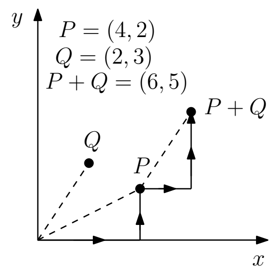
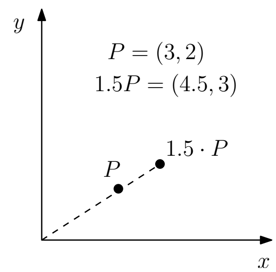
# Geometria della Tangenza

**S. Modica 2016** [1]

## 1 Preliminari

***Linearità di*** $\mathbb{R}^n$***.*** La *somma* di due punti in $\mathbb{R}^n$ diciamo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ed $y = (y_1, \ldots, y_n)$ è definita coordinata per coordinata: $x + y \equiv (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Il *prodotto* di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ per un numero reale $t$ è anch'esso coordinata per coordinata: $tx \equiv (tx_1, \ldots, tx_n)$. Identificando punti con spostamenti la linearità è chiara. Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ così visualizziamo facilmente, vedi figura di sotto.

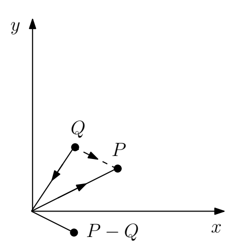



Il punto $P = (4, 2)$ si raggiunge spostandosi di 4 lungo l'asse $x$ e poi di 2 lungo l'asse $y$ (o viceversa ovviamente): $P = 4(1, 0) + 2(0, 1)$. E $P + Q$ si raggiunge andando a $P$ e da lì spostandosi di $Q$. Il prodotto è analogo: per raggiungere $1.5 \cdot P$ fai una volta e mezzo quello che hai fatto per andare a $P$.

Questo modo di spostarsi a zig zag significa pensare il punto $x \in \mathbb{R}^n$ come $x = x_1 e^1 + \cdots + x_n e^n$, dove $e^i$ denota il vettore che ha zero in tutte le coordinate tranne l'$i$-esima, dove vale 1: $e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Per esempio nel caso di $n = 2$ stiamo parlando di $e^1 = (1, 0)$ ed $e^2 = (0, 1)$. Questo modo di raggiungere $x$ è "canonico", e i vettori $e^1, \ldots, e^n \in \mathbb{R}^n$ sono appunto detti base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Altra cosa da notare a che ci siamo: $P - Q$. Il modo più facile di vedere lo spostamento $P - Q$ è farlo come $-Q + P$ partendo da $Q$: facendo $-Q$ si arriva a 0 e da lì a $P$ - vedi la figura qui sotto. Lo spostamento è dunque quello tratteggiato. Il punto $P - Q$ è quello che si ottiene con lo stesso spostamento partendo dall'origine.

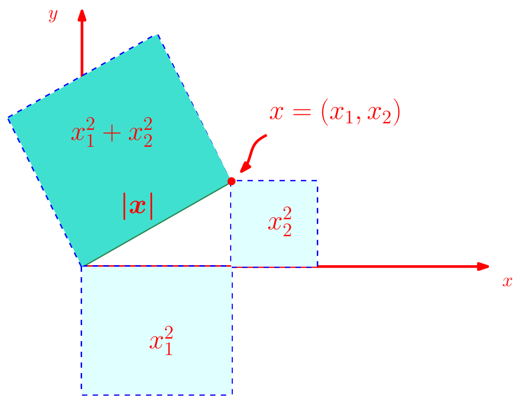



[1] Per qualche collega se si trovasse per caso a leggere questa lezione: è scritta perché è mio gusto (1) presentare l'iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y)$ come grafico della funzione lineare su $\mathbb{R}^n$ $y = a \cdot x$, generato dai vettori $e^i + a_i e^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (di solito quando si fanno spazi lineari alle funzioni non si bada, e quando si fanno le funzioni non si pensa agli spazi lineari...); e (2) introdurre il concetto di tangenza fra due funzioni $f, g$ in $x^0$ come $|f(x) - g(x)|/|x - x^0| \to 0$ per $x \to x^0$.

***Lunghezza in*** $\mathbb{R}^n$***.*** La lunghezza di un punto, pensato come segmento, si ottiene come generalizzazione del teorema di Pitagora. Con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ si definisce

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Per $n = 1$ è il valore assoluto in $\mathbb{R}$, per $n = 2$ è la formula del teorema di Pitagora, vedi figura.




***Funzioni di più variabili.*** Sono le funzioni da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Le funzioni di una variabile hanno per dominio la retta e il grafico è una curva nel piano (spazio a due dimensioni). Le funzioni di due variabili hanno per dominio il piano e il grafico è una superficie nello spazio a tre dimensioni. Per esempio il tetto dell'aula, una semisfera, Monte Pellegrino svuotato. In questo caso per il piano si usano di solito le lettere $(x, y)$ e l'altezza si indica con la lettera $z$, così lo spazio è $(x, y, z)$. Per capire com'è fatto un grafico di una $f(x, y)$ si guardano le curve di livello. Pensa alla funzione Monte Pellegrino. Se vuoi sapere come è fatto per prepararti a una passeggiata compri una cartina (okay, vai su Google maps, ma prima non c'era e si passeggiava lo stesso). Una cartina è piana, non è un plastico tridimensionale che nello zaino sarebbe decisamente scomodo. E sulla cartina sono disegnate le curve di livello, che ti dànno le informazioni che ti servono sulla montagna.

**Esercizio 1.** (1) Disegna le curve di livello per esempio per $f(x, y) = x^2 + y^2$. (2) Assumi che il tetto dell'aula (a due falde) abbia la linea di colmo sull'asse $y$, all'altezza di 30 (metri). Disegna la "cartina" di questa funzione. (3) Scrivi una $f(x, y)$ che ha questo grafico. (4) Fà lo stesso se la linea di colmo è sulla bisettrice $x = y$.

***Derivate parziali.*** La derivata parziale di $f$ rispetto ad $x_i$ (quando esiste) è definita in modo analogo alla derivata delle funzioni di una variabile, che conosciamo. Si fissano tutte le variabili eccetto $x_i$, si incrementa questa di $h$, e si prende il limite del rapporto incrementale così ottenuto per $h \to 0$.

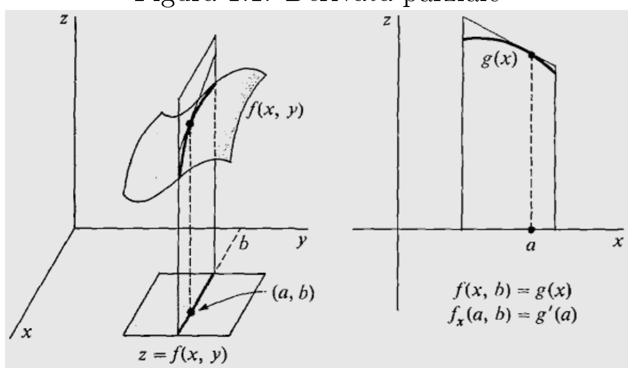
Per definire questo formalmente denota $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, e ricorda che $he^i = (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)$, ed $x + he^i$ è il vettore uguale ad $x$ tranne che nella coordinata $i$-esima dove vale $x_i + h$. La derivata rispetto ad $x_i$nel punto $x$ è definita come

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he^i) - f(x)}{h}$$

*Notazione.* Altra notazione comoda per $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$: $f_i(x)$. In $\mathbb{R}^2$ spesso useremo $(x,y)$ invece che $(x_1,x_2)$. E per $f(x,y)$ scriveremo $f_x(x_0,y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Torniamo per visualizzare in $\mathbb{R}^2$, con $f(x,y)$. Spostandosi lungo l'asse $x$ in corrispondenza di un dato $y = y_0$ si vede - sul piano verticale parallelo ad $x$ - la funzione $f(x,y_0)$ della sola variabile $x$. La sua derivata è la derivata parziale di $f$ rispetto ad $x$ (nei punti $(x,y_0)$). Vedi figura 1.1 che ho preso in rete, che usa $(a,b)$ al posto del nostro $(x_0,y_0)$ e chiama $g(x)$ la $f(x,y_0)$:

Figura 1.1: Derivata parziale




Analogamente per $y$, la derivata parziale rispetto ad $y$ nei punti $(x_0,y)$ è la derivata della funzione $f(x_0,y)$, funzione della sola $y$. Se levi i sottoscritti hai le derivate su tutto il piano (come quando fai $d\ln(x)/dx = 1/x$). Qui sotto ci sono esempi, e puoi fare Wikipedia "Partial Derivative Examples" per altri esempi svolti.

**Esercizio 2.** Calcola le derivate parziali rispetto ad $x$ ed $y$ delle seguenti funzioni $f(x,y)$

$$\ln\left(1-\frac{x}{y}\right), \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \ln\left(1+\frac{x}{y}\right), \quad \sqrt{x+\sqrt{y}}, \quad x^{y-x}$$
$$\frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad \frac{\left(x^2-y\right)^2}{x^4+y^2}, \quad \ln\left(x+\ln y\right), \quad (xy)^y, \quad \sin(x+y)+\cos x$$

***Definizione di Limite.*** Il concetto di limite al finito per funzioni di più variabili è uguale a quello che conosciamo per funzioni di una variabile. Anche il calcolo dei limiti è difficile come in $\mathbb{R}$ - anzi di più - ma noi non lo facciamo. Per $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, con $x_0, l \in \mathbb{R}$ ricordiamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad se \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 \ t.c. \ |x - x_0| < \delta_\epsilon \ \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

La definizione di limite per $f(x)$ con $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ è identica, con $x^0 \in \mathbb{R}^n$ al posto di $x \in \mathbb{R}$ ed $|x - x^0|$ data dalla formula di Pitagora generalizzato vista sopra. Dunque con $x \in \mathbb{R}^n$, per $y = f(x)$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^n, l \in \mathbb{R}$ abbiamo

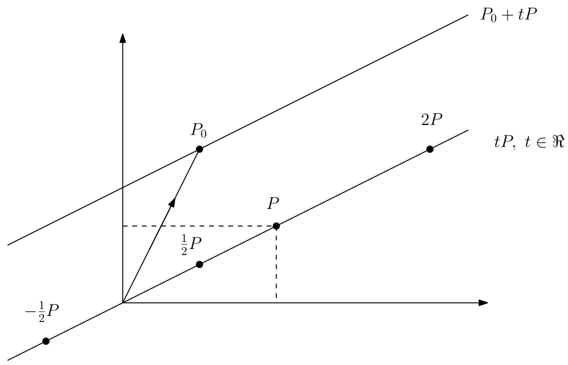
$$\lim_{x\to x^0} f(x) = l \quad se \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 \ t.c. \ |x - x^0| < \delta_\epsilon \ \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Come nel caso di funzioni di una variabile, $f$ è continua in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$.

***"O piccolo".*** Sarà comodo usare la notazione "o piccolo". Se $\lim_{x \to x^0} \frac{|f(x)|}{|x-x^0|} = 0$ - cioè se per $x \to x^0$ la $f$ tende a zero più velocemente della lunghezza $|x - x^0|$ - scriveremo $f = o(|x - x^0|)$. In pratica questa scrittura indica una funzione qualunque tale che $f(x)/|x - x^0| \to 0$ per $x \to x^0$.

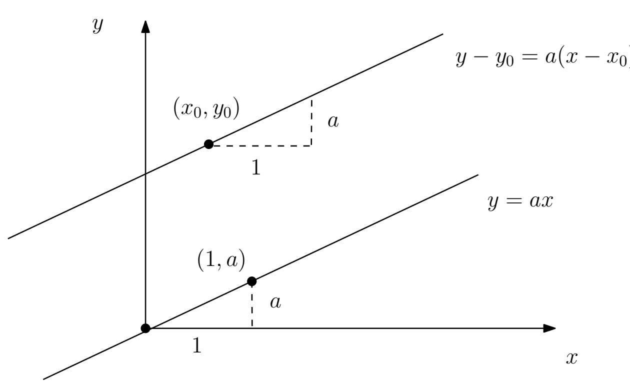
## 2 La retta (la solita, in $\mathbb{R}^2$)

Stiamo parlando della vecchia amica retta $y = ax$, o traslata $y - y_0 = a(x - x_0)$. Se $x$ si muove di $h$, $y$ si muove di $h \cdot a$. La "novità" è che vorremo ottenere il grafico di una retta per l'origine nel modo geometricamente più naturale, come insieme dei punti $tP$ con $t \in \mathbb{R}$ per un dato $P$. E quella traslata a $P_0 = (x_0 y_0)$ allo stesso modo ma andando prima a $P_0$, quindi come insieme $P_0 + tP$. Vedi figura qui sotto.




Per provare, disegna i punti $t(3,5)$ con $t = -2, -1, -0.5, 0, \frac{1}{3}, 2, 4$. Vedrai subito che per $t \in \mathbb{R}$ questi punti descrivono la retta $y = \frac{5}{3}x$. Questa infatti è data dai punti $(x, \frac{5}{3}x) = x(1, \frac{5}{3})$ con $x \in \mathbb{R}$. Disegna adesso i punti $(1,2) + t(3,5)$ con $t \in \mathbb{R}$ - vai su $(1,2)$ e poi aggiungi $t(3,5)$. Ottieni la retta $y - 2 = \frac{5}{3}(x - 1)$, giusto? E' quella di prima però misurando orizzontalmente la distanza da $x = 1$ e verticalmente la distanza da $y = 2$. Cioè, è quella di prima traslata di $(1,2)$.

Avrai probabilmente capito cosa è $a$ in $y = ax$. Vediamolo. Il grafico di questa retta è definito come l'insieme dei punti $(x, y)$ con $y = ax$ cioè come l'insieme dei punti $(x, ax) = x(1, a)$ con $x \in \mathbb{R}$. Analogo il discorso per $y - y_0 = a(x - x_0)$. Vedi di nuovo la figura.



La retta $y = ax$ è dunque generata dal punto $(1, a)$. E' la retta formata dai punti $x(1, a)$ quando $x$ varia in $\mathbb{R}$. Ed $y - y_0 = a(x - x_0)$ è ottenuta allo stesso modo, con uno spostamento iniziale su $(x_0, y_0)$. Per vederlo formalmente osserva che il suo grafico è formato dai punti $(x, y)$ con $y = y_0 + a(x - x_0)$ ed $x \in \mathbb{R}$, cioè dall'insieme

$$\begin{aligned}\{(x, y_0 + a(x - x_0)) \mid x \in \mathbb{R}\} &= \{(x_0, y_0) + (x - x_0)(1, a) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_0, y_0) + x(1, a) \mid x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che quando $x$ varia su $\mathbb{R}$ anche $x - x_0$ copre tutto $\mathbb{R}$.

## 3 Il piano

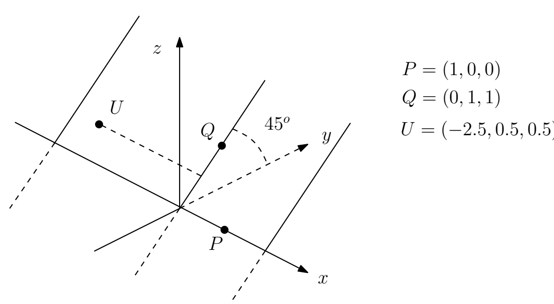
Dunque la retta in $\mathbb{R}^2$ è definita dalla pendenza $a$ nel senso che è generata dal punto $(1, a)$. E il piano in $\mathbb{R}^3$? La retta - passante per l'origine - è il grafico della funzione lineare

$$r(x) = ax$$

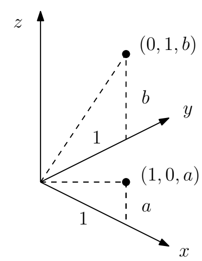
Il piano in $\mathbb{R}^3$ - passante per l'origine - è il grafico della funzione lineare

$$p(x, y) = ax + by$$

Il piano è generato in modo analogo alla retta - non da uno ma da *due* punti nello spazio. Con un punto solo si genera una retta nello spazio, non un piano - per esempio facendo $t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Per generare un piano servono due punti, uno in direzione $x$ e l'altro in direzione $y$. Per capire cosa si fa prendi per esempio nello spazio $(x, y, z)$ il pano orizzontale $z = 0$ e ruotalo di $45^o$ lungo l'asse $x$; ottieni - vedi figura qui sotto - un piano che in direzione $y$ ha pendenza 1 e in direzione $x$ ha pendenza zero. Per raggiungere qualunque punto su questo piano puoi spostarti lungo $y$ con pendenza 1 e poi lungo $x$ orizzontalmente - cioè puoi spostarti un po' lungo la retta $tP = t(1, 0, 0)$ e poi ancora lungo la retta $tQ = t(0, 1, 1)$. Per esempio per raggiungere il punto $U$ sul piano puoi fare $-2.5P$ e poi $0.5Q$, arrivando ad $U = (-2.5, 0.5, 0.5)$.




In generale, per il piano $p(x, y) = ax + by$ ti serve il punto $(1, 0, a)$ lungo $x$ e il punto $(0, 1, b)$ lungo $y$, vedi figura sotto




Formalmente, il grafico è formato dai punti

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, y, ax + by),\ x, y \in \mathbb{R} \\ &=(x, 0, ax) + (0, y, by) = x(1, 0, a) + y(0, 1, b)\end{aligned}$$

A questo punto il piano passante per l'origine come funzione di $n$ variabili dovrebbe essere chiaro. E' la funzione lineare

$$p(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

con grafico in $\mathbb{R}^{n+1}$ generato dagli $n$ punti che ti servono nelle $n$ direzioni di $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}&(x_1, \dots, x_n, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n),\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0, a_1) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, a_2) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1, a_n)\end{aligned}$$

Più precisamente, il grafico in $\mathbb{R}^{n+1}$ è generato dagli $n$ punti

$$(1, 0, \dots, 0, a_1) = e^1 + a_1 e^{n+1}, \dots, (0, \dots, 0, 1, a_n) = e^n + a_n e^{n+1}$$

dove gli $e^i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \dots n+1$ sono la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Per il piano traslato su $(x^0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ niente di nuovo. Si misura tutto a partire da lì:

$$p(x_1, \dots, x_n) = y_0 + a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0)$$

*Osservazione.* Nota che i coefficienti sono le derivate parziali di $p$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = a_i \quad i = 1, \dots n$$

Osserviamo anche che la funzione lineare qui sopra è continua in ogni punto $z \in \mathbb{R}^n$. Verifichiamo: osserva che $|x - z| = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \geq \max_i |x_i - z_i|$, sicché

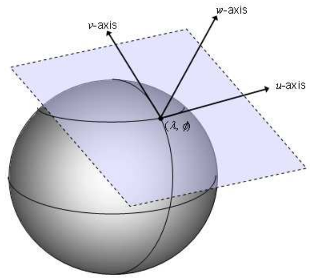
$$\begin{aligned}|p(x) - p(z)| &= |a_1(x_1 - z_1) + \cdots + a_n(x_n - z_n)| \leq |a_1| \cdot |x_1 - z_1| + \cdots + |a_n| \cdot |x_n - z_n| \\ &\leq n \cdot \max_i |a_i| \cdot \max_i |x_i - z_i| \leq n \cdot \max_i |a_i| \cdot |x - z|\end{aligned}$$

Dunque se $|x - z| < \delta_\epsilon \equiv \epsilon / [n \cdot \max_i |a_i|]$ sarà $|p(x) - p(z)| \leq \epsilon$.

# 4 Tangenza

L'idea di piano tangente in $\mathbb{R}^3$ è quella della Figura 4.1 qui sotto (non guardare le lettere).

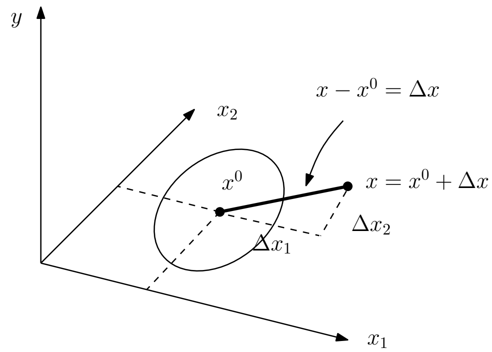
Figura 4.1: Figura da internet




E il concetto di tangenza in un punto è lo stesso per funzioni definite in $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$: l'errore tende a zero più velocemente di $|\Delta x|$. Solo che mentre per il grafico in $\mathbb{R}^2$ di una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'esistenza di una retta tangente in un punto equivale all'esistenza della derivata in quel punto, per il grafico in $\mathbb{R}^{n+1}$ di una $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'esistenza delle derivate parziali in un punto non è sufficiente per l'esistenza di un piano tangente in quel punto.

Il problema lo vediamo subito con un esempio prima di passare ai dettagli - questo grafico non lo so disegnare ma è facile da immaginare: stendi due fili orizzontali ad altezza 1 paralleli agli assi $x$ e $y$, e facci cadere sopra un lenzuolo. Che succede? Il lenzuolo sta sui fili lungo gli assi e dove c'è vuoto cade un po' in giù, formando come quattro vele nei quattro quadranti. Le derivate parziali nell'origine ci sono entrambe, sono entrambe zero. E l'unico possibile candidato piano tangente al grafico nell'origine è il piano orizzontale $p(x, y) = 1$. Ma è accettabile come piano tangente? No. Per convincertene cammina lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante e guarda la sezione del grafico. Cosa vedi? Una funzione che sale verso l'origine, lì forma una punta e poi ricomincia a scendere. Lungo quella direzione il piano orizzontale decisamente *non* è tangente al grafico - laddove un piano tangente lo vogliamo tangente lungo qualunque direzione. In questo esempio le derivate parziali esistono nel punto ma non lì vicino. E in altri esempi esistono in tutto un intorno ma neanche questo basta. Come vedremo, la condizione che garantisce l'esistenza di un piano tangente al grafico di una $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto è che le derivate della funzione esistano in un intorno del punto e siano *continue* nel punto.

Prima di passare ai dettagli facciamo mente locale a cosa è un $\Delta x \in \mathbb{R}^n$. Vedi la figura di sotto per $n = 2$. Uno spostamento da $x^0 \in \mathbb{R}^n$ è un $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$, con cui si arriva al punto $x = x^0 + \Delta x$. Ci si può spostare in tutte le direzioni (come evidenziato dal cerchio intorno ad $x^0$), e $|\Delta x|$ è la lunghezza dello spostamento.



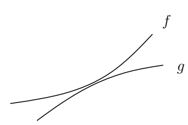

Per inciso, il concetto di "intorno di x di raggio $\delta$" in $\mathbb{R}^n$ è analogo a quello visto in $\mathbb{R}$, il segmento $|x - x_0| < \delta$ diventa la "palla" $|x - x^0| < \delta$.

A questo punto la definizione di tangenza. La applicheremo a una funzione e un piano, ma la definizione vale in generale per due funzioni qualunque:

**Definizione 1** (Tangenza)**.** Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due funzioni continue con $f(x^0) = g(x^0)$. Poni $\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$, lo stesso per $g$. Le funzioni $f$ e $g$ sono *tangenti in* $x^0$ se risulta

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{|\Delta f - \Delta g|}{|\Delta x|} = 0$$

Questo dice la stessa cosa di Matematica Generale: la differenza degli incrementi va a zero più veloce di $\Delta x$. L'immagine è questa:




Useremo il fatto che poiché il valore assoluto $|\Delta f - \Delta g|$ nel numeratore è irrilevante, nella notazione *o-piccolo* la definizione di tangenza si può scrivere

$$\Delta f = \Delta g + o(|\Delta x|)$$

Come anticipato, in $\mathbb{R}^2$ la tangenza fra una $f$ e una retta passante per $(x_0, f(x_0))$ è equivalente all'esistenza della derivata:

**Teorema 1.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua. La retta* $r(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ *è tangente ad* $f$ *nel punto* $x_0$ *se e solo se*

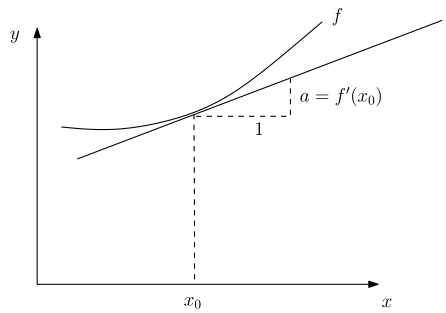
$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a$$

*Dimostrazione.* Nota che in questo caso $|\Delta x|$ è semplicemente il valore assoluto. Applicando la Definizione 1, $r$ tangente ad $f$ in $x_0$ vuol dire allora, dato che $\Delta r = a\Delta x$, che

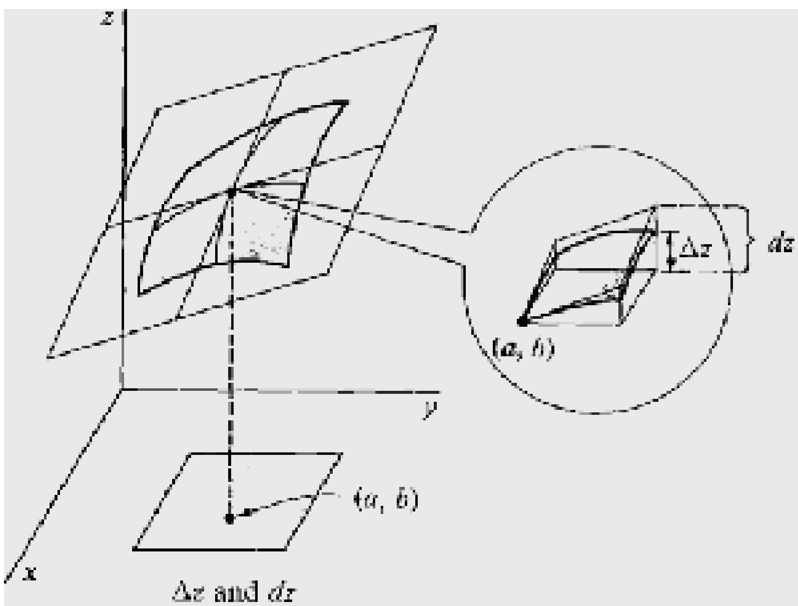
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta x} - a \right| = 0$$

e questo dice appunto che $f'(x_0) = a$. $\square$

La figura dovrebbe essere familiare:




Per indovinare il candidato piano tangente a una funzione in $\mathbb{R}^n$ pensiamo al caso $n = 2$. Per definire un piano abbiamo bisogno delle sue due "pendenze" in direzione $x$ ed $y$. Nella figura di sotto si indovina il caso $n = 2$: le direzioni devono essere le derivate parziali di $f$ nel punto (nella figura presa da internet è chiamato $(a, b)$, noi lo chiamiamo $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$). E ovviamente questo piano deve passare per il punto dato $(x^0, f(x^0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. In altre parole il candidato piano tangente ad $f$ in $x^0$ è il piano $p(x) = f(x^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0)$ con $a_i = f_i(x^0)$, $i = 1, \ldots, n$.




Confermiamo:

**Proposizione 1.** *Se $f$ è tangente a un piano in $x_0$ allora questo piano è*

$$p(x) = f(x^0) + f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + f_n(x^0)(x_n - x_n^0)$$

*Dimostrazione.* Supponi che $f$ sia tangente in $x_0$ al piano $p(x) = f(x^0) + a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0)$. Poiché $\Delta p \equiv p(x^0 + \Delta x) - p(x^0) = \sum_i a_i \Delta x_i$ la condizione di tangenza è

$$\Delta f = \sum\nolimits_i a_i \Delta x_i + o(\Delta x)$$

Prendi $\Delta x = (0, \dots h, \dots, 0)$ con $h$ alla $i$-esima coordinata; la condizione diventa $f(x^0 + he^i) - f(x^0) = a_i h + o(|h|)$, cioè $\lim_{h \to 0}[f(x^0 + he^i) - f(x^0)]/h = a_i$. □

Meno banale è i problema dell'esistenza del piano tangente. Come anticipato vale il seguente

**Teorema 2.** *Se la $f$ ha derivate parziali in un intorno di $x^0$, continue in $x^0$, allora in $x^0$ esiste il piano tangente ad $f$.*

*Dimostrazione.* Ci muoveremo interamente nell'intorno in cui le derivate parziali sono continue. L'idea è di scomporre l'incremento $\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$ camminando prima lungo $x_1$, poi lungo $x_2$ ecc. In ogni direzione si muove una funzione di una sola variabile, alla quale si può applicare il Teorema di Lagrange che esprime l'incremento della $f$ in termini della derivata, e sfruttare la continuità di questa. Facciamolo. Spostandoci di $\Delta x_i$ in direzione $x_i$ facciamo in totale $\Delta x_1 e^1 + \dots \Delta x_n e^n = \Delta x$, e aggiungendo e togliendo, per $\Delta f$ otteniamo

$$\Delta f = [f(x^0 + \Delta x_1 e^1) - f(x^0)] + [f(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \Delta x_2 e^2) - f(x^0 + \Delta x_1 e^1)] + \\ \dots + [f(x^0 + \Delta x) - f(\Delta x_1 e^1 + \dots \Delta x_{n-1} e^{n-1})]$$

Al termine $i$-esimo - funzione della sola $x_i$ - applichiamo Lagrange: esiste $0 < h_i < 1$ ($h_i$ dipende da $\Delta x_i$ ma è sempre fra zero ed uno) tale che

$$f(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \dots + \Delta x_i e^i) - f(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \dots + \Delta x_{i-1} e^{i-1}) = f_i(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \dots + h_i \Delta x_i e^i)\Delta x_i$$

Ora prendiamo l'incremento del piano candidato (vedi Proposizione 1) e calcoliamo la differenza a cui siamo interessati. Otteniamo

$$\Delta f - \Delta p = \sum_i [f_i(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \dots + h_i \Delta x_i e^i) - f_i(x^0)]\Delta x_i$$

A questo punto osserviamo che per ogni $i$ abbiamo $|\Delta x_1 e^1 + \dots + h_i \Delta x_i e^i| \le |\Delta x|$; dunque $|\Delta x_1 e^1 + \dots + h_i \Delta x_i e^i|$ tende a zero con $|\Delta x|$ e questo, data la continuità di $f_i$, implica che $\lim_{|\Delta x| \to 0}[f_i(x^0 + \Delta x_1 e^1 + \dots + h_i \Delta x_i e^i) - f_i(x^0)] = 0$; è ovviamente anche $\Delta x_i / |\Delta x| \le 1$, sicché in conclusione otteniamo $\lim_{|\Delta x| \to 0} |\Delta f - \Delta p| / |\Delta x| = 0$ che è quanto voluto. □

*Terminologia.* Per abbreviare diremo che una funzione che ha derivate parziali in un intorno di $x^0$, continue in $x^0$ è *differenziabile in $x^0$*.

Ricapitolando, quello che abbiamo imparato è questo. Se $f$ è differenziabile in $x^0$, allora può essere approssimata localmente da un piano, nel senso che

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \sum_i f_i(x^0)\Delta x_i + o(|\Delta x|)$$

Una applicazione che ci tornerà utile di questo risultato riguarda il calcolo delle derivate delle funzioni composte:

**Teorema 3** (Derivazione delle funzioni composte). *Siano date le funzioni* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ed* $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots n$. *Se le* $x_i$ *sono derivabili in* $t = t_0$ *ed* $f$ *è differenziabile in* $x(t_0) \equiv (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$, *allora la funzione composta* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ *è derivabile in* $t_0$ *e si ha*

$$F'(t_0) = \sum\nolimits_i f_i(x(t_0)) \cdot x_i'(t_0)$$

*Dimostrazione.* Poniamo $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $\Delta x = (\Delta x_1, \dots \Delta x_n)$ con $\Delta x_i = x_i(t_0 + \Delta t) - x_i(t_0)$. La derivabilità delle $x_i$ implica $\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta x| = 0$. Posto $\Delta F = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$ abbiamo allora (la prima uguaglianza dalla differenziabilità di $f$, la seconda da quella delle $x_i$ osservando che la somma di $n$ o-piccoli di $\Delta t$ è ancora un o-piccolo di $\Delta t$)

$$\Delta F = \sum\nolimits_i f_i(x(t_0))\Delta x_i + o(|\Delta x|) = \sum\nolimits_i f_i(x(t_0))x_i'(t_0)\Delta t + o(|\Delta x|) + o(|\Delta t|)$$

da cui ricaviamo che per $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \sum\nolimits_i f_i(x(t_0))x_i'(t_0) \pm \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\sqrt{\sum\nolimits_i \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2} + \frac{o(|\Delta t|)}{\Delta t} \longrightarrow \sum\nolimits_i f_i(x(t_0))x_i'(t_0)$$

(il meno è per $\Delta t < 0$ che implica $\sqrt{(\Delta t)^2} = -\Delta t$). □

Considereremo funzioni differenziabili ovunque d'ora in poi (sono quelle con cui lavoreremo sempre negli esercizi).

## 5 Pendenza Curve di Livello

Una cosa importante da capire per noi è come misurare la pendenza di una curva di livello di una $f(x, y)$ (in un punto dato $(x_0, y_0)$). Questa pendenza è quella della retta tangente alla curva di livello. E questa tangente è la curva di livello del piano tangente alla superficie. Questo lo possiamo vedere immaginando la situazione nello spazio, e lo poniamo come definizione:[2]

**Definizione 2.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. La pendenza della curva di livello $f = c$ in un suo punto $(x_0, y_0)$ è la pendenza della curva di livello del piano tangente ad $f$ in $(x_0, y_0)$.

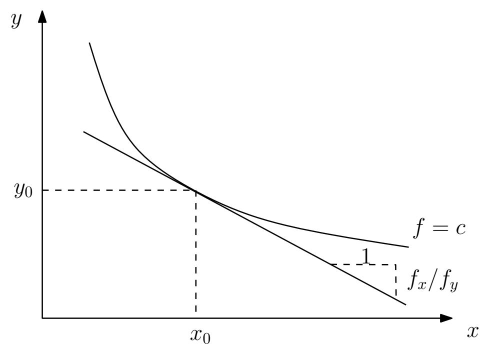
La pendenza della curva di livello di un piano è presto trovata. Un piano è la funzione $p(x, y) = ax + by + c$ quindi $p(x, y) =$ *costante* è la retta di pendenza $-a/b$. Come già notato, $a = \partial p/\partial x$ e $b = \partial p/\partial y$. E abbiamo visto che il piano tangente al grafico di $f$ nel punto dato $(x_0, y_0)$ è $p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

[2]Potremmo in verità dimostrarlo. La curva di livello di $f$ e quella del piano tangente risultano effettivamente tangenti secondo la definizione generale, ma dimostrarlo sarebbe un po' lungo perché dovremmo sfruttare (usando il teorema delle funzioni implicite) il fatto che queste curve stanno in un piano - dimensione due - mentre i grafici di $f$ e $p$ sono in $\mathbb{R}^3$.

Quindi dalla definizione di sopra segue direttamente che la pendenza della curva di livello di $f$ nel punto $(x_0, y_0)$ è

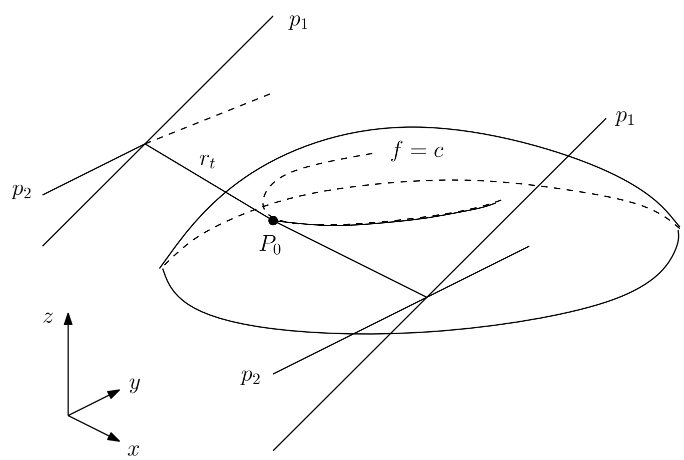
$$-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

come illustrato nella figura di sotto:




La Figura 5.1 riassume la situazione in 3D.

Figura 5.1: Piano tangente e curva di livello




In questa figura sono rappresentati: il grafico di una funzione $z = f(x, y)$; una sua curva di livello, $f = c$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su di essa; il piano tangente alla superficie, $p_1$; il piano orizzontale $p_2$ ad altezza $c$, che contiene la curva di livello $f = c$; e la retta $r_t$ che è la curva di livello del piano $p_1$. La retta $r_t$ è tangente alla curva $f = c$. Dunque $z_0 = f(x_0, y_0) = c$, $p_1(x, y) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, $p_2(x, y) = z_0$.

In verità la curva di livello e la retta sono le proiezioni sul piano di quello che vediamo rappresentato nello spazio. Cioè, la curva di livello è l'insieme $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = z_0\}$, e la retta è l'insieme $r_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0\}$ - che è la curva di livello di $p_1$ a $z = z_0$, cioè $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1(x, y) = z_0\}$. Quello che vediamo nello spazio sono gli insiemi $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in r_t, z = z_0\}$ ed $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathscr{C}, z = z_0\}$.