COMMENTI A CONTI CAP.1

SALVATORE MODICA

SUCCESSIONI, GENERALITA'

- 'Successioni' Conti pp.11-15
- 'Limite delle Successioni' fino a Cauchy, Conti pp.52-58 più prop. 1.32 come esercizio (succ. conv. è limitata)
- Proposizione 1.33:

PROPOSIZIONE (Successioni Monotone). Ogni successione (a_n) crescente ha limite. Se è limitata superiormente $\lim a_n = \sup a_n$, altrimenti $\lim a_n = \infty$. Analogo risultato (verso $\inf a_n$ o $-\infty$) vale per le successioni decrescenti.

Dim. Sia (a_n) limitata superiormente e sia $\sigma = \sup a_n$; dato ϵ, per definizione di sup esiste n_ϵ con $a_{n_\epsilon} > \sigma - \epsilon$; poichè (a_n) è crescente per ogni $n > n_\epsilon$ sarà $a_n \geq a_{n_\epsilon} > \sigma - \epsilon$; e d'altra parte per ogni n è $a_n \leq \sigma < \sigma + \epsilon$ (definizione di sup); conclusione, per $n > n_\epsilon$ è $|a_n - \sigma| < \epsilon$, cioè $a_n \to \sigma$.

Il caso di (a_n) non limitata superiormente è analogo: fissato K, esiste $a_{n_K} > K$ sicchè $a_n > K$ per ogni $n > n_K$. Successioni decrescenti uguale, *esercizio*. □

***esercizi: nega "$a_n \to l$", nega "(a_n) è di Cauchy"

SERIE, GENERALITA'

Considera, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, un'attività che richiede un tempo $t_n > 0$ (diciamo in minuti) per essere completata; domanda: può essere che tutte queste attività si possono svolgere in un tempo 'totale' finito? Altra versione: per ogni n ho un oggetto che pesa $g_n > 0$ (grammi per esempio); può essere che tutti insieme pesano meno di un chilo? O ancora: per ogni n ho un segmento lungo l_n; può essere che la lunghezza totale sia un metro? La domanda è sempre la stessa: dati infiniti addendi positivi, può la loro 'somma' risultare finita? [1]

Parliamo in termini di lunghezze per esempio. Intanto se i segmenti sono tutti uguali, $l_n = l > 0$, la risposta è no, perchè comunque grande

---

Date: 20.XI.97, 25.IX.98; Univ. di Palermo, Istituto di Matematica per la R.O.

[1] Somma fra virgolette, perchè le somme che conosciamo hanno un numero finito di addendi —ci stiamo mettendo al lavoro proprio per estendere il concetto ai casi appena considerati.

si fissi L esiste un numero n di segmenti tale che $n \cdot l > L$ (Archimede). Proviamo allora a prendere l_n sempre più piccoli, per esempio $l_1 = 1, l_2 = 1/2, \ldots, l_n = 1/n, \ldots$; anche in questo caso, fissato comunque L esiste n tale che $l_1 + \cdots + l_n > L$, perchè pòsto $s_n = l_1 + \cdots + l_n$, la successione (s_n) è crescente e *non* è di Cauchy (perchè per ogni n, con $m = 2n$ abbiamo $|s_m - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$), quindi da 1.30 ed 1.33 $s_n \to \infty$.

Dunque la risposta alla nostra domanda sembra "No, impossibile". E questo si pensava fino a circa due secoli prima di Euclide; ma venne allora Zenone —da Elea—, e disse: fissate un segmento lungo 1; prendete la metà di sinistra, poi la metà di sinistra della metà che rimane (lunga un quarto), e così via 'all'infinito'; sommate, e otterrete 1! Cioè, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, una somma di infiniti termini positivi. E in effetti i primi n segmenti hanno in questo caso somma $s_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ed (s_n) è di nuovo crescente ma questa volta $s_n \to 1$ (*verifica* facile, ricordando che per n grande $2^n \geq n > 1/\epsilon$ cioè $1/2^n < \epsilon$). Qui le l_n vanno a zero molto più velocemente che nell'esempio precedente, ed è questo che fa la differenza.

Nei tre esempi appena visti per esaminare la 'somma infinita' abbiamo guardato all'approssimazione data dalle somme 'parziali' s_n dei primi n termini per n grande, di fatto identificando la somma infinita con il limite della corrispondente successione (s_n). Questa identificazione costituirà anche la definizione generale di somma infinita; generale perchè vale anche per 'addendi' non positivi.

Prima di andare avanti, il simbolo $\sum$. Dati $n \geq 1$ numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$, abbrevieremo la somma $a_1 + \cdots + a_n$ definendo $\sum_{i=1}^n a_i \equiv a_1 + \cdots + a_n$.

DEFINIZIONE. Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ un successione, e sia (s_n) la successione delle 'somme parziali' ottenuta ponendo $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $n \in \mathbb{N}_+$. [2] *Se esiste* $\lim s_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, definiamo $\sum_{i=1}^\infty a_i$ ponendo

$$\sum_{i=1}^\infty a_i = \lim s_n.$$

Nota che la definizione dice $\sum_{i=1}^\infty a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n a_i$.

Si chiama **Serie** una successione di somme parziali. [3] Se esiste, il limite $\sum_{i=1}^\infty a_i$ si chiama *somma della serie*. Per 'esibire' i termini a_i alla base della successione (s_n), con il simbolo $\sum_{i=1}^\infty a_i$ si indica anche la serie stessa con abuso di notazione; si dice dunque, per esempio, "la serie $\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^i$ ha somma $\sum_{i=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$".

OSSERVAZIONE. Nota il caso basilare in cui $a_i \geq 0$ per tutti gli i (come negli esempi iniziali) —'serie a termini positivi'. Qui la successione (s_n) è crescente sicchè il suo limite, cioè la somma $\sum_{i=1}^\infty a_i$, esiste (Prop. 1.33). Se è finito (risp. ∞) la serie si dice convergente (risp. divergente).

[2] Cioè la successione $(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots)$.

[3] In realtà *qualunque* successione (x_n) può essere vista come serie: poni $y_1 = x_1$ ed $y_n = x_n - x_{n-1}$ per $n > 1$, ottenendo $x_n = \sum_{i=1}^n y_i$.

Il fatto che il simbolo $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ può *non* essere un numero (se è $\pm\infty$) deve indurre cautela nel suo uso.

- Esempi p.3 Conti

SOMME FINITE

- Conti pp.6-11

SERIE, I QUATTRO ESEMPI BASE

- esempi 1.6 (telescopica e geometrica con $x > 0$)
- armonica, p.24
- esponenziale, p.26

SERIE A TERMINI POSITIVI, CRITERI DI CONVERGENZA

- Premessa:'definitivamente' Conti p. 13
- riformulazione di $a_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
- criteri, conti pp. 23-39

SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

- Conti

LIMITI DI SUCCESSIONI

A questo punto è comodo definire l'insieme '$\mathbb{R}$ esteso' $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Sottolineamo che infinito e meno infinito *non* sono numeri: $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$. Ad $\overline{\mathbb{R}}$ si estende l'ordine $>$ su $\mathbb{R}$ ponendo $-\infty < x < \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. E su $\overline{\mathbb{R}}$ si definiscono somma e prodotto secondo l'intuizione che viene dai limiti (per esempio $-3\cdot\infty = -\infty$), tenendo presente che **non sono definiti** $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$. Cioè, definiamo $a \pm \infty = \pm\infty,\ a \in \mathbb{R}$; $a \cdot \infty = \pm\infty,\ a \gtrless 0$ ed $a \cdot (-\infty) = -a \cdot \infty$; e poi $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$, e $-\infty - \infty = -\infty \cdot \infty = -\infty$.

Usando gli esercizi, e leggendo somma e prodotto di limiti come somma e prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$, possiamo in realtà asserire che vale la seguente più generale versione della Prop. 1.36(a):

PROPOSIZIONE. Se $a_n \to l$ e $b_n \to m$, con $l, m \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $a_n + b_n \to l + m$ ed $a_n \cdot b_n \to l \cdot m$, eccettuati i casi $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$.

Inoltre, la parte (c) di 1.36 è un caso particolare di un risultato più generale che ora verificheremo. Per tutte le funzioni fondamentali, sia f una di queste, è facile (e ci tornerà utile) studiare la successione $f(x_n)$ corrispondente ad una successione $x_n \to x_0$ (1.36(c) lo fa con

$f(x)=\sqrt{x}$). Guardando la successione dei punti $(x_n, f(x_n))$ sul grafico di f si capisce subito dove va $f(x_n)$ (i cui valori leggiamo sull'asse verticale). x_0 può essere finito o meno, pensa a $\log x_n$ con $x_n \to \infty$, e deve 'avere senso' studiare $f(x_n)$: per esempio se $x_n \to -\infty$ non ha senso studiare $\log x_n$ perchè da un certo punto in poi $x_n < 0$ e $\log x_n$ non è definito, quindi non c'è niente da studiare (il problema è che non è $x_n \in D_f$ definitivamente). Pensiamo per esempio a $\log x_n$ con $0 < x_n \to 0$: ci aspettiamo dal grafico che $\log x_n \to -\infty$; o $\tan x_n$ con $\pi/2 > x_n \to \pi/2$: sembra che debba essere $\tan x_n \to \infty$. D'altra parte, è inutile considerare $\tan x_n$ con $x_n \to \pm\infty$, perchè il suo comportamento dipende da *come* x_n va ad infinito (e questo vale per tutte le periodiche): se $x_n = 2n\pi$, $\tan x_n = 0\ \forall n$ quindi tende a zero; se invece è per esempio $x_n = \frac{1}{4}\pi + n\frac{3}{2}\pi$, $\tan x_n = (-1)^n$ che non converge. Per tutti i casi di rilievo è vera la seguente buona notizia:

PROPOSIZIONE. Siano f una funzione ed (x_n) una successione, con $x_n \in D_f$ definitivamente, tale che $x_n \to x_0$, x_0 finito o meno. Per ogni f fondamentale (a^x e $\log_a x$, x^α, e $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\tan x$), la successione $(f(x_n))$ tende al limite suggerito dal grafico (per le trigonometriche si considera solo x_0 finito). Per esempio, se $a > 1$, $\log_a x_n$ tende: a $-\infty$ se $0 < x_n \to 0$, a $\log x_0$ per $x_0 > 0$ finito positivo, ed a ∞ per $x_n \to \infty$; oppure: per $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$, $\cos x_n \to \cos x_0$.

Nella dimostrazione usiamo il seguente semplice risultato:

LEMMA. $a_n \to l \in \mathbb{R} \iff \forall k_1 < l < k_2$ è $k_1 < a_n < k_2$ definitivamente.

Dim. Esercizio facile (disegna). [4] $\square$

Dim. della Proposizione. a^{x_n} con $a > 1$ (per $a < 1$ cambia opportunamente le disuguaglianze, oppure riconduci al caso $a > 1$ scrivendo $a^{x_n} = (1/a)^{-x_n}$). $x_n \to \infty$ è banale: $a^{x_n} > K$ se $x_n > \log_a K$, vero definitivamente, dunque $a^{x_n} \to \infty$; ed altrettanto lo è il caso di $x_n \to -\infty$. Passiamo ad $x_n \to x_0$ finito. Vogliamo definitivamente $-\epsilon < a^{x_n} - a^{x_0} < \epsilon$, e sappiamo che $|x_n - x_0|$ è definitivamente piccolo quanto vogliamo; dividiamo tutto per $a^{x_0} > 0$, poi aggiungiamo 1 osservando che al centro resta $a^{x_n - x_0}$, e prendiamo il log in base a (che essendo > 1 lascia invariato il verso delle disuguaglianze); otteniamo le disuequazioni equivalenti

$$k_1 \equiv \log_a(1 - \epsilon a^{-x_0}) < x_n - x_0 < \log_a(1 + \epsilon a^{-x_0}) \equiv k_2; \qquad (*)$$

questa ha senso solo per $1 - \epsilon a^{-x_0} > 0$, ma non è un problema: consideriamo solo $\epsilon < a^{x_0}$. Allora abbiamo: $x_n - x_0 \to 0$, e $k_1 < 0 < k_2$; non resta che invocare il lemma di sopra per concludere che le $(*)$ sono vere definitivamente.

[4] Per controllare, eccola: Se $a_n \to l$, dati $k_1 < l < k_2$ basta usare $\epsilon < \min\{|l - k_1|, |l - k_2|\}$; se viceversa vale la prorpietà in questione, vale in particolare per $k_1 = l - \epsilon$, $k_2 = l + \epsilon$.

$log_a x_n$, con $a > 1$ (per $a < 1$ cambia opportunamente le disuguaglianze, oppure usa $\log_a x_n = -\log_{1/a} x_n$). $0 < x_n \to 0$ ed $x_n \to \infty$ sono di nuovo banali; nel caso di $x_n \to x_0 > 0$ la disuguaglianza cercata è $-\epsilon < \log_a x_n - \log_a x_0 < \epsilon$, e si vuole come poco fa $x_n - x_0$ fra due numeri $k_1 < 0 < k_2$, che sappiamo essere vero definitivamente; al centro c'è $\log_a(x_n/x_0)$; mettendo tutto ad esponente di a, poi moltiplicando per $x_0 > 0$, e infine togliendo x_0, si ottiene $-x_0\big(1 - a^{-\epsilon}\big) < x_n - x_0 < x_0\big(a^\epsilon - 1\big)$, cioè esattamente quanto voluto.

x_n^α, con $\alpha > 0$ (poi $x_n^\alpha = 1/x_n^{-\alpha}$). Al solito, $x_n \to \infty$ e $0 < x_n \to 0$ sono banali. Sia allora $x_n \to x_0 > 0$. Nella disuguaglianza $-\epsilon < x_n^\alpha - x_0^\alpha < \epsilon$ moltiplica per $x_0^{-\alpha}$, aggiungi 1 ed eleva ad $1/\alpha$ ($1/\alpha > 0$ quindi il verso resta invariato); poi moltiplica per x_0 e infine togli x_0, ottenendo: $-x_0\big(1 - (1 - \epsilon x_0^{-\alpha})^{1/\alpha}\big) < x_n - x_0 < x_0\big((1 + \epsilon x_0^{-\alpha})^{1/\alpha} - 1\big)$; qui di nuovo deve essere $\epsilon x_0^{-\alpha} < 1$, che non è un problema, dopodichè siamo nuovamente pronti per il lemma di sopra.

$\cos x_n \to \cos x_0$. Le formule di prostaferesi danno $|\cos x_n - \cos x_0| = 2|\mathrm{sen}\, \frac{x_n + x_0}{2}| \cdot |\mathrm{sen}\, \frac{x_n - x_0}{2}|$; ora: $|\mathrm{sen}\, \frac{x_n + x_0}{2}| \le 1$ per ogni n; per $|\frac{x_n - x_0}{2}| < \pi/2$, vero per $n > n_1$, è $|\mathrm{sen}\, \frac{x_n - x_0}{2}| < |\frac{x_n - x_0}{2}|$; e per $n > n_2$ è $|x_n - x_0| < \epsilon$; quindi per $n > \max\{n_1, n_2\}$ è $|\cos x_n - \cos x_0| \le |x_n - x_0| < \epsilon$. Analogamente si fa il seno, e la tangente viene dai teoremi sui limiti. $\square$

PARENTESI: PROPRIETA' DELLE POTENZE AD ESPONENTE REALE

Succede spesso, e anche noi avremo modo di confermarlo, che le successioni possano tornare utili nelle dimostrazioni più diverse. Per esempio, usando i risultati sui limiti delle successioni le (5.9) di Usare i Numeri (abbrevieremo UiN) hanno dimostrazione immediata, conseguenza del fatto seguente:

PROPOSIZIONE. Sia $a > 1$ ed $x \in \mathbb{R}$; per ogni successione $x_n \to x$ crescente con x_n razionali si ha $a^{x_n} \to a^x$.

Dim. Per la (5.8) di UiN la succesione a^{x_n} è crescente, quindi per la proposizione 1.33 tende a $\sup\{a^{x_n}\}$; dimostriamo che $\sup\{a^{x_n}\} = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$ ($\equiv a^x$ da UiN [5]). Chiaramente vale il $\le$, resta da escludere il $<$; ma per ogni razionale $r < x$ esiste $x_n > r$ (definizione di limite), quindi esiste $a^{x_n} > a^r$ (da (5.8) di UiN); allora $\sup\{a^{x_n}\} = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$, perchè se fosse minore ci sarebbe, usando la seconda proprietà del sup, un razionale $r < x$ con $a^r > a^{x_n}\ \forall n$. $\square$

Con questo risultato in mano le (5.9) vengono subito; per esempio la seconda, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, con $a > 1$ (per $a < 1$ usa i reciproci): siano $(x_n), (y_n)$ successioni crescenti di razionali con $x_n \to x$, $y_n \to y$; nota che tali succesioni esistono *perchè* $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$; usando somma di limiti, $(x_n + y_n)$ tende crescendo ad $x + y$; ed usando la proposizione di sopra e prodotto di limiti, più il fatto che $a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_n + y_n}$ perchè x_n, y_n sono razionali, si ottiene $a^x \cdot a^y = \lim a^{x_n} \cdot \lim a^{y_n} = \lim a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$. Le altre sono uguali.

Nota. Queste dimostrazioni delle (5.9) di UiN con le successioni sono 'genuine', cioè non dipendono da risultati che a loro volta dipendono dalle (5.9); in altre parole

[5] Per essere precisi la definizione originale era con il $\le$; ma con il secondo esercizio di quel paragrafo si verificava che quella con il $<$ che usiamo ora è equivalente.

avremmo potuto dimostrare i teoremi sulle successioni che abbiamo appena usato *prima* di enunciare le (5.9).

UNA STAR: LA SUCCESSIONE $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Geometricamente, le curve a^x-1 e $\log_a(x+1)$ passano per l'origine, convessa la prima, concava l'altra; al variare della base a si presentano tre possibili situazioni: le due curve si incontrano un'altra volta per $x>0$ (disegna), oppure un'altra volta con $x<0$, oppure sono tangenti all'origine che è in tal caso il loro unico punto di contatto. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \equiv e$ è la base per la quale si verifica quest'ultima situazione: e^x-1 e $\log(x+1)$ sono tangenti all'origine, e questo non succede per nessun'altra base.

PROPOSIZIONE. Esiste $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$. Questo numero, detto 'di Nepero', si indica con la lettera e:

$$e := \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dim. Dimostriamo che la nostra a_n è crescente e limitata superiormente (basta per la proposizione 1.33). Cominciando dalla formula di Newton,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum\nolimits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \quad (*)\end{aligned}$$

Scrivendo a_{n+1} si vede che i suoi termini sono: i primi n quelli di a_n con $n+1$ al posto di n, ognuno dei quali diventa maggiore, più un termine finale positivo; conclusione, a_n è crescente. E' anche limitata superiormente, perchè

$$\begin{aligned}a_n &< 1+\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+2\big(1-1/2^n\big) < 3,\end{aligned}$$

usando $\sum_{i=0}^{n-1}x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ (UiN, Potenze ad Esponente Naturale). □

Interpretazione economica. Supponi di avere un interesse del 100% che matura linearmente ogni n-esimo di anno, nel senso che se parti con K al primo n-esimo di anno (cioè a $t=1/n$) ti tocca K più $1/n$-esimo del 100% su K, cioè $K+K/n=K(1+1/n)$; *su questo capitale* si calcola un n-esimo del 100% di interessi che maturano a $t=2/n$, quando il capitale sarà dunque $[K(1+1/n)]\cdot(1+1/n)$; e così via, sicchè un capitale iniziale K diventa dopo un anno $K(1+1/n)^n$. Se facciamo tendere n a infinito otteniamo un interesse che matura 'continuamente';

con questo interesse continuo (costruito a partire dal 100%) un capitale $K = 1$ diventa dopo un anno $\lim(1 + 1/n)^n = e$ (quasi il 180% in più).

PROPOSIZIONE. e è anche somma di una serie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$

Dim. Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, da dimostrare che $\lim s_n = e$. $\lim s_n$ esiste perchè s_n è chiaramente crescente, e nella dimostrazione di sopra vediamo che è < 3. Sempre lì si mostra che $s_n > a_n$ ($a_n \equiv \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$), da cui $\lim s_n \geq \lim a_n = e$; resta la disuguaglianza inversa. Fissa $m \in \mathbb{N}_+$ e osserva che per $m < n$ risulta (guarda la $(*)$ sopra) $a_n > 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \equiv b_n$; da qui $e = \lim a_n \geq \lim b_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ per ogni m; cambiando lettera questa dice $e \geq s_n$ per ogni n, che dà $e \geq \lim s_n$. $\square$

Nota. Esattamente con lo stesso argomento si prova che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; la teoria dei limiti di funzione ci dirà presto che il limite a sinistra è e^x, e da ciò seguirà la formula

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

ESERCIZIO 1.4.12(b)

Ne facciamo una versione più generale che utilizzeremo, anticipiamo, per stabilire che per $x \to \infty$, $\log x$ va a infinito più lento di tutte le potenze x^α, $\alpha > 0$ (cioè $(\log x)/x^\alpha$ va a zero), che a loro volta vanno tutte più lente di e^x ($e^x/x^\alpha \to \infty$). Proviamo che:

$$\forall a > 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_+ \qquad \frac{a^n}{n^k} \to \infty. \tag{$*$}$$

Prendi $n > k+1$; scrivendo la formula di Newton (e usando $a-1 > 0$) si vede subito che $a^n = \left(1 + (a-1)\right)^n > \binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}$; sicchè

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{(a-1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \to \infty,$$

l'ultimo limite perchè gli ultimi k fattori tendono ad 1; allora anche $a_n \to \infty$ (carabinieri).

Nota. a^n è più veloce di ogni potenza n^k; ma per esempio, $a^n/n! \to 0$ (esercizio 1.4.12(c)).

Rinforziamo il risultato $(*)$ di sopra, prendendo invece di n una qualunque successione $x_n \to \infty$:

$$\forall a > 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_+ : \qquad x_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a^{x_n}}{x_n^k} \to \infty.$$

Per dimostrarlo considera la successione $a^{[x_n]}/[x_n]^k$; da $(*)$, dato $M > 0$, per ogni intero $j > j_M$ risulta $a^j/j^k > M$; ma dall'esercizio (iii) qui sotto, $[x_n] \to \infty$, quindi esiste n_M tale che per $n > n_M$ è $[x_n] > j_M$; e in più $[x_n]$ è intero; sicchè per $n > n_M$ risulta $a^{[x_n]}/[x_n]^k > M$; conclusione, $a^{[x_n]}/[x_n]^k \to \infty$. Ma usando $[x_n] \le x_n < [x_n]+1$ possiamo scrivere
$$\frac{a^{x_n}}{x_n^k} > \frac{a^{[x_n]}}{([x_n]+1)^k} = \frac{a^{[x_n]}}{[x_n]^k} \cdot \frac{[x_n]^k}{([x_n]+1)^k};$$
e l'ultima frazione tende ad 1 (dividi sopra e sotto per $[x_n]^k$); per confronto (carabinieri) otteniamo il risultato voluto.

TRE ESERCIZI (MA FACILI) TIPO 1.4

1. Dimostra che: (i) se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ allora $|a_n| \to |l|$. (ii) se $a_n \to 0$ e b_n è limitata, allora $a_n b_n \to 0$. (iii) Se $x_n \to \infty$ allora $[x_n] \to \infty$ (ricorda $[x_n] \le x_n < [x_n] + 1$).

LA PARTE DIFFICILE DI CAUCHY

Sappiamo che le successioni convergenti sono di Cauchy; ma vale anche l'inverso:

TEOREMA. (a_n) è di Cauchy $\iff \exists \lim a_n \in \mathbb{R}$.

Dim. Da fare $\Rightarrow$. L'idea è di schiacciare (a_n) fra due successioni convergenti allo stesso limite ed applicare carabinieri. Per cominciare, premessa: Ogni successione di Cauchy è limitata. Dim. di questo: esiste n_0 tale che per $n \ge n_0$ è $|a_n - a_{n_0}| < 1$ da cui $|a_n| < |a_{n_0}| + 1 \equiv M_1$; ponendo $M_2 = \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$ abbiamo allora $|a_n| \le \max\{M_1, M_2\}$ per ogni n.

Data la premessa possiamo definire, per ogni n, $b_n = \inf\{a_{n+k} : k \ge 0\}$ e $c_n = \sup\{a_{n+k} : k \ge 0\}$; avremo (b_n) crescente e (c_n) decrescente (*giusto?*), e per costruzione $b_n \le a_n \le c_n$ sicchè (b_n) e (c_n) sono limitate (*giusto?*); quindi esistono $\underline{x} = \lim b_n$ ed $\overline{x} = \lim c_n$; ma ora dimostriamo che $\underline{x} = \overline{x}$, da cui la tesi per confronto. Per $\underline{x} = \overline{x}$: da $b_n \le c_n$ segue $\underline{x} \le \overline{x}$; ma vale anche il $\ge$, perchè: dato $\epsilon > 0$, sia n_1 tale che per $n > n_1$ e $k > 0$ risulti $|a_n - a_{n+k}| < \epsilon/2$ (tale n_1 esiste perchè (a_n) è Cauchy); per tali n risulta $c_n - b_n \le \epsilon$ (perchè $a_{n+k} < a_n + \epsilon/2 \forall k \ge 0 \Rightarrow c_n = \sup_{k\ge 0} a_{n+k} \le a_n + \epsilon/2$ e analogamente $b_n \ge a_n - \epsilon/2$), da cui $\overline{x} - \underline{x} \le c_n - b_n < \epsilon$ (il $\le$ perchè $c_n \ge \inf\{c_n\} = \overline{x}$, $b_n \le \sup\{b_n\} = \underline{x}$); sicchè per ogni $\epsilon > 0$, $\overline{x} - \underline{x} < 2\epsilon$; da ciò $\overline{x} - \underline{x} \le 0$ (per contraddizione). $\square$