USARE I NUMERI

SALVATORE MODICA

SOMMARIO.

Guida al capitolo: Se alle scuole superiori 'matematica non ne hai fatto', il tuo obiettivo è intanto acquisire un pò di dimestichezza con i calcoli, quindi: tendi a saltare le dimostrazioni e le parti più teoriche; concentrati sugli esercizi, specialmente quelli sulle disequazioni, e facendoli impara quello che serve per risolverli. Se invece i numeri li sai già usare, fai attenzione al processo di deduzione di tesi da ipotesi che sta dietro alle 'note regole'.

1 INSIEMI, FUNZIONI E PRODOTTO CARTESIANO

Degli insiemi dobbiamo solo imparare a parlare. Per esempio la domanda "Sei uno studente di primo anno?" la tradurremmo in "Appartieni all'insieme degli studenti di primo anno?", che dice la stessa cosa ma evidenzia il concetto di appartenenza ad un insieme. Per indicare che x appartiene all'insieme A si scrive $x \in A$. Come sinonimo di 'x appartiene ad A' si usa anche 'x è un elemento di A'. La negazione di

Istituto di Matematica per la Ricerca Operativa, Università di Palermo (modica@unipa.it),
23.X.96, 15.X.98.

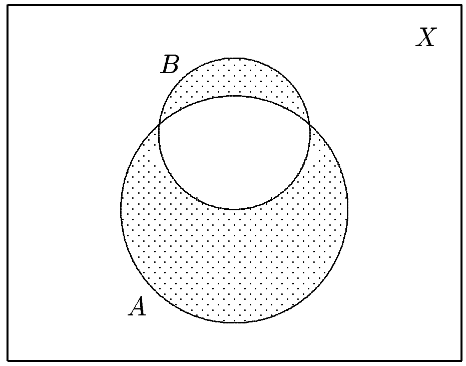


FIGURA 1. Punteggiato l'insieme $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$x \in A$ si scrive $x \notin A$. Per assioma due insiemi A, B sono uguali, scritto $A = B$, se hanno gli stessi elementi. In forma più estesa ma più pronta all'uso, questo assioma dice che $A = B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B ed ogni elemento di B appartiene anche ad A. Per scrivere questo in un quarto di rigo invece che in un rigo e mezzo: dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A appartiene anche a B diciamo che A è contenuto in B, o che A è un sottoinsieme di B, e scriviamo $A \subseteq B$ (esempio, l'insieme degli studenti di primo anno è contenuto nell'insieme di tutti gli studenti). [1] Così possiamo scrivere

$$A = B \quad \text{se} \quad A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A. \tag{1.1}$$

Dunque, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ sono le cose che bisogna verificare per vedere se $A = B$.

Per descrivere gli insiemi si usano le parentesi graffe, esempio $A = \{1, \text{Paolo}, m\}$. Per indicare che $B = \{1, m\} \subseteq A$ è l'insieme degli elementi di A con nomi di un solo carattere si scrive $B = \{x \in A : \text{il nome di } x \text{ ha un solo carattere}\}$; dopo i due punti (che si leggono 'tali che') c'è la proprietà che gli elementi devono soddisfare per essere nell'insieme. Se nessun elemento di A soddisfa la proprietà in questione resta definito il cosiddetto *insieme vuoto*, cioè senza elementi, che si indica col simbolo $\emptyset$; esempio, $\{x \in A : \text{il nome di } x \text{ ha due caratteri}\} = \emptyset$. Nota che $\emptyset \subseteq A$ qualunque sia l'insieme A, perchè: $C \subseteq A$ è falso se esiste qualche elemento di C che non appartiene ad A; per $C = \emptyset$ siffatti elementi non ne esistono, dunque $\emptyset \subseteq A$, non essendo falso, è vero.

Considerando ora insiemi A, B contenuti in uno stesso insieme X definiamo le operazioni di unione, intersezione e complemento. L'**unione** di A e B, scritta $A \cup B$, è l'insieme degli elementi di X che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B, in simboli $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$[2]; l'**intersezione** di A e B, $A \cap B$, è l'insieme degli elementi di X che appartengono sia ad A che a B, cioè $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ ed } x \in B\}$; il **complemento** di A (in X), indicato con $X \setminus A$, è l'insieme degli elementi di X che non appartengono ad A: $X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$. Per esempio $X \setminus X = \emptyset$. Quando (come ora) è chiaro l'X cui si fa riferimento, per indicare $X \setminus A$ si usa il simbolo A^c. La *differenza* $B \setminus A$ è il complemento di A in B, cioè è definita ponendo $B \setminus A = \{x \in X : x \in B \text{ ed } x \notin A\}$ $(= B \cap A^c)$.

Ci sono parecchie proprietà semplici delle operazioni appena definite che lo studente le dimostrerà 'al bisogno'; un esempio è $A \cup B = B \cup A$, un altro (meno banale) è nella figura 1. Le proprietà forse più usate sono le seguenti (con $A, B, C \subseteq X$):

---

[1] $A \subset B$ indica che A è un sottoinsieme *proprio* di B, cioè $A \subseteq B$ ma non $B \subseteq A$.

[2] 'oppure' sarà sempre usato con valore non disgiuntivo (come in latino).

$$
\begin{aligned}
&A \subseteq B \text{ se e solo se } B^c \subseteq A^c \\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
&(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\
&(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\
&A \cap B = A \text{ se e solo se } A \subseteq B.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Intanto si facciano i disegni per convincersi della validità di queste relazioni. Per dimostrare la prima conviene mettere nero su bianco un principio di logica che si usa sempre. Intanto, con p e q affermazioni qualunque (che possono essere vere o false), la frase 'p implica q' vuol dire 'se p è vera lo è anche q'; e la frase 'p se e solo se q' vuol dire: p implica q (p solo se q) e q implica p (p se q). Inoltre, 'non p' è la negazione di p, vera (rispettivamente falsa) se p è falsa (risp. vera). Dobbiamo sapere che è vera la seguente affermazione: 'p implica q se e solo se non q implica non p'. In altre parole che: la verità di p implica quella di q se e solo se la falsità di q implica quella di p. Usando i simboli '$\Rightarrow$' e '$\Leftrightarrow$' per abbreviare rispettivamente 'implica' e 'se e solo se', questo principio asserisce che:

$$(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (\text{non}\, q \Rightarrow \text{non}\, p).^3 \tag{1.3}$$

Per dimostrare la prima delle (1.2) basta usare la (1.3) con $p =$ '$x \in A$' e $q =$ '$x \in B$': se $A \subseteq B$, per ogni $x \in X$ si ha $x \in A \Rightarrow x \in B$, dunque —per la (1.3)— $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, cioè $B^c \subseteq A^c$; il che dimostra $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$. La dimostrazione di $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq B$ è praticamente uguale (e va fatta!).

Anche per le altre le dimostrazioni più 'pulite' usano la logica formalmente; noi ci accontentiamo di usarla informalmente; per esempio una dimostrazione accettabile della terza è (usando ovviamente la (1.1)): se $x \in A \cap (B \cup C)$ sono vere $x \in A$ ed almeno una fra $x \in B$ ed $x \in C$; allora è vera almeno una fra ($x \in A$ ed $x \in B$) ed ($x \in A$ ed $x \in C$), cioè $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Viceversa, se $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ è necessariamente $x \in A$, e deve essere inoltre $x \in B$ (se $x \in A \cap B$) oppure $x \in C$ (se $x \in A \cap C$); cioè deve essere $x \in A \cap (B \cup C)$. Le altre relazioni in (1.2) si dimostrano in modo simile (esercizio).

Dati due oggetti x ed y, la *coppia ordinata* (x, y) —racchiusa in parentesi tonde— è identificata dagli elementi che la compongono e dall'ordine in cui essi stanno (prima o dopo la virgola). Dunque due coppie ordinate (x, y) ed (x', y') sono uguali se $x = x'$ ed $y = y'$. Per esempio $(2, m) \neq (m, 2)$ anche se $\{2, m\} = \{m, 2\}$: un insieme è determinato dai suoi elementi, una coppia ordinata anche dall'ordine in cui essi stanno. Il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) con $x \in A$, $y \in B$: $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\, y \in B\}$. Per esempio $\{2, m\} \times \{M, N, O\} = \{(2, M), (2, N), (2, O), (m, M), (m, N), (m, O)\}$, e $\{2, m\} \times \{2, m\} = \{(2, 2), (2, m), (m, 2), (m, m)\}$.

Anche sulle funzioni, giusto per fissare i termini. Dati due insiemi A, B una **funzione** f da A in B, scritto $f : A \to B$, associa ad ogni elemento $x \in A' \subseteq A$ uno ed un solo elemento $f(x) \in B$, detto immagine di x. L'insieme A' si chiama *dominio* di f e si indica con D_f. Il **grafico** di f è l'insieme $\operatorname{graf} f \subseteq A \times B$ definito da

$$
\begin{aligned}
\operatorname{graf} f &= \{(x, y) \in A \times B : x \in D_f \text{ ed } y = f(x)\} \\
&\equiv \{(x, f(x)) : x \in D_f\}.
\end{aligned}
$$

[3] Su questo si basa la cosiddetta 'dimostrazione per assurdo', con la quale per dimostrare $p \Rightarrow q$ si nega la tesi q e si dimostra che da ciò segue la falsità dell'ipotesi p. Fare questo vuol dire dimostrare non $q \Rightarrow$ non p invece di $p \Rightarrow q$, cioè semplicemente usare la (1.3).

Per $I \subseteq A$ si indica con $f(I)$ l'insieme delle immagini dei punti di I, cioè: $f(I) = \{y \in B : y = f(x) \text{ ed } x \in I\}$, abbreviato $\{f(x) : x \in I\}$. Nota che $f(I) = f(I \cap D_f)$, in particolare $f(A) = f(D_f)$; e che $f(\emptyset) = \emptyset$. L'insieme $f(A)$ si chiama *codominio* di f e si indica anche con Cod_f. Per $J \subseteq B$ indicheremo con $f^-(J)$ l'insieme dei punti di A le cui immagini sono in J: $f^-(J) = \{x \in A : f(x) \in J\}$, detto insieme delle controimmagini di J.

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se ad elementi distinti di A corrispondono immagini distinte, se cioè $x \neq x'$ implica $f(x) \neq f(x')$. Se f è iniettiva, associando ad ogni punto di $y \in f(A)$ l'unico punto $x \in A$ tale che $f(x) = y$ si definisce una funzione da $f(A)$ in A che si chiama **funzione inversa** di f e si indica con f^{-1}. Dunque f^{-1} è la funzione $g : f(A) \to A$ definita da $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in_f$; equivalentemente (esercizio), è la $g : f(A) \to A$ definita da $f(g(y)) = y$ per ogni $y \in f(A)$ (quest'ultima definizione è ben posta perchè f è iniettiva). Comprensibimente, sinonimo di iniettiva è invertibile. [4]

Date $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si definisce la funzione $g \circ f : A \to C$ ponendo $g \circ f(x) = g(f(x))$, che si chiama **funzione composta** di f e g. Nota che in $g \circ f$ è f seguita da g. Il dominio è $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = f^-(D_g)$.

Una $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se $f(A) = B$. Una f iniettiva e suriettiva, detta *biiettiva*, pone D_f e B in corrispondenza biunivoca, associando ogni $y \in B$ all'elemento $x \in D_f$ tale che $f(x) = y$.

ESEMPIO 1.1. Siano dati $A = \{\text{Rosso}, \text{Fuoco}\}, B = \{\text{Pericolo}, \text{Fiori}, \text{Passione}\}$ e $C = \{\text{Amore}, \text{Strada}\}$. Siano $f : A \to B$ definita da $f(\text{Rosso}) = \text{Fiori}, f(\text{Fuoco}) = \text{Passione}$; e $g : B \to C$ definita da $g(\text{Fiori}) = g(\text{Passione}) = \text{Amore}, g(\text{Pericolo}) = \text{Strada}$. [5] Qui f è iniettiva ma non suriettiva, e g non è iniettiva ed è suriettiva. $f^{-1} : B \to A$ ha dominio $\{\text{Fiori}, \text{Passione}\}$ ed è definita da $f^{-1}(\text{Fiori}) = \text{Rosso}, f^{-1}(\text{Passione}) = \text{Fuoco}$. La composizione di f seguita da g, $g \circ f : a \to C$, è $g \circ f(\text{Rosso}) = g \circ f(\text{Fuoco}) = \text{Amore}$, che non è iniettiva nè suriettiva.

Con $h : B \to C$ definita da $h(\text{Fiori}) = h(\text{Pericolo}) = \text{Amore}, h(\text{Passione}) = \text{Strada}$, la composizione $h \circ f$ è una biiezione fra A e B, con inversa $(h \circ f)^{-1}$ definita da $(h \circ f)^{-1}(\text{Amore}) = \text{Rosso}, (h \circ f)^{-1}(\text{Strada}) = \text{Fuoco}$.

I sottoinsiemi $\mathfrak{f} \subseteq A \times B$ tali che se $(x, y) \in \mathfrak{f}$ ed $(x, y') \in \mathfrak{f}$ allora $y = y'$ sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni f da A a B: alla funzione $f : A \to B$ corrisponde l'insieme $\mathfrak{f} = \mathrm{graf}\, f$. Vedere le funzioni come insiemi può sembrare strano, ma in realtà l'insieme delle coppie $(x, f(x))$ è semplicemente una descrizione dettagliata ed esaustiva della funzione stessa. Torneremo su questo punto.

ESERCIZI

1.1. Dimostra questa facile, molto usata conseguenza delle (1.2): se $A \subseteq B$ e $B = B_1 \cup B_2$ allora $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$.

1.2. Dimostra che se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono invertibili lo è anche $g \circ f$ e si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (usa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$).

1.3. Siano $f : A \to B$, $I, I' \subseteq A$ ed $J, J' \subseteq B$.
(i) Dimostra che: $f^-(J \cup J') = f^-(J) \cup f^-(J')$ ed $f^-(J \cap J') = f^-(J) \cap f^-(J')$; e che $f(I \cup I') = f(I) \cup f(I')$ ed $f(I \cap I') \subseteq f(I) \cap f(I')$;

[4] Nota la differenza fra f^{-1}, che è una funzione che esiste solo se f è inietiva, ed $f^-(J)$ che è un insieme ed esiste per ogni f. Se f è iniettiva, per ogni $y \in f(A)$ si ha $f^-(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

[5] Disegna per capire meglio: gli insiemi come punti per esempio allineati verticalmente con vicino i nomi, A a sinistra, B al centro e C a destra; e le funzioni come insiemi di freccie (per es. f è una freccia da 'Rosso' a 'Fiori' e una da 'Fuoco' a 'Passione'), se vuoi usando colori diversi per funzioni diverse o scrivendo f sulle freccia di f, g su quelle di g eccetera.

(ii) Trova un esempio in cui $f(I \cap I') \subset f(I) \cap f(I')$. (Suggerimento: prendi $A = \{m, n\}$ e $B = \{c\}$, cioè dominio con due elementi e codominio con un elemento).

1.4. Sia $f : A \to B$ con dominio A. Dimostra:
(i) Per ogni $I \subseteq A$, $I \subseteq f^{-}(f(I))$
(ii) $I = f^{-}(f(I))$ per ogni $I \subseteq A$ se e solo se f è iniettiva (si tenga presente la prima delle (1.2) che può sempre servire).
(iii) Per ogni $J \subseteq B$, $f(f^{-}(J)) \subseteq J$
(iv) $f(f^{-}(J)) = J$ per ogni $J \subseteq B$ se e solo se f è surgettiva.

1.5. Parlando di prodotto cartesiano si è detto che la famiglia[6] F delle funzioni da A a B è in corrispondenza biunivoca con la famiglia $\mathfrak{F}$ dei sottoinsiemi $\mathfrak{f}$ di $A \times B$ tali che se $(x, y), (x, y') \in \mathfrak{f}$ allora $y = y'$; e si è definita la funzione $g : F \to \mathfrak{F}$ data da $g(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$, $f \in F$, che è la biiezione che lega F ed $\mathfrak{F}$. Qual è l'inversa $g^{-1} : \mathfrak{F} \to F$? (Ricorda che $g^{-1}(\mathfrak{f})$ è una funzione; la domanda è: come è definito $g^{-1}(\mathfrak{f})(x)$, $x \in A$?)

2 PROPRIETA' DEI NUMERI REALI: I

I numeri reali sono un insieme, che si indica con $\mathbb{R}$, che soddisfa tre gruppi di proprietà: (a) proprietà algebriche, riguardanti le operazioni fondamentali che si possono eseguire sui numeri, fondate sugli assiomi su addizione e moltiplicazione (2.1)-(2.6); (b) proprietà di ordinamento, legate alla possibilità di identificare il 'maggiore' fra due numeri dati, che riguardano le disuguaglianze e si fondano sull'assioma di ordinamento (2.8); (c) una proprietà di completezza (l'assioma (4.1)), che assicura che vi siano 'abbastanza numeri' per rappresentare tutte le misure di ogni grandezza che si incontra nella realtà —da cui il nome numeri reali. [7] Dai primi due gruppi seguono tutte le regole di calcolo, che vogliamo cominciare a imparare subito; dell'assioma di completezza ci occuperemo un pò più avanti.

GLI ASSIOMI SU ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE

In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni, addizione e moltiplicazione, che associano ad ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}$ rispettivamente i numeri $x+y$ —somma— ed $x \cdot y$, abbreviato xy —prodotto. Somma e prodotto soddisfano per assioma [8] le proprietà di associatività, commutatività e distributività, cioè per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z \tag{2.1}$$

$$x + y = y + x, \quad xy = yx \tag{2.2}$$

$$x(y + z) = xy + xz. \tag{2.3}$$

Per (2.1) si può scrivere senza ambuguità $x + y + z$ ed xyz. La (2.3) letta da destra verso sinistra è 'la regola della messa in evidenza'. Ci sono poi tre assiomi di esistenza —degli elementi neutri, degli opposti e degli inversi: primo, esistono in $\mathbb{R}$ due numeri, 0 ed 1 con $0 \neq 1$, che per ogni $x \in \mathbb{R}$ verificano la (2.4); secondo, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un numero $-x \in \mathbb{R}$ (opposto di x) che soddisfa la (2.5); terzo,

[6] Sinonimo di insieme.

[7] Questo non è forse espresso troppo bene, ma l'idea è semplice: per esempio i numeri naturali 1, 2, 3 eccetera non bastano, perchè se si prende una bacchetta di legno lunga un metro e si spezza in due, non c'è intero che rappresenti la misura delle due parti.

[8] Assioma vuol dire più o meno ipotesi. Guardalo sul dizionario.

per ogni $x \neq 0$ esiste un $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (inverso di x) che soddisfa la (2.6).

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x \tag{2.4}$$

$$x + (-x) = 0 \tag{2.5}$$

$$x \cdot x^{-1} = 1 \quad (x \neq 0) \tag{2.6}$$

Nota che l'opposto esiste per ogni x, l'inverso per ogni $x \neq 0$. Elementi neutri, opposti e inversi sono unici. Per esempio l'unità: se $a \in \mathbb{R}$ è tale che $a \cdot x = x$ per ogni x, allora con $x = 1$ otteniamo $1 = a \cdot 1 = a$ (il secondo uguale dalla (2.4)). L'opposto: se $x + y = 0$ ed $x + y' = 0$, allora $y = y + 0 = y + x + y' = 0 + y' = y'$. Per l'inverso è la stessa cosa (esercizio). Dunque l'opposto di x e l'inverso di $x \neq 0$ sono *caratterizzati* da (2.5) e (2.6), nel senso che se un y soddisfa $x + y = 0$ allora $y = -x$; e se y è tale che $xy = 1$ allora $y = x^{-1}$. Per esempio, qual'è l'opposto di zero? Poichè $0 + 0 = 0$, $y = 0$ è un numero che sommato ad $x = 0$ dà zero: dunque $-0 = 0$. Qual è l'inverso di 1? Esercizio.

Le (2.1)-(2.6) sono gli assiomi su somma e prodotto (per essere precisi anche $0 \neq 1$ è un assioma, indipendente e importante). Da questi *seguono* le altre 'regole' fondamentali del calcolo, per esempio le seguenti ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$x \cdot 0 = 0 \tag{2.7a}$$

$$(-1) \cdot x = -x \tag{2.7b}$$

$$-(-x) = x \tag{2.7c}$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \tag{2.7d}$$

$$xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oppure } y = 0) \tag{2.7e}$$

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \quad (x, y \neq 0). \tag{2.7f}$$

Sono tutte cose che 'si sanno'. La (2.7d) per esempio è la famosa 'meno per meno più', e la (2.7e) la cosiddetta 'legge di annullamento del prodotto'. Vediamo come seguono dagli assiomi (2.1)-(2.6). (2.7a): $x \cdot x = x \cdot (x + 0) = x \cdot x + x \cdot 0$; sommando il numero $-(x \cdot x)$ ad entrambi i membri e usando (2.5) e (2.4) si ottiene il risultato. (2.7b): basta verificare che il numero $y = (-1) \cdot x$ soddisfa $x + y = 0$; ma $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. (2.7c): anche qui, poichè $x + (-x) = 0$ x è l'opposto di $-x$ (che è appunto $-(-x)$). (2.7d): $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$ (il primo uguale da (2.7b), il secondo da (2.7c)). (2.7e): la parte $\Leftarrow$ segue da (2.7a); supponendo ora $xy = 0$, se $x = 0$ segue la tesi, e se $x \neq 0$ si ha $y = y \cdot x \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$, cioè di nuovo la tesi. (2.7f): da verificare che il numero $z = x^{-1} \cdot y^{-1}$ è tale che $(x \cdot y) \cdot z = 1$; ma (usando (2.2) e (2.1)) risulta $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = (x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} = (x \cdot 1) \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$.

ESERCIZI

2.1. (i) Dimostra l'unicità dello 0 e dell'inverso; (ii) Qual è l'inverso di 1?

2.2. Verifica, usando gli assiomi (2.1)-(2.6) e le (2.7): (i) $(-x) + (-y) = -(x + y)$; (ii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$; (iii) con $y \neq 0$, $x \cdot y^{-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (iv) $x + y = x + z \Leftrightarrow y = z$ (semplificazione per l'addizione); (v) se $x \neq 0$, $xy = xz \Leftrightarrow y = z$ (semplificazione per la moltiplicazione; anche qui $x \neq 0$ è essenziale).

SOTTRAZIONE E DIVISIONE

Le operazioni definite per assioma su $\mathbb{R}$ sono dunque due, somma e prodotto. Sulla base di queste e degli assiomi di esistenza se ne costruiscono altre, innanzitutto sottrazione e divisione. Con $x, y \in \mathbb{R}$, la sottrazione $x - y$ è definita come somma di x con l'opposto di y: $x - y = x + (-y)$; e per $y \neq 0$, si definisce la divisione $\frac{x}{y}$ come moltiplicazione di x per l'inverso di y: $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$. Da quest'ultima segue, per $y \neq 0$, $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$ e dunque $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$. Per ovvie esigenze tipografiche scriveremo spesso x/y invece di $\frac{x}{y}$.

Negli esempi che seguono x, y, z sono numeri; anche $2, 3, 5, 9$ sono in $\mathbb{R}$. In effetti vedremo presto che per definizione $2 = 1 + 1$ che è in $\mathbb{R}$, $3 = 2 + 1$, in $\mathbb{R}$ perchè $1, 2 \in \mathbb{R}$, $4 = 3 + 1 \in \mathbb{R}$ perchè $1, 3 \in \mathbb{R}$ eccetera; per adesso usiamo i numeri naturali come sappiamo e scriviamo senza paura cose come $3 + 2 = 5$ o $3 \cdot 3 = 9$. Per $x \in \mathbb{R}$ è per definizione $x^2 = x \cdot x$, come sempre.

ESEMPI 2.1. **(a)** $x - x = x + (-x) = 0$ e se $x \neq 0$ $\frac{x}{x} = x \cdot x^{-1} = 1$.

(b) $(-2) \cdot 3 \cdot (-6) = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 6$.

(c) $x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy + x(-1)z = xy + (-1)xz = xy + (-xz) = xy - xz$; $(x - y)z = (x + (-y))z = xz + (-y)z = \ldots = xz - yz$.

(d) $x(x-3y)-(x-4y)(x+y) = x^2-3xy-\big(x(x+y)-4y(x+y)\big) = x^2-3xy-(x^2+xy-4xy-4y^2) = x^2-3xy-x^2-xy+4xy+4y^2 = x^2(1-1)+xy(-3-1+4)+4y^2 = 4y^2$. Nota $-3-1 = (-3)+(-1) = -(3+1)$ (l'ultimo uguale dall'esercizio 2.2(i)).

(e) *Somma e prodotto di frazioni.* Per $x \neq 0$ ed $y \neq 0$ risulta:

$$\frac{w}{x} \cdot \frac{z}{y} = \frac{wz}{xy} \qquad \frac{w}{x} + \frac{z}{y} = \frac{wy + xz}{xy}.$$

In effetti $\frac{w}{x} \cdot \frac{z}{y} = w \cdot x^{-1} \cdot z \cdot y^{-1} = wz \cdot x^{-1}y^{-1} = wz \cdot (xy)^{-1} = \frac{wz}{xy}$. E $\frac{w}{x} + \frac{z}{y} = \frac{y}{y}\frac{w}{x} + \frac{x}{x}\frac{z}{y} = \frac{wy}{xy} + \frac{xz}{xy} = wy \cdot \frac{1}{xy} + xz\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy}(wy + xz) = \frac{wy+xz}{xy}$.

Chiudiamo il paragrafo con una questione di notevole importanza pratica. L'assioma (2.4) asserisce l'esistenza dell'inverso di ogni $x \neq 0$, e non parla di $x = 0$; ma l'inverso di zero esiste o no? Il punto è importante perchè riguarda la possibilità della divisione per zero (che sarebbe la moltiplicazione per il suo inverso). Risposta: Gli assiomi (2.1)-(2.6) implicano che l'inverso di zero non esiste. Dimostrazione: Se esistesse sarebbe un $x \in \mathbb{R}$ tale che $0 \cdot x = 1$; ma la (2.7a), conseguenza di (2.1)-(2.6), implica che un numero siffatto non esiste, perchè dice che per ogni $x \in \mathbb{R}$ $0 \cdot x = 0$, e $0 \neq 1$ per assioma. Perciò *non si può dividere per zero* —non dimentichiamolo.

ESERCIZI

2.3. Esegui: (i) $x(x+1) - 3x(-x+3) + 2(x^2 - x)$; (ii) $(3x + 2y)(3x - 2y)$; (iii) $3xy - 2w + 3w - 2xy + 2xz + 4xy - 4w$.

2.4. Verifica: (i) $(x/y)^{-1} = y/x$; (ii) $-(x - y) = y - x$; (iii) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$; (iv) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; (v) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$; (v) $(a/b)/(c/b) = a/c$.

2.5. Dì se è vero o falso: (i) $x/(y/z) = (x/y)/z$; (ii) $a/(bc) = (a/b) \cdot (1/c)$; (iii) $(-b)/c = -(b/c)$.

2.6. Esegui: (i) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$; (ii) $\frac{1}{3} + \left(\left(\frac{2}{5} - \frac{7}{5}\right) + 3\right) - \frac{4}{3}$; (iii) $\left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{14}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

$$\text{(iv)}\ \frac{x/y}{w/z}; \quad \text{(v)}\ \frac{\dfrac{2xy + x}{3y}}{\dfrac{2y+1}{2xy}}; \quad \text{(vi)}\ \frac{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}.$$

L'ASSIOMA SULL'ORDINAMENTO
Dice questo: Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali esiste un sottoinsieme $\mathbb{R}_+$, detto dei numeri *positivi*, che soddisfa le seguenti due proprietà:

$$\text{se } x \in \mathbb{R}_+ \text{ ed } y \in \mathbb{R}_+, \text{ allora } x + y \in \mathbb{R}_+ \text{ ed } x \cdot y \in \mathbb{R}_+; \tag{2.8a}$$

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ vale una ed una sola delle seguenti alternative: } x \in \mathbb{R}_+, \ x = 0, \ -x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.8b}$$

La (2.8a) dice che somma e prodotto di numeri positivi sono positivi; nella (2.8b), detta proprietà di tricotomia, bisogna tener presente la esclusività delle alternative, che implica per esempio che $0 \notin \mathbb{R}_+$, e che lo zero è l'unico numero che soddisfa $x = -x$ (esercizio). I numeri i cui opposti sono positivi (cioè in $\mathbb{R}_+$) si chiamano **negativi**; se x è positivo $-x$ è negativo (perchè il suo opposto x è positivo). [9]

Dalle (2.8) segue che il numero 1 è positivo. Infatti è $1 \neq 0$, quindi per la (2.8b) deve essere $1 \in \mathbb{R}_+$ o $-1 \in \mathbb{R}_+$; ma se fosse $-1 \in \mathbb{R}_+$, per la (2.8a) dovrebbe essere anche $1 = (-1)\cdot(-1) \in \mathbb{R}_+$, che contraddirebbe la esclusività in (2.8b); conclusione, deve essere $1 \in \mathbb{R}_+$. Dalla (2.8a) segue allora che anche $2 = 1 + 1$ è positivo, che a sua volta implica che $3 = 2 + 1 \in \mathbb{R}_+$, e così via anche per $4, 5, 6$ eccetera.

Si dice che x è **maggiore di** y, e si scrive $x > y$, se la differenza $x-y$ è positiva. La tricotomia applicata ad $x - y$ dà che ogni coppia di numeri $x, y \in \mathbb{R}$ è confrontabile nel senso che o $x = y$, o $x - y \in \mathbb{R}_+$ e quindi $x > y$, o $-(x - y) = y - x \in \mathbb{R}_+$ cioè $y > x$.[10] Nota che in particolare se $x > y$ allora non è $y > x$ (per esclusività). Sinonimo di $y > x$ è $x < y$, letto 'x minore di y'. Poichè $x = x - 0$, ponendo $y = 0$ si vede che $x > 0$ vuol dire che x è positivo, ed $x < 0$ (cioè $0 - x = -x > 0$) che $-x$ è positivo cioè x negativo. Per dire che x è positivo (risp. negativo) si scrive quasi sempre $x > 0$ (risp. $x < 0$) piuttosto che $x \in \mathbb{R}_+$ (risp. $-x \in \mathbb{R}_+$). La (2.8b) dice che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola fra: $x = 0$, $x > 0$, $x < 0$.

ESEMPI 2.2. **(a)** *Transitività.* Se $x < y$ ed $y < z$ allora $x < z$. Perchè usando le ipotesi e (2.8a) otteniamo $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$, cioè la tesi. Per transitività abbiamo per esempio che se $x < 0$ ed $y > 0$ allora $x < y$, cioè un negativo è sempre minore di un positivo.

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $x + 1 > x$. Perchè $x + 1 - x = 1 > 0$. In particolare gli interi positivi vanno a salire: $2 = 1 + 1 > 1, 3 = 2 + 1 > 2$ eccetera.

(c) *Quadrato sempre positivo.* Per ogni $x \neq 0$ risulta $x^2 > 0$. Perchè per tricotomia, se $x \neq 0$ o è positivo, nel qual caso il risultato segue da (2.8a), o $-x$ è positivo, e allora di nuovo $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0$. Dimostrazione alternativa che $1 > 0$ usando questo fatto: poichè $1 \neq 0$, $1 = 1^2 > 0$.

(d) *Inverso di positivo è positivo.* Per ogni $x \neq 0$ si ha $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$. Infatti: se $x > 0$, $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$ (prodotto di due positivi); se $x^{-1} > 0$, $x = x^2 \cdot x^{-1} > 0$ (idem).

(e) *Ordine di inversi.* Se $0 < x < y$, o se $x < y < 0$, allora $y^{-1} < x^{-1}$. Perchè: in entrambi i casi dall'ipotesi segue $xy > 0$, e usando l'esempio precedente otteniamo $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} > 0$.

Altre tre 'regole' conseguenze di (2.8) (e (2.1)-(2.6)) che si usano sempre sono le seguenti, con $x, y, z \in \mathbb{R}$ qualunque (diremo che x ed y sono concordi se sono entrambi positivi oppure entrambi negativi, e discordi se uno è positivo e l'altro negativo):

---

[9] Bisogna capire che la frase '$-x$ è negativo perchè c'è il meno davanti' è una stupidaggine. Per x negativo $-x$ è positivo. Il meno indica solo l'opposto, non ha niente a che fare con la positività o negatività.

[10] In questo senso $\mathbb{R}$ è un insieme 'ordinato'.

$$\text{se } x < y \text{ allora } x + z < y + z; \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} &\text{se } x < y \text{ e } z > 0 \text{ allora } xz < yz \\ &\text{se } x < y \text{ e } z < 0 \text{ allora } xz > yz; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &xy > 0 \text{ se e solo se } x \text{ ed } y \text{ sono concordi} \\ &xy < 0 \text{ se e solo se } x\text{ed } y \text{ sono discordi.}^{11} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le dimostrazioni sono facili. (2.9): se $x < y$, cioè $y - x > 0$, sarà $(y + z) - (x + z) = y - x > 0$, cioè la tesi. La prima delle (2.10): dalle ipotesi e (2.8a) segue $zy - zx = z(y - x) > 0$, da cui la tesi. La seconda: dalle ipotesi segue $(-z) \cdot (y - x) > 0$, da cui la tesi facilmente. Le (2.11): se sono concordi, il loro prodotto $xy = (-x) \cdot (-y)$ è positivo; se sono discordi il prodotto è negativo, per esempio se $x > 0, y < 0$ risulta $x \cdot (-y) = -xy > 0$ dunque $xy < 0$, analogo l'altro caso; dunque sono dimostrate le $\Leftarrow$; restano le $\Rightarrow$. La prima per contraddizione: se la tesi è falsa, cioè se x ed y non sono concordi, o almeno uno è zero nel qual caso il prodotto è zero e l'ipotesi è falsa, oppure sono discordi e allora il prodotto è negativo per $\Leftarrow$, cioè di nuovo ipotesi falsa; la seconda si completa in modo analogo.

Scriveremo $x \geq y$, o $y \leq x$ per dire '$x > y$ oppure $x = y$'. Per esempio $x = y$ se e solo se $x \leq y$ ed $x \geq y$ (per il 'se': l'unico caso in cui $x \leq y$ ed $x \geq y$ possono essere entrambe vere è $x = y$). Useremo regole di calcolo relative alla relazione $\geq$ (esempio, $x \leq y$ e $z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$); lo studente esigente può verificarle da solo man mano. Osserviamo che la negazione di $x \geq y$ è $x < y$, per tricotomia.

ESERCIZI

2.7. (i) Dimostra che lo zero è l'unico numero che soddisfa $x = -x$; (ii) Dimostra che $-x \leq x$ se e solo se $x \geq 0$ (usa l'esempio 2.2a); (iii) Verifica che se $x < y$ e $v < w$ allora $x + v < y + w$ ('somma di diseguaglianze'). [12]

PARENTESI: $\mathbb{R}$ SU UNA RETTA ORIENTATA, $\mathbb{R}^2$ SU UN PIANO

Abbiamo definito e stiamo lavorando su $\mathbb{R}$ come insieme astratto; ma sono gli elementi di $\mathbb{R}$ gli stessi numeri che usiamo come misure di grandezza nella vita pratica, e che vediamo sui metri, sui righelli eccetera? Accettiamo per fede che la risposta è: Sì, gli elementi di $\mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta. E continuiamo a rappresentare i numeri su una retta come abbiamo sempre fatto. Il prezzo di questo 'per fede' è che non dobbiamo basare nessuna delle nostre dimostrazioni sulla corrispondenza fra $\mathbb{R}$ e la retta; il vantaggio del 'sì' è che l'intuizione geometrica mostra spesso la via per stabilire le dimostrazioni. [13]

La costruzione intuitiva della corrispondenza fra $\mathbb{R}$ e i punti di una retta è così: si prende su una retta un segmento che si decide essere di lunghezza 1 e si assegnano ai suoi estremi i numeri 0 e 1. La direzione da 0 verso 1, che di solito è sinistra-destra se la retta è orizzontale e basso-alto se verticale, è la direzione 'positiva' (verso avanti, verso quantità maggiori ecc.). Il $2 = 1+1$ si associa al punto dove si arriva partendo da 1 e muovendosi di 1 verso avanti, il $3 = 2 + 1$ al punto cui si arriva muovendosi

[11] Ricorda che abbiamo già visto ((2.7e)) che $xy = 0$ se e solo se almeno uno dei due è zero.

[12] Soluzione di (i): $x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

[13] Per continuare con le parole di de Finetti: "e a volte ne dispensa addirittura (solo però in quanto il procedimento per la dimostrazione rigorosa risulti chiaramente prevedibile in ogni particolare: in ogni altro caso affidarsi all'intuizione sarebbe grave imprudenza per il pericolo di aggiungere inconsciamente ipotesi non postulate nell'impostazione." *Matematica Logico–Intuitiva,* 3^a Edizione, Cremonese 1959, p.71 (la 1^a edizione è del 1943). Bruno de Finetti, matematico triestino scomparso recentemente.

di 1 a partire da 2. Se ci si sposta in avanti della quarta parte del segmento da 0 ad 1 si arriva al punto che corrisponde a $1/4$, e per arrivare al $3/4$ si fa tre volte tanto. Se un punto corrisponde al numero x, allora $x+2$ è raggiunto partendo da x e muovendosi avanti di 2. Dov'è -3? E' tale che $-3+3=0$, cioè partendo da -3 e andando avanti di un segmento uguale a quello da 0 a 3 si arriva a zero; dunque è a sinistra di 0, distanza uguale a quella del 3. Ad $x-3=x+(-3)$ si ariva partendo da x con uno spostamento uguale a quello da 0 a -3 (cioè verso sinistra di 3). Ogni numero positivo è a destra di 0 (perchè come vedremo è approssimabile con una frazione m/n con m ed n interi positivi, che corrisponde ad m spostamenti in avanti dell'n-esima parte del segmento unitario) e ogni negativo suo opposto a sinistra. E' inoltre $x<y$ se x è a sinistra di y (perchè ad $y=x+(y-x)$ si arriva da x con uno spostamento a destra di $y-x>0$). Nella figura 2 vediamo un numero positivo x ed uno negativo y, e i loro opposti, con $y<-x<0<x<-y$; e la somma $x+a$ di x ed $a<0$.

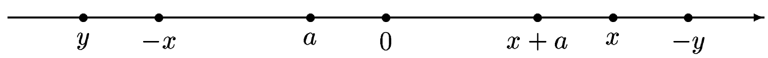


Figura 2

$\mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, insieme delle coppie ordinate di reali (x,y) con $x,y\in\mathbb{R}$. E analoga alla rappresentazione degli elementi di $\mathbb{R}$ come punti di una retta è la rappresentazione degli elementi di $\mathbb{R}^2$ come punti di un piano. Vale lo stesso discorso fatto a proposito di $\mathbb{R}$ e la retta: le definizioni e i teoremi riguardano $\mathbb{R}^2$, la rappresentazione geometrica aiuta a capire. La costruzione intuitiva della corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^2$ e i punti di un piano è così: si tracciano sul piano due rette perpendicolari orientate (così ad ogni punto su queste rette corrisponde un numero reale), di solito una orizzontale orientata sinistra-destra e una verticale orientata basso-alto, entrambe con zero in corrispondenza del punto in comune; e al punto P del piano si assegna la coppia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ delle sue proiezioni ortogonali rispettivamente sull'asse orizzontale e verticale —le sue *coordinate*, ascissa e ordinata. [14] Si ottiene così una corrispondenza biunivoca (perchè a punti distinti sono assegnate coppie distinte; e data una qualunque coppia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il punto del piano ottenuto mettendo x (risp. y) sulla retta orizzontale (risp. verticale), tracciando le perpendicolari ed intersecando ha coordinate (x,y)). Nota che lo $(0,0)\equiv 0$ corrisponde al punto in cui le due rette si incontrano, detto *origine* del piano; vedi figura 3.

Con in mente questa corrispondenza, sul piano indicheremo spesso un punto con la coppia di $\mathbb{R}^2$ ad esso corrispondente, come $(-2,-3)$ in figura; e chiameremo punti gli elementi di $\mathbb{R}^2$, e li indicheremo con lettere che li richiamano, P, P_i ecc. E' comodo identificare $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme $\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$, che sul piano è l'asse orizzontale.

Insiemi di $\mathbb{R}^2$ che vedremo sempre sul piano sono i grafici delle funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (per tali f, $\operatorname{graf} f\subseteq\mathbb{R}^2$, giusto?). Nella figura 4, a sinistra c'è il grafico di una siffatta f, con $D_f=\mathbb{R}_+$. Il dominio è sempre sull'asse orizzontale, il codominio su quello verticale. Dunque sull'asse orizzontale ci sono le x, e i valori corrispondenti $f(x)$ sono misurati sull'asse verticale (così $f(x_1)>f(x_2)$ se l'ordinata del punto $(x_1,f(x_1))$ sul grafico è maggiore di quella del punto $(x_2,f(x_2))$, come nel grafico della figura in esame). L'insieme nella figura a destra *non* è un grafico di una funzione (perchè?).

[14] Cioè x (risp. y) è il numero corrispondente al punto sulla retta orizzontale (risp. verticale) in cui la perpendicolare per P a quest'ultima la incontra.

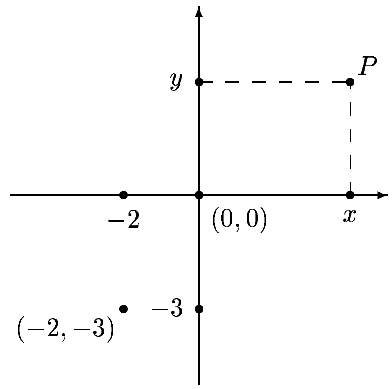


FIGURA 3

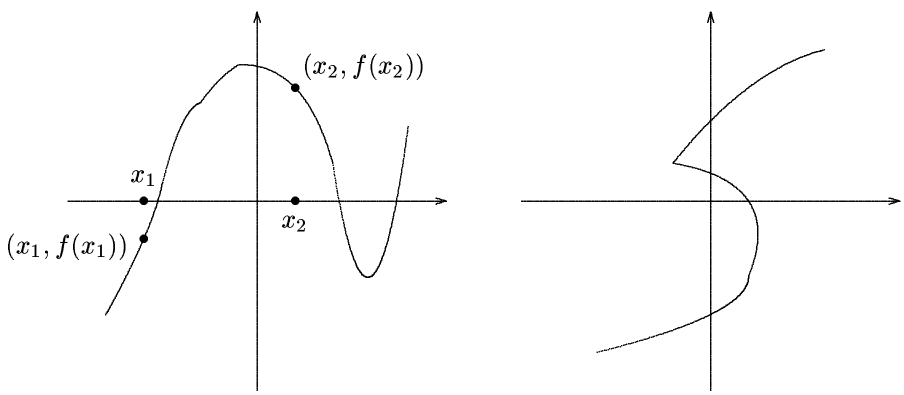


Grafico di una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Questo *non* è il grafico di una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

FIGURA 4

NUMERI NATURALI E PRINCIPIO DI INDUZIONE

Per andare avanti è utile questo altro paragrafo un pò sul teorico, che contiene un risultato sul quale si basano parecchie dimostrazioni (in tutta la matematica), il cosiddetto *principio di induzione*. Per capire di che si tratta pensa ad una scala infinita; il principio di induzione dice: se puoi salire il primo gradino *e* da qualunque posizione sulla scala puoi salire un altro gradino (due ipotesi), allora puoi salire qualunque numero di gradini. Ovvio. In questo paragrafo ci occuperemo della (meno ovvia) formalizzazione di questa intuizione.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice *induttivo* se soddisfa le seguenti due proprietà: (1) $0 \in A$ e (2) se $x \in A$ allora $x + 1 \in A$. Verifica per esempio che $\mathbb{R}$ stesso ed $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ sono induttivi, che se A e B sono induttivi lo è anche $A \cap B$, e che in effetti l'insieme intersezione di una qualunque famiglia di insiemi induttivi è induttivo. [15]

L'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali lo *definiamo* come intersezione di tutti gli insiemi induttivi di reali:

$$\mathbb{N} = \cap\{A : A \subseteq \mathbb{R} \text{ ed } A \text{ è induttivo}\}.$$

[15] L'intersezione di una famiglia di insiemi $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ con Γ insieme arbitrario si indica con $\cap\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ o con $\cap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ e si definisce in modo analogo al caso di due insiemi ponendo

$$\cap\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = \{x : x \in A_\gamma \text{ per ogni } \gamma \in \Gamma\}.$$

Abbiamo visto che tale insieme è induttivo; e per definizione se $I \subseteq \mathbb{R}$ è induttivo $\mathbb{N} \subseteq I$, dunque: $\mathbb{N}$ è il più piccolo dei sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$.

Da questo fatto segue intanto che se $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, perchè $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ è induttivo duque deve contenere $\mathbb{N}$.

Di $\mathbb{N}$ fanno parte $0, 1, 2$ eccetera, *e solo loro*, nel senso che per ogni $n \in \mathbb{N}$, fra n ed $n+1$ non vi sono elementi di $\mathbb{N}$. Dimostrare quest'ultimo fatto non è immediato, e lo faremo nel supplemento relativo agli insiemi.

La lettera n è quella più usata per i numeri naturali, e per default n indica un naturale. Con $\mathbb{N}_+$ si indicherà l'insieme dei naturali positivi: $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia data una frase P_n che può essere vera o falsa; per esempio $P_n =$ "posso salire n gradini". Il principio di induzione serve a dimostrare se una certa frase è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ o meno. O più in generale, per dimostrare se una certa frase è vera per tutti i naturali da un certo punto in poi.

TEOREMA (Principio di Induzione). Sia $k \in \mathbb{N}$, e per ogni naturale $n \geq k$ sia data la frase P_n. Se si verificano le seguenti due ipotesi:

(1) P_k è vera, e

(2) per ogni naturale $n \geq k$, se P_n è vera lo è anche P_{n+1},

allora P_n è vera per ogni naturale $n \geq k$.

Dimostrazione. Supponiamo prima $k = 0$. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ è vera}\}$. Vogliamo dimostrare che $A = \mathbb{N}$. Ovviamente $A \subseteq \mathbb{N}$, quindi da dimostrare $\mathbb{N} \subseteq A$. A tal fine basta dimostrare che A è induttivo, perchè $\mathbb{N}$ è contenuto in qualunque insieme induttivo. Ma questo è quello che dicono le due ipotesi del teorema (perchè P_n vera $\Leftrightarrow n \in A$).

Per dimostrare il caso con $k > 0$ basta applicare il risultato appena dimostrato alla famiglia $Q_n = P_{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$ ed osservare che $n \geq 0 \Leftrightarrow n + k \geq k$. $\square$

Vediamo adesso un primo esempio dell'uso del principio di induzione; altri ne faremo fra poco parlando di potenze. Il procedimento è sempre lo stesso: si vuole dimostrare che una certa asserzione P_n è vera per ogni $n \geq k$, e per far ciò si devono verificare due cose: che P_k è vera, e che per ogni $n \geq k$, P_{n+1} è vera se lo è P_n. Nota: nel secondo passo, per dimostrare $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ si assume P_n vera; ma "$P_n \Rightarrow P_{n+1}$" vera *non* implica P_n vera; per convincersi di questo pensa a $p =$ 'mangio' e $q =$ 'sono sazio'; l'asserzione $p \Rightarrow q$, "se mangio sono sazio", può ben essere vera anche se non mangio, cioè non implica "mangio".

ESEMPIO 2.3. Per ogni $n \geq 1$ risulta $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Qui P_n è $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$. La P_1 dice $1 = 1$, che è vero. Per verificare la seconda ipotesi del principio di induzione supponiamo vera P_n per un fissato $n \geq 1$ e vediamo se ciò implica P_{n+1}, cioè $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$. Abbiamo (usando l'ipotesi che P_n è vera nella prima uguaglianza qui sotto)

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2};$$

dunque sì, P_n implica P_{n+1}. Poichè entrambe le ipotesi del teorema sono soddisfatte possiamo allora concludere che la nostra formula vale per ogni $n \geq 1$. [16]

---

[16] Secondo la leggenda, a scoprire questa formula fu un bambino tedesco di 9 anni, di nome Karl Friedrich Gauss (1777-1855): un giorno la maestra aveva da fare fuori dalla classe e per tenere buoni gli alunni per un bel pò lasciò da eseguire la somma $1+2+\cdots+100$. Karl Friedrich scrisse in un rigo $1+2+\cdots+100$, e sotto $100+99+\cdots+1$; sommò verticalmente colonna per colonna ottenendo 100 volte 101; osservò che tale numero, $100 \cdot 101$, era due volte la somma voluta; e concluse, in tempo molto più breve di quanto la maestra desiderasse, che $1+2+\cdots+100 = 100 \cdot 101/2 = 5050$ (quel bambino crebbe poi in uno dei più grandi matematici di tutti i tempi).

Passiamo ad un'altra applicazione. Intuitivamente è chiaro che ogni insieme finito non vuoto di reali ha un massimo e un minimo. Per esempio l'insieme $\{10.2, 7, 12.5\}$ ha massimo 12.5 e minimo 7. Per confermare questa intuizione dobbiamo definire questi concetti formalmente.

Formalizzando l'idea che un insieme (non vuoto) è finito se per qualche $n \in \mathbb{N}_+$ ha n elementi, diciamo che un insieme A è **finito** se è vuoto oppure se esistono un $n \in \mathbb{N}_+$ ed una biiezione $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ (dove $\{1, 2, \ldots, n\}$ è l'insieme dei primi n interi positivi). In quest'ultimo caso si dimostra (lo faremo in "Insiemi") che tale n è unico, e si può dunque dire che A ha n elementi e scrivere $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dove a_i è l'elemento di A in corrispondenza con l'intero i. E' vero, ma di nuovo non banale da dimostrare, che i sottoinsiemi di insiemi finiti sono finiti. Un insieme si dice **infinito** se non è finito.

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}$ arbitrario. Un elemento $x \in A$ si dice **massimo** di A, e si scrive $x = \max A$, se per ogni $y \in A$ risulta $y \leq x$; un elemento $x \in A$ si dice **minimo** di A, e si scrive $x = \min A$, se per ogni $y \in A$ risulta $y \geq x$. Ovviamente, se esistono, massimo e minimo sono unici (verifica). Ma non sempre esistono, per esempio l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ha minimo ma non massimo (verifica).

ESEMPI 2.4. **(a)** *Ogni insieme non vuoto, finito di reali ha massimo e minimo.* Dimostreremo l'esistenza del massimo; quella del minimo è analoga. Da dimostrare che per ogni $n \geq 1$ (n naturale) gli insiemi di n elementi hanno massimo. Dunque qui P_n = "gli insiemi di n elementi hanno massimo". Da verificare le due ipotesi del principio di induzione (con $k = 1$). Chiaramente P_1 è vera, perchè in un insieme di un solo elemento $A = \{a_1\}$ il massimo esiste, è a_1 stesso. Supponiamo ora che gli insiemi di n elementi hanno massimo, e dimostriamo che lo hanno anche quelli di $n+1$ elementi. Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ un tale insieme. Per ipotesi esiste $a = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$; e si verifica subito che: se $a \geq a_{n+1}$, $a = \max A$, e se $a < a_{n+1}$, $a_{n+1} = \max A$.

(b) L'insieme $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ è infinito. Ovviamente non è vuoto, quindi resta da dimostrare che per nessun $n \in \mathbb{N}_+$ esiste una biiezione $f : \{1, \ldots, n\} \to (0, 1]$ (che equivale alla non esistenza di una biiezione da $(0, 1]$ ad $\{1, \ldots, n\}$). Sia n fissato e sia $f : \{1, \ldots, n\} \to (0, 1]$ iniettiva; dimostriamo che non può essere surgettiva: l'insieme $\{f(1), \ldots, f(n)\}$ è finito, quindi ha minimo, diciamo m; $0 < m < 1$, ed $m/2 \in (0, 1]$ non è nel codominio di f.

(c) Sottolineamo che le due ipotesi del principio di induzione sono entrambe necesarie per ottenere la tesi. Per esempio l'affermazione P_n = "$n > n + 1$" verifica la seconda ipotesi del principio di induzione perchè P_n implica P_{n+1}, ma P_n è falsa per ogni n. D'altra parte, l'affermazione P_n = "$n^2 - n < 10$" verifica la prima ipotesi (con $k = 0$), ma non la seconda. In effetti P_n è vera per $n = 0, 1, 2, 3$, ma per $n \geq 4$ è vero il contrario, $n^2 - n > 10$, come si dimostra facilmente per induzione.

ESERCIZI

2.8. Dimostra che per ogni $n \geq 1$ risulta $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. [17]

2.9. Trova l'errore. Considera la frase P_n: $0 = 1 = 2 = \ldots = n$. P_0 dice $0 = 0$ ed è vero. Supposta vera P_n, sommando 1 ad ogni membro si trova $1 = 2 = \ldots = n + 1$, che assieme a P_n dà $0 = 1 = \ldots = n + 1$, cioè P_{n+1}. Conclusione: $0 = 1 = 2 = \ldots = n$ per ogni n.

2.10. Dimostra che l'insieme $[1/2, 1]$ è infinito (sugg.: Sia $f : \{1, \ldots, n\} \to [1/2, 1]$ iniettiva; sia $f(i) = \min\{f(k) : 1 \leq k \leq n\}$ (k naturale) ed $f(j) = \min\{f(k) : 1 \leq k \leq n,\ k \neq i\}$. Allora...)

[17] Questo è facile, gli altri non tanto.

2.11. Dimostra che: se $A \subseteq B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ed $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ allora $m \leq n$ (sugg.: osserva che $m \leq n \Leftrightarrow \{1, \dots, m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$; componi le seguenti tre funzioni: (i) la biiezione da $\{1, \dots, m\}$ ad A, (ii) la $f : A \to B$ data da $f(a) = a \, \forall a \in A$, e (iii) la biiezione da B ad $\{1, \dots, n\}$; deduci che $\{1, \dots, m\}$ è in corrispndenza biunivoca con un sottoinsieme di $\{1, \dots, n\}$; adatta la dimostrazione nell'esempio (c) di sopra per concludere che $\{1, \dots, m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$).

3 USARE I NUMERI: I

EQUAZIONI, DISEQUAZIONI E SISTEMI: TERMINOLOGIA

Dal punto di vista pratico, l'obiettivo di questo capitolo è imparare a risolvere equazioni, disequazioni e sistemi (di equazioni e disequazioni). Data una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, risolvere la equazione $f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$ vuol dire trovare (se esistono) le x che la soddisfano; allo stesso modo si parla di disequazioni $f(x) > a$, $f(x) \geq a$, $f(x) < a$, $f(x) \leq a$. Sistemi è qui sinonimo di insiemi, e risolvere un sistema di equazioni o disequazioni vuol dire trovare le x che soddisfano tutte le equazioni o disequazioni del sistema. Possiamo vedere le equazioni come caso particolare di sistemi di disequazioni, perchè $f(x) = a$ se e solo se $f(x) \geq a$ ed $f(x) \leq a$. [18]

E' bene cominciare subito ad avere una visione geometrica dei problemi numerici. Nella figura 5 c'è il grafico di una f e in grassetto l'insieme che risolve $f(x) \geq -10$.

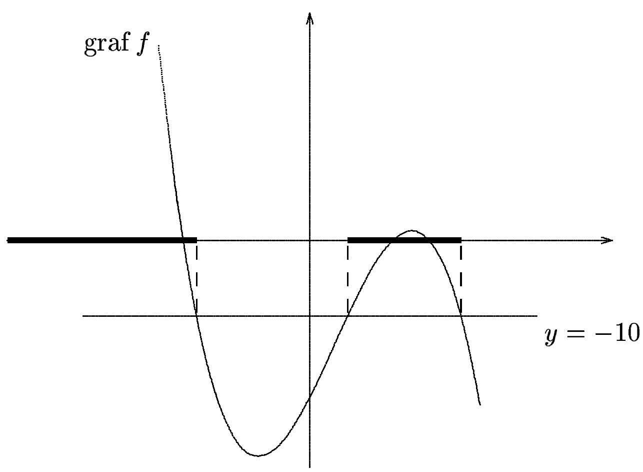


FIGURA 5. In grassetto l'insieme $\{x : f(x) \geq -10\}$.

Per descrivere gli insiemi soluzione di equazioni e disequazioni conviene introdurre simboli abbreviatori. Per $a \leq b$ si definisce $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, detto **intervallo chiuso** da a a b, e per $a < b$ si definisce l'intervallo **aperto** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, che si indica anche con $]a, b[$. Analogamente si definiscono $(a, b]$ eb $[a, b)$. L'intorno di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r > 0$ è l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$, che si trova spesso scritto come insieme delle x con $|x - x_0| < r$ (è lo stesso, usa la quarta delle (3.4)). Introducendo i simboli ∞ e $-\infty$ (infinito e meno infinito) si definiscono anche gli intervalli illimitati $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (e analogamente i semiaperti), e $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

[18] Analogamente sono disequazioni quelle tipo $f(x) > g(x)$, di cui $f(x) > a$ è un caso particolare ($g(x) = a$ per ogni x); in realtà, tutte possono scriversi nella forma $f(x) > 0$, perchè $f(x) > g(x) \Leftrightarrow F(x) \equiv f(x) - g(x) > 0$.

ESERCIZIO

3.1. Disegna due grafici a caso, chiamali graf f e graf g, e traccia in grassetto l'insieme $\{x : f(x) \geq g(x)\}$ (come nella figura 5).

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Le equazioni sono quelle del tipo $ax + b = 0$ con $a \neq 0$ —qui $f(x) = ax + b$. Aggiungendo ad entrambi i membri $-b$ e poi moltiplicando per a^{-1} otteniamo $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -b \cdot a^{-1} = -b/a$, che è così l'unica soluzione dell'equazione.

Geometricamente, le soluzioni di $f(x) = 0$ sono le x in corrispondenza delle quali il grafico di f 'tocca' l'asse orizzontale. Non sappiamo ancora la forma del grafico delle $f(x) = ax+b$, ma indoviniamolo segnando un pò di punti che vi appartengono e unendoli. Nella figura 6 questo è fatto per $f(x) = 2+\frac{1}{2}x$ (a sinistra) ed $f(x) = 3-x$ (a destra): a sinistra abbiamo unito i punti $(-10, -3), (-5, -1/2), (0, 2), (10, 7)$; a destra si è proceduto analogamente. Nota che nella figura è riflessa la seguente proprietà (che è bene dimostrare —senza figure): se $a > 0$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, mentre se $a < 0$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. L'esistenza ed unicità della soluzione di $f(x) = 0$ è chiara in entrambi i casi.

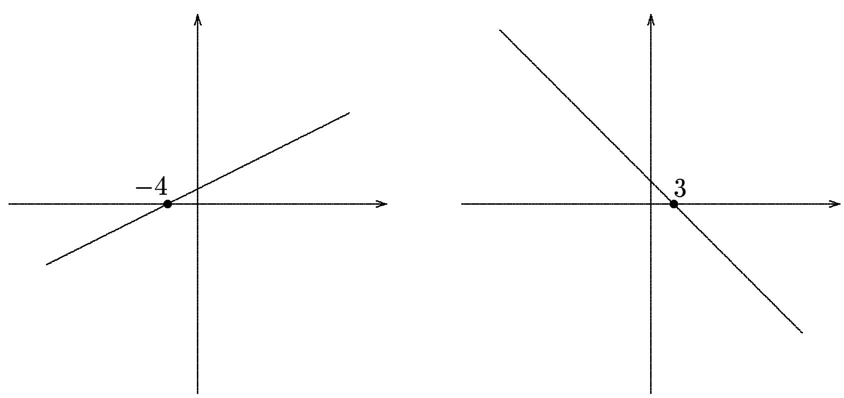


Grafico di $f(x) = 2 + \frac{1}{2}x$ Grafico di $f(x) = 3 - x$

FIGURA 6. Rette.

ESEMPI 3.1. **(a)** (Settimana Enigmistica quesito 7724) Una nave ancorata al largo di un'isola scaricava la merce con 20 barconi uguali che facevano 12 viaggi l'uno. Ora ci sono barconi nuovi la cui portata supera di 6 tonnellate quella dei vecchi, e la merce viene scaricata con 25 barconi che fanno 6 viaggi l'uno. Quante tonnellate porta un barcone nuovo? Risposta: detta x tale quantità, abbiamo $20 \cdot 12 \cdot (x - 6) = 6 \cdot 25x$, da cui $x = 16$.

(b) (Settimana Enigmistica quesito 7579) Al rientro delle vacanze un negoziante pubblicizza uno sconto del 40%, ma il giorno prima della chiusura aveva aumentato il prezzo del 40%. Quant'è lo sconto sul prezzo iniziale p? Risposta: Fa pagare il 60% del prezzo aumentato, dunque detta x la frazione di p che fa pagare abbiamo $xp = \frac{60}{100} \cdot (p + \frac{40}{100}p)$ da cui $x = 0.84$: lo sconto è del 16%.

(c) (Settimana Enigmistica quesito 45100) Un negoziante deve imballare degli oggetti entro un certo numero di casse. Se mette sei oggetti per cassa gliene avanza uno, se ne mette sette per cassa, l'ultima conterrá un solo oggetto. Quanti sono gli oggetti e quante le casse?

(d) Un certo prezzo scontato del 30% è 3500 lire. Qual è il prezzo intero x? $\frac{7}{10}x = 3500$, sicchè $x = \frac{35000}{7} = 5000$.
(e) Calcoliamo la distanza in metri x di un temporale cronometrando i secondi k che separano lampo e tuono. Se v_l e v_s indicano rispettivamente velocità di luce e suono in metri per secondo si sappia che $v_l = 300 \cdot 10^6$ (cioè 300 milioni) e $v_s = 300$ (sarebbe 340, ma semplifichiamo i calcoli); si sappia anche che spazio = velocità · tempo. Indicando con t_l, t_s i secondi che lampo e tuono impiegano per raggiungerci, abbiamo: $x = v_l \cdot t_l = v_s \cdot t_s$ e $t_s = t_l + k$, da cui $10^6 \cdot v_s \cdot t_l = v_s \cdot (t_l + k)$ cioè $t_l = k/(10^6 - 1)$; dunque $x = 300 \cdot 10^6 \cdot \frac{k}{10^6-1} \simeq 300k$.

Le disequazioni sono tipo $ax+b > 0$, $a \neq 0$. Usando la (2.10) otteniamo $x > -b/a$ se $a > 0$, ed $x < -b/a$ se $a < 0$. La distinzione sul segno di a non va dimenticata. Per esempio $-3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -4/3$; $-3x < 1 \Leftrightarrow x > -1/3$; e così via. Con l'ausilio dell'interpretazione geometrica si capisce bene perchè è cruciale distinguere i casi di $a > 0$ ed $a < 0$ (guarda per esempio la figura 6): se $a > 0$ la retta è inclinata positivamente, se $a < 0$ negativamente; quindi se $a > 0$ (risp. $a < 0$) la disequazione $ax + b > 0$ è soddisfatta per le x alla destra (risp. sinistra) del punto in cui il grafico tocca l'asse orizzontale.

POTENZE AD ESPONENTE NATURALE

Per andare avanti ci servono le potenze. Vogliamo definire la potenza x^n con $n \in \mathbb{N}_+$ come prodotto ripetuto di x per se stesso, cioè $x^n = x \cdot x \cdots x$, n volte. Formalmente poniamo, per qualunque $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$

$$x^n = \begin{cases} x & \text{se } n = 1 \\ x^{n-1} \cdot x & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Questa definizione è ben posta per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ per il principio di induzione: $x^1 = x$ è ben definita, e se x^n è ben definita per $n \geq 1$ arbitrario lo è anche $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Le tre proprietà fondamentali delle potenze sono le seguenti (con $x, y \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}_+$):

$$\begin{aligned} \text{stesso esponente:} \quad & x^n y^n = (xy)^n \\ \text{stessa base:} \quad & x^n x^m = x^{m+n} \\ \text{potenza di potenza:} \quad & (x^m)^n = x^{mn}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le dimostrazioni sono tutte per induzione. La prima è facile; facciamo la seconda per induzione su $n \geq 1$, dunque ponendo P_n = "per ogni m, $x^m x^n = x^{m+n}$". P_1 è vera per definizione; e se è vera P_n, cioè se per ogni m risulta $x^m x^n = x^{m+n}$, allora $x^m x^{n+1} = x^m x^n x = x^{m+n} x = x^{m+n+1}$, cioè P_{n+1} è vera. Dunque per il principio di induzione P_n è vera per ogni n. La terza è simile.

Vogliamo anche definire x^0, e vogliamo farlo in modo che le tre proprietà di sopra continuino a valere per $m, n \in \mathbb{N}$ (non solo in $\mathbb{N}_+$). Perchè la seconda valga per $m, n \in \mathbb{N}$, deve allora risultare $x^m x^0 = x^{m+0} = x^m$, che per $x \neq 0$ implica $x^0 = 1$. Dunque la scelta è obbligata: dobbiamo definire

$$x^0 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Così le (3.1) valgono per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ (facile verifica). Nei seguenti esempi usiamo un pò le potenze, applichiamo ancora il principio di induzione, e negli ultimi tre stabiliamo risultati importanti.

ESEMPI 3.2. **(a)** Se $y \neq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x^n/y^n = (x/y)^n$. Induzione: per $n = 0$ si asserisce che $1/1 = 1$. Supposta vera l'uguaglianza per un fissato

n, otteniamo $x^{n+1}/y^{n+1} = x^n x/y^n y = (x^n/y^n)(x/y) = (x/y)^n(x/y) = (x/y)^{n+1}$. Dunque l'uguaglianza è vera per ogni n.

(b) Mettendo in evidenza e usando le proprietà delle potenze verifica che si ottiene $2ax^4 - 2ax^3y + bx^4 - bx^3y = x^3(2a+b)(x-y)$. Sviluppando il prodotto verifica che $2a^3(2a+1)(2a-1) = 8a^5 - 2a^3$. Eseguendo la moltiplicazione seguente verifica che $\frac{3a^2b^3}{5}(-\frac{2b}{c^3})(-\frac{5c^2}{ab^4}) = \frac{6a}{c}$.

(c) Per ogni $n \geq 1$ risulta $2^n \geq n$. Per $n = 1$ l'asserzione è $2 \geq 1$, vera. Suppostala vera per un fissato $n \geq 1$ abbiamo $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n = n + n \geq n + 1$ (usando (2.9) e (2.10)). In effetti la proposizione è vera anche per $n = 0$ (diventa $1 \geq 0$), quindi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(d) *Somma delle prime n potenze di $x \neq 1$.* Per $x \neq 1$, è per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ponendo $s_n = 1 + x + \cdots + x^n$ si vede che $(1-x)s_n = s_n - xs_n = 1 - x^{n+1}$, da cui l'uguaglianza di sopra dividendo per $1 - x$.

E' una importante identità che incontreremo di nuovo. Per indicare la somma $1 + x + \cdots + x^n \equiv x^0 + x + \cdots + x^n$ si usa anche la scrittura $\sum_{i=0}^n x^i$, che si legge 'sommatoria di x^i per i da 0 ad n'.

(e) Con $a, b \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ risulta

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

Il caso particolare $a = 1$ ce l'abbiamo dall'esempio precedente: $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$; da qui ponendo $x = b/a$ (se $a \neq 0$; ma per $a = 0$ l'uguaglianza è banalmente vera) e moltiplicando il risultato per a^n si ottiene il caso generale.

(f) *Disuguaglianza di Bernoulli.* Sta alla base di alcuni dei risultati più difficili del corso, e dice:

$$\text{per } x \geq -1, \text{ risulta } (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

P_n è qui la disuguaglianza, e P_0 dice $1 \geq 1$; supponendo poi P_n vera si ottiene $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (usando nella prima disugagliuanza l'ipotesi induttiva *ed* il fatto che $1 + x \geq 0$), cioè P_{n+1} vera. Notiamo che la disuguaglianza di Bernoulli è equivalente a:

$$\text{per } x \geq 0, \text{ risulta } x^n \geq 1 + n(x-1) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(g) *Per $x > 1$, al crescere dell'esponente cresce il risultato*, cioè: se $m < n$ allora $x^m < x^n$. E' facile per induzione stabilire che per $x > 1$ è $x^k > 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}_+$; se $n > m$ (cioè $n - m \in \mathbb{N}_+$) abbiamo allora $x^n - x^m = x^m(x^{n-m} - 1) > 0$ come prodotto di numeri positivi. Analogamente si stabilisce che per $0 < x < 1$, al crescere dell'esponente il risultato decresce (per esempio: $(1/2)^2 = 1/4, (1/2)^3 = 1/8$).

ESERCIZI

3.2. Esegui $(a+b)^3$. Verifica che: (i) $(-2ab + ab^2)(-3a^2b) = 3a^3b^2(2-b)$; (ii) $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^3 = 0$; (iii) $\frac{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}}{\left(1 - \frac{x-y}{x+y}\right)^2} - \frac{x}{x-y} = \frac{x-y}{2y}$.

3.3. (Settimana Enigmistica quesito 7581) Un fornaio osserva che la farina aumenta di 1/3 del proprio peso nell'impasto e poi perde 1/6 del peso cuocendo. Quanti chili di farina deve usare per ottenere 50 chili di pane? (45)

3.4. (Sett. Enigm. Quesito con la Susi 730) Sui biglietti ferroviari i bambini hanno lo sconto del 50%, gli adulti hanno il 25% solo sui biglietti andata e ritorno. Comprati due biglietti andata e ritorno, uno adulto ed uno bambino, per un totale di 60 mila lire, padre e figlio fanno l'andata e rinunciano al ritorno. Quanto verrà rimborsato?

3.5. Dimostra questa, spesso usata: $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$ (sugg. $(x-y)^2 \ge 0$).

3.6. Sia $x \ge 2$. Dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $x^n \ge n$.

3.7. Dimostra $\forall n \ge 1$ $1 - x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$ con il principio di induzione. [19]

3.8. (i) Finisci di dimostrare le (3.1). (ii) Dimostra che per $0 < x < 1$: se $m < n$ allora $x^m > x^n$ (cfr. l'esempio 3.2(g)). (iii) Dimostra l'uguaglianza nell'esempio 3.2(e) direttamente (cioè senza usare (d)).

3.9. Ricorda che se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \ldots + a_n$. Dimostra che per ogni $n \ge 2$ risulta $(n-1)\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{1\le j\le n, j\ne i} a_j\right)$ (l'ultima somma è su tutti gli a_j tranne l'iesimo). [20]

RADICE QUADRATA

Si può dire che la radice è l'operazione inversa della potenza, e qui cominciamo con il quadrato e la radice quadrata: Una radice quadrata di $a \in \mathbb{R}$ è un x tale che $x^2 = a$. Dato $a \in \mathbb{R}$, esistono radici quadrate di a? Se $a < 0$ no (perchè $x^2 \ge 0$ per ogni x), e se $a = 0$ solo $x = 0$. Per $a > 0$ dimostreremo che dall'assioma di continuità segue l'esistenza di un unico $x > 0$ tale che $x^2 = a$; tale x si indica con $\sqrt{a}$. Poichè $(-\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2$, anche $-\sqrt{a} < 0$ è radice di a; ce ne sono altre? no, perchè se $x^2 = a$, $x^2 = (\sqrt{a})^2$ dunque $0 = x^2 - (\sqrt{a})^2 = (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$ da cui $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$.

Non dimenticare che il simbolo $\sqrt{a}$ indica la radice *positiva* di $a > 0$, per esempio $\sqrt{4} = 2$ (non ± 2; ± 2 sono le soluzioni, o radici, dell'equazione $x^2 = 4$). Convenendo di porre anche $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{a}$ è la radice non-negativa di $a \ge 0$. Raggruppiamo cose che serve sapere:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ se } x \ge 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{3.2a}$$

$$\text{Per } x, y \ge 0\text{: } \sqrt{x} < \sqrt{y} \text{ se e solo se } x < y \tag{3.2b}$$

$$\begin{array}{ll} x^2 = a & \text{per } x = \pm\sqrt{a}\,^{21} \text{ se } a \ge 0 \\ & \text{per nessun } x \text{ se } a < 0 \\ x^2 < a & \text{per } -\sqrt{a} < x < \sqrt{a} \text{ se } a > 0 \\ & \text{per nessun } x \text{ se } a \le 0 \\ x^2 > a & \text{per } x < -\sqrt{a} \text{ oppure } x > \sqrt{a} \text{ se } a \ge 0 \\ & \text{per ogni } x \text{ se } a < 0. \end{array} \tag{3.2c}$$

Nota nella prima il caso di $x < 0$ (per esempio $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$). Dimostrazioni. La prima vale perchè $\sqrt{x^2}$ è l'unico numero positivo che al quadrato

[19] Soluzione: Per $n = 1$ abbiamo $1 + x + \cdots + x^{n-1} = x^0 = 1$ dunque per $n = 1$ l'asserzione è $1 - x = 1 - x$. Suppostala vera per un $n \ge 1$ avremo $1 - x^{n+1} = 1 - x^n + x^n - x^{n+1} = 1 - x^n + x^n(1-x) = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) + x^n(1-x) = (1-x)(1+x+\cdots+x^n)$, come volevasi dimostrare.

[20] Soluzione. $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{1\le j\le n, j\ne i} a_j\right) + \sum_{i=1}^n a_i = \left(\sum_{j\ne 1} a_j + \sum_{j\ne 2} a_j + \cdots \sum_{j\ne n} a_j\right) + \sum_{i=1}^n a_i = n\sum_{i=1}^n a_i$.

[21] Cioè $x = \sqrt{a}$ oppure $x = -\sqrt{a}$.

dà x^2, e questo è x se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$. La seconda: Supponi $\sqrt{x} < \sqrt{y}$: se $x = 0$, allora $\sqrt{y} > 0$ implica $y > 0 = x$; se $x > 0$, moltiplicando la disuguaglianza $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ per $\sqrt{x}$ e per $\sqrt{y}$ si ottiene (dalla (2.10)) $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} < \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} < \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$. Il viceversa per contraddizione: se fosse $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ sarebbe (usando la versione 'debole' di (2.10)) $x \geq y$. La $x^2 = a$ la sappiamo già. $x^2 < a$: il caso $a \leq 0$ lo sappiamo dall'esempio 2.2(c); per $a > 0$ usiamo le prime due: $x^2 < a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{a}$, di cui cerchiamo separatamente le soluzioni ≥ 0 e quelle < 0: per $x \geq 0$ $\sqrt{x^2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow x < \sqrt{a}$; per $x < 0$ $\sqrt{x^2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow -x < \sqrt{a} \Leftrightarrow x > -\sqrt{a}$; mettendo insieme, le soluzioni sono $0 \leq x < \sqrt{a}$ e $-\sqrt{a} < x < 0$, cioè $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. Dalla versione 'debole' di quest'ultima, $x^2 \leq a$ prendendo i complementi si ottiene il risultato su $x^2 > a$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Le equazioni sono $f(x) = 0$ con $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Per risolverle si *completa un quadrato*. Completare un quadrato vuol dire vedere un'espressione $x^2 + \alpha x$ come 'un pezzo' di quadrato $x^2 + 2(\alpha/2)x$, 'completato' aggiungendo $(\alpha/2)^2$, cioè scrivere $x^2 + \alpha x = (x + \alpha)^2 - (\alpha/2)^2$. Mettendo a in evidenza in $ax^2 + bx + c$, completando $x^2 + (b/a)x$, semplificando e ponendo $\Delta = b^2 - 4ac$ si ottiene

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left((2ax + b)^2 - \Delta\right), \tag{3.3}$$

da cui $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a $(2ax + b)^2 = \Delta$ che è immediata, perchè: se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni; se $\Delta = 0$ deve essere $2ax + b = 0$ cioè l'unica soluzione è $x = -b/2a$; se $\Delta > 0$, con $z = 2ax + b$ l'equazione diventa $z^2 = \Delta > 0$ che ha come ormai sappiamo due soluzioni, $z = \sqrt{\Delta}$ e $z = -\sqrt{\Delta}$; dunque in questo caso deve essere $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$, cioè ci sono due soluzioni, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

ESEMPI 3.3. (a) $-2x^2 - x + 5 = 0$; qui $\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 41 > 0$, da cui $x = (1 \pm \sqrt{41})/4$.

(b) $2x^2 - x + 5 = 0$; qui $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$ dunque non esiste soluzione (altrimenti detto, l'insieme soluzione è vuoto).

Per le disequazioni, stabiliremo il segno (cioè la positività/negatività) di $f(x) = ax^2 + bx + c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risolvendo così sia $f(x) > 0$ che $f(x) < 0$. A tale scopo osserva che da (3.3) il segno di f è lo stesso (risp. l'opposto) di quello di $(2ax+b)^2 - \Delta$ se $a > 0$ (risp. $a < 0$); dunque basta studiare il segno di $(2ax+b)^2 - \Delta$. Questo è facile sulla base della (3.2): se $\Delta < 0$, $(2ax + b)^2 - \Delta > 0$ per ogni x; se $\Delta = 0$, $(2ax + b)^2 - \Delta > 0$ per ogni x tranne che per $x = -b/2a$. Se $\Delta > 0$: $(2ax+b)^2 - \Delta = 0$ per $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ (le radici di $f(x) = 0$); $(2ax+b)^2 - \Delta > 0$ per $2ax + b < -\sqrt{\Delta}$ oppure $2ax + b > \sqrt{\Delta}$, e in queste disequazioni di primo grado dobbiamo distinguere a seconda del segno di a: se $a > 0$ sono equivalenti a $x < (-b - \sqrt{\Delta})/2a$ oppure $x > (-b + \sqrt{\Delta})/2a$, se $a < 0$ ad $x < (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ oppure $x > (-b - \sqrt{\Delta})/2a$, cioè in entrambi i casi 'x all'esterno delle radici';[22] analogamente $(2ax + b)^2 - \Delta < 0$ all'interno delle radici. Avendo così stabilito il segno di $(2ax + b)^2 - \Delta$, moltiplicando per $1/4a$ si ottiene il seguente risultato sul segno di $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- **$a > 0$:** Se $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ sempre positivo; se $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ per $x = -b/2a$ e positivo per tutti gli altri valori di x; se $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ positivo all'esterno delle radici $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$, negativo all'interno;
- **$a < 0$:** cambia 'positivo' in 'negativo' e 'negativo' in 'positivo' nel caso $a > 0$.

[22] Nota che se $a < 0$ risulta $(-b + \sqrt{\Delta})/2a < (-b - \sqrt{\Delta})/2a$.

ESEMPIO 3.4. Risolvere $-2x^2+5<0$. Qui $a<0$ e $\Delta=-4\cdot(-2)\cdot 5=40$; zeri (di $x^2=5/2$) $x=\pm\sqrt{5/2}$, dunque $-2x^2+5<0$ per $x<-\sqrt{5/2}$ ed $x>\sqrt{5/2}$. Costruisci e risolvi altri esempi con numeri a caso.

L'analisi della disequazione di secondo grado è forse un pò pesante, con tutti quei casi. Visualizziamo e sarà tutto più chiaro. Come al solito, indoviniamo la rappresentazione del grafico delle funzioni del tipo $f(x)=ax^2+bx+c$ sul piano disegnando un pò di punti $(x,f(x))$ e tracciando una curva che li contiene. Nella figura 7 abbiamo fatto questo per $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$ ed $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$, la prima con $a>0$, la seconda con $a<0$. Sono cosiddette 'parabole', 'ascendente' quella di sinistra, 'discendente' quella di destra. Impareremo presto che le $f(x)=ax^2+bx+c$ sono tutte così, parabole ascendenti (risp. discendenti) se $a>0$ (risp. $a<0$). La $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$ (sinistra) ha $\Delta>0$, ed in accordo con quanto dimostrato ha due radici, ed è positiva all'esterno, negativa all'interno; la $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$ ha $\Delta<0$, non ha radici ed è sempre negativa; nota che questa 'discendente', se avesse radici (immaginala un pò più in alto) sarebbe positiva all'interno, negativa all'esterno. Vediamo ora da dove spunta Δ; prendiamo per esempio $a>0$. La f ha due radici (incontra l'asse orizzontale) se il minimo valore che assume è negativo; scrivendo $f(x)=\frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2-\Delta\right)\equiv\frac{1}{4a}g(x)$ (che ricorda è il valore di —altezza— di f in corrispondenza dell'ascissa x) vediamo che $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ perchè $a>0$ (giusto?); ma $g(x)$ è $-\Delta$ più un quadrato, quindi ha valore minimo $-\Delta$ quando il quadrato è zero (il che si verifica per $x=-b/2a$). Conclusione: il minimo valore di f è $-\Delta/4a$, che appunto è minore di zero quando $\Delta>0$ (stiamo parlando di $a>0$). Nella figura sono indicati i punti di massimo e minimo a destra e a sinistra. Analizza il caso di $a<0$ (stando attento alla moltiplicazione di disuguaglianze per $a<0$).

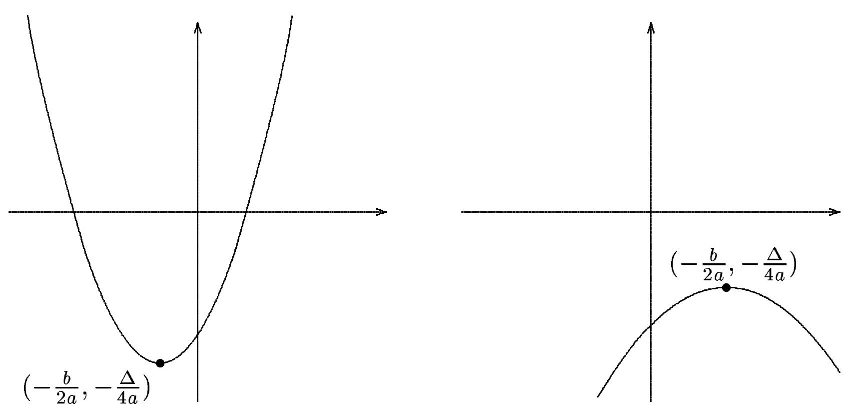


Grafico di $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$ Grafico di $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

FIGURA 7

ESERCIZI

3.10. Sia $f(x)=ax^2+bx+c$ con $\Delta>0$, e siano x_1,x_2 le radici di $f(x)=0$. (i) Verifica che $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$; (ii) usa (i) per ritrovare il risultato sul segno di $f(x)$ nel caso $\Delta>0$.

3.11. Sia $\Delta\geq 0$, e siano x_1,x_2 le soluzioni di $ax^2+bx+c=0$. Verifica che $x_1+x_2=-b/a$, ed $x_1\cdot x_2=c/a$.

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

I sistemi si rappresentano di solito elencando verticalmente le equazioni e/o disequazioni che li compongono e racchiudendole in parentesi graffe, per esempio risolvere il sistema (dove f e g sono funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

vuol dire trovare le x che risolvono sia $f(x) > 0$ sia $g(x) < 0$;[23] in altre parole l'insieme soluzione del sistema è $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) < 0\}$.

Per i sistemi è utile servirsi di un diagramma –che chiameremo 'si/no'— in cui la soluzione della prima disequazione si rappresenta su una retta per esempio lasciando vuoti gli intervalli di x che non la risolvono, la soluzione della seconda si mette su una retta sotto la prima, e così via; alla fine l'intersezione, cioè la soluzione del sistema, si trova senza fatica.

ESEMPI 3.5. **(a)** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 \\ -x^2 + x + 6 > 0. \end{cases}$$

La prima: $\Delta = 25$ dunque $x^2 - 3x - 4 = 0$ per $x = -1$ e 4; $a = 1 > 0$, quindi $x^2 - 3x - 4 \le 0$ per $x \in [-1, 4]$; analogamente, la seconda è soddisfatta in $(-2, 3)$. Per trovare l'intersezione mettiamo in figura:

$$\begin{array}{ll}
1^a & \qquad \overset{-1}{[}\text{—————————}\overset{4}{]} \\
2^a & \overset{-2}{]}\text{—————————}\overset{3}{[} \\
\cap & \qquad \underset{-1}{[}\text{———————}\underset{3}{[}
\end{array}$$

Nota l'uso delle parentesi quadre per indicare se gli estremi degli intervalli sono compresi o meno. Dalla figura è immediato che la soluzione è l'intervallo $[-1, 3)$.

(b) Determinare i valori di $m \in \mathbb{R}$ tali che la disequazione $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 > 0$ sia soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $m - 2 = a < 0$ il trinomio non può essere sempre positivo (riguarda il caso $a < 0$ nelle disequazioni di secondo grado); e se $m - 2 = 0$ si resta con una disequazione di primo grado che di nuovo non è soddisfatta per ogni x. Deve essere allora $m > 2$, e $\Delta = 4(-m^2 + 4m - 3) < 0$. Dunque gli m cercati sono le soluzioni del sistema $m > 2$, $-m^2 + 4m - 3 < 0$, che sono (facile diagramma sì/no) tutte le $m > 3$.

DISEQUAZIONI FRATTE

Sono del tipo $f(x)/g(x) > 0$, o $f(x)/g(x) < 0$ (o con le disuguaglianze deboli, di cui negli esercizi), dove f, g sono funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (ovviamente f/g è definito soo per le x tali che $g(x) \neq 0$). Usando l'esempio 2.2d e le (2.11) è immediato che $f(x)/g(x) > 0$ è soddisfatta dalle x tali che $f(x)$ e $g(x)$ sono concordi, e che $f(x)/g(x) < 0$ se f e g sono discordi. Formalmente

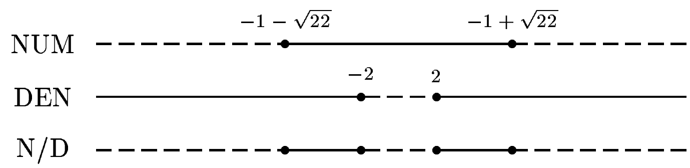
$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0; \end{cases}$$

analogo l'altro caso. Nota che 'oppure' dice di prendere l'*unione* delle soluzioni dei due sistemi. Anche per risolvere queste disequazioni è utile servirsi di un diagramma

[23] Un tale sistema lo indicheremo anche come 'sistema $f(x) > 0, g(x) < 0$'.

—che chiameremo 'più/meno'— in cui si rappresenta su una retta il segno di f (per esempio tratteggiando le parti in cui $f < 0$), e su un'altra retta, disegnata sotto la prima, il segno di g; poi 'in verticale' è immediato calcolare il segno del prodotto.

ESEMPI 3.6. **(a)** Risolvere $\frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} > 3$. Portando il 3 a sinistra e facendo la somma la disequazione si riduce a $\frac{-x^2-2x+21}{(x+2)(x-2)} > 0$. Il numeratore ha zeri $-1 \pm \sqrt{22}$, ed essendo $a < 0$ è positivo all'interno e negativo all'esterno, mentre il denominatore si vede subito che ha zeri ± 2 ed è positivo all'esterno e negativo all'interno. Dal diagramma si vede subito che la soluzione è $(-1-\sqrt{22}, -2) \cup (2, -1+\sqrt{22})$: [24]



(b) Risolvere $\frac{1}{x} < a$, $a \in \mathbb{R}$. Portando a al primo membro la disequazione si vede essere equivalente alla $\frac{1-ax}{x} < 0$, per risolvere la quale si deve distinguere $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$; ognuno dei singoli casi è facile. Alternativamente possiamo usare direttamente le proprietà degli inversi: se $a = 0$, $1/x < a \Leftrightarrow x < 0$; se $a < 0$, $1/x < a \Leftrightarrow 1/a < x < 0$; se $a > 0$, $1/x < a \Leftrightarrow x < 0$ oppure $x > 1/a$.

ESERCIZI

3.12. (i) Dimostra che (con $g(x) \neq 0$) si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0; \end{cases}$$

(ii) Enuncia e dimostra l'analoga equivalenza per $f(x)/g(x) \leq 0$.

3.13. Risolvi:

(i) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} \leq 2 + \frac{3x-1}{15}$ $\quad$ (ii) $(10x+1)^2 - 4(4x+1)^2 < (6x+1)^2$

(iii) $\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{x+1}{15}$ $\quad$ (iv) $\frac{1}{2}\left(x - \left(1 + \frac{25}{26}\right)\right) - 2\frac{1-3x}{13} > x$

(v) $-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$ $\quad$ (vi) $6x^2 - 17x + 5 > 0$

(vii) $16x^2 - 8x + 1 > 0$ $\quad$ $(viii)$ $x^2 + ax > 0\ a \in \mathbb{R}$

$$(ix)\ \begin{cases} 3x+1 < 2x+2 \\ 9x^2 - 30x + 25 > 0 \\ 5x - 1 < 7x - 3 \end{cases} \qquad (x)\ \begin{cases} 7 + 3x > 1 + \frac{x}{2} \\ 4 - x > (3x-3) \cdot 16 \\ \frac{4-3x}{7} > 1 - x + \frac{x}{9} \end{cases}$$

(xi) $x^3 - 4x^2 + 3x > 0$ $\quad$ (xii) $\frac{5x-3}{x^2-3x-10} < 0$

$(xiii)$ $\frac{x}{x-6} < \frac{x+3}{6} + \frac{x+6}{6-x}$ $\quad$ (xiv) $\frac{1}{x^2-2x-15} > \frac{1}{x^2-x-2}$

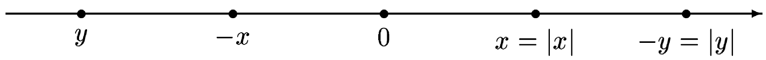
VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto di un numero x, scritto $|x|$, è intuitivamente la quantità positiva in esso contenuta: $|-3| = 3$, $|2| = 2$. Formalmente si definisce per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

[24] Nota la differenza fra i diagrammi più/meno e quelli si/no: i primi servono per descrivere positività/negatività di funzioni; i secondi descrivono appartenenza/non appartenenza ad insiemi.

Nota che il valore assoluto di un numero *non* è 'il numero senza il segno' (se x è negativo è $|x| = -x$). Segnamo sulla retta i valori assoluti; sono importanti da visualizzare perchè molte questioni che li riguardano (per esempio le (3.4)) sono ben visibili geometricamente.



Proprietà che si usano sempre:

$$\begin{aligned}
&|-x| = |x|, \quad x \le |x| \\
&|x| \ge 0, \text{ e } |x| = 0 \text{ se e solo se } x = 0 \\
&|x| \le a \text{ se e solo se } -a \le x \le a \\
&|x| \ge a \text{ se e solo se } x \ge a \text{ oppure } x \le -a \text{ [25]} \\
&|xy| = |x| \cdot |y|, \text{ e per } y \ne 0 \ |x/y| = |x|/|y| \\
&|x+y| \le |x| + |y|, \quad \big|\, |x| - |y| \,\big| \le |x-y|.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nota che da $x \le |x|$ e $|x| = |-x|$ segue che anche $-x \le |x|$; dunque $|x|$ è il più grande fra x e $-x$. Le più usate delle (3.4) sono le $|x| \le a$ e $|x| \ge a$; guarda le loro soluzioni sulla retta.

Dimostrazioni di (3.4). Le prime quattro asserzioni e la $|xy| = |x| \cdot |y|$ si verificano facilmente, ogni volta 'caso per caso'; La $|x/y| = |x|/|y|$ segue da $|1/y| = 1/|y|$ che si verifica con la definizione di inverso. La $|x| \le a$: è verificata dalle $x \ge 0$ tali che $x = |x| \le a$, e dalle $x < 0$ tali che $-x = |x| \le a$ cioè $x \ge -a$; dunque è verificata per $0 \le x \le a$ e per $-a \le x < 0$, cioè dalle x dell'enunciato. Per la successiva si prendano i complementi. Per quanto dimostrato, la $|x+y| \le |x| + |y|$ è equivalente a $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$; la seconda di queste si ottiene sommando le disuguaglianze $x \le |x|$, $y \le |y|$ (usando l'esercizio 2.7(iii)), la prima sommando le $-x \le |x|$, $-y \le |y|$. L'ultima si fa in modo simile (esercizio).

Note. (1) Adesso possiamo rileggere la prima delle (3.2) come: $\sqrt{x^2} = |x|$.

(2) Con $\sqrt{x^2} = |x|$ e le (3.4) le disequazioni in (3.2c) con $a > 0$ si risolvono subito: $x^2 < a \Leftrightarrow |x| < \sqrt{a} \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$; $x^2 > a \Leftrightarrow |x| > \sqrt{a} \Leftrightarrow x < -\sqrt{a}$ o $x > \sqrt{a}$.

Chiudiamo menzionando che con il valore assoluto si definisce la **distanza** fra due numeri x ed y, ponendo $\mathrm{dist}(x, y) = |x-y|$. Per esempio $\mathrm{dist}(3, 5) = |3-5| = 2$.

ESERCIZI

3.14. (i) Verifica che $|x|^2 = x^2$; (ii) Finisci di dimostrare le (3.4); (iii) Verifica che $|x| < a$ se e solo se $-a < x < a$ e che $|x| > a$ se e solo se $x > a$ oppure $x < -a$ $(a > 0)$; (iv) fai anche $|x| > a$.

3.15. Per quali x è soddisfatta $|x| = a$? Distingui $a \ge 0$ ed $a < 0$, e cerca (quando serve) separatamente le soluzioni positive e negative.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

I due casi particolari più importanti li abbiamo già fatti, $|x| \le a$ e $|x| \ge a$; nella figura 8 sono riportati i grafici di $f(x) = |x|$ e $g(x) = a$, e in grassetto a sinistra l'insieme $\{x : |x| \ge a\}$ e a destra l'insieme $\{x : |x| \le a\}$.

[25] In questa e nella precedente pensa $a \ge 0$. Se $a < 0$, la $|x| \le a$ non è verificata per nessun x (perchè $|x| \ge 0$ per ogni x), la $|x| \ge a$ è verificata da qualunque x. Torneremo su questi casi.

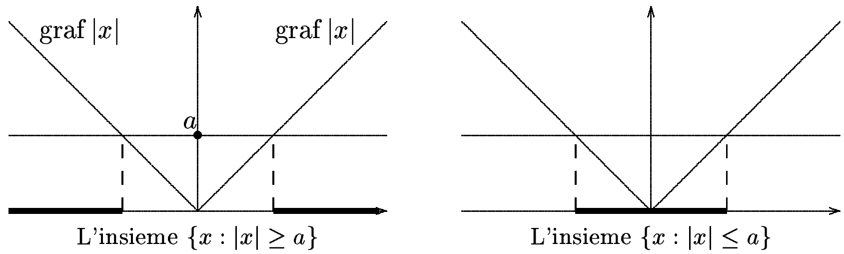


FIGURA 8

Più in generale, ricorda intanto che per definizione $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$.
Nella figura 9 è disegnato tratteggiato il grafico di una f, e solido il grafico di $|f|$; nei tratti in cui la f è positiva coincidono.

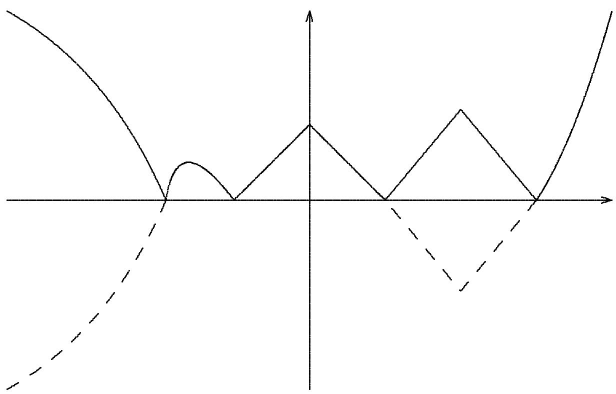


FIGURA 9. Tratteggiato graf f, solido graf $|f|$.

Esempio numerico, $|2x^2 - 4| = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{per } x \leq -\sqrt{2} \text{ o } x \geq \sqrt{2} \\ 4 - 2x^2 & \text{per } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$.

Ora le equazioni con valore assoluto. Sono riconducibili alla $|f(x)| = g(x)$ (dove $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), per la quale osserviamo: o $f(x) \geq 0$, e l'equazione è $f(x) = g(x)$, o $f(x) < 0$, e l'equazione è $-f(x) = g(x)$ cioè $f(x) = -g(x)$. Conclusione:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x).^{26} \end{cases} \tag{3.5}$$

Disegna questo caso e anche i prossimi per 'vedere' o ancora meglio indovinare i risultati. Le disequazioni, molte sono riconducibili alle seguenti:

$$|f(x)| \leq g(x), \qquad |f(x)| \geq g(x).$$

Possiamo partire dalle $|x| \leq a$ e $|x| \geq a$ di (3.4), osservando che le loro soluzioni sono in realtà quelle descritte nella (3.4) per *ogni* $a \in \mathbb{R}$, non solo per $a \geq 0$. Perchè, supponi $a < 0$. In questo caso la $|x| \leq a$ non ha soluzioni; ma anche la $-a \leq x \leq a$ è senza soluzioni, perchè essendo $a < 0$ sarà $-a > a$ (esercizio 2.7(ii)) quindi se $x \geq -a$ è $x > a$. Dunque la frase '$|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$' vale ancora.

[26] Formalmente, poichè $\{x : f(x) \geq 0\} \cup \{x : f(x) < 0\} = \mathbb{R}$, indicando con S è l'insieme soluzione cercato abbiamo (esercizio 1.1) $S = (S \cap \{x : f(x) \geq 0\}) \cup (S \cap \{x : f(x) < 0\})$.

Analogamente se $a < 0$ $|x| \geq a$ è vera per ogni x, e pure per ogni x vale '$x \geq a$ oppure $x \leq -a$' perchè da $-a > a$ segue $(a, \infty) \cup (-\infty, -a) = \mathbb{R}$. Quindi:

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x); \end{cases} \tag{3.6a}$$

$$|f(x)| \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq g(x) \text{ oppure } f(x) \leq -g(x).^{27} \tag{3.6b}$$

D'altra parte per *qualunque* disequazione con valore assoluto possiamo sempre applicare il metodo che abbiamo usato per arrivare alla (3.5), cioè partizionare l'insieme soluzione in modo conveniente ('levando' i valori assoluti). Nel caso della $|f(x)| \leq g(x)$ otterremmo per esempio

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) \geq -g(x), \end{cases}$$

pervenendo allo stesso risultato di (3.6a) (come si può verificare direttamente).

ESEMPI 3.7. (a) Prendi $f(x) = x$ e $g(x) = a$. [28] In questo caso la (3.5), che diventa $|x| = a$, conferma il risultato dell'esercizio 3.15, perchè dice: se $a < 0$ nessuno dei due sistemi in (3.5) ha soluzione, quindi non ne ha $|x| = a$; se $a = 0$ entrambi dànno $x = a = 0$; se $a > 0$ dànno le soluzioni $x = a, x = -a$.

(b) Abbiamo per la (3.5)

$$x^2 + 3|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17}) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17}) \\ x < 0. \end{cases}$$

Questi hanno soluzioni $x = (-3 + \sqrt{17})/2$ ed $x = (3 - \sqrt{17})/2$.

(c) Applicando la (3.6)

$$|-x^2 + x + 6| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 6 < 1 \\ -x^2 + x + 6 > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 5 > 0 \\ x^2 - x - 7 < 0. \end{cases}$$

I due trinomi hanno zeri $(1 \pm \sqrt{21})/2, (1 \pm \sqrt{29})/2$; la prima disequazione è soddisfatta all'esterno, la seconda all'interno. Con un diagramma si/no si vede subito che la soluzione è $(\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2})$. Nota che il primo intervallo contiene $x = -2$, il secondo $x = 3$; perchè essendo $5 < \sqrt{29} < 6$ è $-5/2 = -2.5 < (1 - \sqrt{29})/2 < -2$, eccetera.

(d) $\frac{3}{x} - |x - 1| > 1 \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{3-x}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < \frac{3-x}{x} \\ x - 1 > \frac{x-3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3}{x} < 0 \\ \frac{x^2-2x+3}{x} > 0. \end{cases}$

Con i diagrammi più/meno si vede che queste sono soddisfatte rispettivamente da $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ e $(0, \infty)$; a questo punto con un diagramma si/no è immediato vedere che la soluzione della nostra disequazione è l'intervallo $(0, \sqrt{3})$. Nota che anche la disequazione $\sqrt{\frac{3}{x} - |x - 1|} > 1$ ha le stesse soluzioni, perchè è equivalente a quella data, usando la (3.2).

(e) La $\frac{|x^2-4|}{3x-|x+1|} \leq 0$, poichè $|x^2 - 4| \geq 0$ per ogni x, è verificata se $x^2 - 4 = 0$ cioè $x = \pm 2$, oppure se $3x - |x + 1| < 0$ cioè "$x + 1 > 3x$ oppure $x + 1 < -3x$"

[27] Le (3.6) valgono anche con '$<$' e '$>$' al posto di '$\leq$' e '$\geq$' (esercizio).

[28] Cioè ad ogni $x \in \mathbb{R}$ la f associa x stesso, la g sempre il numero a.

che ha soluzione $(-\infty, 1/2)$ (verifica). Conclusione, la disequazione ha soluzione $(-\infty, 1/2) \cup \{2\}$.

(f) Nella disequazione $\frac{x|x-1|+3}{(x-1)|x+2|-5x} \geq 0$ leviamo i valori assoluti; i due punti 'critici' essendo 1 e -2, cerchiamo le soluzioni separatamente in $(-\infty, -2), [-2, 1)$ e $[1, \infty)$ (sempre usando l'esercizio 1.1), ottenendo che la disequazione data è equivalente all'unione dei seguenti sistemi (che sappiamo risolvere, usando anche l'esercizio 3.12):

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{x(-x+1)+3}{(x-1)(-x-2)-5x} \geq 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ \frac{x(-x+1)+3}{(x-1)(x+2)-5x} \geq 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{x(x-1)+3}{(x-1)(x+2)-5x} \geq 0. \end{cases}$$

Alternativamente: segno del numeratore, segno del denominatore, diagramma più/meno.

(g) La disequazione $|f(x)| < |g(x)|$. Un modo è vederla come $|g(x)| > h(x)$ con $h(x) = |f(x)|$, che (da (3.6b)) è equivalente a '$g(x) > |f(x)|$ oppure $g(x) < -|f(x)|$', cui possiamo applicare (3.6a) ottenendo:

$$|f(x)| < |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

ESERCIZI

3.16. Risolvi:

(i) $\lvert x^2 + 2x\rvert + x - 1 = 0$	(ii) $\lvert 2x - 1\rvert < x + 1$
(iii) $\lvert x^2 - 1\rvert > x + 1$	(iv) $\frac{\lvert 3-x\rvert}{\lvert 2x^2-8\rvert} \leq 1$
(v) $\lvert -3x^2 + x + 2\rvert \leq -2x^2 + x + 1$	(vi) $\frac{x^2+2}{x^2-2\lvert x\rvert-2} > 0$
(vii) $\big\lvert x - \lvert x - 1\rvert\big\rvert > 2$	$(viii)$ $\lvert 4x - 1\rvert < \lvert 2x + 5\rvert$
(ix) $\lvert x - 2\rvert = \lvert x\rvert$	(x) $\frac{\lvert x\rvert}{1+x} < x$
(xi) $\lvert x\rvert < \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$	(xii) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - mx < x - m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$
$(xiii)$ $\lvert \frac{x-1}{x+2}\rvert + x < 3$	(xiv) $\lvert x^2 - 1\rvert + \lvert x - 3\rvert \geq (1 - x)^2$

Per il (ix) devi prima scrivere i quattro sistemi equivalenti alla $|f(x)| = |g(x)|$; nel (xi) usa la (3.2).

CALCOLO COMBINATORIO

Guarda gli esercizi alla fine del paragrafo per farti un'idea del tipo di problemi che si affrontano con il cosiddetto calcolo combinatorio.

Sia $A = \{u_1, u_2, d, b\}$ —un uomo, un altro uomo, una donna e un bicchiere. Questi quattro elementi li possiamo *disporre* così come li abbiamo elencati, $u_1\ u_2\ d\ b$, oppure per esempio così: $u_2\ d\ b\ u_1$ (u_1 pensa, così per lo meno ho accanto il bicchiere), o —per lui ancora meglio— così: $u_2\ b\ u_1\ d$; e in altri modi. Ogni volta per creare una disposizione degli elementi di A assegniamo al primo posto un certo elemento, al secondo posto un altro, eccetera; cioè descriviamo una funzione iniettiva da $\{1, 2, 3, 4\}$ ad A. Più in generale si possono disporre per esempio due elementi di A, così: $u_1\ d$, o così: $d\ u_1$, o così: $u_2\ d$, o in altri modi. In questo caso assegnamo al primo posto un elemento di A ed al secondo un altro, cioè descriviamo una funzione iniettiva da $\{1, 2\}$ ad A. La prima cosa che vedremo in questo paragrafo è: dato un insieme A di n elementi e un $k \leq n$, quante disposizioni di k elementi possiamo formare?

Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un insieme di n elementi. Per $k \in \mathbb{N}_+$, sia $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, i cui elementi vanno pensati come 'posti'. Con $k \leq n$, una *disposizione di classe k degli n elementi di A* è una funzione *iniettiva* $d : \mathbb{N}_k \to A$ (con dominio tutto $\mathbb{N}_k$). Una *permutazione* degli elementi di A è una disposizione di classe n, cioè una biiezione tra A ed I_n. Poichè due disposizioni d, d' di classe k sono uguali se e solo se $d(1) = d'(1), \ldots, d(k) = d'(k)$ (sono funzioni, che sono uguali se hanno gli stessi valori punto per punto), possiamo chiamare d una 'k-pla ordinata' di elementi di A ed indicarla con $(d(1), d(2), \ldots, d(k))$. Ad esempio con $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $k = 2$, se $d = (a_1, a_3)$ e $d' = (a_3, a_1)$, si ha $d \neq d'$.

Il numero delle disposizioni di classe k degli n elementi di A si indica con $D_{nk}(A)$. E' importante osservare che $D_{nk}(A)$ è lo stesso per tutti gli insiemi di n elementi. Perchè se $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, fissata una qualunque corrispondenza biunivoca $c : A \to B$, la funzione $d \mapsto c \circ d$ è una corrispondenza biunivoca fra le disposizioni di classe k su A e quelle su B. [29] Dunque possiamo scrivere $D_{nk}(A) = D_{nk}$ e parlare di disposizioni di n elementi di classe k senza specificare il particolare A che si usa.

PROPOSIZIONE. $\forall n, k \in \mathbb{N}_+,\ k \leq n,\ D_{nk} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (un prodotto di k fattori). In particolare per le permutazioni, $D_{nn} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Dimostrazione. Ogni disposizione di classe k di n elementi comincia in n possibili modi con uno degli n elementi al primo posto, e continua con una disposizione di classe $k-1$ dei rimanenti $n-1$ elementi. Dunque $D_{nk} = nD_{n-1,k-1}$. Per concludere applichiamo il principio di induzione alla frase $P_n =$ "$\forall k \leq n\ D_{nk} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$", $n \geq 1$. P_1 è vera. Ora supponiamo vera P_{n-1} e dimostriamo P_n; supponendo vera P_{n-1} abbiamo subito $D_{nk} = nD_{n-1,k-1} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (perchè $(n-1) - (k-1) + 1 = n - k + 1$). □

Il numero $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ si abbrevia con il simbolo $n!$, letto 'n fattoriale'; cioè per definizione $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Si definisce anche: $0! = 1$.

Passiamo adesso alle cosiddette 'combinazioni'. Una *combinazione di classe k degli n elementi di A* è un sottoinsieme di A di k elementi. Nota che qui l'ordine in cui gli elementi sono elencati non ha rilevanza: una combinazione è un insieme, e in quanto tale è caratterizzato (soltanto) dagli elementi che ne fanno parte. Allo stesso modo di sopra si vede che il numero di tali sottoinsiemi dipende da n ma non da A, e si denota con C_{nk} o con $\binom{n}{k}$. Poichè c'è uno ed un solo sottoinsieme di A con zero elementi (l'insieme vuoto), si definisce $\binom{n}{0} = 1$.

PROPOSIZIONE. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}_+,\ k \leq n,\ \displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$.

Dimostrazione. Da ogni combinazione di classe k si possono formare $k!$ disposizioni; dunque si ha $D_{nk} = k!\,C_{nk}$, che dà il risultato. □

Le due proprietà fondamentali delle combinazioni sono:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{ed} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{3.7}$$

Entrambe sono di verifica algebrica immediata. Senza calcoli: per la prima, ogni scelta di k elementi corrisponde alla scelta degli altri $n-k$ ('da escludere'); per la seconda, le combinazioni di classe k di $n+1$ elementi possono essere suddivise in quelle che contengono un fissato elemento di A e quelle che non lo contengono. Le prime sono $\binom{n}{k-1}$, le seconde $\binom{n}{k}$.

[29] Verifica: questa funzione è iniettiva perchè c lo è. Suriettività: la arbitraria disposizione d' su B è immagine (secondo la $d \mapsto c \circ d$) della disposizione $d = c^{-1} \circ d'$ su A, infatti $c \circ (c^{-1} \circ d') = d'$.

Sia ora $k \in \mathbb{N}_+$, non necessariamente $\leq n$. Una *disposizione con ripetizione* di classe k degli n elementi di A è una funzione $d : \mathbb{N}_k \to A$ (non necessariamente iniettiva). E' cioè una disposizione con elementi non necessariamente distinti. Indicato con D^r_{nk} il loro numero, si ha:

PROPOSIZIONE. $\forall n, k \in \mathbb{N}_+ \;\; D^r_{nk} = n^k$.

Dimostrazione. Induzione su k: vogliamo che per ogni $k \geq 1$ sia vera la $P_k =$ "$\forall n \geq 1 D^r_{nk} = n^k$"; P_1 è vera perchè $D^r_{n1} = n$; è inoltre $D^r_{nk} = nD^r_{n,k-1}$, che rende facile verificare che P_k vera implica P_{k+1} vera. □

ESEMPI 3.8. **(a)** In quanti modi si possono mettere 5 bambini in due stanze, 3 in una e 2 nell'altra? In $\binom{5}{2}$ modi.

(b) Dall'insieme $\{3, 5, 8\}$ si possono formare $D^r_{3,2} = 9$ numeri a due cifre, e $D_{3,2} = 6$ numeri a due cifre diverse fra loro.

(c) Da un insieme di n maschi ed n femmine quante coppie eterosessuali si possono formare? Risposta: $\binom{2n}{2} - 2\binom{n}{2} = n^2$, che sono tutte le possibili coppie meno quelle fra donne e quelle fra uomini. Il numero n^2 viene subito se si pensa che ogni uomo, e ce ne sono n, si può accoppiare con n donne.

(d) Da un mazzo di carte francesi si prendono 5 carte. In quanti modi si può fare tris d'assi (non contando i poker)? Ci sono $\binom{4}{3}$ modi di scegliere i 3 assi dai 4 esistenti; scelti 3 assi, le altre due carte si possono scegliere fra le altre 48 (il quarto asso si deve eliminare): conclusione, $\binom{4}{3}\binom{48}{2}$.

(e) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}$. Questo si ricava dalla seconda delle (3.7), o alternativamente si può verificare facendo i conti. Un altro modo per arrivarci è questo: vogliamo i sottoinsiemi di $k+1$ elementi dell'insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Questi sono: quelli che contengono a_{n+1}, che sono $\binom{n}{k}$; più quelli presi da $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ che contengono a_n, che sono $\binom{n-1}{k}$; più quelli presi da $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ che contengono a_{n-1}, che sono $\binom{n-2}{k}$; e così via, fino a quelli presi da $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}\}$ che contengono a_{k+2}, che sono $\binom{k+1}{k}$; più $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$, che è $1 = \binom{k}{k}$.

(f) *Formula di Newton per la potenza del binomio.* Si ha, con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}_+$:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \tbinom{n}{0}a^n b^0 + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \tbinom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \tbinom{n}{n}a^0 b^n \\ &= \tbinom{n}{0}a^0 b^n + \tbinom{n}{1}a^1 b^{n-1} + \tbinom{n}{2}a^2 b^{n-2} + \ldots \tbinom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \tbinom{n}{n}a^n b^0.\end{aligned}$$

In notazione sommatoria, nettamente più comoda in questo caso, queste formule di Newton si scrivono $(a+b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^{n-h} b^h = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n-h}$.

Dimostriamo la prima per induzione: la formula è banale per $n = 1$, quindi supponiamola vera per $n \geq 1$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= a\big[\tbinom{n}{0}a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \tbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + \tbinom{n}{n}b^n\big] \\ &\quad + b\big[\tbinom{n}{0}a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \tbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + \tbinom{n}{n}b^n\big] \\ &= a^{n+1} + a^n b\big[\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{0}\big] + a^{n-1}b^2\big[\tbinom{n}{2} + \tbinom{n}{1}\big] \\ &\quad + \cdots + ab^n\big[\tbinom{n}{n} + \tbinom{n}{n-1}\big] + \tbinom{n}{n}b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \tbinom{n+1}{1}a^n b^1 + \tbinom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots \tbinom{n+1}{n}a^1 b^n + b^{n+1}\end{aligned}$$

usando (3.7) nell'ultima uguaglianza. Dunque la prima formula è vera per ogni $n \geq 1$. La seconda deve allora essere vera perchè $(a+b)^n = (b+a)^n$.

(g) Il numero dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n. Perchè è uguale alla somma dei sottoinsiemi di zero elementi, più quelli di un elemento, eccetera, cioè a $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$.

(h) Un modo più diretto per arrivare allo stesso risultato è: un sottoinsieme B di $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ è identificato dagli elementi che vi appartengono, cioè dichiarando per ogni $i\in I_n$ se $a_i\in B$ o $a_i\notin B$; dunque abbiamo due possibilità per ogni $i\in I_n$, da cui il totale 2^n. Più formalmente B è identificabile con la funzione $d^B\colon I_n\to\{0,1\}$ definita da $d^B(i)=1$ se $a_i\in B$, una disposizione con ripetizione di due elementi di classe n; sappiamo che il loro numero è 2^n.

(i) Dalle formule di Newton con $a=1$, $b=x$ segue un rafforzamento della disuguaglianza di Bernoulli, precisamente: per $x\geq 0$, si ha per ogni n: $(1+x)^n\geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$. Nota che la disuguaglianza è più forte ma vale solo per $x\geq 0$, non per $x>-1$. Per $n=0,1,2$ si vede caso per caso. Per $n>2$ il primo membro è uguale al secondo più termini positivi.

ESERCIZI

3.17. (i) In quanti modi si può fare scala con cinque carte da un mazzo francese? (Per 'scala' intendi $1,2,3,4,5$, oppure $2,3,4,5,6$ eccetera fino a $9,10,11,12,13$; *non* $10,11,12,13,1$). (ii) Quante sono le possibili colonne del totocalcio? (iii) Quanti terni si possono giocare al gioco del lotto? (iv) Marina vorrebbe invitare 54 persone per festeggiare Carlo e Alice, ma sono troppe: la lista deve essere ridotta a 30 invitati. In quanti modi può operare questo 'taglio', ovviamente lasciando dentro Carlo, Alice e sè stessa? (v) 7 persone si incontrano e ciascuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante strette di mano ci sono in tutto? (vi) Quattro coppie di mariti e mogli si devono sedere ad un tavolo rotondo *comme il faut*, cioè senza che due uomini o due donne si trovino accanto. In quanti modi lo possono fare? [30]

3.18. (i) Dimostra (per induzione) che $n!\leq n^n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. (ii) Dimostra per induzione la disuguaglianza nell'ultimo esempio del paragrafo.

3.19. Definisci probabilità di un evento come rapporto fra i casi favorevoli ed i casi possibili. Per esempio la probabilità che tirando un dado viene un numero pari è $1/2$, perchè i casi favorevoli sono 3 (2,4 e 6) e quelli possibili sono 6.

(i) Qual è la probabilità di vincere un terno al lotto? (ii) Nel poker vero, con 32 carte (fino ai 7), qual è la probabilità di avere colore servito? [31]

4 PROPRIETA' DEI NUMERI REALI: II

Questa sezione è inevitabilmente un pò più 'teorica' (e con essa i suoi esercizi). Su questa si basa l'esistenza della radice, del logaritmo e cose simili. A fini pratici, il risultato più usato di questa sezione è: Per ogni $x\in\mathbb{R}$ esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $n>x$ (proprietà di Archimede). [32]

[30]Soluzioni. (i): $9\cdot 4^5$; (ii): $D^r_{3,13}=3^{13}$; (iii): $\binom{90}{3}$; (iv): $\binom{51}{27}$; (v): $\binom{7}{2}$; (vi): 1152, perchè: Numeriamo i posti; gli uomini possono occupare o tutti i posti pari o i dispari; per ognuna di queste due possibilità, ogni permutazione degli uomini si può combinare con ogni permutazione delle donne: $2\cdot 4!\cdot 4!$.

[31]Soluzioni. (i): $\binom{87}{2}/\binom{90}{5}$; (ii): $4\binom{8}{5}/\binom{32}{5}=1/899$.

[32]Versione light della sezione: oltre all'enunciato della proprietà di Archimede, definizione di inf e sup con caratterizzazione (4.2), assioma (4.1) e calcolo di inf e sup di insiemi semplici.

NUMERI RAZIONALI, INCOMPLETEZZA, COMPLETAMENTO

Partendo dai naturali si definisce l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri **interi** come l'insieme dei naturali e dei loro opposti: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} :\ \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = -n\}$. E l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri **razionali** è definito come l'insieme dei rapporti fra interi: $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} :\ \text{esistono } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ tali che } x = m/n\}$. [33] *Per convenzione, in m/n assumeremo sempre $n > 0$* (per esempio scrivendo $3/(-4) = (-3)/4$).

Pitagora (siamo nel 500 a.c.) pensava che ogni segmento di retta corrispondesse ad un numero razionale, e l'idea era più o meno questa: Fissa un segmento unitario sulla retta. Se il segmento in questione risulta uguale a un multiplo intero del segmento unitario, fine. Altrimenti dividi in due il segmento unitario e ricomincia: se arrivi al segmento dato con un multiplo della metà del segmento unitario, fine; altrimenti dividi in tre il segmento unitario e ritenta. Dividendo l'unità in n parti con n sempre più grande (cioè in parti sempre più piccole), prima o poi arriverai al segmento dato con un multiplo intero m dell'ennesima parte dell'unità, cioè con il numero m/n. Ma un certo signor Ippaso di Metaponto, proprio usando —coincidenza— il suo teorema (di Pitagora) scoprì che le cose non stavano così. Disse infatti Ippaso a Pitagora: Tu dici che il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 1 ha area uguale a 2, quindi lato di lunghezza uguale a un numero il cui quadrato è 2; ma non esistono razionali il cui quadrato è 2. Dimostrazione: basta dimostrare che non esistono $m, n \in \mathbb{N}_+$ *primi fra loro* tali che $m^2/n^2 = 2$. [34] Per contraddizione, supponiamo che esistono $m, n \in \mathbb{N}_+$ primi fra loro tali che $m^2/n^2 = 2$; allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari, perciò m deve essere pari; [35] ma poichè m è pari sarà $m = 2k$ per un $k \in \mathbb{N}_+$; e da ciò segue $4k^2 = 2n^2$, che (dividendo per 2) implica che anche n^2, e quindi anche n, è pari; allora m ed n non sono primi fra loro: contraddizione. Pitagora andò su tutte le furie, anzi c'è scritto da qualche parte che leggenda vuole che i suoi discepoli, da lui istigati, condussero Ippaso a una battuta di pesca e lo buttarono a mare. Ma la dimostrazione restò, e con essa il fatto che con i razionali non si possono rappresentare tutte le misure delle grandezze che incontriamo nella realtà (come lunghezza, altezza, profondità, peso, volume, tempo, velocità, energia, valore...).

In metafora geometrica, ciò vuol dire che se si mettono tutti i razionali lungo una retta 'restano buchi' —come quello corrispondente al punto finale del segmento di lunghezza uguale alla diagonale del quadrato di lato unitario. D'altra parte, vedremo adesso che l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ dice proprio che in $\mathbb{R}$ non ci sono buchi. Intuitivamente la situazione è questa: $\mathbb{R}$ è ciò che si ottiene aggiungendo a $\mathbb{Q}$ i numeri (come $\sqrt{2}$) che servono a riempire i buchi, e quindi a misurare qualunque grandezza reale —da cui il nome numeri *reali*. Noi non ci occuperemo del come si faccia il riempimento di buchi; acceteremo l'assioma di completezza immaginando che $\mathbb{R}$ sia effettivamente il risultato di tale completamento. Dal punto di vista geometrico vedremo quindi $\mathbb{R}$ come un insieme che contiene un elemento per ogni

---

[33] Il nome viene dal latino *ratio* che vuol dire rapporto. La traduzione 'razionali' è infelice; sarebbe più appropriato chiamarli 'frazionari'. Tanto più che i numeri non frazionari si dovranno chiamare, stando così le cose, 'irrazionali', anche se non sono affatto pazzi.

[34] Primi fra loro sono due naturali che non hanno divisori naturali in comune. L'esempio che ci interessa fra un paio di righe è che due numeri *pari*, cioè divisibili per 2, non possono essere primi fra loro. E' sufficiente prenderli così perchè se esistono m', n' non necessariamente primi fra loro con la proprietà richiesta, dopo la divisione per i divisori comuni avremmo una coppia di primi fra loro con la data proprietà. Che sia sufficiente prenderli positivi segue con ragionamento analogo.

[35] Come vedremo più avanti i dispari sono del tipo $2k + 1$; quindi i loro quadrati sono dispari. Perciò se m^2 è pari m lo deve essere pure.

punto della retta; e con questa corrispondenza biunivoca giustificheremo la nostra rappresentazione di $\mathbb{R}$ sulla retta. [36]

ESERCIZI

4.1. Dimostra che $\sqrt{3}$ non è razionale.

L'ASSIOMA DI COMPLETEZZA

Nella forma che abbiamo sopra preannunciato, dice questo: *Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti tali che per ogni $a \in A$ e $b \in B$ $a \leq b$, esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ e $b \in B$ $a \leq x \leq b$.* Sarà un esercizio del prossimo paragrafo dimostrare che un tale elemento di separazione *non* esiste in $\mathbb{Q}$ se A è l'insieme dei razionali con quadrato < 2 e B l'insieme dei restanti razionali.

Introdurremo ora una forma equivalente dell'assioma di sopra, più facile da usare. A tal fine dobbiamo definire il concetto di estremo superiore. Per capire cos'è: abbiamo visto che l'insieme $[0, 1)$ non ha massimo; ma ha estremo superiore 1, che è il più piccolo dei numeri non superati da alcun elemento dell'insieme (i *maggioranti* dell'insieme). Formalmente: sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $M(A) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \ \forall a \in A\}$ l'insieme dei maggioranti di A. Un numero $\sigma \in \mathbb{R}$ si dice **estremo superiore** di A, e si indica con $\sup A$, se $\sigma = \min M(A)$.

Essendo un minimo, se l'estremo superiore esiste è unico. Ma può non esistere, per esempio se $M(A)$ è vuoto (come per $A = [0, \infty)$). [37] $M(A)$ vuoto vuol dire che $\forall x \in \mathbb{R}\ x \notin M(A)$, cioè che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un $a \in A$ tale che $a > x$; perciò in tal caso A si dice **illimitato superiormente**; altrimenti, se cioè $M(A) \neq \emptyset$, A si dice **limitato superiormente**. Dunque, gli insiemi illimitati superiormente non hanno estremo superiore. Nella forma che useremo, l'assioma di completezza dice che in $\mathbb{R}$ questo è l'unico caso di non-esistenza dell'estremo superiore:

> Ogni insieme non vuoto limitato superiormente di reali
> ha estremo superiore. (4.1)

In simboli: Per $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se $M(A) \neq \emptyset$ allora esiste $\min M(A) \equiv \sup A \in \mathbb{R}$. Il primo esercizio di questo paragrafo chiede di dimostrare che questa formulazione è equivalente alla precedente. A questo punto non dovrebbe sorprendere che in $\mathbb{Q}$ questo assioma non vale. Precisamente: esistono insiemi $A \subseteq \mathbb{Q}$ non vuoti limitati superiormente che non hanno estremo superiore *in* $\mathbb{Q}$, cioè tali che non esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r = \min M(A)$. Esempio? La solita situazione: prendi $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$. Qui $A \neq \emptyset$ (per esempio $1 \in A$), ed $M(A) \neq \emptyset$ (per esempio $2 \in M(A)$ [38]). Ma verificheremo che se esistesse $r = \min M(A)$ dovrebbe essere tale che $r^2 = 2$, e sappiamo già che non esistono siffatti r in $\mathbb{Q}$.

Nel caso di $A = [0, 1)$ si trova subito $\sup A = 1$ come minimo di $M(A) = [1, \infty)$. Ma in genere conviene trovare $\sup A$ senza passare per $M(A)$ usando la seguente caratterizzazione di $\sup A$:

---

[36] Ovviamente non stiamo facendo le cose rigorosamente: prima abbiamo definito $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e ora diciamo che $\mathbb{R}$ viene costruito sulla base di $\mathbb{Q}$. Chi viene prima? In realtà, $\mathbb{Q}$. Anzi, ancora prima $\mathbb{N}$. Ma fare queste cose per bene è ancora troppo pesante per le nostre spalle. Prendiamo per buona l'esistenza di $\mathbb{R}$ con le sue proprietà, consideriamo $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ come suoi sottoinsiemi, e andiamo avanti.

[37] Ricorda che minimo e massimo sono elementi dell'insieme quindi in particolare l'insieme vuoto non ha minimo.

[38] Perchè se $x \geq 2$, $x^{>}4$ (verifica!) dunque $x \notin A$. Perciò se $x \in a$, $x < 2$, cioè $2 \in M(A)$.

PROPOSIZIONE. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente ed $\sigma \in \mathbb{R}$. $\sigma = \sup A$ se e solo se soddisfa le seguenti due propriet̀:

$$\begin{array}{l}(1)\text{ per ogni } a \in A\ a \leq \sigma, \text{ e} \\ (2)\text{ per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } a > \sigma - \epsilon.\end{array} \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Supponi che $\sigma = \sup A$, cioè che $\sigma = \min M(A)$. Allora $\sigma \in M(A)$, cioè soddisfa la (1); e per ogni $\epsilon > 0$ $\sigma - \epsilon \notin M(A)$, che implica la (2). Viceversa, supponi che σ soddisfa le (4.2). Dalla (1), $\sigma \in M(A)$; e dalla (2) se $x \in M(A)$ $x \geq \sigma$, perchè: se $x < \sigma$ è $x = \sigma - \epsilon$ con $\epsilon = \sigma - x > 0$, dunque per la (2) esiste $a \in A$ con $a > x$, cioè $x \notin M(A)$. Ma $\sigma \in M(A)$ ed $x \geq \sigma$ per ogni $x \in M(A)$ vuol dire $\sigma = \min M(A)$, cioè $\sigma = \sup A$. □

ESEMPI 4.1. **(a)** Sia $A = \{a \in \mathbb{R} : a = \frac{x}{x+1} \text{ con } x > 0\}$. [39] Per x vicino a zero $\frac{x}{x+1}$ è anch'esso vicino a zero (perchè diventa x diviso praticamente 1, cioè circa x); per x molto grande invece fra x e $x+1$ non c'è molta differenza, quindi il rapporto è vicino ad 1. Poichè per ogni $a \in A$ è $a < 1$, indoviniamo che $\sup A = 1$. Da vedere se $\sigma = 1$ soddisfa le (4.2). La prima l'abbiamo appena vista; verifichiamo la seconda. Preso $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste $a \in A$ tale che $a > 1 - \epsilon$, cioè, esiste $x > 0$ tale che $\frac{x}{x+1} > 1 - \epsilon$? Sì, basta prendere $x > (1-\epsilon)/\epsilon$. [40]

(b) Vogliamo il sup di $A = \{\frac{x}{x+1} : x > 0\} \cap (-\infty, 1/3)$. Tentiamo $\sup A = 1/3$. Ovviamente $1/3 \in M(A)$; per la seconda proprietà: esistono $a \in A$ con $a > 1/3 - \epsilon$? Cioè, esistono $x > 0$ tali che $1/3 - \epsilon < \frac{x}{x+1} < 1/3$? Cioè, esistono $x > 0$ tali che $\frac{1/3-\epsilon}{2/3+\epsilon} < x < 1/2$? Sì (perchè $\frac{1/3-\epsilon}{2/3+\epsilon} < 1/2$). Dunque effettivamente $\sup A = 1/3$.

(c) *Relazione fra* sup *e* max. Sia A non vuoto limitato superiormente. $\sup A$ esiste sempre (per assioma), $\max A$ no (esempio $A = [0,1)$). Inoltre $\sup A$ può non essere in A (come in $A = [0,1)$ o nell'esempio precedente), mentre $\max A$ se esiste è in A per definizione. La situazione è questa: *Se* $\max A$ *esiste,* $\max A = \sup A$*; e* $\max A$ *esiste se e solo se* $\sup A \in A$. Le dimostrazioni sono facile esercizio.

(d) Una cosa ovvia che si usa spesso è: se $a \leq c$ per ogni $a \in A$ allora $\sup A \leq c$ (percè in tal caso $c \in M(A)$ dunque $\sup A = \min M(A) \leq c$).

Analogo al concetto di estremo superiore è quello di estremo *inferiore*. Per esempio l'estremo inferiore di $(0,1)$ sarà 0. Un $x \in \mathbb{R}$ si dice *minorante* di A se non supera alcun elemento di A. Indicato con $m(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\ \forall a \in A\}$ l'insieme dei minoranti di A, un numero $\tau \in \mathbb{R}$ si dice **estremo inferiore** di A, e si indica con $\inf A$, se $\tau = \max m(A)$. Considerazioni analoghe a quelle fatte per il sup valgono per l'inf. Per esempio, se $m(A)$ è vuoto non può esistere $\inf A$; ed $m(A)$ vuoto vuol dire che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ con $a < x$; perciò in tal caso A si dice *illimitato inferiormente.* Se invece $m(A) \neq \emptyset$ l'insieme A si dice limitato inferiormente. Una conseguenza dell'assioma (4.1) è che: *Ogni insieme non vuoto limitato inferiormente ha estremo inferiore.* Questo si vede applicando la seguente proposizione sull'insieme degli opposti. Poniamo

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } x = -a\} \equiv \{-a : a \in A\}.$$

Per esempio se $A = (2,3)$, $-A = (-3,-2)$; e se $A = [-1,2)$, $-A = (-2,1]$.

PROPOSIZIONE. Sia $A \neq \emptyset$. (i) $M(A) = -m(-A)$; (ii) Se A è limitato inferiormente esiste $\inf A$ e risulta $\inf A = -\sup(-A)$.

Dimostrazione. (i) $x \in M(A) \Leftrightarrow x \geq a\ \forall a \in A \Leftrightarrow -x \leq -a\ \forall a \in A \Leftrightarrow -x \in m(-A) \Leftrightarrow x \in -m(-A)$. (ii) Poichè A è limitato inferiormente $\emptyset \neq m(A) =$

[39] Cominceremo ad abbreviare scrivendo $A = \{\frac{x}{x+1} : x > 0\}$.

[40] Per essere precisi $x > \max\{0, (1-\epsilon)/\epsilon\}$ (no?).

$-M(-A)$ (perchè $-(-A) = A$ —verifica) dunque $-A$ sarà limitato superiormente. Dall'assioma (4.1) esiste $\sigma = \sup(-A) = \min M(-A)$. Sappiamo allora che $\sigma = \min(-m(A))$, e da questo usando $\sigma \leq -x \Leftrightarrow -\sigma \geq x$ è facile dedurre che $-\sigma = \max m(A) = \inf A$. □

E' comodo poter parlare di estremo superiore e di estremo inferiore anche quando l'insieme A non è limitato. Poniamo a tal fine: $\sup A = \infty$ se A è illimitato superiormente; ed $\inf A = -\infty$ se A è illimitato inferiormente. Con tali posizioni $\sup A$ e $\inf A$ esistono per ogni $A \neq \emptyset$; ma non dimentichiamo che $\pm\infty$ *non* sono elementi di $\mathbb{R}$.

Useremo anche le seguenti definizioni per $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$: $A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b,\, a \in A,\, b \in B\}$; $A - B = \{x \in \mathbb{R} : x = a - b,\, a \in A,\, b \in B\}$; $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} : x = ab,\, a \in A,\, b \in B\}$; $cA = \{x \in \mathbb{R} : x = ca,\, a \in A\}$.

ESEMPI 4.2. **(a)** Per definizione $A + A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b \text{ con } a \in A,\ b \in A\}$. Per esempio $[-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$, perchè: chiaramente se $a, b \in [-1, 1]$ è $a + b \in [-2, 2]$, quindi vale l'inclusione $\subseteq$. Per la $\supseteq$: se $x \in [-2, 2]$ allora $x/2 \in [-1, 1]$, ed $x = x/2 + x/2$.

(b) $-3(2, 5) = (-15, -6)$. Verifica.

(c) Se $c \geq 0$ ed A è non vuoto e limitato superiormente risulta $\sup cA = c \sup A$. Se $c = 0$ l'uguaglianza è semplicemente $\sup\{0\} = 0$, che è vero. Per $c > 0$ abbiamo: per ogni $a \in A$, $a \leq \sup A$ quindi (poichè $c > 0$) $ca \leq c \sup A$, da cui usando l'esempio 4.1(d) deduciamo $\sup cA \leq c \sup A$; poi, per ogni $a \in A$ abbiamo $a = (1/c)ca \leq (1/c) \sup cA$ dunque $\sup A \leq (1/c) \sup cA$ da cui (di nuovo usando il fatto che $c > 0$) $c \sup A \leq \sup cA$.

(d) Se $c < 0$ l'uguaglianza dell'esempio precedente *non* vale. Esempio: il (b) sopra.

ESERCIZI

4.2. Dimostra (se ti interessa) che le due formulazioni date dell'assioma di completezza sono equivalenti (che cioè l'una implica l'altra).

4.3. (i) Sia $A = \{\frac{x}{x+1} : x > 0\} \cap (-\infty, 1/3]$. Esiste $\max A$?

4.4. Dimostra la seguente caratterizzazione dell'inf:

Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente e $\tau \in \mathbb{R}$. $\tau = \inf A$ se e solo se soddisfa le seguenti due proprietà:

$$\begin{array}{l} (1) \text{ per ogni } a \in A \ a \geq \tau, \text{ e} \\ (2) \text{ per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } a < \tau + \epsilon. \end{array} \tag{4.3}$$

4.5. Trova $\inf A$ con $A = \{\frac{x}{x+1} : x > 0\}$.

4.6. (i) Dimostra le asserzioni fatte nell'esempio 4.1(c) a proposito della relazione fra sup e max. (ii) Enuncia e dimostra le analoghe asserzioni riguardanti inf e min.

4.7. Trova $[-1, 1] - [-1, 1]$.

4.8. Siano A, B non vuoti limitati superiormente. Verifica che: (i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; (ii) se $A \subseteq B$ risulta $\sup A \leq \sup B$; (ii) Dimostra che se A e B sono limitati superiormente lo è anche $A \cup B$ e risulta $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ (cioè $= \sup A$ se $\sup A \geq \sup B$, $= \sup B$ se $\sup A < \sup B$).

4.9. Abbiamo visto che dall'assioma (4.1) segue che: Ogni A non vuoto limitato inferiormente ha estremo inferiore. Dimostra che se viceversa si assume questo risultato si può dedurre la (4.1) come conseguenza.

4.10. Come definiresti $\sup\emptyset$ e $\inf\emptyset$? (sugg.: fallo in modo che l'uguaglianza $\inf A = -\sup(-A)$, cioè $\max m(A) = -\min M(-A)$, valga per tutti gli $A \neq \emptyset$, non solo quelli limitati. Poi controlla che con la definizione che hai dato la $\inf A = -\sup(-A)$ vale $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, anche $A = \emptyset$).

STRUTTURA DELL'INSIEME DEI REALI

Dall'assioma di completezza seguono proprietà dell'insieme $\mathbb{R}$ che permettono di capirne meglio la struttura. Intanto possiamo dimostrare il seguente risultato che sembra ovvio ma che non si può dimostrare senza l'assioma (4.1):

PROPOSIZIONE. L'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali è illimitato superiormente. Equivalentemente, vale la cosiddetta *proprietà di Archimede*: Per ogni $x, y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente per contraddizione: Supponi che lo è. Per l'assioma (4.1) ha allora un estremo superiore σ; $\sigma - 1$ non è maggiorante di $\mathbb{N}$ (perchè il sup è il minimo dei maggioranti), perciò esiste $n^* \in \mathbb{N}$ tale che $\sigma - 1 < n^*$; sarà allora $n^* + 1 > \sigma$, e d'altra parte $n^* + 1 \in \mathbb{N}$ (perchè $\mathbb{N}$ è induttivo ed $n^* \in \mathbb{N}$); dunque σ non è maggiorante di $\mathbb{N}$: contraddizione.

Da ciò segue la proprietà di Archimede, perchè esiste $n > y/x$. Viceversa se vale questa prendendo $x = 1$ si vede che $\mathbb{N}$ non ha maggioranti. $\square$

Dal punto di vista geometrico la proprietà di Archimede dice che un segmento di lunghezza y può sempre essere coperto da un numero finito di segmenti di lunghezza assegnata x (anche se y è grande e x è piccolo). E' stata da lui esplicitamente enunciata come uno degli assiomi della geometria.

Osserviamo che la proposizione precedente implica che $\mathbb{N}$ è infinito (perchè se fosse finito avrebbe un massimo, quindi sarebbe limitato superiormente). Altra conseguenza da tenere presente:

PROPOSIZIONE. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $0 \leq x \leq 1/n$ allora $x = 0$.

Dimostrazione. Se fosse $x > 0$ esisterebbe n tale che $nx > 1$ (prendi $y = 1$ nella proprietà di Archimede). $\square$

Usando il fatto che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente si possono calcolare inf e sup di insiemi di punti isolati come quelli dei prossimi esempi.

ESEMPI 4.3. (a) Sia $A = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. $A \subseteq [0,1]$, e $\min A = 0$. Per il sup, disegnamo qualche punto di A su una retta: si vede che si avvicinano ad 1 man mano che n cresce, e in effetti per n grande non c'è molta differenza fra n ed $n+1$. Indoviniamo $\sup A = 1$ e verifichiamo: sappiamo già che è un maggiorante, resta solo da vedere se dato $\epsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $a > 1 - \epsilon$, cioè se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n}{n+1} > 1 - \epsilon$; ma questa disuguaglianza equivale a $n > (1-\epsilon)/\epsilon$, e adesso sappiamo che esistono $n \in \mathbb{N}$ siffatti.

(b) Studiamo $A = \{\frac{2n^2}{3n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Di nuovo $\min A = 0$. Poi, per $n > 0$ $\frac{2n^2}{3n+1} = n \cdot \frac{2}{3+1/n}$, che per n grande è circa $2/3$ moltiplicato n; quindi indoviniamo $\sup A = \infty$. Da vedere se per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ tale che $a > x$ cioè se esiste $n > 0$ tale che $a_n \equiv n \cdot \frac{2}{3+1/n} > x$. Ma $a_n \geq n/2$ (perchè per $n > 0$, $1/n \leq 1$ quindi $\frac{2}{3+1/n} \geq 2/4$), ed $n/2 > x$ per n sufficientemente grande.

(c) Sia $A = \{\frac{(-1)^n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Gli elementi di A sono $\pm 1/(2n+1)$ a seconda che n sia pari o dispari, quindi in valore assoluto decrescono se n cresce. Conclusione, il minimo è raggiunto con il piu piccolo n dispari $(= 1)$: $\min A = -1/3$; il massimo con il più piccolo dei pari $(= 0)$, $\max A = 1$.

Altro risultato che adesso useremo, anch'esso 'ovvio', dice che per ogni x esiste un massimo intero $\leq x$, che indicheremo con $[x]$. Per esempio $[2.5] = 2$, $[-3.5] = -4$ eccetera. Un esercizio chiede di disegnare il grafico di $f(x) = [x]$.

PROPOSIZIONE. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un (unico) intero $z \in \mathbb{Z}$ tale che $z \leq x < z+1$. Tale numero verrà indicato con $[x]$.

Dimostrazione. Sia $x \geq 0$; prendi un $A = \{0, 1, \ldots, N\}$ con $N > x$ e considerane il sottoinsieme $B = \{n \in A : n \leq x\}$; osserva che se $n \in A$, allora $n \notin B \Rightarrow n > x$; B è non vuoto e finito, quindi ha massimo $\overline{n} \leq x$; chiaramente $\overline{n} < N$, quindi: $\overline{n}+1 \in A$, ed $\overline{n}+1 \notin B$ ($\forall n \in B$, $n \leq \overline{n}$), da cui $\overline{n}+1 > x$ per quanto osservato sopra. Conclusione, esiste $[x]$ per $x \geq 0$. Per $x < 0$, prendi $n \in \mathbb{N}_+$ tale che $x + n > 0$, e verifica che $-n + [x+n]$ è il numero cercato. L'unicità è facile esercizio. $\square$

Abbiamo visto che che con i razionali non si possono rappresentare tutte le misure delle grandezze reali. D'altra parte, con essi si possono ottenere approssimazioni 'buone' quanto si vuole:

PROPOSIZIONE (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ $\exists r \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Vogliamo $r = m/n$ (con $n > 0$ come sempre) tale che $|r - x| < \epsilon$ cioè $r - \epsilon < x < r + \epsilon$, quindi è (più che) sufficiente trovarlo tale che $r \leq x < r + \epsilon$; e quest'ultima condizione equivale ad $m \leq nx < m + n\epsilon$. Con $m = [nx]$ risulta $m \leq nx < m+1$; prendendo allora $n\epsilon > 1$ (possibile per Archimede) ed $m = [nx]$ otteniamo quello che vogliamo. $\square$

Una formulazione equivalente di questa proposizione è che in ogni intervallo (a, b) esiste un razionale (prendi, nella proposizione di sopra, $x = \frac{a+b}{2}$ ed $\epsilon < \frac{b-a}{2}$). Vale la pena di sottolineare che in ogni (a, b) esiste anche un irrazionale $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: prendi $r \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ ed $x = r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ con $\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{b-r}{2}$, e nota che $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ e che la somma di un razionale ed un irrazionale dà un irrazionale.

In effetti possiamo concludere che in ogni (a, b) ci sono infiniti razionali ed infiniti irrazionali. Lo puoi dimostrare per contraddizione.

ESEMPIO 4.4. *Espansione decimale.* E' il modo più comune di approssimare numeri qualunque. Sia $x \in \mathbb{R}$. Per approssimare x 'per difetto' l'idea è: prendi $[x]$; se $x \neq [x]$ sarà $[x] < x < [x]+1$; dividi l'intervallo $([x], [x]+1)$ in dieci e aggiungi ad $[x]$ quanti più decimi possibile senza superare x; se non si arriva esattamente ad x, questo sarà contenuto in un intervallo di ampiezza $1/10$; dividilo in dieci, e ricomincia; e così via, fino al grado di approssimazione voluta. Formalmente: abbiamo $[x] + 0/10 = [x] \leq x < [x] + 1 = [x] + 10/10$, quindi $A = \{m \in \mathbb{N} : [x] + m/10 \leq x\} \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\}$. Sia $x_1 = \max A$, così $[x] + x_1/10 \leq x < [x] + (x_1+1)/10$ cioè $[x] + x_1/10 + 0/100 \leq x < [x] + x_1/10 + 10/100$. Procedendo come al primo passo, sia $x_2 = \max\{m \in \mathbb{N} : [x] + x_1/10 + m/100 \leq x\} \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\}$; allora $[x] + x_1/10 + x_2/100 + 0/1000 \leq x < [x] + x_1/10 + x_2/100 + 10/1000$. Qui siamo a due numeri 'dopo la virgola', cioè normalmente scriviamo queste disuguaglianze come $[x].x_1x_2 \leq x < [x].x_1(x_2+1)$ (per esempio $5.45 \leq x < 5.46$). Andando avanti così si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N}_+$:

$$
\begin{aligned}
a_n \equiv [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{0}{10^{n+1}} \\
\leq x < [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{10}{10^{n+1}} \equiv b_n,
\end{aligned}
$$

con $b_n - a_n = 1/10^n$ ed $|a_n - x|, |b_n - x| < 1/10^n$. Cioè al passo n-esimo l'approssimazione è a meno di $1/10^n$, e poichè $10^n \geq n$ questa approssimazione si può rendere 'buona' quanto si vuole. [41]

ESERCIZI

4.11. Dì se esistono max e min dei seguenti insiemi: (i) $A = \{\frac{2n^2}{3n+1} : n \in \mathbb{N}_+\}$; (ii) $A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{Z}, n \neq -1\}$; (iii) $A = \{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N}_+\}$;

4.12. (Fichera) Studia al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'estremo superiore di $A_\lambda = \{1 + \lambda/n^3 : n \in \mathbb{N}_+\}$;

4.13. Disegna la funzione $f(x) = [x]$.

4.14. (i) Dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ deduci che: Per ogni $x < y \in \mathbb{R}$ esiste $r \in \mathbb{Q}$ con $x < r < y$ (sugg.: una possibilità è prenderne uno in $(x_0 - (y-x)/4, x_0 + (y-x)/4)$ con $x_0 = x + (y-x)/2$). (ii) Da (i) deduci che ne esistono infiniti con la proprietà richiesta (per contraddizione).

5 USARE I NUMERI: II

RADICI

Con $n \in \mathbb{N}_+$, una *radice n-esima* di un $x \in \mathbb{R}$ è un $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^n = x$. Questo generalizza il caso della radice quadrata ($n = 2$). Sappiamo già che un numero negativo non ha radice quadrata, quindi presi x ed n arbitrari non necessariamente una radice n-esima di x esiste. Il teorema fondamentale è su $x > 0$:

TEOREMA. Ogni $x > 0$ ha una, unica radice n-esima positiva, che si indica con $\sqrt[n]{x}$.

Dimostrazione. Più di una non ce ne può essere, perchè se $0 < y_1 < y_2$, $0 < y_1^n < y_2^n$. Dimostriamo questo per induzione: L'asserto è vero per $n = 1$; supponiamolo vero per n e vediamo per $n+1$: usando (2.10), se $x < y$ abbiamo $x^{n+1} = x^n x < y^n x$ (perchè per per l'ipotesi induttiva da $x < y$ segue $x^n < y^n$, poi moltiplichiamo per $x > 0$); moltiplicando la disuguaglianza $x < y$ per y^n otteniamo $y^n x < y^n y = y^{n+1}$; mettendo insieme viene $x^{n+1} < y^{n+1}$, cioè l'asserto per $n + 1$. Dunque $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ per ogni $n > 0$.

Per dimostrare che una c'è basta prendere $x > 1$, perchè se c'è per tali x, se $0 < x < 1$ è $1/x > 1$ quindi esiste $y > 0$ tale che $y^n = 1/x$, e allora $(1/y)^n = x$ quindi $1/y$ è radice n-esima di x —e ovviamente la radice n-esima di 1 è 1.

Sia allora $x > 1$; prendi l'insieme $A = \{a \in \mathbb{R}_+ : a^n \leq x\}$; $1 \in A$ quindi non è vuoto; ed è limitato superiormente perchè per esempio x stesso è un maggiorante (verifica usando $x^n > x$); quindi esiste $\sup A \equiv y \geq 1 > 0$. Vogliamo dimostrare che la radice cercata è questa y, cioè che $y^n = x$, per contraddizione. Supponiamo $y^n < x$; se troviamo $k \in \mathbb{N}_+$ tale che $(y + 1/k)^n < x$ contraddiciamo il fatto che $y = \sup A$ (e concludiamo che se $y = \sup A$ non può essere $y^n < x$); abbiamo $(y + 1/k)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} y^{n-h}(1/k)^h \leq y^n + (1/k)\sum_{h=1}^n \binom{n}{h} y^{n-h}$; quest'ultima quantità è $< x$ se $k > \frac{\sum_{h=1}^n \binom{n}{h} y^{n-h}}{x - y^n}$; ed è ben possibile trovare tale k (per Archimede). Supponiamo per finire che $y^n > x$ e cerchiamo $k \in \mathbb{N}_+$ tale che $(y - 1/k)^n > x$, di nuovo per contraddire il fatto che $y = \sup A$; analogamente al caso visto troviamo $(y - 1/k)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} y^{n-h}(-1)^h(1/k)^h \geq y^n - (1/k)\sum_{h=1}^n \binom{n}{h} y^{n-h} > x$ per k sufficientemente grande. $\square$

[41] Nota che questo procedimento costituisce una dimostrazione alternativa dell'ultima proposizione.

Il teorema dà esistenza di una radice positiva di $x > 0$; e ovviamente esiste anche la radice n-esima di $x = 0$, che è 0. Per questa useremo lo stesso simbolo $\sqrt[n]{x}$, che indicherà quindi l'unico numero non negativo la cui potenza n-esima dà $x \geq 0$; cioè per definizione, per $x \geq 0$ $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

E se $x < 0$? Per esempio -8 ha radice terza -2, quindi qualche volta una radice di un numero negativo esiste. E ancora: radici negative? Per esempio $-2 = -\sqrt{4}$ è una radice quadrata di 4. [42] Per chiarire la situazione dobbiamo esaminare un minimo la struttura degli interi pari e dispari. Un intero $n \in \mathbb{Z}$ si dice *pari* se è multiplo intero di 2, cioè se esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2m$ —nota che qui m, n possono anche essere negativi. Un intero si dice *dispari* se non è pari. Per esempio $0 = 2 \cdot 0$ è pari. E 1? E' dispari per la seguente proposizione, che dice che gli interi sono in sequenza pari, dispari, pari, eccetera:

PROPOSIZIONE. Se $n \in \mathbb{Z}$ è pari $n-1$ ed $n+1$ sono dispari, ed $n-2$ ed $n+2$ sono pari. Quindi se $n \in \mathbb{Z}$ è dispari esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 2m+1$.

Dimostrazione. Per $n+1$: per ipotesi $n = 2m$ per un $m \in \mathbb{Z}$; sia $m' \in \mathbb{Z}$; se $m' \leq m$, $2m' \leq 2m = n < n+1$ quindi $2m' \neq n+1$; se $m' > m$ sarà $m' \geq m+1$ quindi $2m' \geq 2(m+1) = 2m+2 > 2m+1 = n+1$ quindi di nuovo $2m' \neq n+1$; conclusione, non esiste $m' \in \mathbb{Z}$ tale che $n+1 = 2m'$, cioè $n+1$ è dispari. Gli altri casi sono analoghi. □

Cose che ci interessano per lavorare sono, per $n \in \mathbb{N}$ ed $x \neq 0$:

$$\begin{array}{l} \text{se } n \text{ è pari, } (-x)^n = x^n > 0 \\ \text{se } n \text{ è dispari, } (-x)^n = -x^n \text{ ed } x \cdot x^n > 0. \end{array} \tag{5.1}$$

Nota che l'ultima condizione dice che x e x^n sono concordi. Le dimostrazioni sono il primo esercizio di questo paragrafo. Con le (5.1) possiamo fare il quadro della situazione: (i) se n è pari ed $x < 0$ non esiste radice n-esima di x (perchè ogni numero elevato a un pari è non-negativo); (ii) se n è pari ed $x > 0$ esistono due radici n-esime di x, $\sqrt[n]{x} > 0$ e $-\sqrt[n]{x} < 0$ (che non ne esistono altre si vede come per $n = 2$); (iii) se invece n è dispari, ogni $x \in \mathbb{R}$ ha un'unica radice reale (perchè: se $x > 0$ c'è $\sqrt[n]{x}$ unica positiva e non ne esistono altre perchè se $y \leq 0$ è $y^n \leq 0$ cioè $y^n \neq x$; se $x < 0$ esiste $\sqrt[n]{-x} > 0$ e $(-\sqrt[n]{-x})^n = x$, cioè $-\sqrt[n]{-x}$ è una radice n-esima di x —per esempio $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{-(-8)}$—, e non ce ne sono altre come si vede con ragionamento simile a quelli già fatti). *Nel caso di n dispari* useremo lo stesso simbolo $\sqrt[n]{x}$ per indicare l'unica radice di x (anche se è negativa).

Le proprietà alla base dei calcoli con le radici sono (con $n, m, p, q \in \mathbb{N}_+$, $x, y > 0$):

$$\begin{array}{llll} (i) & \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} & (ii) & \sqrt[n]{x} / \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x/y} \\ (iii) & \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} & (iv) & (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \\ (v) & \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}} & (vi) & m/n = p/q \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}. \end{array} \tag{5.2}$$

Nota il caso particolare di (ii): $1/\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1/x}$. Le dimostrazioni sono tutte simili, usano l'unicità della radice positiva e le (3.1). Per esempio la (iii): la tesi è $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}})^{mn} = x$, che segue da $a^{mn} = (a^m)^n$; la (iv) usando la (iii): la tesi è che $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x^m}}$; ma usando la (iii) troviamo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^m}} = \sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x^m}} = \sqrt[n]{x}$. La (vi) usando (v) e (iii): $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}} = \sqrt[qm]{x^{mp}} = \sqrt[q]{\sqrt[m]{(x^p)^m}} = \sqrt[q]{x^p}$.

[42] Nota che poichè $(-2)^2 = 4$, -2 è radice quadrata di 4. Ma il simbolo $\sqrt{4}$ indica quella positiva, cioè 2.

ESERCIZI

5.1. Dimostra le (5.1) (usa le espressioni $2m$ e $2m+1$ per i pari e dispari e (3.1)).

5.2. (i) Dimostra che se n è dispari, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}$; (ii) In che casi ($x \gtreqless 0$, n pari, dispari) risulta $\sqrt[n]{x^n} = x$, e in quali $\sqrt[n]{x^n} = -x$? (iii) In che casi risulta $x \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}$, e quando invece $x \sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{x^n y}$?

5.3. Finisci di dimostrare le (5.2).

ANCORA SULLE POTENZE AD ESPONENTE INTERO

Stabiliamo adesso un importante risultato sulle potenze che useremo nel prossimo paragrafo per risolvere le disequazioni irrazionali:

PROPOSIZIONE. Se $x, y \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}_+$, *oppure* se $x, y \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}_+$ dispari, risulta

$$x = y \Leftrightarrow x^n = y^n, \quad x < y \Leftrightarrow x^n < y^n. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Supponiamo prima $x, y > 0$. Allora $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ (primo paragrafo della dimostrazione del teorema di esistenza della radice). Per la $x^n < y^n \Rightarrow x < y$ basta osservare che se $x^n < y^n$ non può essere nè $x = y$ (implicherebbe $x^n = y^n$) nè $x > y$ (implicherebbe $x^n > y^n$, usando la parte già dimostrata). Da ciò segue $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$ (la $\Leftarrow$ di nuovo per contraddizione).

Ora il caso $x, y \geq 0$. Per $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$ basta dimostrare la $\Leftarrow$: se $x^n = y^n$, o $y^n = 0$ nel qual caso $x = y = 0$, oppure $y^n > 0$ che implica $x, y > 0$, caso già fatto. La $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$: che $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ è chiaro, perchè $0 = x < y \Rightarrow x^n = 0 < y^n$. Viceversa, supponi $x^n < y^n$; allora $y^n > 0$ da cui $y > 0$; se anche $x > 0$ allora $x < y$ (caso già dimostrato); se $x = 0$ di nuovo $x < y$.

Finiamo con $n > 0$ dispari ed x, y qualunque. Di nuovo bastano le $\Rightarrow$. Se $x = y$ chiaramente $x^n = y^n$. Supponiamo $x < y$: Se $0 \leq x < y$ il risultato segue dalla parte dimostrata; se $x < 0 < y$, usando (5.1) $x^n < 0 < y^n$; se infine $x < y \leq 0$ sarà $0 \leq -y < -x$ da cui, usando la parte dimostrata e (5.1), $-y^n = (-y)^n < (-x)^n = -x^n$ cioè $x^n < y^n$. $\square$

Note. (1) Da sottolineare che senza le ipotesi fatte la (5.3) è *falsa*: per esempio $x = -2 < 1 = y$ ma $x^2 = 4 > 1 = y^2$; e $(-2)^2 = 2^2$ ma $-2 \neq 2$ (qui non è $x, y \geq 0$ ed n non è dispari)

(2) $\sqrt[n]{x}$ *è crescente.* Importante conseguenza della (5.3) è: Per $x, y \geq 0$ si ha $x < y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. Lo si dimostri per esercizio. Per cominciare a pensare in termini di funzioni osserviamo che questa proprietà dice che la funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$ cresce al crescere di x. [43]

A questo punto illustriamo geometricamente alcuni dei risultati sulle potenze che siamo andati trovando. Nella figura 10, sempre unendo punti, abbiamo tracciato quelli che più avanti confermeremo essere i grafici di $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ ed $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Intanto è chiara la (5.3): nella figura di sinistra, sia x^2 che x^3 crescono al crescere di x per $x \geq 0$; x^3 cresce su tutto $\mathbb{R}$ (esponente dispari), mentre ciò *non* è vero per x^2 (esponente pari); e quest'ultimo fatto illustra anche quanto asserito nella nota (1) di sopra. Si vede la (5.1), perchè x^2 ha lo stesso valore (altezza) per x e $-x$, ed x^3 ha valori opposti; e sempre nella figura di sinistra è anche illustrato quanto stabilito nell'esempio 3.2(g) (pagina 17), che dice che se $m < n$, il grafico di $f(x) = x^m$ sta sopra quello di $f(x) = x^n$ per $0 < x < 1$ e sotto per $x > 1$. Nella figura di destra si vede la crescenza di $\sqrt[n]{x}$, e che per n dispari $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

[43] Per descrivere una funzione così diremo più brevemente: "la funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$", o se vogliamo indicare la lettera usata "la funzione $x \mapsto f(x) = \sqrt[n]{x}$". La freccia con trattino indica alla sua destra l'immagine del punto alla sua sinistra.

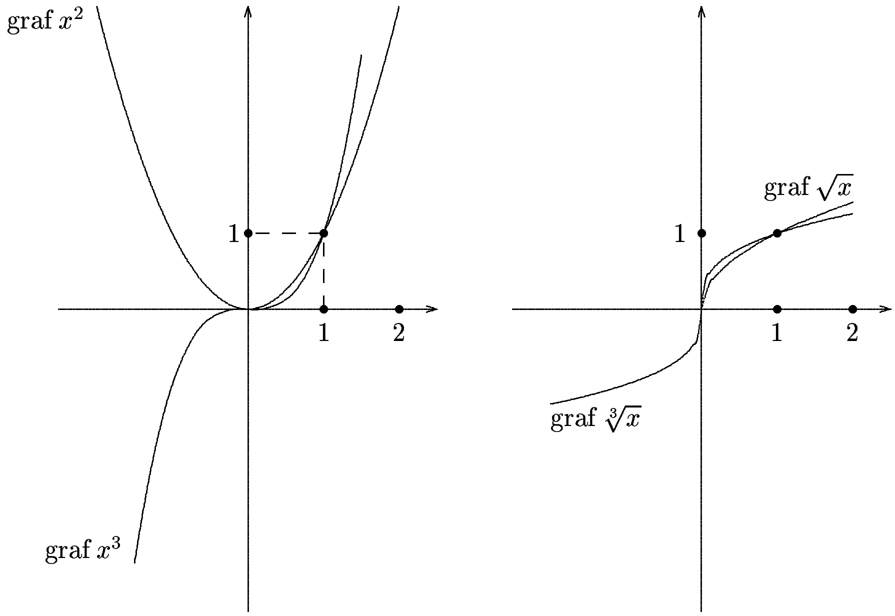


FIGURA 10. Grafici di potenze.

ESERCIZI

5.4. (i) Dato il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ricava il grafico della funzione $x \mapsto f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$ dato; (ii) dal grafico di f ricava quello di $-f$ (cioè della funzione $x \mapsto -f(x)$); (iii) disegna il grafico di $f(x) = 2 - |\sqrt[3]{x}|$.

5.5. Sia $m < n$. Dimostra che: se $0 < x < 1$, $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$; se $x > 1$, $\sqrt[m]{x} > \sqrt[n]{x}$ (nella figura 10 a destra vedi un esempio di questo fatto).

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle con la radice ($f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x), \quad \sqrt[n]{f(x)} < g(x), \tag{5.4}$$

e la loro soluzione si fonda sul risultato del paragrafo precedente.

Cominciamo con le equazioni, $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$. Se n è dispari, da (5.3) questa equazione è equivalente ad $f(x) = g^n(x)$ [44] che non è più irrazionale. Dunque se n è dispari basta elevare ad n entrambi i membri.

Per n pari bisogna stare attenti al fatto che la (5.3) vale solo per numeri non-negativi. Ma se n è pari, se $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ deve essere $f(x) \geq 0$ quindi $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$ da cui $g(x) \geq 0$. In altri termini l'equazione data implica $g(x) \geq 0$. Dunque la $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ è equivalente al sistema: $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ e $g(x) \geq 0$. In questo sistema entrambi i membri della prima equazione sono ≥ 0 quindi ad essi possiamo applicare (5.3); conclusione:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^n(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Nota l'implicazione $f(x) \geq 0$ ($f(x) = g^n(x) \geq 0$ perchè n pari).

ESEMPI 5.1. **(a)** $\sqrt[3]{8 - 125x^3} = 1 - 5x \Leftrightarrow 8 - 125x^3 = (1 - 5x)^3 \Leftrightarrow 75x^2 - 15x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = (3 \pm \sqrt{93})/30$.

[44] $g^n(x)$ abbrevia $(g(x))^n$.

(b) $\sqrt{17x-4} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4x^2-21x+5=0 \end{cases}$. La prima è risolta da $x \geq 1/2$, la seconda da $x = 1/4$ ed $x = 5$; intersezione: $x = 5$.

Nota bene che la condizione $2x-1 \geq 0$ è essenziale. Se elevassimo semplicemente al quadrato otterremmo $17x-4 = 4x^2-4x+1$, risolta da $x = 1/4$ ed $x = 5$; e sbaglieremmo, perchè $x = 1/4$ non è soluzione della nostra equazione.

(c) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2x-3}$. Questa non è esattamente come in (5.4) ma vale lo stesso ragionamento: perchè le radici siano definite deve essere $3x-2 \geq 0$, $x-2 \geq 0$ e $2x-3 \geq 0$ cioè $x \geq 2$; quindi la nostra equazione è equivalente al sistema costituito da essa più $x \geq 2$; a questo possiamo applicare (5.3) perchè è tutto positivo; elevando al quadrato e semplificando, e poi rielevando al quadrato (perchè di nuovo tutto positivo) otteniamo:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{(3x-2)(x-2)} = 2(x-2) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (3x-2)(x-2) = 4(x-2)^2. \end{cases}$$

Ora osserva: vorremmo dividere per $x-2$, ma non possiamo perchè potrebbe essere $x-2=0$. Esaminiamo $x = 2$: è soluzione. Resta il sistema: $x > 2$ e $(3x-2)(x-2) = 4(x-2)^2$, nel quale possiamo dividere la seconda per $x-2$ ottenendo la soluzione $x = 6$. Conclusione: la nostra equazione è risolta da $x = 2$ ed $x = 6$.

(d) $\sqrt{x^2+\sqrt{x}} = x + \sqrt{x}$. Qui conviene cercare le soluzioni separatamente per $x = 0$ ed $x > 0$. Si vede che $x = 0$ è soluzione, e per $x > 0$ si trova facilmente la soluzione $x = 1/4$.

Ora le disequazioni, che sono riconducibili a $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ e $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$. La logica è la stessa delle equazioni. Per n dispari non c'è problema, si eleva tutto ad n. Supponiamo n pari, e cominciamo con la prima. Se è soddisfatta deve essere $f(x) \geq 0$ dunque anche $g(x) > 0$; sicchè la disequazione è equivalente al sistema costituito da essa stessa più $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$; a questo possiamo applicare (5.3), ottenendo in conclusione

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^n(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

La condizione $g(x) > 0$ è essenziale, perchè la $f(x) < g^n(x)$ potrebbe essere soddisfatta da x tali che $g(x) < 0$ (ricorda che poichè n è pari $g^n(x) \geq 0$), che non sono soluzioni della nostra equazione; ed anche $f(x) \geq 0$ è essenziale, perchè se si omettesse si prenderebbero per buone, sbagliando, le x tali che $f(x) < 0$.

Adesso la $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$. Cerchiamo separatamente le soluzioni con $g(x) < 0$ e quelle con $g(x) \geq 0$. Con $g(x) < 0$, a sua volta può essere $f(x) < 0$ o $f(x) \geq 0$: nel primo caso la radice non è definita, mentre nel secondo (se $g(x) < 0$ ed $f(x) \geq 0$) la disequazione è soddisfatta. Sicchè le soluzioni con $g(x) < 0$ sono tutte le x tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) < 0$. Se ora $g(x) \geq 0$, perchè la disequazione sia soddisfatta deve anche essere $f(x) > 0$, perciò è equivalente al sistema: $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, $g(x) \geq 0$ ed $f(x) > 0$; a questo possiamo applicare (5.3), ed elevando ad n otteniamo: $f(x) > g^n(x)$, $g(x) \geq 0$ ed $f(x) > 0$; eliminando la $f(x) > 0$ (che è implicata dalle altre), otteniamo in definitiva:

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} f(x) > g^n(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Tranne nei casi più semplici, le disequazioni irrazionali non sono quasi mai direttamente come in (5.4). Ma si applicano gli stessi argomenti per ricondurle a quella forma ed applicare (5.6) e (5.7). A volte è utile partizionare $\mathbb{R}$ in qualche modo (esempio $\{x : x > 0\} \cup \{x : x \leq 0\}$) e cercare le soluzioni separatamente nei vari pezzi (come abbiamo già fatto nelle dimostrazioni); altre volte si vede che succede per le x tali che qualche espressione non è positiva, ed alle altre si applica (5.3); quasi sempre conviene cercare qualche semplificazione prima di cominciare a fare i conti. Per imparare bisogna cominciare a pensare da soli alle soluzioni degli esempi.

ESEMPI 5.2. **(a)** $\sqrt{x-7} < x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 \geq 0 \\ x-5 > 0 \\ x-7 < (x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 11x + 32 > 0. \end{cases}$

Nell'ultimo sistema la seconda disequazione ha $\Delta < 0$ ed $a > 0$ quindi è soddisfatta per ogni x; sicchè il sistema, e quindi la disequazione data, ha soluzioni $x \geq 7$.

(b) $6x+2 < \sqrt{8x^2+x-9} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+x-9 \geq 0 \\ 6x+2 < 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} (6x+2)^2 < 8x^2+x-9 \\ 6x+2 \geq 0. \end{cases}$

Il primo sistema è soddisfatto per $x \in (-\infty, -9/8]$, il secondo per nessun x. La nostra soluzione è l'*unione*, che è $(-\infty, -9/8]$.

(c) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4} < 2$. Deve essere $x \geq 4$ ed $x \geq -4$, cioè $x \geq 4$, e per tali valori è tutto positivo; sicchè i sistemi equivalenti sono in successione:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-4+x+4+2\sqrt{(x-4)(x+4)} < 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2(x+\sqrt{x^2-16} < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2-x > \sqrt{x^2-16} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2-x > \sqrt{x^2-16} \\ 2-x > 0, \end{cases}$$

dove l'ultima disequazione è implicata da $\sqrt{x^2-16} \geq 0$. Poichè nell'ultimo sistema la prima e l'ultima sono incompatibili la nostra disequazione non ha soluzioni.

(d) $\sqrt[3]{4x-1} > \sqrt{x+1}$. Deve essere $x \geq -1$ dunque anche $\sqrt[3]{4x-1} > 0$, che implica $4x-1 > 0$; con queste restrizioni (che insieme danno $x \geq 1/4$) possiamo applicare (5.3); e per eliminare entrambe le radici dobbiamo elevare a $2 \cdot 3 = 6$. Equivalenze:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1/4 \\ (4x-1)^2 > (x+1)^3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1/4 \\ x(x^2-13x+11) < 0. \end{cases}$$

L'ultimo sistema non presenta problemi; verifica che la soluzione è $(13-5\sqrt{5})/2 < x < (13+5\sqrt{5})/2$.

(e) $\sqrt{6-x} > \sqrt{\sqrt{x-1}-7}$. Questa è impossibile perchè dovrebbe essere

$$\begin{cases} 6-x > 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}-7 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 6 \\ x-1 \geq 49 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 6 \\ x \geq 50. \end{cases}$$

(f) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+3}} \geq 1$. Condizioni per l'esistenza delle radici: $x \geq -3/4$; in più il denominatore deve essere $\neq 0$, cioè $x+1 \neq 4x+3$ quindi $x \neq -2/3$. Dunque lavoriamo in $[-3/4, \infty) \setminus \{-2/3\}$ —nel senso che degli insiemi che troviamo dobbiamo prendere l'intersezione con questo. Portando 1 a sinistra e sommando viene $\frac{2\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{4x+3}} \geq 0$; Poichè il numeratore è ≥ 0 la disequazione equivale a: Num. $= 0$ oppure Num. > 0 e Den. > 0. L'equazione Num. $= 0$ ha soluzione $x = -3/4$. Il sistema Num. > 0, Den. > 0, $x \in [-3/4, \infty) \setminus \{-2/3\}$ è allora equivalente al sistema

Den. > 0, $x > -3/4$, $x \neq -2/3$, risolto da $-3/4 < x < -2/3$. Insieme ad $x = -3/4$ trovata prima, la soluzione della nostra disequazione è dunque $-3/4 \leq x < -2/3$.

(g) $x\sqrt{\frac{1+x}{x}} < 1 - x$. Intanto deve essere $(1+x)/x \geq 0$ ed $x \neq 0$, che dà $x \leq -1$ oppure $x > 0$. Cerchiamo separatamente nei due pezzi. Se $x \leq -1$ il primo membro della nostra disequazione è prodotto di $x < 0$ per la radice ≥ 0, quindi è ≤ 0; ed $x \leq -1 \Leftrightarrow -x \geq 1$ sicchè il secondo membro è $1 - x = 1 + (-x) \geq 1 + 1 = 2 > 0$; conclusione: ogni $x \leq -1$ è soluzione. Per $x > 0$ il primo membro è positivo e dunque deve esserlo anche il secondo, cioè deve essere $x < 1$; inoltre scrivendo $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ si vede che $x\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \sqrt{x(1+x)}$, dunque per $x > 0$ la data disequazione equivale succesivamente a

$$\begin{cases} \sqrt{x(1+x)} < 1 - x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+x) < 1 - 2x + x^2 \\ 0 < x < 1, \end{cases}$$

e l'ultimo sistema è risolto da $0 < x < 1/3$. In conclusione l'insieme soluzione cercato è $(-\infty, -1] \cup (0, 1/3)$.

(h) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > \frac{1}{2+\sqrt{x^2}}$. Deve essere intanto $x^2 - 4 > 0$ cioè $|x| > 2$. Per tali valori la disequazione è equivalente a $2 + \sqrt{x^2} > \sqrt{x^2 - 4}$, che è risolta per ogni $|x| > 2$ perchè $\sqrt{x^2 - 4} < \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2} + 2$.

(i) $|x| + \sqrt{x^2 - 2} > 2$ è equivalente a $\sqrt{x^2 - 2} > 2 - |x|$, dunque a $\begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - |x| < 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 2 - |x| \geq 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ x^2 - 2 > 4 - 4|x| + |x|^2 \end{cases}$; essendo $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$, il primo dei due sistemi è risolto da $|x| > 2$; nel secondo, scrivendo $x^2 = |x|^2$ e osservando che $3/2 > \sqrt{2}$ (da $(3/2)^2 = 9/4 > 2$) si vede che la soluzione è $3/2 < |x| \leq 2$; conclusione, la disequazione è risolta da $|x| > 3/2$ cioè da $x < -3/2$ ed $x > 3/2$.

ESERCIZI

5.6. Risolvi:

(*i*) $\sqrt[3]{-27x^3+4} < 1-3x$ (*ii*) $2x-1 > \sqrt{x^2-3x+2}$

(*iii*) $\sqrt{2x-3} < \sqrt{4x-5}$ (*iv*) $\sqrt{x^2+4x-5} > \sqrt{x^2+4x-21}$

(*v*) $\sqrt{x^2-3x+2} \geq \sqrt{-x^2-x+6}$ (*vi*) $\sqrt{\dfrac{x-7}{x-2}} < 4$

(*vii*) $\sqrt[3]{8-125x^3} < 1-5x$ (*viii*) $x-3 < \sqrt{x^2-2x}$

(*ix*) $x-3 \leq \sqrt{x^2+x-2}$ (*x*) $\dfrac{3}{\sqrt{2x-3}-1} > \dfrac{5}{\sqrt{2x-3}+1}$

(*xi*) $\sqrt{1+x}+\sqrt{6+x} > \sqrt{7x+4}$ (*xii*) $1-\sqrt[3]{x^3+10x+7} < -x$

(*xiii*) $\sqrt{x+1} \leq \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 1$ (*xiv*) $\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-7}} \geq -2$

(*xv*) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}} + \sqrt{\dfrac{x+3}{2x-1}} < 1$ (*xvi*) $\sqrt{2x-1}-1 > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$

(*xvii*) $\begin{cases} (xvi) \\ (xiv) \end{cases}$ (*xviii*) $\begin{cases} (xvi) \\ \frac{-x^2+x+2}{2x+3} \geq 0 \end{cases}$

(*xix*) $(x-1)\sqrt{x+1}+1 > 0.$

Sugg. per la (xv): senza troppi calcoli; pensa alle soluzioni positive di $z+1/z<1$. Il (xvii) chiede di risolvere il sistema costituito dalle (xvi) e (xiv). Analogamente per il (xviii).

5.7. Studia inf e sup di $A = \{\sqrt{nm}/(n+m) \,:\, n,m \in \mathbb{N}_+\}$ (sugg.: osserva che $\forall x,y>0$ $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$; poi osserva che $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+1/n} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$).

POTENZE AD ESPONENTE REALE E LOGARITMI

Abbiamo già definito la potenza ad esponente naturale; vogliamo adesso estendere questa operazione al caso di esponente reale qualunque. L'idea è di farlo in modo che le proprietà fondamentali (3.1) continuino a valere con esponente qualunque (abbiamo già applicato questo principio nel definire x^0).

Il primo passo è estendere la definizione a potenze con esponente in $\mathbb{Z}$, cioè definire anche x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x \neq 0$. Perchè valga la seconda delle (3.1) con esponente in $\mathbb{Z}$ deve essere $x^n \cdot x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$ dunque dobbiamo definire

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad x \neq 0,\, n \in \mathbb{N}.$$

Note. (1) Per $n=1$ si sta dicendo che l'x^{-1} potenza è definito essere l'x^{-1} inverso di x.

(2) Con questa definizione risulta per ogni $m,n \in \mathbb{N}$: $x^m/x^n = x^{m-n}$; per esempio $x^3/x^5 = x^{-2}$. Perchè:

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & \text{se } m \geq n \\ 1/x^{n-m} & \text{se } m < n \end{cases} = \begin{cases} x^{m-n} \\ x^{-(n-m)} \end{cases} = x^{m-n}.$$

(3) E' anche $x^n = 1/x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (essendo uno l'inverso dell'altro).

(4) Per induzione si vede che $1/x^n = (1/x)^n$.

(5) x^{-n} *non* è definito per $x=0$ (implicherebbe una divisione per zero).

Si verifica facilmente che applicando questa definizione le (3.1) valgono se ad esponente si legge $m, n \in \mathbb{Z}$. Passo successivo: definire le potenze ad esponente razionale. Sia $x > 0$. Perchè la terza delle (3.1) continui a valere deve essere per $n \in \mathbb{N}_+$ $(x^{1/n})^n = x^{(1/n)\cdot n} = x^1 = x$, sicchè dobbiamo definire $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$; e sempre per la terza delle (3.1) vogliamo che $x^{m/n} = x^{(1/n)\cdot m} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$. Perciò definiamo

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m \quad x > 0,\ m/n \in \mathbb{Q}.$$ [45]

Note. (1) In virtù della (5.2vi) questa definizione è ben posta (cioè *non* succede per esempio che $x^{2/3} \neq x^{4/6}$).

(2) Per la (5.2iv) è anche $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$.

(3) $x^{m/n}$ è definito solo per $x > 0$. In effetti, 0^r non potrebbe essere definito per tutti gli $r \in \mathbb{Q}$, perchè se $r = m/n$ con $m < 0$ dovrebbe essere $0^r = 0^m$, ma la potenza zero elevato ad un intero negativo non è definita. Potremmo definire (e lo faremo) $0^r = 0$ se $r = m/n$, $m, n > 0$. Per $x < 0$ ci sono due problemi che possiamo illustrare così. Uno: dovrebbe essere per esempio $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} = -2$; ma $1/3 = 2/6$ e $(-8)^{2/6}$ non è definito perchè radice pari di -8 non esiste; dunque $(-8)^{1/3}$ non è ben definito. Due: $200/301$ e $201/301$ sono vicini, ma sarebbe $(-8)^{200/301} > 0$, $(-8)^{201/301} < 0$, lontani; ciò è innaturale.

Di nuovo, applicando la definizione data si verifica che le (3.1) continuano a valere per esponenti $r, s \in \mathbb{Q}$; e che $x^{-r} = 1/x^r$ (dalla definizione di x^{-n}). Confermiamo per esempio che con $r = m/n$, $s = p/q$ risulta $(x^r)^s = x^{rs}$. Abbiamo $(x^r)^s = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{x^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{x^{mp}}} = \sqrt[nq]{x^{mp}} = x^{mp/nq} = x^{rs}$.

Si ha inoltre che per base $x > 1$ la potenza cresce al crescere dell'esponente (come con l'esponente naturale), cioè, con $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$\text{Per } x > 1: \quad r < s \Rightarrow x^r < x^s. \tag{5.8}$$

Dimostrazione: $x^s - x^r = x^r(x^{s-r} - 1)$ quindi la tesi è che $x^{s-r} > 1$; dato che $0 < s - r \in \mathbb{Q}$ basta dimostrare che per ogni razionale $m/n > 0$ risulta $x^{m/n} > 1$ (per $x > 1$); per far questo: è $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$; abbiamo già visto che $x > 1$ implica $\sqrt[n]{x} > 1$ (dalla (5.3)); sicchè $(\sqrt[n]{x})^m > 1$ (esempio 3.2(g)).

Ultimo passo, arrivare alla definizione di x^z con $z \in \mathbb{R}$ qualunque *ed* $x > 0$ (la base deve essere positiva già per il caso di esponente razionale; lo deve essere a maggior ragione per esponente reale qualunque). [46] Primo: definiamo $1^z = 1$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Poi, supponi di aver già definito x^z per $x > 1$; se vuoi (come vuoi) che $x^z y^z = (xy)^z$, dovrà essere $x^z(1/x)^z = 1^z = 1$ cioè x^z inverso di $(1/x)^z$; quindi per $0 < x < 1$, dato $(1/x)^z$ (che stiamo supponendo definito perchè $1/x > 1$) la definizione obbligata è $x^z = 1/(1/x)^z$. Conclusione: resta da considerare $x > 1$.

Sia allora $x > 1$ e $z \in \mathbb{R}$. z è approssimato per difetto e per eccesso da razionali, nel senso che $z = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r \leq z\} = \inf\{r \in \mathbb{Q} : r > z\}$ (da 4.2 e densità di $\mathbb{Q}$). Sarebbe auspicabile avere x^z definito come il numero approssimato dalle potenze x^r, $r \in \mathbb{Q}$. Il problema è: esiste tale numero? Per la (5.8) $r \leq z < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$ implica $x^r < x^s$; sicchè l'insieme $D = \{x^r : r \leq z,\ r \in \mathbb{Q}\}$ è limitato superiormente ed $E = \{x^r : r > z,\ r \in \mathbb{Q}\}$ inferiormente; ovviamente D ed E sono non vuoti, quindi esistono $\sup D$ ed $\inf E$; e per ogni $d \in D$, $e \in E$ risulta $d < e$; dunque $\sup D \leq \inf E$. Quindi il problema è: è $\sup D = \inf E$? Vedremo adesso che sì; quindi definiamo x^z come questo valore comune:

$$x^z = \sup\{x^r : r \leq z,\ r \in \mathbb{Q}\} \quad x > 1, z \in \mathbb{R}.$$

[45] Ricorda che per convenzione in m/n è sempre $n > 0$.

[46] Come per esponente razionale si può definire $0^z = 0$ *per* $z > 0$.

Note. (1) Per ogni $x > 0$ e $z \in \mathbb{R}$ risulta $x^z > 0$. Perchè per $x > 1$, x^z è sup di un insieme che contiene numeri positivi (potenze intere di radici di x); dato ciò, per $0 < x < 1$ x^z è inverso di un positivo; ed $1^z = 1 > 0$.

(2) Se $z \in \mathbb{Q}$ la definizione coincide con quella già data.

C'è da dimostrare (per gli interessati, magari in seconda lettura) che $\sup D = \inf E$. Dato $\sup D \leq \inf E$ basta dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $d \in D$, $e \in E$ tali che $e - d < \epsilon$ (che basta si vede per contraddizione: se $\sup D < \inf E$ esiste ϵ tale che non esistono $d \in D$, $e \in E$ con $e - d < \epsilon$ —per esempio $\epsilon = (\inf E - \sup D)/2$). Cioè, dato ϵ vogliamo razionali $r \leq z < s$ tali che $x^s - x^r < \epsilon$. Fissato $n \in \mathbb{N}_+$ prendiamo r ed s con $0 < s - r < 1/n$ (possiamo perchè $\mathbb{Q}$ è denso); allora $x^s - x^r = x^r(x^{s-r} - 1) < x^r(x^{1/n} - 1)$ (usando (5.8)); e da Bernoulli $x^{1/n} - 1 \leq (x-1)/n$; sicchè $x^s - x^r < x^r(x-1)/n < \epsilon$ se $n > x^r(x-1)/\epsilon$. Fissando n siffatto si ottiene quanto voluto.

Con la definizione data di potenza ad esponente reale le proprietà in (3.1) restano valide; valgono inoltre le seguenti due proprietà di 'monotonia': uno, se la base è > 1, al crescere dell'esponente cresce il risultato; due, se l'esponente è > 0, al crescere della base cresce il risultato. In altre parole, per $x, y > 0$ e $v, z \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$x^z y^z = (xy)^z \quad x^v x^z = x^{v+z} \quad (x^v)^z = x^{vz} \tag{5.9}$$

$$\text{per } x > 1: \quad v < z \Rightarrow x^v < x^z \tag{5.10}$$

$$\text{per } z > 0: \quad x < y \Rightarrow x^z < y^z. \tag{5.11}$$

Nota che dalle prime due uguaglianze di (5.9) segue in particolare che per ogni $x > 0, z \in \mathbb{R}$ è $x^{-z} = 1/x^z = (1/x)^z$. Altra cosa da osservare: che succede nella (5.10) se $0 < x < 1$, e nella (5.11) se $z < 0$? Esercizio (importante); intanto, nella figura 11 ci sono i grafici di $f(x) = 1/x$ ed $f(x) = 1/x^2$.

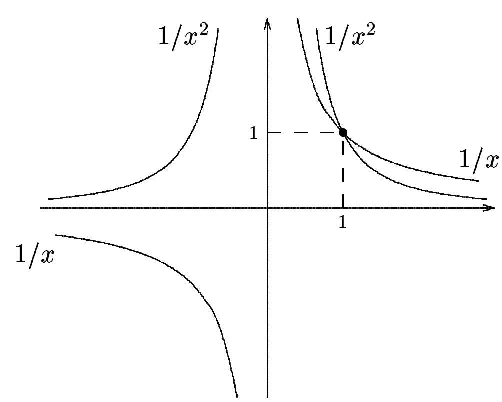


FIGURA 11. Grafici di $f(x) = 1/x$ ed $f(x) = 1/x^2$.

Guardiamo ora a (5.10) e (5.11) come risultati su funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Nella (5.10) varia l'esponente, quindi cambiamo lettere e usiamo x per l'esponente e, per esempio, a per la base; il risultato dice: per $a > 1$, la *funzione esponenziale* $x \mapsto a^x$ (con dominio tutto $\mathbb{R}$) cresce con x. Nella (5.11) varia la base, quindi usiamo x per la base e, per esempio, α per l'esponente; il risultato è: per $\alpha > 0$, la *funzione potenza* $x \mapsto x^\alpha$ (con dominio $\mathbb{R}_+$) cresce con x. Della crescenza delle funzioni potenza con esponente positivo abbiamo già visto due esempi, x^n e $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (vai a rivedere la figura 10). Nella figura 12 riportiamo il grafico tipico di $f(x) = a^x$

con $a > 1$, e (a destra) quello con $a < 1$; di quest'ultimo la decrescenza la possiamo dedurre facilmente dalla crescenza nel caso $a > 1$ (esercizio!).

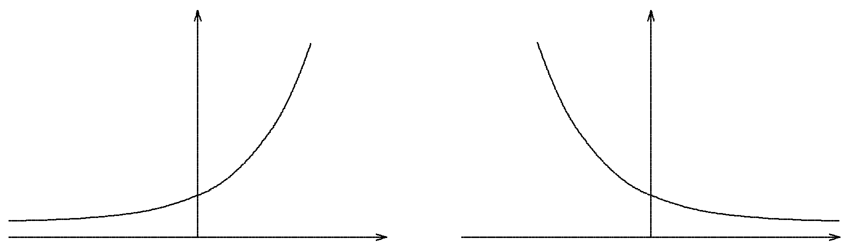


Grafico di a^x, $a > 1$ Grafico di a^x, $a < 1$

FIGURA 12

Dimostrazioni di (5.9)-(5.11). Le (5.9) si dimostrano facilmente usando i risultati sulle successioni, cosa che faremo a suo tempo; quindi quelle che seguono sono in effetti superflue; fai solo le (5.10) e (5.11).

Con r, s, t indicheremo razionali. Per $x^z y^z = (xy)^z$, cominciamo col supporre $x, y > 1$. Allora poichè per ogni $r \le z$ è $(xy)^r = x^r y^r \le \sup_{r\le z} x^r \cdot \sup_{r\le z} y^r = x^z y^z$, sarà anche $(xy)^z = \sup_{r\le z}(xy)^r \le x^z y^z$ (ricorda l'esempio 4.1(d)). D'altra parte per ogni fissato $r \le z$ è $x^r y^r = (xy)^r \le \sup_{r\le z}(xy)^r = (xy)^z$, dunque $x^r \cdot \sup_{r\le z} y^r \le (xy)^z$ cioè $x^r \le (xy)^z \cdot (y^z)^{-1}$, quindi anche $x^z = \sup_{r\le z} x^r \le (xy)^z \cdot (y^z)^{-1}$ cioè $x^z y^z \le (xy)^z$. Sicchè $x^z y^z = (xy)^z$ se $x, y > 1$; i casi con $x, y \not> 1$ nell'esercizio.

Per $x^v x^z = x^{v+z}$ supponiamo $x > 1$. Conviene osservare preliminarmente che: per $x > 1$ è $\sup_{r\le z} x^r = \sup_{r<z} x^r$ (se $z \notin \mathbb{Q}$ è chiaro; e se $z \in \mathbb{Q}$ segue dal fatto —visto dimostrando $\sup D = \inf E$ poco sopra— che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $r < z$ con $x^r > x^z - \epsilon$). Dato ciò, per ogni $r < v$, $s < z$ è $r + s < v + z$ quindi $x^r x^s = x^{r+s} \le \sup_{t<v+z} x^t = x^{v+z}$ sicchè anche $x^v x^z = \sup_{r<v} x^r \cdot \sup_{s<z} x^s \le x^{v+z}$. D'altra parte (esercizio) per ogni $t < v + z$ esistono $r < v$ ed $s < z$ con $r + s > t$ quindi con $x^r x^s > x^t$, e da ciò segue $x^v x^z \ge x^{v+z}$. Il caso $0 < x < 1$ nell'esercizio.

L'ultima delle (5.9). Primo, per $s \in \mathbb{Q}$, $x^{vs} = (x^v)^s$: ciò vale per $s \in \mathbb{N}$ per induzione (usando la prima delle (5.9)); per $s = 1/n$ usando questo e l'unicità della radice (di x^v); e per $s = -n$, $n \in \mathbb{N}_+$ usando $x^{-n} = 1/x^n$; quindi per $s = m/n, n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, cioè per ogni $s \in \mathbb{Q}$, come asserito. Supponiamo ora $x > 1$ e $v > 0$. Per tali valori è $x^{vz} = \sup_{s\le z} x^{vs}$ (esercizio). Allora, usando quanto appena dimostrato e il fatto che per $x > 1$ e $v > 0$ è $x^v > 1$, risulta $x^{vz} = \sup_{s\le z} x^{vs} = \sup_{s\le z}(x^v)^s = (x^v)^z$. I casi con $v < 0$ ed $0 < x < 1$ nell'esercizio.

(5.10): $x^z - x^v = x^v(x^{z-v} - 1) > 0 \Leftrightarrow x^{z-v} > 1$ (usando la seconda delle (5.9)). Quest'ultima dice che un numero maggiore di 1 elevato ad un numero positivo è maggiore di 1, fatto subito dopo la definizione di x^z (pag. pagerefxz).

(5.11): dalla prima delle (5.9), $y^z = x^z \cdot (y/x)^z$; per (5.10), $y/x > 1$ e $z > 0 \Rightarrow (y/x)^z > (y/x)^0 = 1$; moltiplicando questa per $x^z > 0$ si ottiene a sinistra y^z ed a destra x^z. □

Passiamo ora ai logaritmi. Fissata una base a con $0 < a \ne 1$, il logaritmo di x in base a è *l'esponente* che bisogna dare ad a per ottenere x —se esiste. Per esempio se $x \le 0$ non esiste, perchè il risultato della potenza è positivo; stabiliremo ora che se $x > 0$ tale esponente esiste.

PROPOSIZIONE. Per $0 < a \ne 1$, $\sup\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = \infty$, $\inf\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

Dimostrazione. Sia $a > 1$. Preso $M \in \mathbb{R}_+$, da trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x > M$; basta trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n > M$; ma per Bernoulli $a^n \ge 1 + n(a - 1)$, che è $> M$ per n sufficientemente grande (perchè $a > 1$). Preso poi $\epsilon > 0$, da trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x < \epsilon$; questa è equivalente ad $a^{-x} > \epsilon^{-1}$; dunque basta prendere z tale che $a^z > \epsilon^{-1}$ e porre $x = -z$.

Sia ora $0 < a < 1$. Poichè $a^x = (1/a)^{-x}$ ed $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$, riesce $\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = \{(1/a)^x : x \in \mathbb{R}\}$; da ciò il risultato. □

TEOREMA (Esistenza del Logaritmo). Sia $0 < a \neq 1$. Per ogni $x > 0$ esiste unico y tale che $a^y = x$. Tale y si indica con $\log_a x$ (dunque per definizione $a^{\log_a x} = x$).

Dimostrazione. E' simile a quella dell'esistenza della radice. Sia $a > 1$. Se y tale che $a^y = x$ esiste è unico, perchè a^y cresce con y. Per dimostrare che esiste considera l'insieme $A = \{z \in \mathbb{R} : a^z \leq x\}$. Poichè $\inf\{a^z : z \in \mathbb{R}\} = 0$ esiste z tale che $a^z < x$, quindi A non è vuoto; poichè $\sup\{a^z : z \in \mathbb{R}\} = \infty$ esiste z tale che $a^z > x$, e per la crescenza di a^z tale z è maggiorante di A, che è dunque limitato superiormente; conclusione: esiste $\sup A \equiv y$. Vogliamo dimostrare che $a^y = x$. Supponiamo $a^y < x$ e cerchiamo un n tale che $a^{y+1/n} < x$ per contraddire il fatto che $y = \sup A$. $a^{y+1/n} = a^y a^{1/n}$; applicando Bernoulli ad $a^{1/n}$ troviamo $a \geq 1 + n(a^{1/n} - 1)$ cioè $a^{1/n} \leq 1 + (a-1)/n$; quindi $a^{y+1/n} \leq a^y(1 + (a-1)/n)$, e quest'ultimo è minore di x se $a^y(a-1)/n < x - a^y$ cioè se $n > a^y(a-1)/(x - a^y)$; il che è vero per n grande abbastanza. Analogamente, non può essere $a^y > x$.

Sia ora $0 < a < 1$. Esiste y tale che $(1/a)^y = x$; $-y$ è il numero cercato. □

Per familiarizzare con questo oggetto osserviamo intanto che $a^0 = 1$, dunque: $\log_a 1 = 0$. Inoltre, la funzione $x \mapsto \log_a x$ (con dominio $\mathbb{R}_+$) cresce con x se $a > 1$, decresce se $0 < a < 1$. Infatti, se $a > 1$ ed $x_1 < x_2$, da $a^{\log_a x_1} = x_1 < x_2 = a^{\log_a x_2}$ segue $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (perchè $v \geq z \Rightarrow a^v \geq a^z$); per $0 < a < 1$ la decrescenza di $\log_a x$ segue in modo analogo da quella di a^x. Vediamo i grafici nella figura 13.

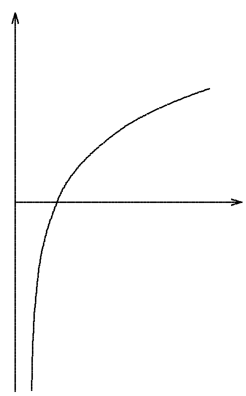


Grafico di $\log_a x$, $a > 1$

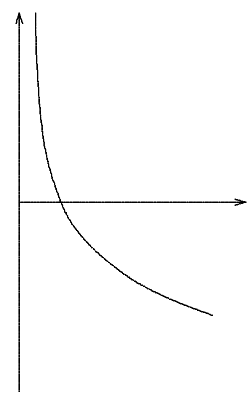


Grafico di $\log_a x$, $a < 1$

FIGURA 13

Proprietà algebriche che si usano sempre ($0 < a, b \neq 1$, $x, y > 0$, $v \in \mathbb{R}$):

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^v = v \log_a x \quad \log_a x = \log_a b \log_b x. \tag{5.12}$$

Nota che dalle prime due segue $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$; la terza è la cosiddetta 'formula del cambio di base'; da essa segue $\log_a b = 1/\log_b a$ (usando $\log_a a = 1$), quindi può anche essere (e spesso è) scritta come $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Le dimostrazioni usano (5.9) e (5.10) (di quest'ultima in particolare la conseguenza $a^w = a^z \Rightarrow w = z$). La prima segue da $a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$; la seconda da $a^{\log_a x^v} = x^v = (a^{\log_a x})^v = a^{v \log_a x}$; la terza da $\log_a x = \log_a b^{\log_b x} = \log_b x \log_a b$.

Esiste una base 'naturale' dei logaritmi, con la quale converrà lavorare più avanti, il cosidetto *numero di Nepero*, indicato con e e compreso fra 2 e 3 (quindi maggiore di 1). Il logaritmo in base e si indica con log o con ln.

Notiamo per chiudere che $a^{\log_a x} = x$ (o $\log_a a^x = x$) dice che le funzioni $x \mapsto a^x$ ed $x \mapsto \log_a x$ sono *inverse* l'una dell'altra. A che siamo in argomento, notiamo che allo stesso modo l'uguaglianza $\sqrt[n]{x^n} = x$ (o la $(\sqrt[n]{x})^n = x$, valide per $x > 0$) dice che le funzioni $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ed $x \mapsto x^n$ sono inverse l'una dell'altra.

ESERCIZI

5.8. Cosa succede nella (5.10) se $0 < x < 1$? E nella (5.11) se $z < 0$?

5.9. Sia $x > 1$, $z \in \mathbb{R}$. Dimostra che una definizione equivalente di x^z è

$$x^z = \sup\{x^r : r < z,\ r \in \mathbb{Q}\}.$$

Cioè, dimostra che $\sup\{x^r : r \leq z,\ r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{x^r : r < z,\ r \in \mathbb{Q}\}$. [47]

5.10. Completiamo qui le dimostrazioni di (5.9)-(5.11).

(i) Per $x^z y^z = (xy)^z$ fai separatamente (a) $0 < x, y < 1$; (b) $0 < x < 1$, $y > 1$ con $xy < 1$ (scrivendo $y^z = (xy \cdot x^{-1})^z = \ldots$); (c) $0 < x < 1$, $y > 1$ con $xy > 1$ (scrivendo $x^z = (xy \cdot y^{-1})^z = \ldots$). Se $x = 1$ o $y = 1$ la cosa è evidente.

(ii) Finisci $x^v x^z = x^{v+z}$.

(iii) Finisci la (5.10) (osserva che poichè $z - v > 0$ esistono r con $0 < r < z - v$, e usa il fatto che per tali r è $x^r > 1$ —perchè $x > 1$).

(iv) Dimostra che per $x > 1, v > 0$ risulta $x^{vz} = \sup_{s \leq z} x^{vs}$. Per concludere la (5.11) considera: (a) $x > 1$, $z < 0$ (scrivendo $vz = (-v) \cdot (-z)$); (b) $0 < x < 1$.

5.11. Supponi $1 < a < b$. Per quali $x > 0$ risulta $\log_a x < \log_b x$? (Per $0 < x < 1$).

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Linee guida: le esponenziali hanno l'incognita ad esponente, e si risolvono prendendo i logaritmi; le logaritmiche hanno l'incognita come argomento di logaritmo, e si risolvono mettendo tutto ad esponente. Qui sotto sono riportate le fondamentali; *nota* che nelle disequazioni bisogna distinguere se la base (della potenza o del logaritmo) è maggiore o minore di 1. Per $0 < a \neq 1$:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \tag{5.13}$$

$$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b \tag{5.14}$$

$$a^x < b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} x < \log_a b & \text{se } a > 1 \\ x > \log_a b & \text{se } 0 < a < 1 \end{array} \tag{5.15}$$

$$\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 0 < x < a^b & \text{se } a > 1 \\ x > a^b & \text{se } 0 < a < 1. \end{array} \tag{5.16}$$

Nella figura 14 è disegnato il caso $a^x > b$ con $a < 1$. Paragonando questa con il disegno del caso con $a > 1$ si vede bene perchè *la stessa* disequazione ha soluzioni così diverse: perchè la stessa funzione a^x cresce se $a > 1$, decresce se $a < 1$. E' esercizio facile e necessario disegnare anche $a^x < b$ e quelle con i logaritmi (per esempio c'è da disegnare giusta la soluzione di $\log_a x < b$ con $a > 1$, che è l'intervallo $(0, a^b)$, non tutto $(-\infty, a^b)$).

A questo stadio dovrebbe essere superfluo sottolineare che il più delle volte non è x, ma una qualche $f(x)$ che si presenta (esempio, $a^{3x-1} = b \Leftrightarrow 3x-1 = \log_a b \Leftrightarrow x = (1+\log_a b)/3$). E' inoltre facile esercizio ricavare le equivalenze per le disuguaglianze $a^x > b$ e $\log_a x > b$ e per le forme deboli (nota che se $b \leq 0$, $a^x > b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

[47] Soluzione: Se $z \notin \mathbb{Q}$ i due insiemi di cui si prende il sup sono uguali, quindi fine. Per $z \in \mathbb{Q}$ il primo membro è il 'vecchio' x^z con $z \in \mathbb{Q}$, quindi c'è da dimostrare che $\sup\{x^r : r < z,\ r \in \mathbb{Q}\} = x^z$; chiaramente x^z è un maggiorante dell'insieme a sinistra, quindi resta da verificare la seconda proprietà del sup: dato $\epsilon > 0$, vogliamo un razionale $r < z$ tale che $x^r > x^z - \epsilon$ cioè $x^z - x^r < \epsilon$; ma per $n \in \mathbb{N}^+$, Bernoulli dà $x^{1/n} - 1 \leq (x-1)/n$; allora prendi r con $z - r < 1/n$, così (usando le regole sulle potenze ad esponente razionale) $x^z - x^r = x^r(x^{z-r} - 1) < x^r(x^{1/n} - 1) \leq x^r(x-1)/n < x^z(x-1)/n$; e fissa $n > x^z(x-1)/\epsilon$, così $x^z(x-1)/n < \epsilon$.

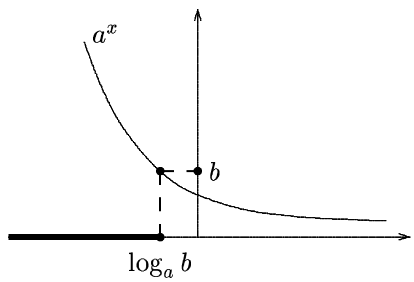


FIGURA 14. In grassetto la soluzione di $a^x > b$, $0 < a < 1$.

ESEMPI 5.3. **(a)** $2^{x^2-5x+9} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+9} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Leftrightarrow x = 2, 3$.

(b) $9^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x-3}} = 3^5 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}+\sqrt{x-3}} = 3^5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 5$, risolta da $x = 4$.

(c) $\log_2(\sqrt{x} - 2) + \log_2(\sqrt{x} + 2) = \frac{1}{2}\log_2(x - \sqrt{3}) + \log_2 \sqrt{x + \sqrt{3}}$. Intanto perchè queste espressioni siano ben definite deve essere $x > 4$. Per tali valori, osservando che $\frac{1}{2}\log_a z = \log_a \sqrt{z}$, che $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ e che $\log_2 v = \log_2 z \Leftrightarrow v = z$, si vede che l'equazione è equivalente a $x - 4 = \sqrt{x^2 - 3}$; nel sistema formato da questa ed $x > 4$ si può elevare al quadrato (perchè è tutto positivo), e si trove facilmente che non ci sono soluzioni.

(d) $2\log_3 x = 9\log_x 9$. Cambiamo base nel secondo membro: $9\log_x 9 = 9\log_x 3 \cdot \log_3 9 = 18\log_x 3 = 18/\log_3 x$; dunque la nostra equazione può essere scritta come $(\log_3 x)^2 = 9$, equivalente a $\log_3 x = \pm 3$, risolta da $x = 3^{\pm 3}$ cioè $x = 27, 1/27$.

(e) $x^{x^2-7x+12} = 1$. La via 'elegante' è questa: 1 elevato a qualunque numero dà 1, quindi $x = 1$ è soluzione; se $0 < x \neq 1$, perchè la potenza dia 1 l'esponente deve essere zero, quindi le altre soluzioni sono le soluzioni positive di $x^2 - 7x + 12 = 0$, che sono $x = 3$ ed $x = 4$. Se non si vede questa strada, si prenda il logaritmo in una base qualunque di entrambi i membri, ottenendo $(x^2 - 7x + 12) \cdot \log_a x = 0$, che dà le stesse soluzioni.

(f) $5^{x-1} = 2 + 3/5^{x-2}$. Levando il denominatore, portando tutto a primo membro e poi moltiplicando per 5^3 otteniamo una equazione di secondo grado in 5^x, con le equivalenze: $\Leftrightarrow 5^{(x-1)+(x-2)} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3 \Leftrightarrow 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 10 \cdot 5^x - 375 = 0 \Leftrightarrow 5^x = -15$ o $5^x = 25$; la prima di queste non ha soluzioni (potenza sempre positiva), la seconda dà $x = \log_5 25 = 2$, che è la soluzione cercata.

(g) $\log_a x = a$. Mettendo ad esponente di a entrambi i membri si ottiene $x = a^a$.

(h) $\ln|\ln x| = 0$. Il logaritmo è zero quando l'argomento è 1, dunque: $\Leftrightarrow |\ln x| = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x = e^{\pm 1}$; quindi le soluzioni sono $x = e, 1/e$.

(k) $\log_{1/2}(x^2 - 3x + 2) > -2 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 3x + 2 < (1/2)^{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x \in (\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1) \cup (2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

(i) Discutere, per $0 < a \neq 1$, $\log_a \frac{x-5}{x+7} > 0$. Innanzitutto la frazione deve essere > 0, cioè $x < -7$ o $x > 5$. Per tali valori: se $a > 1$ la disequazione è equivalente ad $\frac{x-5}{x+7} > 1$, risolta da $x < -7$; se $0 < a < 1$ a $0 < \frac{x-5}{x+7} < 1$, risolta da $x > 5$.

(j) $\ln x < \ln(x^2 - 1)$. Ben definita per $x > 0$ ed $x^2 - 1 > 0$, cioè per $x > 1$; dunque equivalente al sistema $x > 1$, $x < x^2 - 1$, con soluzione $x > (1 + \sqrt{5})/2$.

(l) $\ln x < \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{x^2 - 1} \\ x > 1 \end{cases}$, che non ha soluzioni.

(m) $\log_5(\log_{1/5}(2x-1)) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ \log_{1/5}(2x-1)>0 \\ \log_{1/5}(2x-1)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ 0<2x-1<1 \\ 2x-1>1/5 \end{cases}$,
sisema risolto da $3/5 < x < 1$.

(n) $e^{x^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq \ln 2 \Leftrightarrow -\sqrt{\ln 2} \leq x \leq \sqrt{\ln 2}$. Nota che $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

(o) $|\ln x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow e^{-1} \leq x \leq e$.

(p) $\ln|x| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \leq e \end{cases} \Leftrightarrow -e \leq x < 0$ o $0 < x \leq e$.

(q) $|3^{2x} - 3^x| < 2 \Leftrightarrow -2 < (3^x)^2 - 3^x < 2$; in questo sistema la prima è valida per ogni x, la seconda per $-1 < 3^x < 2$ cioè per $x < \log_3 2$, che sono dunque le x che risolvono la disequazione data.

(r) La disequazione $\ln(x-2) < \sqrt{1+\ln(x-2)}$ è equivalente al sistema $x-2 > 0$, $1+\ln(x-2) \geq 0$ e $\ln(x-2) < \sqrt{1+\ln(x-2)}$, per il quale abbiamo in sequenza le equivalenze:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 1/e \\ \ln(x-2) < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-2 \geq 1 \\ \ln^2(x-2) < 1+\ln(x-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 1/e \\ 0 < x-2 < 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-2 \geq 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \ln(x-2) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1/e \leq x < 1 \text{ oppure } \begin{cases} x-2 \geq 1 \\ e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} < x-2 < e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1/e + 2 \leq x < 3 \text{ oppure } 3 \leq x < 2 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Poichè $e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} < 1$ (da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$), la soluzione è dunque $2 + e^{-1} \leq x < 2 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

(s) $x^{\log_2 x} \geq 16$. Deve essere $x > 0$. Per tali valori: $\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x} \geq \log_2 16 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2 x \leq -2$ o $\log_2 x \geq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1/4$ o $x \geq 4$.

(t) (Stampacchia) Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $e^x + \alpha^2 e^{-x} = 4\alpha$ ha soluzioni. Primo, $\alpha \neq 0$. Poi moltiplica per e^x, ottenendo $(e^x)^2 - 4\alpha e^x + \alpha^2 = 0$; ponendo $z = e^x$, cerchiamo α tali che $z^2 - 4\alpha z + \alpha^2 = 0$ ha soluzioni positive. Le soluzioni di questa sono $z = 2\alpha \pm |\alpha|\sqrt{3} = \alpha(2 \pm \frac{|\alpha|}{\alpha}\sqrt{3}) = \begin{cases} \alpha(2 \pm \sqrt{3}) & \text{se } \alpha > 0 \\ \alpha(2 \mp \sqrt{3}) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$. Poichè sia $2+\sqrt{3}$ che $2-\sqrt{3}$ sono positivi, se $\alpha < 0$ entrambe le z sono negative (e non va bene); se $\alpha > 0$ entrambe sono positive (e va bene). In conclusione, l'equazione data ha soluzioni se $\alpha > 0$, date da $x = \ln \alpha(2 \pm \sqrt{3})$.

ESERCIZI

5.12. Studia (i) $a^x = b$ per $a = 1$; e per $0 < a \neq 1$, (ii) $a^x > b$, (iii) $\log_a x > b$, (iii) $\log_a x \geq b$.

5.13. Risolvi:

(*i*) $\log_{1/2}(3x+2) - \log_{1/4}(4x-3) = \log_{1/2} 5$	(*ii*) $(\ln x)^2 = 2$
(*iii*) $\ln(1-x) + \ln(2-x) + \ln(4+x) > \ln(x^3+47)$	(*iv*) $3^{1+x} + (1/3)^{-x} < 36$
(*v*) $\log_a(3^{2x}+7) - \log_a(3^x+1) = \log_a 4$	(*vi*) $(1/10)^x < 1/1000$
(*vii*) $3\log_{1/3}(x-1)^2 = \log_{1/3}(x-1) - 10$	(*viii*) $e^{-2x} = 2$
(*ix*) $3^x + \frac{1}{3 \cdot 3^x} > \frac{28}{9}$	(*x*) $e^{\lvert x \rvert} = 1/3$

(xi) $\log_{1/10}(x-\sqrt{1-x}) > \log_{1/10} 2$

(xii) $2^{2x+1} - 2^x - 1 \geq 0$

$(xiii)$ $(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 2 \geq 0$

(xiv) $9^x - 3^x - 2 > 0$

(xv) $2^{x+1} + 8/2^x > 17$

(xvi) $\frac{e^x-1}{e^x-2} > e^x$

$(xvii)$ $\ln|x+1| + \ln|x-3| < 1$

$(xviii)$ $\ln(x^2+x) < 1$

(xix) $\frac{1-\ln x}{x} > 0$

(xx) $x(e^x-1) \geq 0$

(xxi) $x^2 \ln x^2 < 0$

$(xxii)$ $x^2 \ln^2 x > 0$

$(xxiii)$ $|1-\ln x| \leq 1$

$(xxiv)$ $\frac{\ln(|x|-2)}{x} < 0$

(xxv) $\log_x a = 2\log_{10} a$ $(0 < a, x \neq 1)$

ANTICIPO DI GEOMETRIA: DISTANZA IN $\mathbb{R}^2$ E CIRCONFERENZA

Ricorda che $\mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, che abbiamo rappresentato sul piano (pag. 10). Si definisce **distanza** fra $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ $(P_i = (x_i, y_i), i = 1,2)$ ponendo

$$\operatorname{dist}(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2},$$

la cui interpretazione geometrica —in accordo con il teorema di Pitagora— è che $\operatorname{dist}(P_1,P_2)$ è la lunghezza del segmento che unisce P_1 e P_2 (figura 15). Nota che se $y_1 = y_2 = 0$, $\operatorname{dist}(P_1,P_2) = |x_1-x_2|$, la distanza fra due elementi di $\mathbb{R}$ (pag. 23).

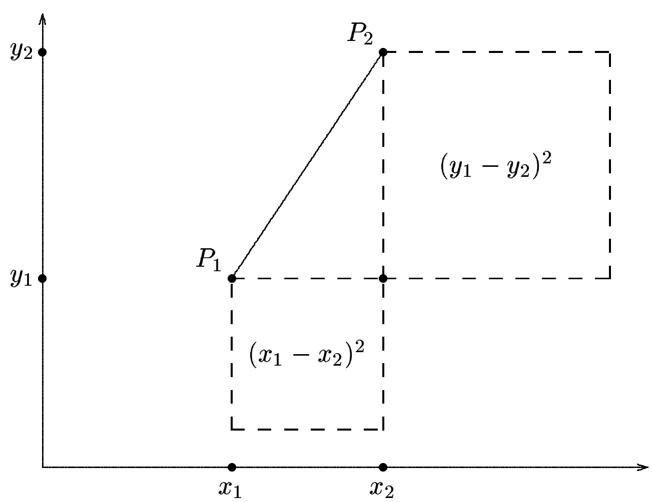


FIGURA 15. Distanza in $\mathbb{R}^2$ e il teorema di Pitagora.

La **circonferenza** di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio $r > 0$, $\mathcal{C}(C,r)$, è definita come l'insieme $\{P \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(P,C) = r\} = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$. Geometricamente è la figura tracciata sul piano da un estremo di un segmento di lunghezza r che ruota intorno al suo altro estremo (nella figura 16 ce n'è due). La seguente proposizione caratterizza le circonferenze analiticamente, come insiemi soluzione di un tipo di equazioni:

PROPOSIZIONE. Un insieme di $\mathbb{R}^2$ è una circonferenza se e solo se è insieme soluzione di una equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Dimostrazione. Che una circonferenza è l'insieme soluzione di una equazione di questo tipo si vede sviluppando i quadrati nella definizione e raggruppando i termini; il viceversa completando i quadrati. $\square$

Nota $a^2 + b^2 - 4c > 0$ (se ≤ 0 la soluzione è un punto o l'insieme vuoto). Una circonferenza è determinata da centro e raggio; negli esercizi si devono trovare partendo dalle informazioni date.

ESEMPI 5.4. **(a)** Per determinare centro e raggio di $x^2 + y^2 + 5x = 0$, completando i quadrati si ottiene $C = (-5/2, 0), r = 5/2$.

(b) Per scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(2, -1/2)$ passante per $(1, 5)$ vogliamo r che possiamo calcolare: $r = \sqrt{(1-2)^2 + (5+1/2)^2}$.

(c) $\mathcal{C}(0,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Se $(x', y') \in \mathcal{C}(0,r)$ risulta $(x')^2 + (y')^2 = r^2$ dunque $(x'/r)^2 + (y'/r)^2 = 1$, sicchè $(x', y') \in \mathcal{C}(0,r) \Leftrightarrow (x', y') = (rx, ry)$ con $(x,y) \in \mathcal{C}(0,1)$; vedi figura 16.

(d) Per ogni coppia di punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathcal{C}((x_0, y_0), r)$ risulta $d(P_1, P_2) \leq 2r$. Per vederlo osserva che $d^2(P_1, P_2) = [(x_1 - x_0) + (x_0 - x_2)]^2 + [(y_1 - y_0) + (y_0 - y_2)]^2 \leq 4r^2$ usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Inoltre, esistono $P_1, P_2 \in \mathcal{C}((x_0, y_0), r)$ con $d(P_1, P_2) = 2r$ (per esempio?).

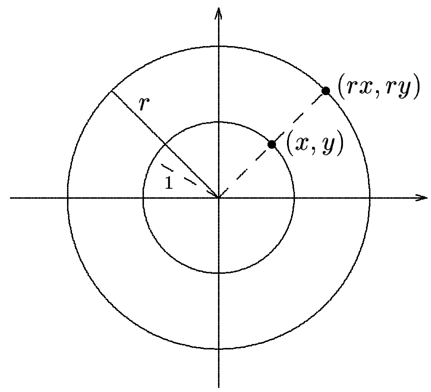


FIGURA 16. Le circonferenze $\mathcal{C}(0,1)$ e $\mathcal{C}(0,r)$.

TRIGONOMETRIA 'INTUITIVA'

L'aggettivo 'intuitivo' qui significa 'non rigoroso', cioè non fondato su assiomi; il motivo di questa qualificazione è che in questa sezione definiremo oggetti servendoci in modo essenziale del piano e delle sue proprietà, che noi *non* abbiamo definito rigorosamente. In effetti, rileggendo quanto scritto sul piano a proposito della rappresentazione di $\mathbb{R}^2$ (pagina 10) ci si accorge che abbiamo usato concetti non definiti formalmente e proprietà non dimostrate: abbiamo implicitamente assunto che il piano è un insieme, che contiene punti e rette; abbiamo parlato di rette perpendicolari, ma che vuol dire 'perpendicolari' non l'abbiamo detto; e abbiamo usato le proprietà che due rette perpendicolari si incontrano in uno ed un solo punto, e che per un punto passa una ed una sola perpendicolare ad una retta data. Tanto per saperlo, si possono mettere questi concetti su basi assiomatiche e ricavare le proprietà come conseguenze: oltre alla definizione di piano come insieme contenente punti e di retta come insieme di punti, i concetti importanti da definire restano quelli di perpendicolarità come relazione fra rette e di 'rotazione' di una retta intorno ad un suo punto; dopodichè due rette r ed r' saranno perpendicolari se per passare da r ad r' e da r' ad r ci vuole la stessa rotazione. Noi non perseguiremo questa strada perchè le funzioni da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ che definiremo qui *possono* essere definite sulla base dei soli assioni su $\mathbb{R}$ e loro conseguenze (e vedremo come). Però per farlo c'è da saperne di più di quanto ne sappiamo adesso; vedremo subito le cose che ci interessano per poterci lavorare costruendole sul piano, consapevoli che la costruzione rigorosa esiste e porta agli stessi risultati.

Allora lavoriamo sul piano, fissiamo un sistema di due rette perpendicolari disegnandole come abbiamo sempre saputo fare, e tracciamo in questo sistema una circonferenza di centro origine e raggio 1. [48] Questa circonferenza ha una lunghezza —anche questo accettiamolo e basta— uguale a 2π, dove π è un numero (irrazionale) vicino a 3.14. Volendo considerare spostamenti di un punto lungo la circonferenza fissiamo su essa il punto $(1,0)$ come origine degli spostamenti e la direzione antioraria come direzione positiva. [49] Per esempio facendo un giro completo in senso antiorario si fa uno spostamento di 2π e si finisce al punto di partenza; facendo un giro completo in senso orario si finisce allo stesso punto ma lo spostamento è di -2π. Definiamo **angolo** semplicemente come uno spostamento sulla circonferenza, e la sua misura come la lunghezza dello spostamento. Per esempio un angolo di -3π è uno spostamento di un giro e mezzo in senso orario, che finisce nel punto $(-1,0)$. La somma di angoli è definita come somma di spostamenti. Nel seguito diremo 'l'angolo α' per abbreviare 'l'angolo di misura α' ($\alpha \in \mathbb{R}$). [50]

L'unità di misura naturale per gli angoli è quella che abbiamo usato finora, derivante dall'unità di misura sugli assi (in cui è espressa la lunghezza della circonferenza). Questa unità di misura si chiama *radiante*. L'altra più comunemente usata è quella del *grado*, tale che un angolo di 2π radianti (un giro completo) misura 360 gradi —scritto 360^o. Da una unità all'altra si passa come in ogni trasformazione di unità (tipo da centimetro a metro, da dollaro a lira ecc.), che in generale è questo: fissato un oggetto di misurazione (pensiamo per esempio all'altezza sul livello del mare), U_1 ed U_2 sono due unità di misura di questo oggetto (per es. centimetri e metri) se esiste una costante non nulla $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, se una certa grandezza misura $x\,U_1$ la stessa misurerà $cx\,U_2$; se U_1 ed U_2 hanno questa proprietà basta una misurazione (non zero) per trovare c: se viene $x\,U_1$ ed $y\,U_2$, da $y = cx$ si ricava $c = y/x$. Tornando agli angoli, date le unità di misura U_1 = radianti ed U_2 = gradi, poichè un giro di circonferenza in senso positivo misura 2π radianti e 360 gradi è $c = 180/\pi$; sicchè per esempio l'angolo di $\pi/2$ radianti misura 90^o, quello di π radianti misura 180^o, ecc. Chiaramente per passare dai gradi ai radianti si deve moltiplicare per $1/c = \pi/180$. L'unità di misura *sottintesa* sarà sempre il radiante.

Usiamo adesso le prime lettere dell'alfabeto greco, α, β, γ ecc. per indicare misure di angoli, riservando x ed y per le ascisse e ordinate di punti sul piano; e indichiamo con $P(\alpha) \equiv (x(\alpha), y(\alpha))$ il punto di arrivo sulla circonferenza dello spostamento di lunghezza $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ (cioè il punto di arrivo dell'angolo α). Per esempio $P(0) = (1,0)$ (lo spostamento nullo finisce nel punto $(1,0)$ da cui parte), $P(\pi/2) = (0,1)$ (perchè $\pi/2$ è un quarto di circonferenza), ecc. Altro esempio: è chiaro che poichè uno spostamento di $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ è uno spostamento di k giri (in senso antiorario se $k > 0$, orario se $k < 0$), che arriva al punto di partenza, per ogni α risulta $P(\alpha + 2k\pi) = P(\alpha)$, perchè lo spostamento di $\alpha + 2k\pi$ è quello di α —che arriva in $P(\alpha)$— seguito da k giri, con arrivo ancora in $P(\alpha)$. Nella figura 17 a sinistra sono segnati alcuni angoli che si usano sempre. Fra breve ne calcoleremo le coordinate.

---

[48] Anche la circonferenza: è un insieme ben definito come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, ma diventa 'intuitivo' come insieme del piano.

[49] Dato il punto di partenza $(1,0)$ è naturale fissare quella antioraria come direzione positiva, perchè così lungo la circonferenza ci si muove in avanti verso punti di coordinate positive.

[50] Un modo equivalente di vedere l'angolo è quello di pensarlo come rotazione del semiasse orizzontale positivo intorno al punto $(0,0)$. Assumendo che ogni semiretta uscente dall'origine incontra la circonferenza in uno ed un solo punto, ad ogni siffatta rotazione corrisponde uno spostamento sulla circonferenza e viceversa.

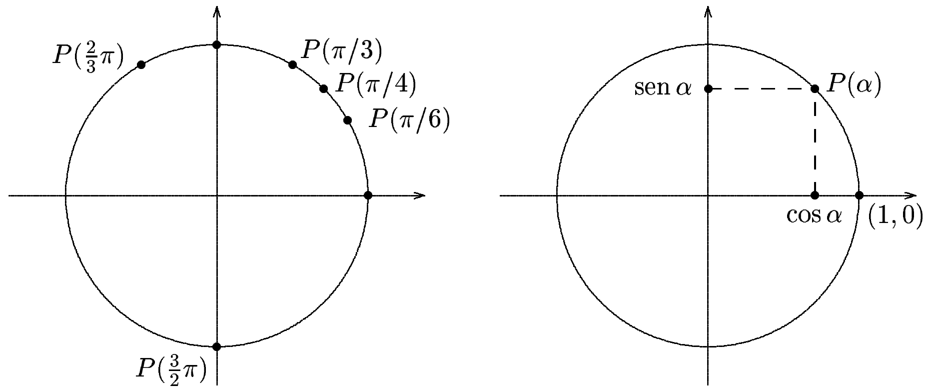


FIGURA 17. A sinistra alcuni angoli, a destra definizione di seno e coseno. La circonferenza è sempre $\mathcal{C}(0,1)$.

Le funzioni sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ —**seno** e **coseno**— sono definite come coordinate dei $P(\alpha)$ al variare di α in $\mathbb{R}$ (vedi figura 17 a destra):

$$\cos\alpha = x(\alpha), \quad \operatorname{sen}\alpha = y(\alpha), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Queste definizioni sono intrinsecamente geometriche, come avevamo anticipato; e geometricamente (cioè usando risultati di geometria, tipo teorema di Pitagora) giustificheremo adesso le proprietà fondamentali di queste funzioni. [51] Molte sono conseguenze immediate delle definizioni, in quanto proprietà delle coordinate dei $P(\alpha)$. Per esempio, abbiamo già visto $P(0) = (1,0)$ e $P(\pi/2) = (0,1)$, dunque $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\cos\pi/2 = 0, \operatorname{sen}\pi/2 = 1$; e allo stesso modo si determinano i valori di seno e coseno nei quattro punti in cui la circonferenza incontra gli assi (fallo). Abbiamo anche osservato che $P(\alpha + 2k\pi) = P(\alpha)$, dunque $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $\operatorname{sen}(\alpha+2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, che esprimono il fatto che seno e coseno sono funzioni **periodiche**, di periodo 2π. [52] Ancora, per costruzione $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. E per il teorema di Pitagora risulta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, perchè seno e coseno sono lati di un triangolo rettangolo di ipotenusa uguale al raggio della circonferenza. E' immediato stabilire il segno di seno e coseno per ogni $\alpha \in [0, 2\pi)$ esaminando i quattro quarti della circonferenza: [53] $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha > 0$ per $0 < \alpha < \pi/2$; $\cos\alpha < 0, \operatorname{sen}\alpha > 0$ per $\pi/2 < \alpha < \pi$, eccetera; e da ciò si deduce il segno di seno e coseno per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Da questo e $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ segue poi $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ per $2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi$, $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ per $(2k+1)\pi \leq \alpha \leq (2k+2)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, [54] e le analoghe per il coseno. Inoltre, crescenza e decrescenza di seno e coseno si indovinano dalla definizione, facendo girare $P(\alpha)$ sulla circonferenza.

[51] Continueremo per ora ad usare α, β ecc. perchè ci fa comodo, ma ovviamente quando vorremo ricambieremo nome all'argomento e scriveremo $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ come per le altre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[52] Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo p se p è il più piccolo numero positivo tale che per ogni $x, x+p \in D_f$ risulta $f(x+p) = f(x)$.

[53] Le quattro parti in cui è diviso il piano dagli assi si chiamano *quadranti*; il primo è per convenzione quello 'a nord-est', gli altri sono secondo terzo e quarto continuando in senso antiorario.

[54] In trigonometria sarà sempre $k \in \mathbb{Z}$ salvo specificazione del contrario.

Esaminando le coordinate dei $P(\alpha)$ si ricava inoltre, per $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\
&\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\
&\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\
&\cos(\pi/2+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \quad \operatorname{sen}(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha \\
&\cos(\pi/2-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \quad \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Queste si giustificano tutte geometricamente, per esempio: si vede dalla figura 18 che $P(-\alpha) = (x(\alpha), -y(\alpha))$, da cui la prima coppia di uguaglianze; e paragonando $P(\beta)$ e $P(\beta + \frac{\pi}{2})$ si ricava la quarta coppia; le altre sono simili —le si facciano per esercizio. [55] Nelle ultime nota: per passare da seno a coseno e viceversa si usa $\pi/2$.

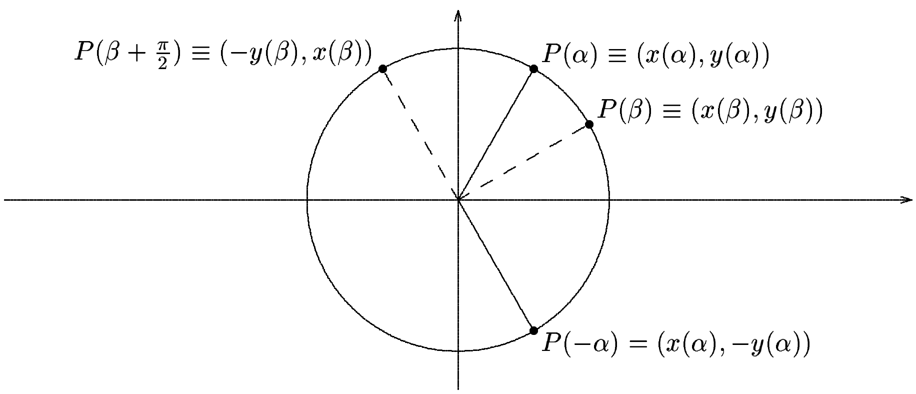


FIGURA 18

Altra osservazione: sulla circonferenza di centro 0 e raggio r ci stanno punti del tipo $(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ (dall'esempio 5.4(c)).

Nella figura 19 è riportato il grafico di $\operatorname{sen} x$; quello di $\cos x$ è lo stesso spostato orizzontalmente di $-\pi/2$ (passa per $(0,1), (\pi/2, 0)$ eccetera). Puoi dedurre quest'ultimo fatto da $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$.

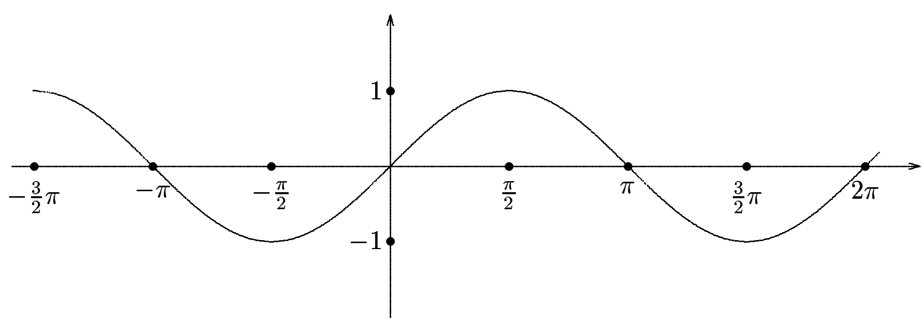


FIGURA 19. Grafico di $\operatorname{sen} x$.

La terza importante funzione trigonometrica —oltre a seno e coseno— è la **tangente**, che è il rapporto fra le prime due. Il suo dominio è costituito dagli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\cos\alpha \neq 0$, cioè da $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (giusto?). Definizione:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

[55] Tanto per ripeterci, "si vede dalla figura" non è una dimostrazione completa.

Interpretazione geometrica (vedi figura 20 sinistra): il valore di $\tan\alpha$ per $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ è l'ordinata del punto in cui la retta per 0 e $P(\alpha)$ incontra la retta tangente alla circonferenza in $(1,0)$; questo lo possiamo giustificare pensando alle proprietà dei triangoli simili. [56]

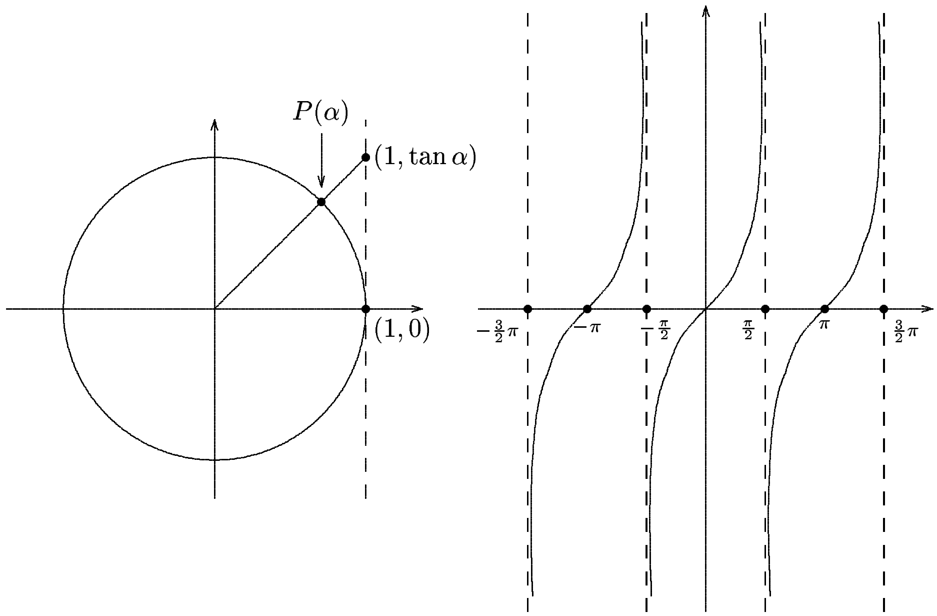


FIGURA 20. Interpretazione geometrica e grafico di $\tan x$.

Dalle (5.17) si ricavano le analoghe proprietà della tangente, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ eccetera. Inoltre, la funzione tangente è periodica di periodo π, cioè $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, perchè: se k è pari, $k = 2h$ per un $h \in \mathbb{Z}$ quindi $\tan(\alpha+k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha+2h\pi)/\cos(\alpha+2h\pi) = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha = \tan\alpha$; se k è dispari $k = 2h+1$, $h \in \mathbb{Z}$ dunque $\tan(\alpha+k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha+(2h+1)\pi)/\cos(\alpha+(2h+1)\pi) = (-\operatorname{sen}\alpha)/(-\cos\alpha) = \tan\alpha$ (giusto?). Il grafico della tangente è riportato nella figura 20 (la crescenza si ricava dalla crescenza e decrescenza di seno e coseno). [57]

Poichè la periodicità delle funzioni trigonometriche è la loro caratteristica più importante ci eserciteremo un pò su questo concetto nei seguenti esempi, nei quali considereremo per abbreviare funzioni con dominio tutto $\mathbb{R}$. Ricorda che la definizione di periodicità è in nota a pagina 54.

ESEMPI 5.5. **(a)** Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f periodica di periodo p, la funzione composta $g \circ f$ è periodica di periodo $\leq p$ (perchè $f(x+p) = f(x)$ quindi $g \circ f(x+p) = g(f(x+p)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$). Se g è iniettiva il periodo di $g \circ f$ è esattamente p —giusto?

(b) La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha effettivamente periodo $p = 2\pi$. Perchè se $0 < q < 2\pi$ possiamo trovare x tale che $\operatorname{sen}(x+q) \neq \operatorname{sen} x$ (no? trova tali x, separatamente per $0 < q \leq \pi$ e per $\pi < q < 2\pi$). Discorso analogo per $\cos x$ e $\tan x$.

(c) Se f ha periodo p, sarà $f(x+kp) = f(x)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Dimostrazione: per $k \in \mathbb{N}$ facile per induzione; dato questo, se $k = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x - np + np) = f(x - np) = f(x + kp)$.

[56] Cosa sono? questa sezione è piena di buchi...

[57] Si definisce di solito anche un'altra funzione, la *cotangente*, come reciproco della tangente (cioè coseno/seno), di cui si possono facilmente studiare i fatti fondamentali; ma si usa poco, e noi ne faremo del tutto a meno.

(d) Sia $c > 0$; che periodo ha la funzione $f(x) = \operatorname{sen} cx$? Cerchiamo il minimo $p > 0$ tale che $\operatorname{sen} c(x+p) = \operatorname{sen} cx$; dunque (per l'esempio (b)) deve essere $cp = 2\pi$, cioè $p = 2\pi/c$. Per esempio $\operatorname{sen} 4x$ ha periodo $\pi/2$ (pensaci: quando x fa $1/4$ di giro, $4x$ fa un giro).

(e) Siano f_1, f_2 rispettivamente di periodo p_1, p_2. Qual è il periodo di $f_1 \cdot f_2$, f_1/f_2, o $f_1 + f_2$? E' il minimo comune multiplo dei due periodi, cioè $p = mp_1 = np_2$ con m, n minimi interi tali che $mp_1 = np_2$. Quest'ultima dà $m/n = p_2/p_1$, dunque m, n sono i due interi primi fra loro tali che $m/n = p_2/p_1$. Per esempio, la funzione $f(x) = \operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{sen} \frac{14}{3}x = f_1(x) \cdot f_2(x)$ ha $p_1 = \pi/2, p_2 = \frac{3}{7}\pi$; $p_2/p_1 = 6/7$, quindi $p = 6p_1 = 7p_2 = 3\pi$.

(f) Qual è il periodo di $f(x) = \operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{sen} \frac{14}{3}x + \tan(x/2)$? Risposta: 6π —verifica.

Per calcolare i valori delle funzioni trigonometriche e per risolvere equazioni e disequazioni che le contengono sono indispensabili le seguenti formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \;^{58} \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{5.19}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{5.20}$$

Tornerà presto utile notare che la duplicazione del coseno si può anche scrivere come $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; nelle (5.20) sarà $\operatorname{sen}(\alpha/2) = \sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$ se $\alpha/2$ è tale che $\operatorname{sen}(\alpha/2) > 0$, e $\operatorname{sen}(\alpha/2) = -\sqrt{(1-\cos\alpha)/2}$ se $\alpha/2$ è tale che $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} < 0$, e discorso analogo vale per il coseno. Le (5.20) sono spesso utili nella forma $1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2(\alpha/2)$, $1 + \cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2)$.

Dalle formule (5.18)-(5.20) si ricavano immediatamente (fallo) le corrispondenti formule per la tangente, per esempio $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ (valida per α, β tali che i denominatori non si annullano, cioè tali che $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ —giusto?).

Per giustificarle vedremo che basta fare la $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Per questa, osserva che l'arco di circonferenza da $P(0)$ a $P(\alpha+\beta)$ è uguale a quello da $P(-\alpha)$ a $P(\beta)$; quindi, *accettando come 'assioma' di geometria* che "archi di lunghezza uguale sottendono corde di lunghezza uguale", $\operatorname{dist}(P(0), P(\alpha+\beta)) = \operatorname{dist}(P(-\alpha), P(\beta))$; prendendo i quadrati di queste distanze si trova $\operatorname{dist}^2(P(0), P(\alpha+\beta)) = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = 2(1 - \cos(\alpha+\beta))$, e $\operatorname{dist}^2(P(-\alpha), P(\beta)) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (-\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = 2(1 - (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta))$; dall'uguaglianza delle due espressioni segue il risultato. Le altre formule seguono ora facilmente usando le (5.17): $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = -\cos(\pi/2 + (\alpha+\beta))$, e sviluppando questo si ottiene $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, e l'addizione la sappiamo fare; le (5.19) sono un caso particolare di addizione (sono evidenziate perchè si usano spesso); le (5.20) si ricavano dalla duplicazione per il coseno, che scrivendo $\alpha = 2(\alpha/2)$ dà $\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha/2) = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$ donde le (5.20).

Per bisezione si trovano i valori di seno e coseno (e quindi tangente) a $\pi/4$ (45^o), dati i loro valori a $\pi/2$: $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{(1-\cos(\pi/2))/2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$ e $\cos(\pi/4) = \sqrt{(1+\cos(\pi/2))/2} = \sqrt{2}/2$; da questi si ricavano i valori a $\pi/8$, che sono (verifica) $\operatorname{sen}(\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$. E da questi usando le (5.17)-(5.20) se ne trovano altri (anche nei quadranti diversi dal primo); ma ancora non possiamo trovare i valori di seno e coseno per esempio a $\pi/3$; per far ciò ci si serve delle seguenti, cosiddette *formule di prostaferesi*: [59]

[58] Cioè: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, ecc.

[59] Non serve impararle a memoria; basta sapere che sono qui e trovarle quando servono.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}\tag{5.21}$$

Dimostrazione di queste: con $p, q \in \mathbb{R}$, dalle formule di addizione e sottrazione si ottiene $\operatorname{sen}(p+q)+\operatorname{sen}(p-q) = 2\operatorname{sen}p\cos q$, $\operatorname{sen}(p+q)-\operatorname{sen}(p-q) = 2\cos p\operatorname{sen}q$ e $\cos(p+q)+\cos(p-q) = 2\cos p\cos q$, $\cos(p+q)-\cos(p-q) = -2\operatorname{sen}p\operatorname{sen}q$; ponendo $\alpha = p+q$, $\beta = p-q$ risulta (per somma e differenza) $p = (\alpha+\beta)/2$, $q = (\alpha-\beta)/2$; sostituendo si trovano le (5.21).

Troviamo come promesso seno e coseno a $\pi/3$ e $\pi/6$ (60^o e 30^o): prendendo $\alpha = 90^o$, $\beta = 30^o$ abbiamo $(\alpha+\beta)/2 = 60^o$, $(\alpha-\beta)/2 = 30^o$; usando $\cos 90^o = 0$, $\cos 30^o \neq 0$ otteniamo successivamente $\cos(\pi/2)+\cos(\pi/6) = 2\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/6) = 2\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)$, $1 = 2\cos(\pi/3)$ e finalmente $\cos(\pi/3) = 1/2$. Da questo, $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}/2$; i valori a $\pi/6$ si ottengono allora per bisezione, o da $\pi/6 = \pi/2 - \pi/3$, e sono $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Mettiamo in figura 21 i tre punti corrispondenti a $\pi/6, \pi/4, \pi/3$ per ricordarceli meglio:

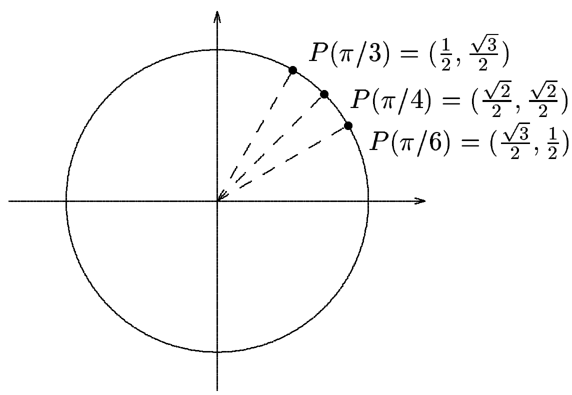


FIGURA 21

Chiudiamo con un teorema che useremo:

$$\text{per } 0 < |\alpha| < \pi/2 \text{ risulta } |\operatorname{sen}\alpha| < |\alpha| < |\tan\alpha|. \tag{5.22}$$

Per giustificarlo useremo il seguente risultato di geometria, da noi non dimostrato: dato nella circonferenza di raggio unitario un arco di lunghezza $l < \pi$, diciamo dal punto A al punto B, si ha —vedi figura 22— $\operatorname{dist}(A, B) < l < \operatorname{dist}(C, D)$.

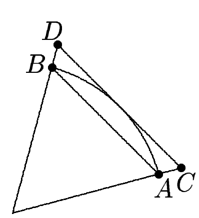


FIGURA 22

Dato questo: per $0 < \alpha < \pi/2$, preso l'arco da $A = P(-\alpha)$ a $B = P(\alpha)$ il teorema di sopra dà $2\operatorname{sen}\alpha < 2\alpha < 2\tan\alpha$ da cui la (5.22); per $-\pi/2 < \alpha < 0$ è

$0 < -\alpha < \pi/2$ da cui $\operatorname{sen}(-\alpha) < -\alpha < \tan(-\alpha)$ cioè $-\operatorname{sen}\alpha < -\alpha < -\tan\alpha$, cioè di nuovo la (5.22) (giusto?).

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Sono quelle in cui l'incognita è argomento di funzioni trigonometriche; e la struttura delle loro soluzioni riflette la periodicità delle funzioni in esse contenute. Per vedere come consideriamo per esempio l'equazione $f(x) = 0$ con f periodica di periodo p. Il fatto da tenere presente è questo: se x_0 è soluzione (cioè $f(x_0) = 0$), allora $x_0 + kp$ è soluzione per ogni $k \in \mathbb{Z}$ (perchè $f(x_0 + kp) = f(x_0) = 0$ per ogni siffatto k); ciò implica, come adesso vedremo, che suddiviso $\mathbb{R}$ in intervalli di lunghezza p, le soluzioni sono 'le stesse' in ognuno di questi intervalli, solo 'traslate' di kp, sicchè basta cercare le soluzioni in un arbitrario intervallo di lunghezza p. Per stabilire questo formalmente, partizioniamo $\mathbb{R}$ in intervalli di lunghezza p, fissando $a \in \mathbb{R}$ ad arbitrio e usando l'uguaglianza $\mathbb{R} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[a + kp, a + (k + 1)p)$; [60] e cerchiamo le soluzioni separatamente nei vari intervalli. Cioè, pósto $S = \{x : f(x) = 0\}$ (l'insieme soluzione di $f(x) = 0$) ed $S_k = S \cap [a + kp, a + (k + 1)p)$ osserviamo che $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}} S_k$ [61] e cerchiamo gli S_k. La 'semplicità' della struttura di S cui accennavamo prima è che per determinare S basta trovare S_0, perchè per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $S_k = S_0 + kp$ [62] (Dimostrazione: che $S_0 + kp \subseteq S_k$ è l'osservazione da cui siamo partiti. Per dimostrare l'inclusione opposta prendi $x \in S_k$; poichè $x \in [a + kp, a + (k + 1)p)$, $x = x_0 + kp$ con $x_0 \in [a, a + p)$, e poichè $-k \in \mathbb{Z}$, $f(x_0) = f(x - kp) = f(x) = 0$, sicchè $x_0 \in S_0$); quindi: *$x \in S$ se e solo se $x = x_0 + kp$ per qualche $x_0 \in S_0, k \in \mathbb{Z}$.* La scelta di a, cioè dell'intervallo $[a, a + p)$ in cui cercare S_0, è arbitraria; [63] la si deve fare in modo da semplificare la ricerca di S_0 e la descrizione di S aiutandosi con la rappresentazione geometrica, nel senso che: le f periodiche con cui lavoreremo sono funzioni trigonometriche, e i numeri nel loro dominio sono per costruzione interpretabili come lunghezze di cammini lungo la circonferenza unitaria; quindi è sulla circonferenza che bisogna guardare, per esempio se $p = 2\pi$ l'intervallo $[a, a + p)$ sarà un giro di circonferenza, tipo $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, \pi)$ —vediamo subito due esempi. Prima però sottolineamo l'avvenuto cambio di nome delle lunghezze degli angoli rispetto alla sezione precedente: adesso sulla circonferenza ci sono archi di lunghezza x, non più α, quindi nei grafici in cui disegnamo la circonferenza trigonometrica non dobbiamo più usare la x come nome di uno degli assi. [64]

ESEMPI 5.6. **(a)** Risolvere $\operatorname{sen} x = 1/2$ (della forma $f(x) = 0$ con $f(x) = \operatorname{sen} x - 1/2$). Qui il periodo $p = 2\pi$, e possiamo scegliere l'intervallo $[0, 2\pi)$ in cui cercare S_0; percorrendo la circonferenza da 0 a 2π si vede (vedi figura 23, sinistra) che i $P(x)$ —ex $P(\alpha)$— di ordinata $1/2$ sono quelli con $x = \frac{\pi}{6}$ ed $x = \frac{5}{6}\pi$. Conclusione: $S_0 = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\}$, ed $S = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. [65]

(b) $\cos(x/2) = 0$. Qui $p = 4\pi$, e possiamo cercare le soluzioni in $[0, 4\pi)$. Ponendo $t = x/2$ si ha $x \in [0, 4\pi) \Leftrightarrow t \in [0, 2\pi)$, e in $[0, 2\pi)$ $\cos t = 0$ per $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ cioè per $x = \pi, 3\pi$ che sono le soluzioni in $[0, 4\pi)$. Dunque $S = \{\pi + 4k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3\pi + 4k\pi :$

---

[60] E' per definizione $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[a+kp, a+(k+1)p)$ se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x \in [a+kp, a+(k+1)p)$. Per l'uguaglianza $\mathbb{R} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[a + kp, a + (k + 1)p)$: la $\supseteq$ è ovvia; per la $\subseteq$, se $x \in \mathbb{R}$ è facile verificare che $x \in [a + kp, a + (k + 1)p)$ con $k = [(x - a)/p]$ (massimo intero contenuto in $(x - a)/p$).

[61] $S = \mathbb{R} \cap S = \big(\cup_{k\in\mathbb{Z}}[a + kp, a + (k + 1)p)\big) \cap S$; non è difficile vedere che l'ultimo insieme è uguale a $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\big([a + kp, a + (k + 1)p) \cap S\big)$ come asserito nel testo, facendo al solito $\subseteq$ e $\supseteq$.

[62] Ricorda che per $A \subseteq \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ è per definizione $A + z = \{x \in \mathbb{R} : x = a + z,\ a \in A\}$.

[63] Gli S_k dipendono da a, e quando vorremo evidenziare questa dipendenza scriveremo $S_k(a)$.

[64] Se si rendesse necessario si potrebbe usare per esempio (x_1, x_2) al posto di (x, y).

[65] Ricorda che $\{\pi/6 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ abbrevia $\{x \in \mathbb{R} : x = \pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, eccetera.

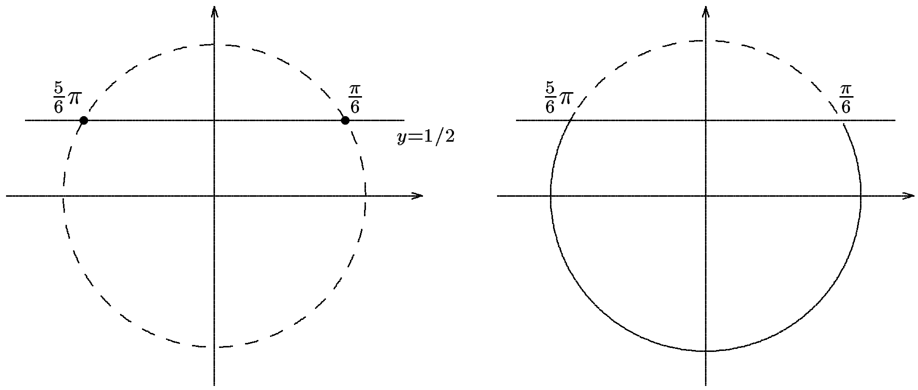


FIGURA 23. A sinistra le soluzioni di $\operatorname{sen} x = 1/2$. A destra (parte non tratteggiata) quelle di $\operatorname{sen} x < 1/2$.

$k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (l'ultima uguaglianza da $P(\pi + 4k\pi) = (0, 1)$ e $P(3\pi + 4k\pi) = (0, -1)$).

Altro modo di risolvere questa è usando la bisezione $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$: $\cos(x/2) = 0 \Leftrightarrow \cos^2(x/2) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$; quest'ultima ha periodo 2π ed in $[0, 2\pi)$ ha soluzione $x = \pi$, dunque $S = \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (come prima).

Discorso uguale a quello fatto per le equazioni vale per le disequazioni trigonometriche: per esempio per $f(x) > 0$ cambia S da $\{x : f(x) = 0\}$ in $\{x : f(x) > 0\}$, e tutto quanto detto prima vale parola per parola. Andiamo avanti con altri esempi di equazioni e disequazioni (la lettera S indicherà sempre l'insieme soluzione della (dis)equazione di volta in volta in esame).

ESEMPI 5.7. **(a)** $\cos x > 0$. La soluzione è: tutti gli x con $P(x)$ alla destra dell'asse verticale. Per descriverla, se si sceglie $[0, 2\pi)$ la soluzione in quest'intervallo è $S_0(0) = (0, \pi/2) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$; meglio $[-\pi, \pi)$; così $S_0 = S_0(-\pi) = (-\pi/2, \pi/2)$, descritto in modo più economico; ed $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi\big) = \{x : -\pi/2 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (la prima uguaglianza da $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}} S_k = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(S_0 + 2k\pi) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}((-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi)$; la seconda da $(-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi = (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ applicando la definizione di unione).

(b) $\operatorname{sen} x < 1/2$. Soluzione tutti gli x con $P(x)$ aventi ordinata $< 1/2$ (vedi figura 23, destra). Un modo semplice di scriverla è partendo dall'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi)$, perchè così $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi) + 2k\pi\big)$. Parti in alternativa da $[0, 2\pi)$ e verifica che la descrizione di S che viene è più scomoda da leggere.

(c) $\cos 2x > \sqrt{2}/2$. Periodo π, prendiamo l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2)$ così ponendo $t = 2x$ abbiamo $x \in [-\pi/2, \pi/2) \Leftrightarrow t \in [-\pi, \pi)$ e lì le soluzioni di $\cos t > \sqrt{2}/2$ sono $t \in (-\pi/4, \pi/4)$ cioè $x = t/2 \in (-\pi/8, \pi/8)$, che è S_0; sicchè $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\pi/8, \pi/8) + k\pi\big)$ (se preferisci, $S = \{x : -\pi/8 + k\pi < x < \pi/8 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$).

Anche in questo caso possiamo ridurre la disequazione con la formula di duplicazione $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, da cui $\cos 2x > \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \cos^2 x > (2 + \sqrt{2})/4 \Leftrightarrow \cos x > \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$ o $\cos x < -\sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$; da $\cos \pi/8 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2$ segue allora (disegna) $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi) \cup (\frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi) + 2k\pi\big)$, che è lo stesso di prima ma questa volta più difficile da leggere.

(d) $\tan x = -\sqrt{3}$. Periodo π, cerchiamo in $(-\pi/2, \pi/2)$; guardando alla figura 21 si vede che $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, quindi $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$; altre soluzioni non ci possono essere perchè la tangente è iniettiva in $(-\pi/2, \pi/2)$, quindi: $S = \{-\frac{\pi}{3}\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $\operatorname{sen} x \cos x = 1/4$. Moltiplicando per 2 ed usando duplicazione viene $\operatorname{sen} 2x = 1/2$ che ormai sappiamo fare: $x \in [0, \pi)$, $t = 2x \in [0, 2\pi)$, soluzioni $t = \frac{1}{6}\pi$ e $\frac{5}{6}\pi$; da ciò $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{5}{12}\pi+k\pi\}(= \{x : x = \frac{\pi}{12}+k\pi$ o $\frac{5}{12}\pi+k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}\})$.

(f) $|\cos x| > 1/2$. E' equivalente a $\cos x > 1/2$ o $\cos x < -1/2$; e disegnando si vede che soluzioni sono da $-\frac{1}{3}\pi$ a $\frac{1}{3}\pi$ e da $\frac{2}{3}\pi$ a $\frac{4}{3}\pi$. Per descrivere bene S prendiamo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$: $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) \cup (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi) + 2k\pi\big)$.

(g) $3\cos^2 x + 8\cos x - \operatorname{sen}^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 8\cos x - 5 = 0$, che è una equazione di secondo grado in $t = \cos x$, $4t^2 + 8t - 5 = 0$ risolta da $t = -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$; dei due solo il secondo può essere un valore di $\cos x$; conclusione, $S = \{x : \cos x = 1/2\} = \{\pm\pi/3 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(h) $\tan x - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot (1/\cos x - 2) = 0$, risolta dalle x che annullano uno dei due fattori: $S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\pi/3 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Per $\operatorname{sen} x \neq -1$ (quindi > -1) abbiamo $\frac{1+\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 x-2-2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} > 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 > 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + 2) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x < 0$, quindi $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((\pi, 2\pi) \setminus \{\frac{3}{2}\pi\} + 2k\pi\big)$.

(j) $$\sqrt{1/2 - \operatorname{sen}^2 x} < \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 1/2 - \operatorname{sen}^2 x \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ 1/2 - \operatorname{sen}^2 x < \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x > 0 \\ 1/2 < 1 \end{cases},$$
risolta da $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\pi/4, \pi/4) + 2k\pi\big)$.

(k) $\cos 2x + \operatorname{sen}(2x + \pi/4) = 1 + \sqrt{2}/2$. Preliminarmente verifica che $\tan(\pi/8) = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. [66] Usando i valori di seno e coseno a $\pi/4$ e la bisezione $\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos 2x)/2$, si trovano le equivalenze: $\Leftrightarrow \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} 2x = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(1 - \cos 2x) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} 2x = (2 + \sqrt{2})\operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\operatorname{sen} x \cos x$. Dunque $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni ($\operatorname{sen} k\pi = 0$); per $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ dividiamo per $\operatorname{sen} x$ ottenendo $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cos x$; in questa deve essere $\cos x \neq 0$ (perchè se $\cos x = 0$ allora $\operatorname{sen} x = \pm 1$, e non va bene); dividiamo per $\cos x$ ottenendo $\tan x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ che come sappiamo è risolta per $x = \pi/8 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Conclusione: $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big(\{0, \pi/8\} + k\pi\big)$.

(l) $\tan(\frac{2}{3}\pi - x) > 0$. Deve essere $k\pi < \frac{2}{3}\pi - x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ cioè $\frac{2}{3}\pi - k\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi - k\pi$ ossia $\frac{1}{6}\pi + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(m) $2\tan\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} > \sqrt{3}$ (per $x/2 \neq \pi/2 + k\pi$ cioè $x \neq \pi + 2k\pi$). Scrivendo $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ e $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ l'equazione diventa $3\tan\frac{x}{2} > \sqrt{3}$ cioè $\tan\frac{x}{2} > 1/\sqrt{3}$; per $x \in [-\pi, \pi)$ cioè $t = x/2 \in [-\pi/2, \pi/2)$ si trova $t \in (\pi/6, \pi/2)$ cioè $x \in (\pi/3, \pi)$; conclusione, soluzioni $x \in (\pi/3, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(n) $\operatorname{sen} x + \cos x > 0$. Usando $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$ e poi prostaferesi otteniamo: $\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, cioè: $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\big((-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi) + 2k\pi\big)$.

(o) $\operatorname{sen}(3x - \pi/6) = -\operatorname{sen}(x - \pi/18)$. Portando tutto a primo membro e usando prostaferesi, poichè $(\alpha + \beta)/2 = 2x - \pi/9$, $(\alpha - \beta)/2 = x - \pi/18$ si ottiene: $\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(2x - \pi/9)\cos(x - \pi/18) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x - \pi/9) = 0$ oppure $\cos(x - \pi/18) = 0$; la prima è risolta da $x = \pi/18 + k\pi/2$, la seconda da $x = 5\pi/9 + k\pi$.

(p) $\tan 2x > 3\tan x$. Il periodo di $f(x) = \tan 2x - 3\tan x$ è π; cerchiamo S_0 in $[-\pi/2, \pi/2)$; deve essere $x \neq -\pi/2, \pm\pi/4$ (che implica fra l'altro che $\tan^2 x \neq 1$); per tali valori, usando la duplicazione, portando tutto a primo membro, facendo

[66] Esercizio di algebra: è vero anche $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$?

la somma e mettendo in evidenza, la disequazione si trova equivalente a $\tan x \cdot \frac{3\tan^2 x-1}{\tan^2 x-1} < 0$, prodotto di $\tan x$ per una frazione, negativo per fattori discordi. Il segno di $\frac{3t^2-1}{t^2-1}$ è: positivo per $|t| > 1$ e $|t| < 1/\sqrt{3}$, negativo per $-1 < t < -1/\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{3} < t < 1$, sicchè (disegna, tenendo presente la figura 21) $\frac{3\tan^2 x-1}{\tan^2 x-1}$ è positivo in $(-\pi/2, -\pi/4) \cup (-\pi/6, \pi/6) \cup (\pi/4, \pi/2)$ e negativo in $(-\pi/4, -\pi/6) \cup (\pi/6, \pi/4)$; il segno di $\tan x$ lo sappiamo; mettendo insieme in un diagramma più/meno si trova $S_0 = (-\pi/2, -\pi/4) \cup (-\pi/6, 0) \cup (\pi/6, \pi/4)$; $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(S_0 + k\pi)$ è allora trovato.

(q) Risolvi $\operatorname{sen}\sqrt{x} > 1/2$ per $0 \le x < 4\pi^2$ (nota che $\operatorname{sen}\sqrt{x}$ *non* è periodica — giusto?). Per i dati valori di x è $0 \le \sqrt{x} < 2\pi$, dunque deve essere $\frac{1}{6}\pi < \sqrt{x} < \frac{5}{6}\pi$ cioè $\frac{1}{36}\pi^2 < x < \frac{25}{36}\pi^2$.

(r) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$. Usando $\operatorname{sen} x = \cos(\pi/2 - x)$, prostaferesi e $\cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$ si vede che la disequazione è equivalente a $\cos\frac{\pi-4x}{4} = 1$ risolta per $\frac{\pi-4x}{4} = 2k\pi$ cioè $x = \pi/4 - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; conclusione: $S = \{\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ $(= \{\pi/4 - 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$.

(s) $\cos x + \sqrt{1-\cos x} = 1/\sqrt{1-\cos x}$. Deve essere $\cos x \ne 1$ cioè $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Moltiplicando tutto per $\sqrt{1-\cos x}$ e portando a primo membro troviamo $\cos x \cdot (\sqrt{1-\cos x} - 1) = 0$, risolta come si vede facilmente per $\cos x = 0$ cioè $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(t) $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$. Intanto si devono escludere le x tali che $\operatorname{sen} 2x = 1$; dunque deve essere $x \ne \pi/4 + k\pi$ (giusto?). Usando $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$ e prostaferesi l'equazione diventa $\sqrt{2}\cos(\pi/4 - x) = \frac{\cos 2x}{1-2\operatorname{sen} 2x}$; usando $1 = \operatorname{sen}\pi/2$ e prostaferesi di nuovo si vede che $1 - \operatorname{sen} 2x = 2\cos(\pi/4 + x)\operatorname{sen}(\pi/4 - x)$; sostituendo questo, moltiplicando entrambi i membri per $(2/\sqrt{2})\operatorname{sen}(\pi/4 - x)$, e usando duplicazione e $\operatorname{sen}(\pi/2 - 2x) = \cos 2x$ l'equazione si trova equivalente a $\cos 2x = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos(\pi/4+x)}$. Quindi: o $\cos 2x = 0$, risolta da $x = \pi/4 + k\pi$ ed $x = 3\pi/4 + k\pi$ (ma $\pi/4 + k\pi$ li avevamo esclusi), oppure (dividendo per $\cos 2x \ne 0$) $\cos(\pi/4 + x) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, risolta da $x + \pi/4 = \pm\pi/4 + 2k\pi$ cioè $x = 2k\pi$ ed $x = -\pi/2 + 2k\pi$. Totale: $S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$.

(u) $\operatorname{sen} x + \cos x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$. Ovviamente una soluzione è $x = \frac{\pi}{6}$, ma dobbiamo vedere se ce n'è altre. Lavoriamo con $x \in [0, 2\pi)$; scrivendo l'equazione come $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} - \cos x$, usando prostaferesi e $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ troviamo $\operatorname{sen}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}) \cdot \big(\operatorname{sen}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}) - \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})\big) = 0$, da cui: o $\operatorname{sen}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}) = 0$, dove ponendo $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \in -\frac{\pi}{12} + [0, \pi)$ troviamo $t = 0$ cioè $x = \frac{\pi}{6}$; oppure, con $t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \in \frac{\pi}{12} + [0, \pi)$ si trova $t = \frac{\pi}{4}$ cioè $x = \frac{\pi}{3}$; conclusione, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZI

5.14. Risolvi:

(i) $\operatorname{sen} x > 0$	(ii) $\operatorname{sen} x > -\sqrt{3}/2$
(iii) $\sqrt{\operatorname{sen} x} > \lvert\operatorname{sen} x\rvert$	(iv) $2\operatorname{sen}^2 x + 5 < 11\operatorname{sen} x$
(v) $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos x + 2\cos^2 x}{1 - 2\cos x} > 0$	(vi) $\cos x + \tan x > \dfrac{1}{\cos x}$
(vii) $2 + 3\tan x = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$	$(viii)$ $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = \cos x$
(ix) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x < 1$	(x) $\dfrac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$
(xi) $\operatorname{sen} x\cos x > 0$	(xii) $\operatorname{sen} x\cos x < 1/4$

$(xiii)$ $4\tan x > \dfrac{1}{\cos^2 x}$	(xiv) $\tan(3x-\pi) > 0$
(xv) $\cos x - \operatorname{sen} x < 0$	(xvi) $\lvert 1+\cos x\rvert < 1 - \operatorname{sen} x$
$(xvii)$ $\operatorname{sen} x + \cos x > \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$	$(xviii)$ $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x < 1$