USARE I GRAFICI

SALVATORE MODICA

Sommario.

Questo è soprattutto un capitoletto di geometria; l'intuizione geometrica è fondamentale, e qui cercheremo di cominciare a svilupparla. La parola 'grafico' è in effetti sinonimo di funzione, nel senso che per identificare una funzione $f : A \to B$ con dominio D_f è necessario e sufficiente specificare l'insieme dei punti $(x, f(x)) \in A \times B$ con $x \in D_f$, cioè graf f. In queste pagine ci sono poche figure (scusate), ma nei fogli sparsi sul tavolo in cui vengono studiate ce ne dovrebbero essere a decine.

Dopo una doverosa premessa sul piano definiremo le "funzioni fondamentali"; poi, attraverso la retta, formalizzeremo il concetto di convessità/concavità; scopriremo le parabole e la 'proporzionalià inversa' (iperboli) con traslazioni di grafici; vedremo un'applicazione della geometria alle disequazioni; e infine studieremo le ellissi (di cui le circonferenze sono casi particolari), figure importanti del piano.

IL PIANO

Gli dedichiamo una pagina per conoscerlo un po', perchè è lì che vivono i grafici di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Ricorda che il piano è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$, l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$; a questo punto indicheremo con $P = (x, y)$ sia la coppia in $\mathbb{R}^2$ sia il punto del piano di coordinate (x, y) ad essa corrispondente. Definizioni e risultati riguardano ovviamente $\mathbb{R}^2$; il piano aiuta solo l'intuizione. Guardiamo ora ai punti come spostamenti sul piano: $P = (x, y)$ è uno spostamento dall'origine in senso orizzontale di x seguito da uno in senso verticale di y. Definiremo somma fra due punti e prodotto di un punto per un numero pensandoli come somme e multipli di spostamenti: vogliamo che $P_1 + P_2$ (con $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$) sia uno spostamento di P_1 seguito da uno spostamento di P_2 a partire da P_1; e che tP sia uno spostamento di 't volte' quello dall'origine a P; dunque il primo deve avere totale orizzontale (cioè ascissa) $x_1 + x_2$ e totale verticale (cioè ordinata) $y_1 + y_2$, e il secondo deve essere di tx in senso orizzontale e ty in senso verticale. Perciò definiamo, per (x, y), $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$t(x, y) = (tx, ty), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Date: 6.XI.97, 24.X.98. Università di Palermo, Istituto di Matematica per la R.O.

Note. (1) Così $P = (x, y) = (x + 0, 0 + y) = (x, 0) + (0, y)$, la decomposizione da cui siamo partiti. (2) Per vedere $P_1 - P_2$ lo si costruisca come $-P_2 + P_1$ partendo da P_2 (totale: 'da P_2 a P_1'). (3) Tieni presente che la circonferenza — parte della geometria— è nel capitolo "Usare i Numeri".

Ricorda che la distanza fra $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è definita da $\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. La 'lunghezza' di $P = (x, y)$, indicata con $\|P\|$, è definita come distanza fra P e l'origine; poniamo cioè

$$\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

E' chiaro che $\|P\| = 0 \Leftrightarrow P = (0, 0)$; e che vale l'uguaglianza $\|tP\| = |t| \cdot \|P\|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^2$ —per esempio $\|-P\| = \|P\|, \|-3P\| = 3\|P\|$. Più profonda è la disuguaglianza nella proposizione seguente, che conferma la semplice idea che partendo dall'origine, se ci si sposta a P e da lì ci si sposta di Q, arrivando a $P+Q$, si fa più strada che se si va direttamente dall'origine a $P + Q$ (senza passare per P), a meno che P sia 'di passaggio'. Disegnando si vede subito il perchè del nome 'triangolare'.

PROPOSIZIONE (Disuguaglianza Triangolare). Per tutti i $P, Q \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

In più, vale l'uguaglianza se e solo se: $Q = (0, 0)$ oppure $P = tQ$ per un $t \geq 0$.

Nota che la disuguaglianza fondamentale del valore assoluto ($|x + y| \leq |x| + |y|$) è un caso particolare di questa (quando le ordinate di P e Q sono zero).

Dimostrazione. Sia $P = (x, y), Q = (a, b)$. Disuguaglianza: poichè entrambi i membri sono positivi possiamo considerare i quadrati; dunque, da dimostrare $(x + a)^2 + (y + b)^2 \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$; svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene l'equivalente $ax + by \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$; se il primo membro è negativo questa è soddisfatta; altrimenti possiamo prendere i quadrati ottenendo $0 \leq (bx)^2 + (ay)^2 - 2axby = (ay - bx)^2$, chiaramente vera.

L'uguaglianza (magari in seconda lettura): se $Q = (0, 0)$ oppure $P = tQ$ con $t \geq 0$, si verifica facilmente che il $\leq$ diventa $=$. Viceversa, supponiamo che vale l'uguale; se $Q = (0, 0)$, fine della dimostrazione; supponiamo allora che $Q \neq (0, 0)$. Prendendo i quadrati e semplificando si ottiene $ax + by = \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$ da cui $ax + by \geq 0$, quindi uguale alla radice del suo quadrato; e procedendo come prima si arriva ad $(ay - bx)^2 = 0$ cioè $ay = bx$; per ipotesi non è $a = b = 0$; supponendo $a \neq 0$, otteniamo $y = (a^{-1}x)b$, da cui $P = tQ$ con $t = a^{-1}x$. Per finire, da $\|tQ + Q\| = \|tQ\| + \|Q\|$ e $\|Q\| \neq 0$ segue ora che $|1 + t| = 1 + |t|$, da cui (prendendo i quadrati) $t = |t| \geq 0$. □

L'INSIEME DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

Mettiamo innanzitutto a fuoco l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con cui passeremo la maggior parte del tempo, che per comodità chiameremo funzioni fondamentali.

Intanto definiamo nel modo ovvio le operazioni algebriche sulle funzioni, cioè definiamo le funzioni somma, prodotto eccetera, come segue: date $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniamo $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, e nota in particolare $(-f)(x) = -f(x)$), $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ed $(1/f)(x) = 1/f(x)$, nei domini appropriati ($D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$, ecc.).

Chiamiamo funzioni **elementari** le seguenti *tre* classi di funzioni: (1) funzioni potenza, x^α; (2) funzioni esponenziali, a^x e loro inverse (logaritmiche, $\log_a x$); (3) funzioni trigonometriche, $\sin x, \cos x, \tan x$ e loro inverse.

Chiameremo **funzioni fondamentali** le elementari e quelle da esse ottenute mediante un numero finito di operazioni algebriche, composizioni e inversioni.

Note. (1) Le trigonometriche non sono iniettive; si invertono in un intervallo in cui lo sono. Per convenzione, $\operatorname{sen} x$ si inverte in $[-\pi/2, \pi/2]$ dove è crescente, e la sua inversa si chiama $\operatorname{arcsen} x$; $\cos x$ si inverte in $[0, \pi]$ dove è decrescente, e la sua inversa si chiama $\arccos x$; la tangente in $[-\pi/2, \pi/2]$ dove cresce, e la sua inversa si chiama $\arctan x$.

(2) Il nome 'elementare' non è sinonimo di facile; l'analogia più prossima è quella delle particelle elementari della fisica. Per esempio la funzione 'facile'

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

non è elementare perchè è costruita mettendo insieme elementi/funzioni.

(3) Nella classe delle funzioni potenza non sono menzionate le inverse perchè come vedremo presto le inverse di funzioni potenza sono anch'esse funzioni potenza.

(4) Scrivendo $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ potremmo ridurre le classi a due; ma è più pratico così (in quelle varia la base, nelle altre l'esponente...).

(5) E' bene avere presenti i grafici delle funzioni elementari. Eccetto le trigonometriche inverse, che vedremo fra poco, delle altre conosciamo già crescenza e decrescenza (ricorda di distinguere $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$ per le funzioni potenza e $0 < a < 1$, $a > 1$ per le esponenziali).

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Come sappiamo, date $g : A \to B$ ed $f : B \to C$ la $f \circ g$ ('g seguita da f') è definita da $x \mapsto f(g(x))$ sul dominio $D_{f \circ g} = g^{-}(D_f)$. Qui sarà $A, B, C = \mathbb{R}$. Esempio di dominio: con $f(x) = \ln x, g(x) = 1 - x^2$ abbiamo $D_{f \circ g} = (-1, 1)$. Esempi di composizione: seguono due iniziali tanto per chiarire, e poi altri con funzioni non 'elementari'; prima di andare avanti è bene capirne la logica.

ESEMPI. (a) Guardiamo da vicino la composizione $f(x) = e^{\alpha \ln x}$, uguale ad x^α. E' fatta così: $x \mapsto lnx \mapsto \alpha \ln x \mapsto e^{\alpha \ln x}$, cioè è $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ con $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \alpha x$, $f_3(x) = e^x$. Giusto? [1]

(b) Sia $f(x) = 5x \cdot \left(\sqrt{3x^2 \cdot \cos x} + \tan(\ln x^{-1})\right)$. Qui oltre alle composizioni ci sono più e per; per esempio in $f_1 \cdot f_2$ si formano f_1 ed f_2 e poi si fa la somma. Scrivi tutti i passi per costruire la funzione data se non ti sembra ovvio.

(c) $f \circ g$ con

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \ln x.$$

Dovendo fare $f(g(x))$, scriviamo f con argomento $g(x)$ e sviluppiamo. Risultato:

$$f(g(x)) = \begin{cases} e^{\ln x} & \ln x \geq 0 \\ 1 & \ln x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(d) $g \circ f$ con le funzioni dell'esempio precedente. Dominio tutto $\mathbb{R}$.

$$g(f(x)) = \ln f(x) = \begin{cases} \ln e^x & x \geq 0 \\ \ln 1 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

[1] Abbiamo scritto $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ senza problemi perchè la composizione è associativa; vedi esercizi Usare i Numeri.

(e) $f \circ g$ con

$$f(x) = \begin{cases} e^x & -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 3x & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \le 1 \\ x - 1 & x > 1. \end{cases}$$

Intanto $D_{f \circ g} = \{x \mid g(x) \ge -1/2\} = \mathbb{R} \setminus (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Per queste x dobbiamo distinguere $g(x) \gtreqless 0$; e infine dobbiamo tenere conto del fatto che per $x < -1$ e per $x > 1$, $g(x) > 0$ ma con espressioni diverse nei due intervalli. Conclusione:

$$f(g(x)) = \begin{cases} e^{g(x)} & -\frac{1}{2} \le g(x) \le 0 \\ 3g(x) & g(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{x^2-1} & x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \\ 3(x^2-1) & x < -1 \\ 3(x-1) & x > 1. \end{cases}$$

(f) $f \circ f$ con $f = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x & -\pi/6 \le x \le \pi/6 \\ \pi/2 + |x| & |x| > \pi/6 \end{cases}$. Disegnamo la f, segnando i punti $(1/2, \pi/6)$ e $(1, \pi/2)$ sul grafico, e anche l'ordinata 1 fra $\pi/6 \approx 0.52$ e $\pi/2 \approx 1.55$ per fare un disegno 'fedele'. Troviamo (nota che $\pi/6 > 3/6 = 1/2$)

$$f(f(x)) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} f(x) & -\frac{\pi}{6} \le f(x) \le \frac{\pi}{6} \\ \pi/2 + |f(x)| & |f(x)| > \frac{\pi}{6} \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x) & |x| \le \frac{1}{2} \\ \pi/2 + |\operatorname{arcsen} x| & 1/2 < |x| \le \frac{\pi}{6} \\ \pi + |x| & |x| > \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

ESERCIZI

1. Scrivi espressione e disegna grafico di $f \circ g$ con

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = x^2.$$

2. Studia $f \circ g$ e $g \circ f$ con

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x & x \ne 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

3. Scrivi $f \circ f$ con $f(x) =$ [2]

$$(i) \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} 3x & |x| < 3 \\ x^2 - 1 & |x| \ge 3 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} e^x & 0 \le x < 1 \\ \log x & x \ge 1 \end{cases} \qquad (iv) \begin{cases} -\log x & 0 < x < 1 \\ e^x & x \ge 1 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} 2x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (vi) \begin{cases} -2x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(vii) \begin{cases} \log x & 0 < x < 1 \\ e^x & x \ge 1 \end{cases} \qquad (viii) \begin{cases} -2x & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(ix) \begin{cases} 1 + x & 0 \le x < 1 \\ (x-1)^2 & x \ge 1 \end{cases} \qquad (x) \begin{cases} -x^2 & -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$$

$$(xi) \begin{cases} 2x^2 & -1 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \qquad (xii) \begin{cases} \tan x & 0 \le x < 1 \\ \cos x & 1 \le x < \sqrt{3} \end{cases}$$

[2] Soluzioni di questo e del prossimo alla fine del capitolo.

$$(xiii)\quad \begin{cases} \tan x & 0 < x < 1 \\ x^2/9 & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Fai $g \circ f$ con

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2-(x-1)^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x > 1. \end{cases}$$

GRAFICI DI FUNZIONI INVERSE

Per trovare analiticamente f^{-1} (quando è possibile), ricorda che la f^{-1} è caratterizzata dall'equazione $f(f^{-1}(y)) = y$, sicchè risolvendo questa rispetto ad $f^{-1}(y)$ si ottiene $f^{-1}(y) = \dots$, la funzione voluta ma con y invece di x; a quel punto non resta che cambiare nome. Per non portarsi sempre dietro $f^{-1}(y)$ si pone di solito $x = f^{-1}(y)$; dunque si risolve $y = f(x)$ rispetto ad x e quello che si trova è il valore di f^{-1} in y; poi si cambia y in x.

ESEMPI. **(a)** $f(x) = x^\alpha$. Risolvendo $x^\alpha = y$ in x otteniamo $x = y^{1/\alpha}$ cioè $f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$; cambiando lettera, $f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$, di nuovo una funzione potenza. Per esempio $\sqrt{x}$ è inversa di x^2.

(b) $f(x) = ax+b$, che vedremo essere una retta. Risolvendo $ax+b = y$ in x si trova $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$, cioè $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (un'altra retta). D'ora in poi lavoriamo con $x = f^{-1}(y)$ per abbreviare.

(c) $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$. Da $y = \ln\frac{1-x}{x}$ otteniamo $x = 1/(1+e^y)$; dunque $f^{-1}(x) = 1/(1+e^x)$. Capita una capite tutte.

(d) $y = x^2 + 4\sqrt{x^2-2}$, $x > 2$. Prima di tutto osserva che deve essere $y \geq x^2$. Portando x^2 al primo membro, elevando al quadrato e raccogliendo abbiamo $x^4 - (2y+4)x^2 = (y^2-8) = 0$, che dà $x^2 = y+2\pm 2\sqrt{y+3}$. Il più si deve escludere perchè darebbe $y < x^2$, il meno va bene. Da $x > 0$ deduciamo $x = \sqrt{y+2-2\sqrt{y+3}}$, dunque: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2-2\sqrt{x+3}}$.

(e) Questa è più delicata: vogliamo l'inversa di $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ (ricorda che arcsen è l'inversa di $\operatorname{sen} x$ in $[-\pi/2, \pi/2]$). Due possibilità: uno, osservare che $\operatorname{sen} x = \cos(x-\pi/2)$ e che $x - \pi/2 \in [0,\pi]$ che è l'intervallo in cui si inverte il coseno, da cui $y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \arccos y = x - \pi/2$, cioè $f^{-1}(x) = \pi/2 + \arccos x$; due, osservare che $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e che $\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2]$, da cui $y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{arcsen} y = \pi - x$, cioè $f^{-1}(x) = \pi - \operatorname{arcsen} x$. Scopriremo fra poco che le due soluzioni sono uguali: $\pi/2 + \arccos x = \pi - \operatorname{arcsen} x$.

Impariamo ora a 'vedere' il grafico di f^{-1} dato quello di f. Data una f invertibile, si ha $\operatorname{graf}(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D_f\} = \{(y,x) : (x,y) \in \operatorname{graf}(f)\}$, cioè il grafico di f ruotato di 180° intorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [3] Così si trovano per esempio $\operatorname{graf}\sqrt{x}$ a partire da $\operatorname{graf} x^2$, o $\operatorname{graf}\log_a x$ a partire da $\operatorname{graf} a^x$. In effetti in quest'ultimo caso è più facile usare un altro modo di visualizzare $\operatorname{graf} f^{-1}$ che è questo: per vedere $\operatorname{graf} f$ si può immaginare di camminare lungo l'asse orizzontale e guardare in sù (o in giù dove $f < 0$); se si pensa alla definizione di f^{-1} si realizza facilmente che per vedere $\operatorname{graf} f^{-1}$ si deve camminare lungo l'asse verticale.

[3] cioè l'insieme $\{(x,y) : x = y\}$. Il segmento che unisce $P = (x,y)$ e $Q = (y,x)$ ha punto medio $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$, sulla suddetta bisettrice (il punto medio del segmento che unisce P_1 e P_2 è $P_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ —vai a P_1 e poi percorri la metà della strada che porta a P_2—, che ha uguale distanza da P_1 e P_2 come si verifica facilmente).

Per *esercizio* si traccino i grafici delle inverse di $\operatorname{sen} x$ $\cos x$ e $\tan x$ (con x negli intervalli prima specificati). Nota che sembra dai grafici che i domini di $\operatorname{arcsen} x$ ed $\arccos x$ siano $[-1, 1]$, e quello di $\arctan x$ tutto $\mathbb{R}$, il che è vero se i codomini delle funzioni di partenza sono i suddetti intervalli; questo lo dimostreremo più in là; per adesso *lo assumiamo*.

Per inciso: oltre a quello di f^{-1} (se esiste), partendo dal grafico di una f se ne possono costruire altri; abbiamo visto parlando di convessità come costruire $\operatorname{graf}(-f)$; altri esempi:

ESEMPIO. Data f, la funzione $g : x \mapsto f(-x)$ ha $\operatorname{graf}(g) = \{(x, f(-x)) : -x \in D_f\} = \{(-x, f(x)) : x \in D_f\}$, cioè il grafico di f 'ruotato di 180 gradi intorno all'asse verticale'. Questo consente di tracciare per esempio il grafico di a^x con $a < 1$ a partire da quello di a^x con $a > 1$ (da $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$). Per *esercizio* si traccino, a partire da $\operatorname{graf}(f)$, i grafici di $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto |f(x)|$ ed $x \mapsto f(|x|)$.

Altro esercizio: usa l'esempio (d) del paragrafo 'Traslazioni di Grafici' per confermare i tuoi grafici di $\operatorname{arcsen} x$ ed $\arccos x$.

ESERCIZI

5. $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$ è monotona? Quali sono $\sup f$, $\inf f$?

6. Verifica che se f, g sono entrambe crescenti lo è anche $f \circ g$.

7. Dimostra che se f è invertibile e dispari —cioè $f(-x) = -f(x)$— lo è anche f^{-1}. Soluzione in nota. [4]

8. Disegna la seguente funzione e la sua inversa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x + 1 & x \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

9. Disegna $f + g$ per $g(x) = |-2x + 3|$ ed

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -3 \\ 1 & x > -3. \end{cases}$$

10. Trova le inverse (ed i rispettivi domini):

$$(i)\ f(x) = x^\alpha \qquad (ii)\ f(x) = 5^{2x} - 7 \cdot 5^x$$

$$(iii)\ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \qquad (iv)\ f(x) = \log \frac{x - 1}{x}$$

$$(v)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & x < 0 \\ 2x + 5 & x \geq 0 \end{cases}.$$

11. Risolvi: (i) $\operatorname{arcsen} x < \pi/3$; (ii) $x \arctan x < 0$.

12. Dimostra che per ogni $x \neq 0$ si ha

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}.$$

Suggerimento: $1/\tan y = \tan(\pi/2 - y) = -\tan(y + \pi/2)$. Soluzione in nota. [5]

---

[4] $f^{-1}(-x) = y \Leftrightarrow -x = f(y) \Leftrightarrow x = -f(y) = f(-y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -y$, da cui $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$.

[5] per $x > 0$: $y = \arctan 1/x \Leftrightarrow \tan y = 1/x \Leftrightarrow x = 1/\tan y = \tan(\pi/2 - y) \Leftrightarrow \arctan x = \pi/2 - y$, dove nell'ultimo passo l'inversione della tangente è lecita perchè per $x > 0$ risulta $\pi/2 - y = \pi/2 - \arctan 1/x \in (0, \pi/2)$; per $x < 0$ usa la disparità di arcotangente, oppure: $y = \arctan 1/x \Leftrightarrow$

RETTA

Per parlare della curvatura dei grafici di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bisogna sapere cos'è una retta, che ora definiamo formalmente come insieme di $\mathbb{R}^2$.

La retta è un insieme che si ottiene spostandosi 'lungo' un punto $P \neq (0,0)$, con risultato $\{tP : t \in \mathbb{R}\}$, o più in generale spostandosi prima di $P_1 = (x_1, y_1)$ e poi lungo $P_2 = (x_2, y_2)$ (vedi la prossima figura); dunque

DEFINIZIONE. Poniamo, con $P_2 \neq (0,0)$,

$$R(P_1, \mathrm{dir} P_2) = \{P \in \mathbb{R}^2 : P = P_1 + tP_2 : t \in \mathbb{R}\},$$

e chiamiamo tale insieme 'retta per P_1, direzione P_2'.

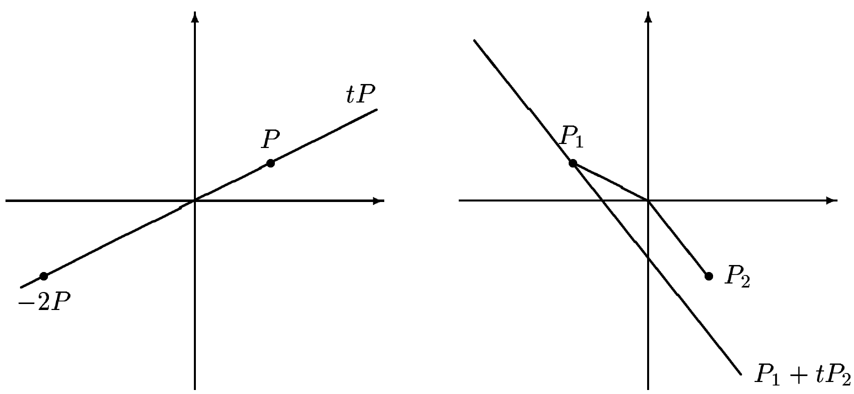


FIGURE 1

Una retta è *verticale* se $x_2 = 0$. Le rette verticali sono insiemi che contengono infiniti punti $(\bar{x}, y)$ con $\bar{x} = x_2$, dunque *non* sono 'funzioni di x', e noi le considereremo di rado.

ESEMPI. (a) $\forall P_2,\ P_1 \in R(P_1, \mathrm{dir} P_2)$ (prendi $t = 0$ nella definizione).
(b) $\forall P_1 \neq 0,\ (0,0) \in R(P_1, \mathrm{dir} P_1)$ (prendi $t = -1$).

PROPOSIZIONE. Il grafico di $x \mapsto ax + b$ è una retta non verticale. Precisamente, $\mathrm{graf}(ax + b) = R((0,b), \mathrm{dir}(1,a))$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{graf}(ax+b) &= \{(x, ax+b) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x+0, ax+b) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, ax) + (0,b) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,a) + (0,b) : x \in \mathbb{R}\} = R((0,b), \mathrm{dir}(1,a))\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

E' anche vero, per inciso, che *ogni* retta non verticale $R(P_1, \mathrm{dir} P_2)$ è grafico di una funzione $x \mapsto ax + b$. Si può infatti verificare che dati P_1, P_2 con $x_2 \neq 0$, $R(P_1, \mathrm{dir} P_2) = \mathrm{graf}(ax + b)$ con $a = \frac{y_2}{x_2}, b = y_1 - \frac{y_2}{x_2} x_1$. [6]

$\tan y = 1/x \Leftrightarrow x = 1/\tan y = -\tan(y + \pi/2) = \tan(-y - \pi/2) \Leftrightarrow \arctan x = -\pi/2 - y$, dove di nuovo l'ultima inversione della tangente si può fare perchè per $x < 0$ è $-y - \pi/2 = -\arctan 1/x - \pi/2 \in (-\pi/2, 0)$.

[6] Verifica: $\{(x_1, y_1) + x(x_2, y_2) \colon x \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, y_1) + x(1, y_2/x_2) \colon x \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, y_1) + (x - x_1)(1, y_2/x_2) \colon x \in \mathbb{R}\} = \{(0, y_1 - x_1 y_2/x_2) + x(1, y_2/x_2) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

Dunque possiamo chiamare la funzione $x \mapsto ax + b$ una retta (non verticale lo omettiamo). Il punto $(1, a)$, equivalentemente il numero a, ne determina la direzione; quest'ultimo è detto **coefficiente angolare**, o pendenza, di $ax + b$.

Due rette si dicono *parallele* se sono entrambe verticali o entrambe non verticali con lo stesso coefficiente angolare. Per curiosità:

PROPOSIZIONE. Due rette distinte sono parallele se e solo se non si incontrano mai.

Dimostrazione. I casi con rette verticali si fanno facile. Siano allora $ax + b$ ed $a'x + b'$ due rette non verticali. Se sono parallele ($a = a'$), dall'ipotesi che esiste x_0 tale che $ax_0 + b \neq a'x_0 + b'$ segue che $b \neq b'$; dunque l'equazione $ax + b = a'x + b'$ ($\Leftrightarrow b = b'$) non ha soluzioni. Se viceversa quest'equazione non ha soluzioni deve essere $a = a'$, altrimenti ci sarebbe la soluzione $x = (b' - b)/(a - a')$. $\square$

Nota bene sul coefficiene angolare:

(1) Per ogni P_1, P_2 sulla retta risulta $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

(2) l'angolo che la retta $ax + b$ forma con l'asse delle x è per definizione l'angolo, diciamo α, formato con esso dalla retta parallela ax; [7] il che vuol dire che il punto $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ è su tale retta, cioè $\operatorname{sen}\alpha = a\cos\alpha$. Dunque: $a = \tan\alpha$.

ESEMPI. **(a)** Se $r(x) = ax+b$, $r(tx_1+(1-t)x_2) = tr(x_1)+(1-t)r(x_2)$ per qualunque $x_1, x_2, t \in \mathbb{R}$. Questo dice che la $x \mapsto ax + b$ è una funzione *affine.*

(b) Retta passante per due punti dati P_1, P_2 con $x_1 \neq x_2$. Da $ax_1 + b = y_1$ ed $ax_2 + b = y_2$ sottraendo membro a membro si ottiene $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; sostituendo questo valore in $ax_1 + b = y_1$ si ricava $b = y_1 - ax_1$ ed $r(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

(c) Applicazione del caso precedente: data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare la retta $r(x)$ passante per i due punti sul grafico di f di ascisse x_1 ed x_2. Poichè i punti sono $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$, dall'esempio (b) di sopra si trova

$$r(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

(d) Retta di coefficiente angolare dato a passante per un punto P_0. Si ricava b da $ax_0 + b = y_0$; dunque la retta è $r(x) = y_0 + a(x - x_0)$.

(e) Per disegnare, in pratica, $r(x) = ax + b$ è comodo segnare i punti $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$ corrispondenti ad $x = 0$ ed $y = 0$ e poi la retta. Per esempio per $r(x) = -2x + 1$, tali punti sono $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, 1)$.

(f) Disegna

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x < 0 \\ x + 2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0. \end{cases}$$

(g) *Rette perpendicolari*. Due rette $ax + b$ ed $a'x + b'$ si dicono *perpendicolari* se formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$. [8] Se α ed α' sono gli angoli che formano con

---

[7] Ogni retta passante per l'origine incontra la semicirconferenza destra $\mathcal{C}(0,1) \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$ in un solo punto P (verifica); l'angolo "formato dalla retta e l'asse orizzontale" è lo spostamento $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ che ha $P(\alpha) = P$.

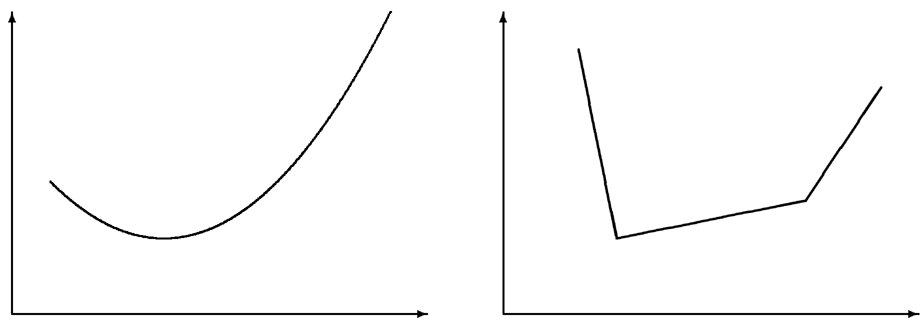
[8] Più precisamente (e per includere anche il caso di rette verticali): Due rette distinte R, R' si dicono perpendicolari se non sono parallele e soddisfano la seguente proprietà: detti $\mathcal{C}$ la circonferenza di raggio unitario e centro il punto di intersezione $P_0 = (x_0, y_0)$ delle due rette, e P, Q punti di intersezione di R ed R' con $\mathcal{C} \cap \{(x, y) : x \geq x_0\}$, la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ da P a Q è $\pi/2$.

l'asse delle x, deve essere allora $|\alpha - \alpha'| = \frac{\pi}{2}$. Supponendo $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$ (fai l'altro caso per esercizio), abbiamo allora:

$$a' = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \pi/2)}{\cos(\alpha + \pi/2)} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{a}.$$

CONVESSITA'

Una funzione convessa è di questo tipo:



Un modo di caratterizzarne la convessità è: dati tre punti $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, 3$ sul grafico con $x_1 < x_2 < x_3$, la retta per i primi due punti ha pendenza minore o uguale di quella per il secondo e terzo. Sappiamo che ciò si traduce nella seguente

DEFINIZIONE. Una $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa su D_f se dati $(x_i, f(x_i)) \in \operatorname{graf}(f)$, $i = 1, 2, 3$ con $x_1 < x_2 < x_3$ risulta

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{1}$$

Si parla di convessità su un intervallo $I \subseteq D_f$ se si richiede in più che $x_i \in I$, $i = 1, 2, 3$. Una funzione è *concava* se si ha $\geq$ al posto di $\leq$. Convessità o concavità *stretta* è quando lo è la disuguaglianza relativa.

ESEMPI. **(a)** Una f è concava se e solo se $-f$ è convessa. Dunque ci si può limitare a studiare le proprietà delle funzioni convesse. Partendo da graf f disegna (applicando la definizione di grafico) graf$(-f)$. Per f convessa, il grafico di $-f$ ti darà un esempio di funzione concava.

(b) Verifichiamo che $x \mapsto x^2$ è convessa. Sia $x_1 < x_2 < x_3$ abbiamo, usando $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} \leq \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow x_2 + x_1 \leq x_3 + x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_3.$$

Dunque, poichè da $x_1 < x_2 < x_3$ segue $x_1 < x_3$, l'equazione 1 è verificata. Dall'esercizio 16 segue allora che $x \mapsto y_0 + a(x - x_0)^2$ —che vedremo essere una parabola— è convessa se $a > 0$, concava se $a < 0$.

(c) Verifichiamo che $x \mapsto 1/x$ è convessa per $x > 0$. Vedremo che ciò determina (usando gli esercizi 16 e 17) la curvatura delle iperboli. Con $0 < x_1 < x_2 < x_3$ abbiamo

$$\frac{1/x_2 - 1/x_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{1/x_3 - 1/x_2}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1 x_2} \leq -\frac{1}{x_2 x_3} \Leftrightarrow x_1 \leq x_3.$$

(d) E' utile mettere in uno stesso grafico per esempio x^2 e $2x^2$, e in un altro $1/x,\ 2/x,\ 1/2x$.

E' fondamentale il seguente teorema (che dimostreremo più avanti), in base al quale si stabilisce la curvatura di tutte le funzioni elementari, potenze, esponenziali e trigonometriche. Nell'enunciato si interpretino convessità e concavità *in senso stretto.*

TEOREMA. Le funzioni potenza $x \mapsto x^\alpha$ sono convesse per $\alpha < 0$ ed $\alpha > 1$, e concave per $0 < \alpha < 1$. Le funzioni esponenziali $x \mapsto a^x$ sono convesse per $a > 1$. La funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è concava in $[0, \pi]$ e cambia curvatura ad ogni $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; la $x \mapsto \tan x$ è concava in $(-\pi/2, 0)$ e cambia curvatura ad ogni $k\pi/2$.

Sappiamo, con trasformazioni dei grafici delle funzioni menzionate nel teorema, ottenere tutte le altre elementari. Per confermare i disegni — che a questo punto dovrebbero potersi fare tutti (giusti) in meno di cinque minuti — resta da verificare che i limiti sono quelli che ci aspettiamo.

ESERCIZI

13. Mostra che per qualunque coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \operatorname{graf}(ax + b)$ si ha $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

14. Verifica che $\{x : x_1 \le x \le x_2\} = \{x \in \mathbb{R} : x = tx_1 + (1-t)x_2, 0 \le t \le 1\}$ (si sta assumendo $x_1 \le x_2$).

15. Siano P_1, P_2 punti con $x_1 < x_2$ ed r_{12} la retta passante per essi. Definisci $\operatorname{seg}P_1P_2 := \{(x,y) : (x,y) \in \operatorname{graf}(r_{12}), x_1 \le x \le x_2\}$. Usa la affinità della retta per verificare che $\operatorname{seg}P_1P_2 = \{P : P = tP_1 + (1-t)P_2, 0 \le t \le 1\}$.

16. Verifica che se f_1, f_2 sono convesse in I e $c_1, c_2 > 0$, allora la funzione $c_1f_1 + c_2f_2$ (definita da $(c_1f_1 + c_2f_2)(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$) è convessa. Dunque se f è convessa e $c < 0$, cf è concava. Verifica inoltre che se $f(x)$ è convessa lo è anche $y_0 + f(x - x_0)$. E infine, che se $f(x)$ è convessa lo è anche $f(-x)$.

17. Verifica che una funzione dispari convessa per $x > 0$ è concava per $x < 0$.

18. Usa l'identità $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ per dimostrare la convessità di $f(x) = x^n$ per $x > 0$. Metti in una figura x^3 ed x^5.

19. Se vuoi, con la tecnica dell'esercizio precedente puoi verificare, per $x > 0$, la convessità di $1/x^n$ e la concavità di $\sqrt[n]{x}$. E' utile mettere in uno stesso grafico $1/x$ ed $1/x^3$, e in un altro $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$. Per stabilire la concavità di $\sqrt[n]{x}$ si può usare anche il prossimo esercizio.

20. (i) Se f è convessa (risp. concava) crescente, allora f^{-1} è concava (risp. convessa); (ii) Se f è convessa o concava decrescente, lo sarà anche f^{-1}.

TRASLAZIONI DI GRAFICI, PARABOLE, IPERBOLI, *e* DI NEPERO

La traslazione è l'operazione più importante sul grafico di una funzione. Con $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definiamo $P_0 + A := \{P_0 + P : P \in A\}$. Dati una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, vogliamo trovare la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\operatorname{graf} g = (x_0, y_0) + \operatorname{graf} f$. Indoviniamo, poi verifichiamo: la f traslata orizzontalmente di x_0 associa ad x il valore che f assume in $x - x_0$, dunque deve essere $x \mapsto f(x - x_0)$; la traslazione verticale si ottiene semplicemente aggiungendo y_0 ad ogni valore della funzione; conclusione, indoviniamo $g(x) = y_0 + f(x - x_0)$

(con $D_g = \{x : x - x_0 \in D_f\}$). Verifichiamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{graf}(y_0 + f(x - x_0)) &= \{(x, y_0 + f(x - x_0)) : x - x_0 \in D_f\}\\ &= \{(x_0 + (x - x_0), y_0 + f(x - x_0)) : x - x_0 \in D_f\}\\ &= \{(x_0, y_0) + (x - x_0, f(x - x_0)) : x - x_0 \in D_f\}\\ &= \{(x_0, y_0) + (z, f(z)) : z \in D_f\}\\ &= (x_0, y_0) + \operatorname{graf} f.\end{aligned}$$

Torna spesso utile vedere la domanda 'al contrario': data $g(x) = y_0 + f(x - x_0)$, qual è il suo grafico? Risposta: $\operatorname{graf} g = (x_0, y_0) + \operatorname{graf} f$.

ESEMPI. **(a)** Dalla relazione $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ si vede per esempio che il grafico della funzione coseno è quello della funzione seno traslato orizzontalmente di $-\frac{\pi}{2}$.

(b) Parabole. Sono le funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Completando i quadrati sappiamo ottenere $ax^2 + bx + c = y_0 + a(x - x_0)^2$ (con $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$), che dice che ogni parabola è traslazione una $x \mapsto ax^2$.

Dunque per sapere come è fatto il grafico di una parabola basta considerare $f : x \mapsto ax^2$; anzi, basta $a > 0$ (cioè parabole 'ascendenti' — perchè?). Ancora, basta considerare $x \geq 0$, perchè $f(-x) = f(x)$ (la funzione è *pari*) quindi si può ricavare la parte di grafico con $x < 0$ da quella con $x > 0$. E' chiaro che $f(0) = 0, f(x) > 0\ \forall x > 0$ (quindi anche $\forall x < 0$) e che f è crescente su $[0, \infty)$ (quindi decrescente su $(-\infty, 0]$, come si può verificare direttamente). Abbiamo anche verificato che f è convessa, dunque confermiamo il disegno sempre fatto.

E' importante a questo punto interpretare geometricamente i risultati sul segno di $ax^2 + bx + c$ trovati un Usare i Numeri (che erano: 'dipende dal segno di a e di Δ'). Nota in particolare la connessione tra segno di Δ e quello di y_0 (minimo o massimo valore della parabola a seconda del segno di a).

Nota inoltre che nel caso di $\Delta > 0$, l'$x_0 = -b/2a$ in cui la parabola assume il vaolre massimo o minimo è il punto medio fra i due zeri, come si indovina dalle figure; puoi infatti verificare che $\big((-b - \sqrt{\Delta})/2a + (-b + \sqrt{\Delta})/2a\big)/2 = -b/2a$.

(b.1) Trova il vertice di $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - 1$ e tracciane un grafico approssimato (dando per scontata la convessità).

(b.2) Per la f di sopra traccia $f(x-2)$, $f(2-x)$, $f(|x+2|)$, $|f(x+2)| - 1$ (senza calcoli).

(c) Iperboli. Sono le funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad c \neq 0,\ x \neq -\frac{d}{c}.$$

Per $a = d = 0$ è una funzione del tipo $x \mapsto \alpha/x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, che è semplice: considerando solo $\alpha > 0$, sappiamo che è decrescente e ne conosciamo il segno; è dispari, dunque è sufficiente conoscere la parte di grafico per $x > 0$, ed è — come abbiamo visto — convessa per $x > 0$. Si vede facilmente che

$$\frac{ax + b}{cx + d} = y_0 + \frac{\alpha}{x - x_0} \text{ con } y_0 = \frac{a}{c},\ \alpha = \frac{bc - ad}{c^2},\ x_0 = -\frac{d}{c}.$$

Infatti

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + b/a}{x + d/c} = \frac{a}{c}\Big(1 + \frac{b/a - d/c}{x + d/c}\Big) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + d/c}.$$

Dunque ogni iperbole è traslazione di una $x \mapsto \alpha/x$. In questo caso è molto più facile ricordare il procedimento — messa in evidenza — che le espressioni di x_0, y_0, α;

lo si applichi per esempio ad $f(x) = \frac{2x+29/5}{x+3}$. Abbiamo visto la curvatura di α/x, dunque conosciamo (esercizi 16 e 17) la curvatura delle iperboli.

(d) Per ogni $x \in [-1,1]$ è $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2$ (*controlla subito* sui tuoi grafici che prendendo $-\arccos x$ e aggiungendo $\pi/2$ si ottiene $\operatorname{arcsen} x$). Perchè: osserva che $\operatorname{sen} y = \cos(\pi/2 - y)$, e che $y \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \pi/2 - y \in [0, \pi]$; da ciò, $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y \Leftrightarrow x = \cos(\pi/2 - y) \Leftrightarrow \pi/2 - y = \arccos x \Leftrightarrow y = -\arccos x + \pi/2$, come volevamo.

(e) Numero di Nepero. Metti nello stesso disegno i grafici di $a^x - 1$ e $\log_a(x+1)$, entrambi passanti per l'origine: se $a < e$ (risp. se $a > e$) si incrociano un'altra volta nel primo (risp. terzo) quadrante; se $a = e$ l'origine è il solo punto di contatto, e le due curve sono tangenti. Questa magia di e la dimostreremo più avanti. E' una buona ragione per chiamare e la 'base naturale' dei logaritmi.

(f) Distanza di un punto da una retta. Siano R una retta e P_0 un punto; vogliamo definire la distanza di P_0 da R, $d(P_0, R)$, come distanza minima da P_0 a punti di R; finchè non dimostriamo che il min esiste dobbiamo scrivere inf, dunque poniamo

$$d(P_0, R) := \inf\{d(P_0, P) \colon P \in R\}.$$

E' intuitivamente chiaro (vedi figura) che quest'inf è in realtà un minimo, assunto nel punto — che chiameremo $P^* = (x^*, y^*)$ — di intersezione fra R e la retta per P_0 ad essa perpendicolare.

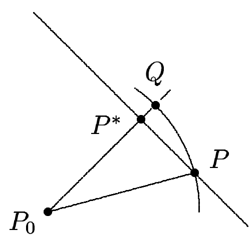


FIGURE 2

Se R è verticale, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = c\}$ per un $c \in \mathbb{R}$, la dimostrazione di questo è immediata: $P^* = (c, y_0)$, sicchè per ogni $P = (x, y) \in R$ è $d^2(P_0, P) = (x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2 \geq (x_0 - c)^2 = d^2(P_0, P^*)$.

Per R non verticale [9] facciamo così: nel caso presente esistono a, b tali che $R = \operatorname{graf} r$ con $r(x) = ax + b$. Supponiamo prima $a \neq 0$, e calcoliamo P^*: la perpendicolare ad r per P_0 è $r'(x) = y_0 - (x - x_0)/a$, x^* risolve $r(x) = r'(x)$, sicchè $x^* = (a(y_0 - b) + x_0)/(1 + a^2)$ (verifica); ed $y^* = ax^* + b = y_0 - (x^* - x_0)/a$ $(= r(x^*) = r'(x^*))$. Poi: i $P \in R$ sono gli $(x, ax + b)$ con $x \in \mathbb{R}$, dunque $d^2(P_0, (x, ax + b)) = k_1 + x[(1 + a^2)x + k_2]$, con $k_2 = -2(a(y_0 - b) + x_0)$; questa è una parabola ascendente in x, che ha minimo in $-k_2/2(1 + a^2) = x^*$. Dunque $\{d(P_0, P) \colon P \in R\}$ ha effettivamente minimo, assunto nel punto $(x^*, ax^* + b) = P^*$: $d(P_0, R) \equiv \min\{d(P_0, P) \colon P \in R\} = d(P_0, P^*)$. Per vedere quanto vale $d(P_0, P^*)$ conviene scrivere $P^* = (x^*, y_0 - (x^* - x_0)/a)$; si trova allora $x^* - x_0 = \frac{a}{1+a^2}(y_0 - ax_0 - b)$ ed $y^* - y_0 = -\frac{1}{a}(x^* - x_0) = \frac{1}{1+a^2}(ax_0 + b - y_0)$, da cui $d^2(P_0, P^*) = (ax_0 + b - y_0)^2/(1 + a^2)$.

[9]... sarebbe naturale ruotare la figura intorno a P_0, ed osservare che $d(P_0, P) = d(P_0, P^*) \cdot \cos\alpha < d(P_0, P^*)$, dove $\alpha \in (0, \pi/2)$ è l'angolo formato dalle rette per P_0, P e per P_0, P^*; ma ancora non abbiamo parlato di rotazioni; dunque rimandiamo questa argomentazione geometrica ad un esercizio, e qui...

Resta il caso di $a = 0$: questo è facile come il caso di retta verticale, e si trova $d^2(P_0, R) = (y_0 - b)^2$ (di nuovo $= (ax_0 + b - y_0)^2/(1 + a^2)$ perchè $a = 0$). Conclusione:

$$d(P_0, R) = \min\{d(P_0, P) \colon P \in R\} = d(P_0, P^*)$$
$$= \begin{cases} |x_0 - c| & \text{se } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\} \text{ (verticale)} \\ \dfrac{|ax_0 + b - y_0|}{\sqrt{1 + a^2}} & \text{se } R = \operatorname{graf}(ax + b) \text{ (non verticale).} \end{cases}$$

ESERCIZIO

21. Qui costruiamo la giustificazione 'trigonometrica' della formula per la distanza di un punto da una retta $d(P_0, R)$ nel caso di R non verticale (soluzioni in nota). Se R non è verticale esistono a, b tali che $R = \operatorname{graf} r$ con $r(x) = ax + b$; considera la circonferenza $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P_0, d(P_0, P))$; sia Q il punto di intersezione fra $\mathcal{C}$ e la retta per P_0, P^* (cfr. figura 2), e sia $d(P_0, P)\alpha$ la lunghezza dell'arco da P a Q; allora $\alpha \in [0, \pi/2)$.

(i) Quanto vale $d(P_0, P^*)$? [10] Concludi che $d(P_0, P^*)$ è la distanza minima (nota bene che non ci siamo preoccupati del verso di rotazione nella circonferenza perchè $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$).

Per vedere quanto vale $d(P_0, P^*)$, prendi $P = (x_0, ax_0 + b) \in R$ (disegna —la retta per P_0 e P è ora verticale); per questo P l'arco da P a Q ha lunghezza uguale a quello descritto muovendosi da R all'asse orizzontale lungo una circonferenza di ugual raggio (e centro l'intersezione fra R e l'asse X), perchè ci si sposta da perpendicolare a perpendicolare.

(ii) Dunque per tale P quanto vale $\tan\alpha$? [11]

(iii) verifica che $\cos\alpha = (1 + \tan^2\alpha)^{-1/2}$, calcola $d(P_0, P)$ [12] e ritrova la formula del testo.

INSIEMI DELIMITATI DA GRAFICI

L'insieme $\{(x, y) : y \geq f(x)\}$ è l'insieme dei punti al di sopra del grafico di f, ed $\{(x, y) : y \leq f(x)\}$ quello dei punti che ne stanno al di sotto. Insiemi di questo tipo possono essere utili per risolvere disequazioni.

ESEMPI. **(a)** L'insieme $\{(x, y) : x - y \leq 0\}$ è l'insieme dei punti con $y \geq x$, cioè i punti sopra il grafico di $f(x) = x$, la bisettrice di primo e terzo quardante. Analogamente l'insieme che ne sta sotto è $\{(x, y) : x - y \geq 0\}$.

(b) Abbiamo $\{(x, y) : |y| \leq |x|\} = \{(x, y) : y \geq 0, y \leq |x|\} \cup \{(x, y) : y < 0, y \geq -|x|\}$, cioè l'insieme dei punti che stanno sotto $|x|$ e sopra $-|x|$.

(c) Per risolvere $\operatorname{sen} x + \cos x > 0$, possiamo scrivere $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$ e usare le formule di prostaferesi; troveremo $2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$.

Se però disegnamo ci accorgiamo che i punti sulla circonferenza corrispondenti agli angoli che risolvono la disequazione sono quelli che stanno sopra la bisettrice $y = -x$. E in effetti vederla così è molto più semplice. Cambiamo temporaneamente nome per comodità; scrivendo $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha > 0$, vogliamo α tale che il punto $(x_\alpha, y_\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ appartenga all'insieme $\{(x, y) : x + y > 0\}$. Disegnando l'intersezione di questo insieme con la circonferenza trigonometrica si vede che gli α soluzione, che ora possiamo richiamare x, sono quelli trovati prima.

[10] $d(P_0, P^*) = d(P_0, P)\cos\alpha \leq d(P_0, P)$.
[11] $|a|$
[12] $= |y_0 - ax_0 - b|$

(d) Considera $\operatorname{sen} x + \cos x > 1 + \operatorname{sen} 2x$. Con qualche passaggio si vede che è equivalente a $(\operatorname{sen} x + \cos x)((\operatorname{sen} x + \cos x) - 1) < 0$, che è di secondo grado in $\operatorname{sen} x + \cos x$, quindi risolta da $0 < \operatorname{sen} x + \cos x < 1$. Dando ad x il nome α, vogliamo i punti $(x_\alpha, y_\alpha) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ sulla circonferenza che appartengono all'insieme $\{(x,y) : 0 < x+y < 1\} = \{(x,y) : -x < y < 1-x\}$. Questo è facile da disegnare, e ricambiando nome abbiamo le soluzioni: $2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi$ oppure $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$.
(e) Rifai $\operatorname{sen} x + \cos x > \operatorname{sen}(\pi/6) + \cos(\pi/6)$.

ESERCIZI

22. Disegna: (i) $\{(x,y) : x+y \leq 0\}$ ed $\{(x,y) : x+y \geq 0\}$; (ii) $\{(x,y) : |y| \leq x^2\}$; (iii) $\{(x,y) : |x|+|y| < 1\}$.

23. Con $A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ e $B = \{(x,y) : y \geq x^2\}$ disegna $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

24. Risolvi: (i) $\cos x - \operatorname{sen} x > 0$, $\cos x - \operatorname{sen} x < 0$; (ii) $|1+\cos x| < 1 - \operatorname{sen} x$.

ELLISSE

L'ellisse non è un grafico di funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$; in compenso però è *un codominio*; e la funzione in questione va da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}^2$. E' l'unico studio di $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ del corso.

Ripartiamo dalla circonferenza di centro 0 e raggio 1, e guardiamola come codominio della funzione $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Lo è, perchè se $(x,y) \in \mathrm{Cod}_E$ è $(x,y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ per qualche t, quindi $x^2+y^2 = 1$; e viceversa qualunque punto sulla circonferenza ha come coordinate $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ per qualche t, quindi è in Cod_E. [13]

La circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r è il codominio di una trasformazione di E, precisamente della funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ definita da $t \mapsto (x_0,y_0) + rE(t)$. Perchè se (x,y) è nel codominio di questa funzione $(x-x_0, y-y_0) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t)$ quindi $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$; e il viceversa è pure facile.

Le ellissi sono codomini di trasformazioni delle funzioni $E_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite da $t \mapsto (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$ con $a, b > 0$. Nota che per la circonferenza avevamo la $E = E_{11}$. E_{ab} dà 'pesi diversi' ad ascissa e ordinata. Prendiamo per esempio $a = 10, b = 1$: rispetto alla circonferenza di centro 0 e raggio 1 l'ordinata è la stessa, l'ascissa dieci volte maggiore; la figura che si ottiene facendo andare t da 0 a 2π è una circonferenza allungata in senso orizzontale, passante per $E_{10,1}(0) = (10,0), E_{10,1}(\frac{\pi}{2}) = (0,1), E_{10,1}(\pi) = (-10,0)$ ed $E_{10,1}(\frac{3}{2}\pi) = (0,-1)$. Nota che basta considerare $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il resto si deduce per simmetria e periodicità. I segmenti determinati da $E_{ab}(0) = (a,0)$ ed $E_{ab}(\frac{\pi}{2}) = (0,b)$ si chiamano semiassi, orizzontale e verticale. Analogamente, se $a < b$ si produce un allungamento in senso verticale.

I punti $(x,y) \in \mathrm{Cod}E_{ab}$ sono le soluzioni di $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, che è del tipo $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$ con $\alpha\beta > 0$ ed $\alpha\gamma < 0$ (cioè α e β concordi fra loro e discordi con γ). Questa è l'equazione caratteristica delle ellissi determinate dalle E_{ab}, perchè una equazione così, supponiamo $\alpha, \beta > 0$, si può mettere nella forma $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ con $a = \sqrt{-\gamma/\alpha}, b = \sqrt{-\gamma/\beta}$, e quindi le sue soluzioni sono il codominio di E_{ab}.

Il caso generale, $t \mapsto (x_0, y_0) + rE_{ab}(t)$, non è tanto più generale. Perchè $rE_{ab} = E_{ra,rb}$ quindi una funzione del tipo già visto; resta in più solo l'aggiunta di (x_0, y_0), dunque i punti (x,y) su un'ellisse qualunque sono tali che $(x-x_0, y-y_0)$ sono su un'ellisse generata da una E_{ab}. Conclusione: l'equazione caratteristica dell'ellisse

[13] Il *grafico* di E (in $\mathbb{R}^3$) è una molla che si avvolge intorno all'asse delle t.

di centro (x_0, y_0) è del tipo

$$\alpha(x-x_0)^2+\beta(y-y_0)^2+\gamma=0 \quad \text{con } \alpha\beta>0,\ \alpha\gamma<0.$$

Nota che per $\alpha=\beta$ riotteniamo la cicronferenza. Un'ellisse è determinata da tre cose: centro (x_0, y_0) e semiassi. Negli esercizi bisogna trovarli.

ESEMPI. **(a)** L'equazione $-x^2-4y^2+16x-16y-76=0$ si può mettere nella forma $\frac{(x-8)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$, che è un'ellisse di centro $(8,-2)$ con semiasse orizzontale lungo 2 e verticale lungo 1.

(b) L'equazione $x^2+2y^2-2x+16y+45=0$ completando i quadrati diventa $(x-1)^2+2(y+4)^2=-12$, che non ha soluzioni (qui $\alpha\gamma>0$).

ESERCIZI

25. Trova i semiassi dell'ellisse di equazione $\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{3y^2}{2}=24$.

26. Vedi se l'equazione $2x^2+3y^2=8x+18y-29$ determina un'ellisse, e se si quale. Fai qualche altro esempio con numeri a caso (piccoli).

SOLUZIONE ESERCIZI 3 E 4

Soluzione dell'esercizio delle $f\circ f$ (numero 3):

$$(i)\ f(x)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}9x & 0\le x\le \frac{1}{3}\\ 0 & x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$(ii)\ f(x)=\begin{cases}3x & |x|<3\\ x^2-1 & |x|\ge 3\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}9x & -1<x<1\\ 9x^2-1 & x\in(-3,-1]\cup[1,3)\\ (x^2-1)^2-1 & |x|\ge 3\end{cases}$$

$$(iii)\ f(x)=\begin{cases}e^x & 0\le x<1\\ \log x & x\ge 1\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}x & 0\le x<e\\ \log(\log x) & x\ge e\end{cases}$$

$$(iv)\ f(x)=\begin{cases}-\log x & 0<x<1\\ e^x & x\ge 1\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}x^{-1} & 0<x\le e^{-1}\\ -\log(-\log x) & e^{-1}<x<1\\ e^{e^x} & x\ge 1\end{cases}$$

$$(v)\ f(x)=\begin{cases}2x & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\\ 1 & x>\frac{1}{2}\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}4x & -\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{4}\\ 1 & x>\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$(vi)\ f(x)=\begin{cases}-2x & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\\ 1 & x>\frac{1}{2}\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}4x & -\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2}\le x<-\frac{1}{4},\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(vii)\ f(x)=\begin{cases}\log x & 0<x<1\\ e^x & x\ge 1\end{cases} \qquad f(f(x))=e^{e^x},\ x\ge 1$$

$$(viii)\ f(x)=\begin{cases}-2x & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & x>\frac{1}{2}\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\le x<-\frac{1}{4}\\ 4x & -\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(ix)\ f(x)=\begin{cases}1+x & 0\le x<1\\ (x-1)^2 & x\ge 1\end{cases} \qquad f(f(x))=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 1+(x-1)^2 & 1\le x<2\\ \left((x-1)^2-1\right)^2 & x\ge 2\end{cases}$$

(x) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$ $\quad f(f(x)) = \begin{cases} -x^4 & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4} & x > 1 \end{cases}$

(xi) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ $\quad f(f(x)) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ 8x^4 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

(xii) $f(x) = \begin{cases} \tan x & 0 \leq x < 1 \\ \cos x & 1 \leq x < \sqrt{3} \end{cases}$ $\quad f(f(x)) = \begin{cases} \tan(\tan x) & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \cos(\tan x) & \frac{\pi}{4} \leq x < 1 \\ \tan(\cos x) & 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$(xiii)$ $f(x) = \begin{cases} \tan x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{9}x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad f(f(x)) = \begin{cases} \tan(\tan x) & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{9}\tan^2 x & \frac{\pi}{4} \leq x < 1 \\ \tan(\frac{1}{9}x^2) & 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{9\cdot 81}x^4 & x \geq 3 \end{cases}$

Soluzione del 4:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}.$$