzi e reddito per i quali le seguenti due funzioni dànno luogo a scelte diverse:

$$u_1(x,y) = \min\{x,y\} + y\,, \quad u_2(x,y) = 3\min\{x,y\} + y$$

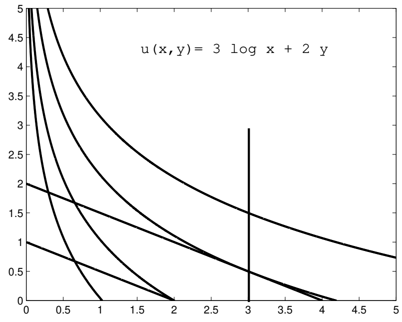
(*Suggerimento:* Disegna)

Esercizio 22. Considera il consumatore con utilità $u(x,y) = x + \ln y$, con vincolo di bilancio $2x + y = m$, dove $m > 0$. Disegna le funzioni $x(m), y(m)$. (*Suggerimento:* se $m < 2$, $y(m) = m$. Per dimostrare questo osserva che $y \leq m$ sul vincolo, e che per tali valori le curve di indifferenza che intersecano il vincolo sono sempre meno ripide del vincolo stesso)

Esercizio 23. (lo stesso del precedente, in generale) Considera il problema di scelta del consumatore con $u(x,y) = x + \sqrt{y}$ sul vincolo $18x + y = m$. Mostra che esiste m_0 tale che per $m \geq m_0$ la soluzione è interna, per $m < m_0$ la scelta ottima ha $x = 0$.

Esercizio 24. Utilità $u(x,y) = \ln x + y$, vincolo $2x + qy = 20$. Dimostra che per q sufficientemente alto si ha $y = 0$. (*R.* $q \geq 20$)

Esercizio 25. Considera il consumatore con utilità $u(x,y) = 3\ln x + 2y$, reddito m e prezzi $p_x = 0.5$, $p_y = 1$. Il suo problema di scelta è $\max_{(x,y)}\ 3\ln x + 2y$ sul vincolo $0.5\,x + y = m$. (a) Trova la scelta ottima $(x(m), y(m))$ in funzione di m. Alcune curve di indifferenza e i vincoli per $m = 1, 2$ sono disegnate nella figura qui sotto. (b) Disegna $x(m)$ ed $y(m)$ in due grafici. (c) Trova adesso le scelte ottime come funzioni di domanda, $x(p_x)$ ed $y(p_y)$. (*Sugg.* la disuguaglianza da cui dipendono le soluzioni è $m \lesseqgtr 1.5p_y$).



Esercizio 26. $u(x,y) = a\ln x + by$, prezzi e reddito p, q, m. Mostra che esiste m_0 tale che per $m \leq m_0$ la soluzione ha $y^{eq} = 0$ (compri solo x), per $m > m_0$ la soluzione è interna al vincolo. (*Sugg.* Disegna la mappa di u e capisci cosa succede)

Esercizio 27. $u(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$, $p_x = 20, p_y = 1$, $m = 300$. Quanto pagheresti per vedere p_x dimezzato? (Approssima: $1/\sqrt[3]{4} \approx 0.63$)

Esercizio 28. Consumo, due beni. Prezzi $p_1 = 10, p_2 = 5$. Dotazione iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt{80}, \sqrt{20})$, dunque reddito $m = 10 \cdot \sqrt{80} + 5\sqrt{20}$. Utilità $u(x,y) = \sqrt{xy}$. Nella soluzione del relativo problema di massimo vincolato, il presente individuo è un acquirente netto di quale bene? Di quanto? (*Suggerimento:* scrivi tutti i numeri come multipli di $\sqrt{5}$, e semplifica).

Esercizio 29. (a) (Facile) Le preferenze dei dirigenti di un istituto scolastico possono essere rappresentate dalla funzione di utilità $u(c,x) = cx^2$, dove c è la spesa in attrezzature informatiche ed x è la spesa in altri beni. L'istituto dispone di 60.000 Euro, sicché il vincolo di bilancio è $c + x = 60.000$. Determina la scelta ottima e illustra graficamente nel piano (c,x), verificando che il saggio marginale di sostituzione fra i due beni è decrescente. (b) (Più difficile) Sia quella del punto (a) la situazione fino all'anno t_0. Nell'anno t_1 il ministero dell'istruzione concede una sovvenzione di 10.000 Euro condizionata alla realizzazione di un incremento di almeno 10.000 Euro della spesa su c rispetto agli anni precedenti. Rappresenta graficamente il vincolo di bilancio al tempo t_1 e determina la scelta ottima, in particolare stabilendo se all'istituto conviene o meno avvalersi della sovvenzione.

Esercizio 30 (Somma di domande individuali). Considera due consumatori di due beni, con funzioni di utilità $u_1(x,y) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$ ed $u_2(x,y) = xy$; hanno entrambi in dotazione 10 unità del bene y. Il prezzo di x è p, quello di y è 2. Trova la domanda aggregata del bene x, cioè $x_1(p) + x_2(p)$. E' decrescente?

Esercizio 31. Considera il problema di scelta intertemporale per il consumatore con $u(c_1, c_2) = c_1 c_2, r = 0.05, m_1 = 400, m_2 = 0, p_1 = p_2 = 1$. (a) Trova la scelta ottima; (b) Quanto risparmia nel primo periodo?; (c) Se r passa a 0.08 ti aspetti un rapporto c_2/c_1 più alto o più basso di prima? Controlla.

Esercizio 32. Calcola la scelta intertemporale ottima con $u(c_1, c_2) = \min\{c_1, c_2\}, r = 0.05, m_1 = 8000, m_2 = 7400$.

Esercizio 33 (Scelta intertemporale). (a) Scrivi in termini di moneta al tempo 2 il vincolo di bilancio intertemporale su (c_1, c_2), consumo oggi e domani, di un consumatore con redditi m_1, m_2 *in unità di consumo* nei due periodi, dove il prezzo di c_1 è 1, quello di c_2 è $1 + \pi$ con π tasso di inflazione, e i tassi nominali attivi e passivi sono $i_a < i_p$ (il tasso attivo si applica quando tu presti, quello passivo quando prendi a prestito). Denota con r_a, r_p i relativi tassi reali. Non ne abbiamo ancora parlato ma il tasso reale r è definito in termini di tasso nominale i ed inflazione π dalla relazione

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi}.$$

Vediamo qual è la situazione: inflazione π vuol dire che se p_1 è il prezzo del consumo oggi, domani il prezzo del consumo $p_2 = (1+\pi)p_1$. Quindi assumendo $p_1 = 1$ abbiamo $p_2 = 1 + \pi$.

Il vincolo di bilancio con tasso nominale i (cioè $i_a = i_p = i$) è

$$\begin{aligned}
(1+i)\,p_1c_1 + p_2c_2 &= (1+i)\,p_1m_1 + p_2m_2 \\
(1+i)\,c_1 + (1+\pi)\,c_2 &= (1+i)\,m_1 + (1+\pi)\,m_2 \\
\left(\frac{1+i}{1+\pi}\right)c_1 + c_2 &= \left(\frac{1+i}{1+\pi}\right)m_1 + m_2 \\
(1+r)\,c_1 + c_2 &= (1+r)\,m_1 + m_2 \\
c_2 &= m_2 + (1+r)\,(m_1 - c_1)
\end{aligned}$$

(a1) Se non ti piace $i_a < i_p$, fai il caso $i = i_a = i_p$. Che pendenza ha il vincolo? (b) Indica graficamente la natura della soluzione del problema della massimizzazione dell'utilità sul vincolo in (a).

6.3 Effetto reddito, effetto sostituzione

Esercizio 34. Sia $u(x,y) = \ln x + y$, $p = 2$, $q = 3$, $m = 10$ inizialmente, e $\Delta q = -1$; scomponi $y(p, q + \Delta q, m) - y(p, q, m)$ nella parte dovuta all'effetto reddito e quella dovuta all'effetto sostituzione usando il metodo di Slutsky.

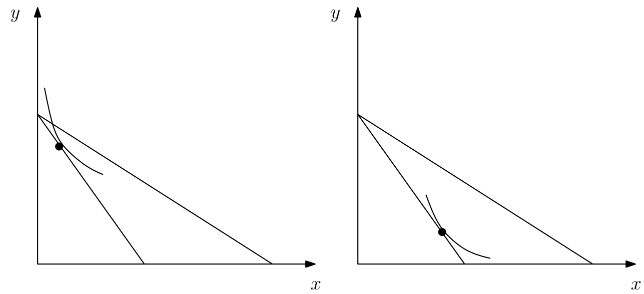
Esercizio 35. Utilità $u(x,y) = x^2y$, prezzi $p = 4, q = 10$, reddito $m = 360$. Supponi che q scenda ad 8, e calcola effetto reddito e sostituzione nella variazione della scelta di y.

Esercizio 36. Considera la funzione $u(x,y) = x + y$ e una variazione di p da p_0 a $p_1 < p_0$ con $p_0/q < 1$; illustra graficamente che in questo caso i metodi di Hicks e Slutsky dànno lo stesso risultato.

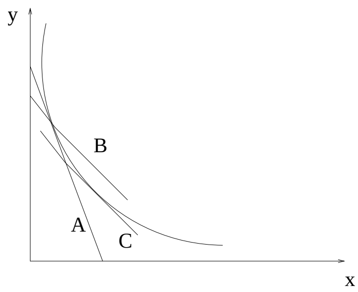
Esercizio 37. Considera la stessa $u(x,y) = x + y$ dell'esercizio precedente e una variazione di p da p_0 a $p_1 > p_0$ con $p_0/q < 1 < p_1/q$; illustra graficamente che anche in questo caso i metodi di Hicks e Slutsky dànno lo stesso risultato.

Esercizio 38. (a) Sia $u(x,y) = \sqrt{xy}, p^0 = (p_x, p_y) = (3,2), m = 50, \Delta p = (\Delta p_x, \Delta p_y) = (0, 0.5)$. Calcola effetto reddito ed effetto sostituzione sul consumo di y con $\Delta m = y(p,m)\Delta p_y$. (b) Calcola il $\Delta^* m$ effettivamente necessario a lasciare il consumatore sulla curva di indifferenza iniziale. (c) Dimostra che per $\Delta q \to 0$ la differenza $\Delta^* m - \Delta m$ tende a zero più velocemente di Δq, cioè che $(\Delta^* m - \Delta m)/\Delta q \to 0$.

Esercizio 39. (a) Sia $u(x,y) = x + \sqrt{y}, (p,q) = (18,1), m = 99, \Delta p = -2$. Calcola effetto reddito ed effetto sostituzione con il metodo Slutsky - $\Delta m = x(p,m)\Delta p$. (b) Si vede in (a) che l'effetto sostituzione è preponderante. Pensi che la situazione iniziale del consumatore sia quella del pannello sinistro o quello destro della figura qui sotto? A sinistra consuma poco x, a destra vicino al massimo che si può premettere. Verifica se l'intuizione è giusta calcolando $px/m, qy/m$.



Esercizio 40. Con riferimento alla figura:



siamo sul vincolo di bilancio A, poi p scende, e per calcolare l'effetto sostituzione poniamo $\Delta m = x^\star \Delta p$, per permettergli di ricomprare il paniere iniziale ai nuovi prezzi; graficamente lo portiamo sul vincolo B. Questo come sappiamo è una approssimazione della Δm che dovremmo attribuirgli, che dovrebbe essere tale da mantenerlo sulla stessa curva di indifferenza ai prezzi nuovi, portandolo sul vincolo C. Come si vede siamo "troppo generosi". Calcola di quanto nel caso seguente (la risposta è che in questo caso sbagliamo di una unità di m).

Utilità $u(x,y) = x + \sqrt{y}$, prezzi iniziali $(p,q) = (18,1)$, reddito $m = 99$. Poi $\Delta p = -2$, cioè p scende di 2. Per controllare le risposte: $x(p,q,m)\Delta p = -2$, $u(x(p,q,m), y(p,q,m)) = 10$, mentre la Δm che lo porta sul vincolo C è -3.

Esercizio 41 (Beni inferiori). Un bene si dice *inferiore* se il suo consumo si riduce al crescere del reddito m. Supponi ci siano soltanto due beni x, y e che l'utilità sia monotona (se $x' > x, y' > y$ allora $u(x',y') > u(x,y)$). Anche i prezzi p_x, p_y siano dati. Dimostra che i due beni non possono essere entrambi inferiori. (*Sugg.* Fallo per contraddizione)

Esercizio 42. Sia $u(x,y) = \min\{x, 2y\}, q = 1, m = 15$. Supponi che p passi da 1 a 2. Trova le scelte ottime e dì quale parte della riduzione di domanda di x è dovuta all'effetto sostituzione.

Esercizio 43. Lo stesso di prima con $u(x,y) = x$.

Esercizio 44 (Utilità CES). Considera un consumatore con utilità $u(x,y) = (x^r + y^r)^{1/r}, r < 1$. (a) Trova la scelta di x che risolve $\max u$ sul vincolo $px + qy = m$, cioè trova $x(p,q,m)$. La scelta è interna. Puoi porre per convenienza $\sigma = 1/(1-r) > 0$. (b) Prendi $r = -1$ e calcola l'effetto sostituzione (metodo Slutsky) dovuto ad una variazione di p da $p = 1$ a $p = 1.2$ (cioè $\Delta p = 0.2$), con $q = 1$ fisso, in funzione di m. Per saperlo: $1.1/(1.2 + \sqrt{1.2}) \approx 0.48$. (*R.* $-0.02m$)

7 Appendice: Scambio competitivo e Pareto efficienza

In questa appendice torniamo sull'efficienza dell'equilibrio competitivo. Quello che abbiamo visto è che in un mercato competitivo si realizzano tutti e soli gli scambi reciprocamente vantaggiosi: dopo lo scambio compratore e venditore stanno meglio che prima. Questa proprietà la possiamo vedere così: per $q < q^{eq}$ compratori e venditori stanno entrambi peggio, perché aumentando q guadagnano entrambi; per $q > q^{eq}$, se p è il prezzo al quale avviene lo scambio, poiché $D(q) < S(q)$, se $p \leq D(q)$ - condizione necessaria perché il compratore stia meglio che senza lo scambio - sarà necessariamente $p < S(q)$ - che vuol dire che il venditore sta peggio. E analogamente puoi migliorare la posizione del venditore, ma solo peggiorando quella del compratore. La conclusione è che spostandoti dall'equilibrio competitivo *non puoi migliorare la posizione di qualcuno senza peggiorare quella di qualcun altro.* Questo è esattamente il criterio di efficienza che l'equilibrio competitivo soddisfa. Si chiama *Pareto efficienza*, da Vilfredo Pareto che l'ha inventato.

Considereremo adesso un'economia di scambio, cioè: supponiamo che la produzione sia stata completata; ognuno va al mercato col suo paniere di beni, fa gli scambi che gli conviene fare, e torna a casa. Tutti sono quindi venditori e compratori, e tutti prendono i prezzi come dati.

Ci sono n beni, quindi panieri e prezzi sono in $\mathbb{R}^n_+$.[17] Ci sono H individui, il signor h ha utilità $u^h \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ che assumiamo crescente in ogni variabile, e parte con una dotazione iniziale $w^h \in \mathbb{R}^n_+$. Il totale delle risorse dell'economia è quindi $\sum_h w^h \in \mathbb{R}^n_+$. A prezzi $p \in \mathbb{R}^n_+$ il signor h sceglie $x^h(p)$ che massimizza $u^h(x^h)$ sul vincolo di bilancio $px^h \leq pw^h$.

Definizione. Un vettore di panieri $x = (x^1, \ldots, x^H) \in \mathbb{R}^{nH}_+$ è una *allocazione competitiva* se esiste p tale che $x^h = x^h(p)$ ed $\sum_h x^h(p) = \sum_h w^h$. Un vettore di panieri x è una *allocazione Pareto efficiente* se $\sum_h x^h = \sum_h w^h$ e non esiste un altro vettore z tale che $\sum_h z^h = \sum_h w^h$ e per ogni h sia $u^h(z^h) \geq u^h(x^h)$ con disuguaglianza stretta per qualche h.

Proposizione. *Una allocazione competitiva è Pareto efficiente.*

Dimostrazione. Supponi che l'allocazione competitiva x non lo sia, e prendi un vettore z che la batte. Per ogni h deve essere $pz^h \geq px^h$ con disuguaglianza stretta per qualche h (perché gli x^h sono scelte ottime sui vincoli di bilancio). Ma allora $p\sum_h z^h = \sum_h pz^h > \sum_h pw^h = p\sum_h w^h$, che contraddice $\sum_h z^h = \sum_h w^h$. $\square$

Questo è un risultato positivo e abbastanza sorprendente ma osserviamo che il criterio di Pareto efficienza non ha alcuna implicazione di equità, e sono Pareto efficienti anche allocazioni con disuguaglianza estrema. Per esempio un'allocazione in cui tutti i beni sono posseduti da un membro della comunità e tutti gli altri non hanno completamente niente è Pareto efficiente.

[17] La notazione e le altre proprietà di base di $\mathbb{R}^n_+$ le prendiamo dal capitolo *Geometria della Tangenza*.