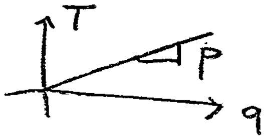
S. Modica
19 Feb 2011

Un problema di scelta del consumatore con tariffa (e vincolo di bilancio) nonlineare

- Una tariffa nonlineare.

Abbiamo sempre visto tariffe lineari dei produttori

$$T(q) = p \cdot q$$



con prezzo unitario

$$T(q)/q = p, \text{ costante.}$$

Considera la tariffa

$$T(q) = \log(1+q) \qquad q \geq 0.$$

Ha "sconto sulle quantità", cioè $T(q)/q$ $(q>0)$ decrescente? Risposta: SI.

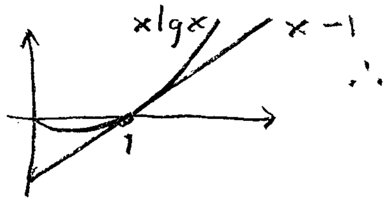
Γ Soluzione. Vediamo la derivata

$$D\,\frac{\log(1+q)}{q} = \frac{1}{q^2}\left[\frac{q}{1+q} - \lg(1+q)\right];$$

da determinare il segno di $[\cdot]$. Ponendo $x = 1+q$ la domanda è: $x-1 < x \lg x$?

$D\, x\lg x = \lg x + 1$, $D^2 = 1/x > 0$ ∴ $x\lg x$ è convessa (decresc. fino ad e^{-1} poi crescente, e con $\lim_{x\to 0^+} x\lg x = 0$) ∴ sta sopra le tangenti; in particolare per $x = 1$ $x\lg x = 0$ e $D\,x\lg x = 1$ ∴ la tangente è $x-1$. Dunque

Fig 1



$$\therefore\ x\log x \underset{=}{>} x-1 \quad \begin{matrix}\forall x \neq 1 \\ x = 1\end{matrix}$$

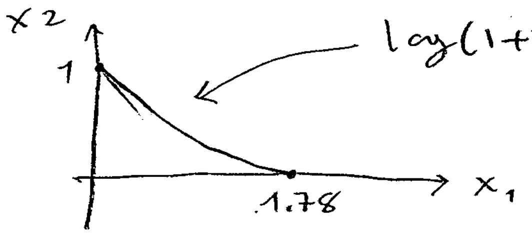
$$\therefore\ D\,\frac{\lg(1+q)}{q} < 0\ \forall q > 0 \ \therefore\ \frac{T(q)}{q} \downarrow, \text{ cvd}$$

- Un <u>vincolo di bilancio</u> non lineare.

Considera ora 2 beni, quantità x_1, x_2. Supponi $p_2 = 1$, e che il bene 1 sia soggetto alla tariffa di sopra, $T(x_1) = \lg(1+x_1)$. Supponi che la disponibilità di spesa sia $m = 1$. Allora il vincolo di bilancio è

$$\lg(1+x_1) + x_2 = 1 .$$

Passa per i punti $(0,1)$ ed $(e-1, 0)$, ed ha pendenza $-1/(1+x_1)$, che in valore assoluto decresce da 1 (per $x_1 = 0$) ad e^{-1} (per $x_1 = e-1$); quindi è così:



- <u>Scelta del Consumatore</u> Cobb-Douglas

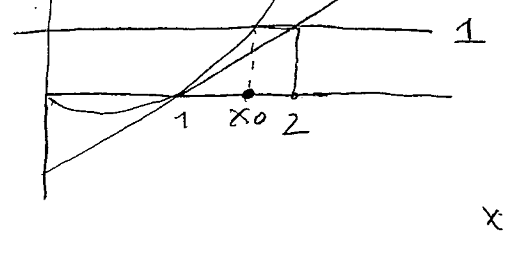
Assumi utilità Cobb Douglas $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Il sistema tangenza + vincolo dà

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{1+x_1} \\ \lg(1+x_1) + x_2 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Mostra che la soluzione ha $x_1 \in (0,1)$ ed $x_2 \in (0, \frac{1}{2})$.

[Soluzione. Sostituendo x_2 dalla 1^a nella 2^a otteniamo $(1+x_1)\lg(1+x_1) = 1$. Ponendo di nuovo $x = 1+x_1$ sfruttiamo la fig 1:



$x \lg x = 1$ per $x_0 \in (1,2)$

$\therefore\ 1+x_1 \in (1,2)$

$x_1 \in (0,1)$

$x_2 = \dfrac{x_1}{1+x_1} \in (0, \frac{1}{2})$]

• Risoluzione numerica del sistema (1)

A questo punto risolviamo il sistema (1) numericamente, per esempio con R (www.r-project.org) si usa "uniroot":

```
> z <- uniroot(function(x) x*log(x)-1, lower=1, upper=2);
> z = z$root; x1 = z-1; x2 = x1/(1+x1); u = x1*x2;
> x1
    0.76322
> x2
    0.43286
> u
    0.33036
```

• Controlliamo

$x_2 = u/x_1 \equiv f(x_1)$

u

vincolo

$x_2 = 1-\log(1+x_1) \equiv g(x_1)$

nel punto stazionario

$$D^2 f > D^2 g,$$

dunque localmente i punti sul vincolo stanno su curve di indiff più basse, e il punto stazionario è un massimo locale.

Si verifica che è anche globale giocando un po' con le derivate di f e g.

La figura che segue è fatta con kmplot (che gira su linux). Con R si fa uguale con i comandi

```
> curve(1-log(1+x), xlim=range(0,2*v), ylim=range(0,1.5
> curve(u/x, ...., add=TRUE).
```

Figura per

$$\max \; x_1 x_2$$
$$\text{s.a.} \quad \log(1+x_1) + x_2 = 1 .$$