Prezzi, Equilibrio Competitivo e Walras' Law

Economia Politica I, Maggio 2001 (S Modica)

Abbiamo visto negli esercizi sull'equilibrio di scambio in economie a due beni e due persone (graficamente, scatola di Edgeworth) che le domande dipendevano dal prezzo relativo, e che se un mercato era in equilibrio lo era anche l'altro. Ci sta sotto una caratteristica generale (e basilare) degli scambi e dell'equilibrio economico (vedi la sezione conclusiva), che conviene vedere in un'economia di scambio con n beni.

1 Scambi e Prezzi

Stiamo parlando di economie in cui per ogni coppia di beni $h, k = 1, 2, \ldots, n$ vale la seguente proprietà:

> **Scambi Lineari** *Se x unità del bene h si scambiano con y unità del bene k, allora per ogni $t > 0$, tx unità di h si scambiano con ty unità di k.*

In tale contesto, per descrivere gli scambi possibili fra i vari beni basta precisare per ogni coppia $h, k = 1, 2, \ldots, n$ il numero c_{hk} di unità del bene h che si scambiano con una unità del bene k; cioè, basta la seguente **matrice degli scambi** $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Per ogni $m = 1, 2, \ldots, n$ la riga $(c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})$ indica le quantità del bene m che servono per comprare 1 unità dei vari beni (nota in particolare che $c_{mm} = 1$). Sono ancora un sacco di numeri, ma usando la proprietà degli scambi lineari si vede che in realtà ne bastano molti di meno. Per esempio, dato che c_{hk} unità di h si scambiano con 1 unità di k, allora $(1/c_{hk}) \cdot c_{hk} = 1$ unità di h si scambia con $(1/c_{hk}) \cdot 1$ unità di k (scambi lineari); ma questo *vuol dire* $c_{kh} = 1/c_{hk}$; sicchè tutti i numeri a sud–ovest della diagonale principale sono reciproci di quelli corrispondenti a nord–est. Ma c'è di più. Nota che vale la seguente **relazione fondamentale** degli scambi:

$$\forall\ h, k, m \quad c_{hk} = c_{hm} \cdot c_{mk}. \tag{1}$$

Perchè: con c_{hm} unità di h si compra 1 unità di m, sicchè con $c_{hm}c_{mk}$ unità di h se ne comprano c_{mk} di m (scambi lineari); ma con queste si compra 1 unità di k; dunque con $c_{hm}c_{mk}$ unità di h se ne compra 1 di k, *cioè* vale la (1).

Da questo possiamo dedurre che *da una qualunque delle righe della matrice di sopra si possono ricavare tutte le altre.* Perchè supponendo nota la riga diciamo m, per ricavare la riga per esempio h basta scrivere la (1) come $c_{hk} = c_{mk}/c_{mh}$, ottenendo

$$(c_{h1}, c_{h2}, \ldots, c_{hn}) = \frac{1}{c_{mh}}\ (c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})\,. \tag{2}$$

Nota la precisa relazione di proporzionalità fra le righe di una matrice degli scambi: per ottenere la riga h dalla m, dividi gli elementi di quest'ultima per l'elemento di posto h.

Dunque per descrivere un sistema di scambi in un'economia con n beni basta specificare, per un bene m qualunque, i suoi rapporti di scambio con gli altri beni —cioè $(c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})$. Poichè $c_{mm} = 1$, concludiamo che *bastano* $n - 1$ *numeri*.

A questo punto un altro passo è naturale e conveniente: possiamo rappresentare la matrice degli scambi con un qualunque vettore $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tale che per qualche m fra 1 ed n e $t > 0$ risulti

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) = t\,(c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})\,.$$

Infatti per un tale p è $p_k/p_h = c_{mk}/c_{mh}$, sicchè —usando di nuovo la (1) nella forma $c_{hk} = c_{mk}/c_{mh}$— risulta

$$\forall\ h, k = 1, 2, \ldots, n \quad c_{hk} = \frac{p_k}{p_h}\,, \tag{3}$$

da cui la matrice resta univocamente determinata. Come sappiamo ne basta una riga; scegliamo la m (come si dice in gergo, scegliamo il bene m come 'numerario')? C'è solo da dividere p per p_m, ottenendo

$$(c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn}) = \frac{1}{p_m}\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)\,, \tag{4}$$

e la riga resta determinata dagli $n - 1$ rapporti p_k/p_m, $k \neq m$.

Viceversa (e questo è il caso che incontreremo sempre): quando diciamo che in un'economia vige un **sistema di prezzi** $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, intendiamo dire che l'insieme degli scambi possibili è dato dalla matrice definita da (3). La matrice così definita è effettivamente una matrice degli scambi, nel senso che i suoi elementi soddisfano la relazione fondamentale (1) (come si verifica immediatamente dalla (3)), e dunque anche la (2). Scelto arbitrariamente m, l'insieme degli scambi possibili resta determinato dagli $n - 1$ **prezzi relativi** p_k/p_m, $k \neq m$ (che determinano la riga m–esima della matrice). Nota per l'ultima volta (e scusa la ripetitività): $p_k/p_h = x$ *vuol dire che* ci vogliono x unità del bene h per comprare una unità del bene k.

<u>Note</u>: (1) Moneta (non ce n'è). Osserva che le rappresentazioni introdotte del sistema degli scambi *non* presuppongono l'esistenza di moneta o altro 'mezzo di pagamento'. Se un sistema di prezzi p rappresenta una certa matrice degli scambi, un multiplo tp la rappresenta ugualmente. I prezzi sono quindi espressi in astratte 'unità di conto'. Ovviamente una volta che si sceglie un numerario (che se esiste può essere per esempio la moneta), si esprimono i prezzi in termini di quel bene.

(2) Free goods e Prezzi zero. Abbiamo finora liberamente messo a denominatore elementi della matrice degli scambi e prezzi, non preoccupandoci del fatto che non si può dividere per zero. Implicitamente, abbiamo assunto che tutti i beni hanno utilità e quindi 'prezzo' positivo. Che succede se non è così? Supponiamo che il bene h non interessa a nessuno. Allora per ogni $k \neq h$ sarà $c_{kh} = 0$ (quante unità di k ci vogliono per comprare una unità di h? Zero!); e d'altra parte la riga c_{hk} non è definita, perchè i suoi elementi sarebbero tutti infinito. In questo caso il sistema pone come vincolo sugli scambi con quel bene soltanto che in cambio non si riceve niente; non è determinata la quantità che deve essere data in cambio di zero unità di un altro bene qualunque —quanto vuoi!

Corrispondentemente, nel vettore p di prezzi che rappresenta la matrice ci sarà $p_h = 0$. *Non* si potrà usare il bene k come numerario, perchè si dovrebbe dividere per zero (cfr. la (4)), e dalla (3) vediamo che in effetti la colonna corrispondente ha tutti gli elementi uguali a zero.

Nel seguito **supporremo che** $p_h > 0, \ h = 1, 2, \ldots, n$.

2 Scelte ed Omogeneità

Ci siano I individui, $i = 1, 2, \ldots, I$. Per descrivere l'economia, dato che non ci sono imprese e produzione, basta specificare, per ogni i: dotazioni iniziali dei beni e preferenze. Siano queste rispettivamente $\omega^i = (\omega^i_1, \ldots, \omega^i_n) \in \mathbb{R}^n_+$ ed $u^i \colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Cioè, il Sig. i ha inizialmente ω^i_h unità del bene h (con $\omega^i_h \geq 0$), e dal paniere–vettore di beni $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ deriva utilità $u^i(x)$.

Le scelte di consumo del Sig. i, *dato* il sistema di prezzi $p = (p_1, \ldots, p_n)$, sono al solito quelle che massimizzano l'utilità sotto il vincolo di bilancio, cioè quelle rappresentate da un paniere–vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ che risolve il problema

$$\begin{array}{rl} & \max \ u^i(x_1, \ldots, x_n) \\ \textit{soggetto a} & \sum_{h=1}^n p_h x_h = \sum_{h=1}^n p_h \omega^i_h \,. \end{array}$$

Nota il vincolo: il reddito è costituito dal valore della dotazione iniziale. Poichè il problema dipende da p, indicheremo con $x^i(p) = \big(x^i_1(p), x^i_2(p), \ldots, x^i_n(p)\big)$ la soluzione, cioè la domanda del Sig. i. [1]

Nota che per ogni $t > 0$ si ha $x^i(tp) = x^i(p)$, semplicemente perchè il vincolo non cambia sicchè il problema rimane lo stesso. Questa si chiama 'omogeneità' delle scelte. Scelto il numerario, $x^i(p)$ dipende dagli $n-1$ prezzi relativi da esso determinati. Ciò è in accordo con quanto trovato prima: perchè dato che le scelte (date le preferenze) dipendono dai rapporti di scambio fra i vari beni, e questi sono descritti dai prezzi relativi, ci sarebbe qualcosa di 'storto' se le scelte non dipendessero formalmente da questi ultimi soltanto.

3 Equilibrio

Un **equilibrio competitivo** dell'economia di scambio di cui stiamo parlando è una coppia allocazione–prezzi, $\big(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^I, p\big)$ (dove $x^i = (x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_n)$ è il paniere che tocca al Sig. i) che soddisfa:

- per ogni i, $x^i = x^i(p)$ (le scelte sono razionali dato p)
- per ogni h, $\sum_{i=1}^I x^i_h = \sum_{i=1}^I \omega^i_h$ (i mercati sono in equilibrio).

Conviene, dal punto di vista matematico ma anche da quello economico, considerare, per il Sig. i, la domanda in eccesso della dotazione (domanda netta, in inglese 'excess demand'):

$$z^i(p) = x^i(p) - \omega^i.$$

Se $z^i_h > 0$, il Sig. i chiede sul mercato z^i_h unità di h; se $z^i_h < 0$, ne offre $-z^i_h = \omega^i_h - x^i_h$ unità; se $z^i_h = 0$, gli sta bene quello che ha del bene h.

[1] Per i più attenti: si, ci possono essere più soluzioni. Assumiamo qui che ce ne sia una sola.

In termini di excess demands, Il fatto che le scelte del Sig. i rispettano il vincolo di bilancio e la condizione di equilibrio sui mercati diventano rispettivamente

$$\sum_{h=1}^{n} p_h z_h^i(p) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, I \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{I} z_h^i(p) = 0\,, \quad h = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Dunque in particolare per l'equilibrio, il problema è trovare p tale che le n equazioni in (6) siano soddisfatte. Poichè $p = (p_1, \ldots, p_n)$, sembra un sistema di n equazioni in n incognite; ma sappiamo che non è così, perchè sappiamo che le incognite sono in effetti $n-1$ (i prezzi relativi: se p risolve il sistema, lo risolve anche tp). La legge di Walras ci permetterà di stabilire che anche le equazioni sono in realtà $n-1$.

4 Walras' Law

Supponi ci siano due individui e due beni; prendi il bene 1 come numerario, e poni $p = p_2/p_1$; vincoli di bilancio: $z_1^i + p z_2^i = 0$. Considera il Sig. 1: se la sua domanda netta del bene 1 è poniamo $c > 0$, allora egli *deve* avere una offerta netta del bene 2 pari a c/p —poichè le sue scelte rispettano il vincolo di bilancio. Poichè anche il Sig. 2 rispetta il suo vincolo, se questi ha una offerta netta di c unità del bene 1 —che equilibra il mercato di questo bene—, allora deve avere una domanda netta di c/p unità del bene 2: cioè, il mercato del bene 2 è automaticamente in equilibrio se lo è quello del bene 1!

La versione generale di questo fatto, nota come **Legge di Walras**, dice che se $n-1$ mercati sono in equilibrio, lo sarà anche l'n–esimo. Formalmente, per p con $p_h > 0\ \forall h$, per k arbitrario:

$$\sum_{i=1}^{I} z_h^i(p) = 0\ \forall\ h \neq k\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{I} z_k^i(p) = 0\,. \tag{7}$$

L'intuizione è profonda, ma per fortuna la dimostrazione è immediata: poichè la (5) vale per ogni i, sommando su i e usando l'ipotesi in (7) otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{n} p_h z_h^i(p) = \sum_{h=1}^{n} p_h \sum_{i=1}^{I} z_h^i(p) = p_k \sum_{i=1}^{I} z_k^i(p)$$

da cui (dividendo per $p_k > 0$) la tesi.

Dunque le equazioni 'indipendenti' in (6) sono in realtà $n-1$ (come i prezzi relativi).

5 Equazioni e Incognite

Trovare un equilibrio ammonta a risolvere in p le equazioni in (6): n equazioni in n incognite. La conclusione cui siamo arrivati è che sia le equazioni che le incognite sono in realtà $n-1$: le equazioni, per la legge di Walras; le incognite, che sono gli $n-1$ prezzi relativi.