S. Modica 28 Ottobre 2007

Nota su Crescita e Convergenza

Nella prima sezione si considerano crescita lineare ed esponenziale e le loro proprietà elementari. Nella seconda sezione si spiega la misura di velocità di convergenza $-d(\dot{y}_t/y_t)/d\ln y_t$ che appare nel libro di Barro e Sala-i-Martin.

1 Crescita Lineare e Crescita Esponenziale

I due tipi fondamentali di crescita sono quella lineare e quella esponenziale. La crescita lineare è tipo "quel bambino cresce due centimetri l'anno"; quella esponenziale: "il valore di quell'investimento cresce del due percento l'anno". Se x è la quantità variabile e t è il tempo, stiamo dicendo, con $\lambda = 2$ e $\gamma = 0.02$:

$$\begin{aligned} \textit{crescita lineare}: &\quad x_{t+1} - x_t = \lambda \\ \textit{crescita esponenziale}: &\quad x_{t+1} - x_t = \gamma\, x_t\,. \end{aligned}$$

Nota che $\lambda = 2cm$, mentre γ è un numero puro (moltiplicato x dà un valore nell'unità di misura di x). Iterando le relazioni di sopra, per qualunque coppia di istanti t e $t+s$ otteniamo

$$\begin{aligned} \textit{lineare}: &\quad x_{t+s} = x_t + \lambda\, s & (1) \\ \textit{esponenziale}: &\quad x_{t+1} = x_t\,(1+\gamma)^s\,. & (2) \end{aligned}$$

Fin qui abbiamo implicitamente assunto tempo discreto $t \in \mathbb{N}$ —anni, giorni, minuti... D'altra parte, spesso (per es in molta teoria della crescita) si considera tempo continuo, $t \in \mathbb{R}$. Per ottenere formule analoghe a quelle di sopra, nel caso della crescita lineare assumiamo che la crescita maturi linearmente nell'arco del periodo. Ciò vuol dire assumere che per esempio il bambino in 6 mesi cresce $1cm$, in generale che in m/n anni cresce $(m/n)\cdot\lambda$. In questo caso la relazione (1) resta immutata nel tempo continuo, cioè se s è un numero reale qualunque, definendo x_{t+s} con un passaggio al limite ai razionali ai reali.

Nel caso di crescita esponenziale l'assunzione sarebbe che per esempio in 6 mesi il valore cresce dell'1 percento, in generale nella frazione $1/n$ di anno matura il $(1/n)\cdot\gamma$ percento di crescita, cioè $x_{t+1/n} = x_t\,(1+\gamma/n)$. Ma a questo punto nel secondo n-esimo di anno la percentuale si calcola a partire da questo valore, e così via: cioè, se la crescita si computa ogni $1/n$ anni, avremo dopo un anno intero

$$x_{t+1} = \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^n x_t\,.$$

E a questo punto prendendo il limite per $n \to \infty$, cioè con crescita computata in tempo reale, otteniamo (limite notevole nel libro di Matematica Generale) $x_{t+1} = e^{\gamma}\,x_t$, e più in generale $x_{t+m/n} = e^{(m/n)\gamma}x_t$; da qui passando come prima al limite dai razionali ai reali otteniamo la definizione della crescita esponenziale in tempo continuo

$$x_{t+s} = e^{\gamma s}\,x_t\,. \qquad (3)$$

Nota che le (1) e (3) si possono esprimere in modo equivalente (verifica) esprimendo la crescita rispetto al valore assunto al tempo zero:

$$x_t = x_0 + \lambda\, t\,, \qquad x_t = e^{\gamma t}\, x_0\,. \tag{4}$$

Per avere un'idea della differenza numerica fra crescita lineare ed esponenziale, nella tabella qui sotto sono riportati alcuni valori di due sequenze x_t che partono da $x_0 = 1$, possiamo pensare $1m$, e crescono con $\lambda = \gamma = 0.02$ —cioè, la prima di $2cm$ ogni periodo e la seconda di 2 percento ogni periodo. Si vede che le differenze cominciano ad essere apprezzabili dopo 15 periodi; dopo 60 la differenza è già enorme.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}	x_{15}	x_{20}	x_{30}	x_{60}
Lineare	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.20	1.30	1.40	1.60	2.20
Esponenziale	1.00	1.02	1.04	1.06	1.08	1.11	1.22	1.35	1.49	1.82	3.32

La relazione fra crescita lineare e crescita esponenziale è la seguente (dim. ovvia):

Proposizione 1. *Assunto $x_0 \neq 0$, x cresce esponenzialmente al tasso γ sse $\ln x$ cresce linearmente allo stesso tasso. Cioè,*

$$x_t = x_0 e^{\gamma t} \quad \textit{se e solo se} \quad \ln x_t = \ln x_0 + \gamma t\,.$$

Come è facile intuire, per paragonare la crescita di grandezze diverse è più naturale usare la crescita relativa, cioè percentuale. Perché il contenuto informativo di un'affermazione tipo "quest'anno x è cresciuto di 100 ed y di 200" è nullo se non si ha idea dell'ordine di grandezza dei valori iniziali. Invece, anche in assenza di questi dati, la notizia "x è cresciuto del 2% ed y dello 0.4%" trasmette informazione rilevante.

Tornando alle (4), denotando con $\dot{x}_t$ la derivata di x rispetto a t, $\dot{x}_t \equiv dx_t/dt$, nota che implicano rispettivamente

$$\dot{x}_t = \lambda, \qquad \dot{x}_t = \gamma\, x_t\,. \tag{5}$$

In effetti, sono ad esse equivalenti. Verifichiamolo per la seconda: se $\dot{x}_t = \gamma\, x_t$, allora $\gamma = d \ln x_t/dt$, da cui $ln\, x_t = \gamma t + c$ per qualche c (Mat Gen), cioè $x_t = e^{\gamma t} e^c$ per qualche c; per $t = 0$ si ottiene $c = x_0$, cioè la tesi. Registriamo questo risultato:

Proposizione 2. *Le* (4) *e* (5) *sono equvalenti.*

In particolare la seconda delle (5), dato che $\dot{x}_t/x_t = d \ln x_t/dt$ è per definizione il tasso di crescita (relativo) di x, dice che x cresce a tasso costante.

E' importante notare che anche se x non cresce ad un tasso costante, dal suo incremento relativo osservato fra t e $t + s$, x_{t+s}/x_t, un'idea sulla sua crescita è data dal tasso *medio* nel periodo, definito come il $\hat{\gamma}$ soluzione di $x_{t+s} = x_t e^{\hat{\gamma} s}$, cioè il tasso che avrebbe prodotto l'incremento osservato se la crescita fosse stata a tasso costante. In scala logaritmica, la differenza

$$\ln x_{t+s} - \ln x_t = \hat{\gamma} s$$

dà una misura della crescita totale nel periodo. Per es se è 0.7 vuol dire che x nel periodo è raddopiato, perché $0.7 \simeq \ln 2$; se il periodo in questione è $s = 70$, il tasso medio di crescita è stato di $0.7/70 = 0.01$, cioè dell'1%.

A questo punto è naturale ricordare la 'regola del 70' della crescita esponenziale, di cui abbiamo appena visto un esempio:

Proposizione 3 (Regola del 70)**.** *Se x cresce esponenzialmente al tasso γ, raddoppia (o dimezza, se $\gamma < 0$) in $70/100\gamma$ periodi approssimativamente.*

Anche qui la dimostrazione è immediata: vogliamo la soluzione s dell'equazione $x_{t+s} = 2x_t$, cioè di $e^{\gamma s} = 2$, che è $s = \ln 2/\gamma \simeq 0.7/\gamma = 70/100\gamma$.

2 Dinamica della Convergenza

Le (5) sono casi particolari della equazione differenziale

$$\dot{x}_t = \phi(x_t)\,, \tag{6}$$

con ϕ funzione continua. La funzione ϕ esprime la velocità di x in funzione della sua posizione, cioè del suo valore. L'andamento della velocità $\dot{x}$ è appropriatamente descritto dal suo tasso di variazione relativa $\ddot{x}_t/\dot{x}_t$, dove si è pòsto $\ddot{x}_t = d\dot{x}_t/dt$. E come è facile verificare,

$$\ddot{x}_t/\dot{x}_t \;=\; \phi'(x_t) \;=\; d\dot{x}_t/dx_t\,.$$

Per esempio, nella crescita lineare $\phi'(x_t) = 0$, la velocità è costante; nella esponenziale $\phi'(x_t) = \gamma$: in questo caso sia x che $\dot{x}$ hanno tasso di variazione relativa costante uguale a γ (perché $\dot{x} = \gamma x$ implica $\ddot{x} = \gamma\dot{x}$ [1]).

2.1 Convergenza a zero

Consideriamo adesso il caso di convergenza $x_t \to 0$ per $t \to \infty$. Prendiamo per esempio la situazione in cui x sale a zero da valori negativi, per ragioni che saranno presto chiare. Tipicamente x rallenta, prima bruscamente poi più dolcemente, avvicinandosi a zero, come nella figura 1.

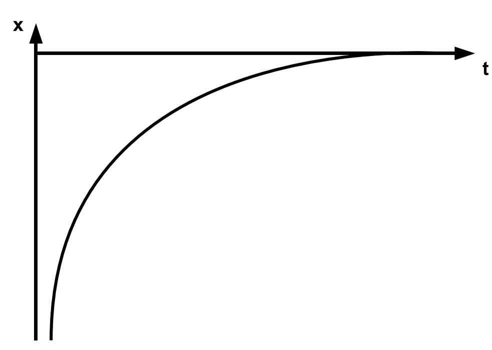

Figura 1: $x \to 0$ per $t \to \infty$

$\dot{x}_t$ è la pendenza della curva disegnata, e diminuisce al crescere di x, sicché $\phi' < 0$. Per questo, nel caso in esame è naturale prendere come misura della velocità di convergenza β_t l'opposto di ϕ' (per avere un numero positivo che è più comodo):

[1] Viceversa, è facile dimostrare che $\ddot{x} = \gamma\dot{x}$ implica che $x_t + c/\gamma$ ha tasso di variazione relativa costante uguale a γ per un $c \in \mathbb{R}$.

$$\beta_t \equiv -\phi'(x_t)\,.$$

Il caso di cui si parlava, di rallentamento brusco e poi più dolce, si traduce in β_t decrescente.

Quando $x_t \simeq 0$ la decelerazione diventa approssimativamente costante, con $\beta_t \simeq -\phi'(0) \equiv \beta^*$. A quel punto, vicino allo stato stazionario, poiché $\phi(x) \simeq \phi(0) + \phi'(0)x$ (Mat Gen) e $\phi(0)$ (perché nel punto di equilibrio $\dot{x} = 0$), abbiamo dunque $\dot{x}_t \simeq -\beta^* x_t$, cioè x converge a zero esponenzialmente al tasso $-\beta^*$ (per es dimezza in valore assoluto in $70/100\beta^*$ periodi).

2.2 Approssimazione Logaritmica

Supponi ora che $\lim_{t\to\infty} x_t = x^*$. Si vuole una misura della velocità di convergenza al valore di equilibrio. Per ragioni 'tecniche' che vedremo subito, oltre che per considerazioni analoghe a quelle appena fatte sul contenuto informativo delle diverse misure, piuttosto che la differenza $x_t - x^*$ si usa il rapporto x_t/x^*, che tende ad 1 per $t \to \infty$. Sicché si è interessati alla convergenza a zero

$$x_t/x^* - 1 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{7}$$

Per far ciò si usa la conveniente approssimazione $z - 1 \simeq \ln z$ (Mat Gen). La convenienza sta nel fatto che l'approssimazione è buona già per valori relativamente lontani da 1, come si vede graficamente dalla figura e numericamente dalla tabella sotto riportate:

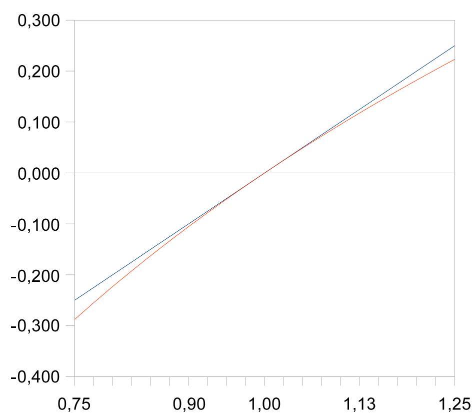

Figura 2: $z - 1$ e $\ln z$

z	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.98	0.99
$z-1$	-0.2500	-0.2000	-0.1500	-0.1000	-0.0500	-0.0200	-0.0100
$\ln z$	-0.2877	-0.2231	-0.1625	-0.1054	-0.0513	-0.0202	-0.0101

Tieni presente che il Pil pro-capite al Sud Italia è circa 70% di quello del Nord, dunque anche $80 - 90\%$ di x^* sono distanze considerevoli in valori assoluti: partendo da $x_t - x^*$ non si potrebbe usare nessuna approssimazione, e questo è il lato tecnico della convenienza ad usare x_t/x^*.

Attraverso l'approssimazione logaritmica, la convergenza (7) si studia attraverso la seguente:

$$\ln\frac{x_t}{x^*} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{8}$$

In conclusione, la variabile la cui convergenza a zero approssima la convergenza ad 1 di x_t/x^* è $\ln(x_t/x^*)$. Per esempio, se converge a zero esponenzialmente al tasso annuo del 3.5%, se oggi x_t è all'80% di x^* fra 20 anni sarà al 90% (perché a questo tasso la distanza fra $\ln(x_t/x^*)$ e zero, cioè fra x_t/x^* e 1, si dimezza in 20 anni). Poiché la nostra variabile converge a zero, come misura di velocità di convergenza prendiamo $-\phi'$, dunque (uguaglianze da Mat Gen)

$$\beta_t \;=-\frac{d(d\ln(x_t/x^*)/dt)}{d\ln(x_t/x^*)} \;=\; -\frac{d(d\ln(x_t/x^*)/dt)}{d\ln x_t} \;=\; -\frac{d(\dot{x}_t/x_t)}{d\ln x_t}\,. \tag{9}$$

2.3 Applicazione a Solow–Cobb-Douglas

Nel modello di Solow, con y, k reddito e capitale in unità di efficienza e funzione di produzione Cobb-Douglas $f(k) = k^\alpha$, abbiamo

$$y = k^\alpha \quad \text{e} \quad \dot{k} = sk^\alpha - ck, \quad \text{con } c = \delta + n + g\,.$$

Dunque $\dot{k}/k = sk^{\alpha-1} - c$, ed $\dot{y}/y = \alpha\dot{k}/k$. Sappiamo che $y_t \to y^*$ (tipicamente dal basso), dunque la variabile che ci interessa è

$$\xi_t \equiv \ln(y_t/y^*)\,,$$

con $\xi_t \to 0$ per $t \to \infty$, tipicamente per valori negativi (come nella figura 1). Consideriamo dunque la funzione $\dot{\xi}_t = \phi(\xi_t)$. Abbiamo $\dot{\xi}_t = \dot{y}_t/y_t$, sicché

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_t &= \alpha\big(sk_t^{\alpha-1} - c\big) = \alpha\big(sy_t^{(\alpha-1)/\alpha} - c\big) = \alpha\big(sk^{*\,(\alpha-1)}(y_t/y^*)^{(\alpha-1)/\alpha} - c\big) \\ &= \alpha c\big(e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\xi_t} - 1\big) \;=\; \phi(\xi_t)\,,\end{aligned} \tag{10}$$

dove si è usato il fatto che $sk^{*\,(\alpha-1)} = c$. Dunque

$$\beta_t \equiv -\phi'(\xi_t) = (1-\alpha)c\, e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\xi_t}\,. \tag{11}$$

Osserva che β_t è decrescente in ξ_t. Nel caso in cui ξ_t sale verso 0 la convergenza è dunque rapida lontano da y^* (all'inizio del processo di sviluppo), e rallenta man mano che ci si avvicna allo stato stazionario.

Approssimiamo adesso ϕ intorno al punto $\xi^* = \ln(y^*/y^*) = 0$. Dalla (10) è $\phi(0) = 0$, e dalla (11) $\beta^* \equiv -\phi'(0) = (1-\alpha)c$; dunque la $\dot{\xi} \simeq \phi(0) + \phi'(0)\xi$ è nel nostro caso

$$\dot{\xi}_t \simeq -\beta^*\xi_t\,.$$

Conclusione: vicino allo stato stazionario –dove 'vicino', grazie alla buona approssimazione del logaritmo, è anche abbastanza lontano–, nel modello di Solow con produzione Cobb-Douglas, il reddito converge a tasso costante uguale a $\beta^* = (1-\alpha)(\delta+n+g)$. Quindi per es se $\beta^* = 0.02$, in 70 anni riduce ad un quarto la distanza relativa originaria (tipo passando dall'80% al 95% di y^*). [2]

[2] Nel modello con capitale umano β^* diventa $(1-\alpha-\eta)(\delta+n+g)$, con η elasticità rispetto al capitale umano.