

### 30. ALBERI DI TRASMISSIONE

L'*albero* è un elemento rotante, usualmente di sezione circolare, usato per trasmettere potenza e/o moto di rotazione e/o coppia; esso fornisce l'asse di rotazione o di oscillazione a elementi rotanti quali ruote dentate, pulegge, volani ecc... (fig.1). Tipicamente è vincolato all'esterno mediante supporti costituiti da cuscinetti a rotolamento o strisciamento e viene schematizzato come una trave.

L'*asse* è un elemento usato per supportare elementi rotanti, senza trasmettere potenza o coppia, che può essere rotante o meno (gli assali ferroviari, l'asse della *carriola*).

#### Il progetto

Nelle trasmissioni di potenza i principali dati di progetto sono la *velocità angolare* dell'albero e la *potenza assorbita o fornita* da ciascun elemento meccanico calettato; la progettazione degli alberi di trasmissione prevede una fase preliminare nella quale sono determinate anche: la lunghezza dell'albero, le posizioni dei vincoli, le *tipologie* e le *posizioni* degli elementi che devono essere calettati (motori, ruote dentate, pulegge, camme, manovelle, palettature, volani, cuscinetti). La procedura di progettazione può essere poi divisa nelle seguenti quattro fasi principali:

1. analisi dei carichi, cioè determinazione delle forze e dei momenti trasmessi all'albero dagli elementi calettati e delle reazioni vincolari trasmesse dai supporti;
2. determinazione delle caratteristiche di sollecitazione: momenti flettenti, momenti torcenti e sforzo normale, in molti casi distinti in *medi* e *alternati* in relazione alle tensioni medie e alternate che generano;
3. determinazione dei diametri da assegnare alle sezioni più sollecitate;
4. determinazione della geometria complessiva dell'albero;

In vari casi possono essere previsti uno o più dei seguenti passi:

- valutazione degli spostamenti e delle rotazioni dell'asse dell'albero in corrispondenza dei componenti calettati e dei supporti ed eventuale modifica della geometria per ridurne l'ampiezza;
- determinazione delle velocità critiche flessionali e/o torsionali;
- determinazione del peso e verifica dell'ingombro.

Per quanto concerne le problematiche di dimensionamento a resistenza e a deformazione bisogna ricordare che l'analisi delle tensioni in una sezione dell'albero non richiede la conoscenza dell'intera geometria dell'albero stesso (se è isostatico), ma solo della geometria della sezione stessa (per ovvi motivi) e delle zone limitrofe (per considerare eventuali concentrazioni di tensione), oltre, come già detto, alla posizione dei carichi e dei vincoli e l'entità dei carichi. Al contrario, gli spostamenti e le rotazioni dipendono, oltre che da modulo di Young del materiale, dalla geometria complessiva dell'albero, per cui è opportuno determinare inizialmente le dimensioni necessarie per la resistenza ed effettuare successivamente una verifica riguardante le inflessioni, incrementando, se necessario, le dimensioni. Da ricordare che, tipicamente, le rotazioni in corrispondenza di cuscinetti a sfere o a rulli non orientabili devono essere comprese nel campo  $0.028 \div 0.07$  gradi, l'inclinazione relativa degli assi delle ruote dentate deve essere inferiore a  $0.029^\circ$ , l'allontanamento tra ruote deve essere compreso nel campo  $0.076 \div 0.254$  mm.

Nel progetto di un albero è opportuno tenere presenti i seguenti principi generali:

- è opportuno limitare la lunghezza dell'albero e porre i vincoli vicino ai carichi applicati, al fine di diminuire l'entità di spostamenti, rotazioni e momenti flettenti e incrementare le velocità critiche flessionali;
- è opportuno cercare di evitare effetti di intaglio nelle sezioni nelle quali le tensioni nominali sono più elevate e utilizzare ampi raggi di raccordo;
- se le esigenze di rigidità risultano essere le più critiche, è possibile utilizzare acciai più economici (meno resistenti), poiché tutti gli acciai hanno praticamente lo stesso modulo di elasticità;
- è opportuno effettuare buone finiture superficiali, aumentando anche la resistenza superficiale del materiale con appositi trattamenti;
- se il peso è un fattore critico, si può considerare l'opportunità di realizzare alberi cavi per ottenere bassi rapporti fra peso e rigidità/resistenza.

#### La geometria

La geometria più semplice dell'albero è quella di un cilindro con basi ortogonali all'asse. Spesso gli alberi vengono realizzati con geometria detta *a gradino*, cioè mediante segmenti cilindrici di diametro costante opportunamente raccordati (fig.1). Tale geometria permette di migliorare l'impiego del materiale ai fini della resistenza, riducendo il peso e facilitando il posizionamento assiale stabile dei componenti da calettare sull'albero, in quanto le variazioni di diametro possono fungere da *spallamento*. Alcuni segmenti sui quali non devono essere calettati elementi possono essere costruiti con diametro variabile con continuità (fig.1b) in funzione dell'andamento variabile delle

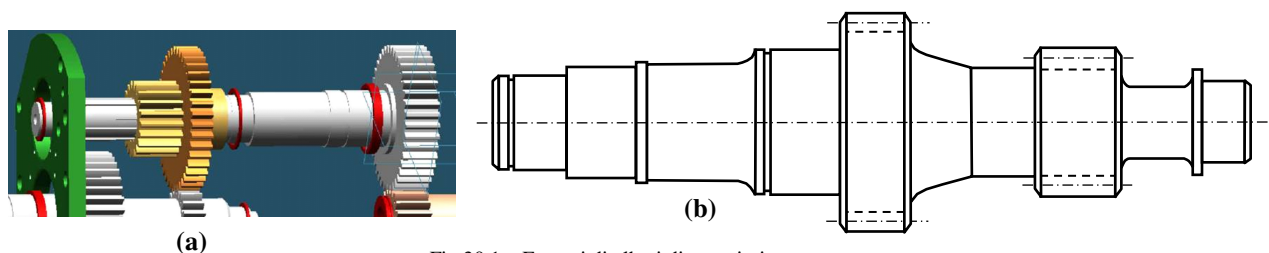


Fig.30.1 – Esempi di alberi di trasmissione.

sollecitazioni. In definitiva, dal punto di vista della modellazione, gli alberi dritti possono essere assimilati a travi rettilinee, con sezione variabile, vincolate con appoggi, soggette a carichi flessionali, torsionali e assiali.

In alcuni casi gli alberi possono essere sagomati in modo da "comprendere" alcuni elementi destinati alla trasmissione delle forze e del moto, come in fig.1b, dove 2 ruote dentate sono ricavate *di pezzo* sull'albero. Classico esempio in tal senso sono gli *alberi a manovella*, sagomati in modo da generare le manovelle.

### Analisi dei carichi

Come detto, la prima fase della progettazione degli alberi di trasmissione consiste nella determinazione delle forze e dei momenti che elementi calettati e supporti trasmettono all'albero.

In genere un elemento è definito *riceventelcondotto* se *riceve* potenza dall'esterno e la trasmette all'albero, *cedentelconduttore* se *cede* all'esterno la potenza che gli viene trasmessa dall'albero. Gli elementi ricevuti trasmettono all'albero *le forze che ricevono dall'esterno*, mentre gli elementi cedenti trasmettono all'albero *forze uguali e opposte a quelle che trasmettono all'esterno*.

In fig.2a è rappresentato un sistema di assi adatto all'analisi dei carichi agenti su un albero di trasmissione:

- l'origine  $O$  è posizionata nell'estremo sinistro dell'albero,
- l'asse  $x \equiv l$  è *coincidente con l'asse longitudinale* dell'albero, con verso positivo a *destra*,
- l'asse  $y \equiv o$  è disposto nel piano *orizzontale*, con verso positivo *uscende* dal piano verticale,
- l'asse  $z \equiv v$  è disposto nel piano *verticale*, con verso positivo in *basso*.

I dati necessari per la determinazione delle forze sono la *lunghezza*  $L$ , la *velocità angolare*  $\omega$  [rad/sec] o  $n$  [giri/min] dell'albero, la *potenza assorbita o fornita* dagli  $n_E$  elementi calettati  $P_i$  [Watt=N m/s], con  $i=1, \dots, n_E$ , le posizioni degli elementi lungo l'asse dell'albero  $x_i$ , le posizioni dei vincoli. Il momento torcente trasmesso all'albero da ciascun componente  $T_i$  [Nm] può essere determinato come:

$$T_i = P_i / \omega = 9.55 P_i / n \quad (30.1)$$

Generalmente i carichi trasmessi dagli elementi calettati sono costituiti da forze *sghembe* rispetto all'asse dell'albero che, in genere, vengono scomposte secondo 3 direzioni di riferimento (fig.2b); in particolare, considerando un segmento di retta  $r$  ortogonale all'asse dell'albero e congiungente il punto di applicazione della forza con l'asse dell'albero stesso, le forze  $F_i$  vengono scomposte nelle componenti:

- *tangenziale*  $F_{t,i}$ , con direzione ortogonale a  $r$  e all'asse dell'albero;
- *radiale*  $F_{r,i}$ , con direzione parallela a  $r$  e ortogonale all'asse dell'albero;
- *assiale*  $F_{a,i}$ , con direzione ortogonale a  $r$  e parallela all'asse dell'albero.

La forza  $F_t$  trasmette il momento torcente (1) per cui in genere può essere ricavata come:

$$F_{t,i} = T_i / R_i \quad (30.2)$$

essendo  $R_i$  la distanza del punto di applicazione della forza dall'asse dell'albero, cioè la lunghezza del segmento  $r$ . In base a quanto sopra riportato, se il componente è *ricevente*, la forza  $F_t$  ha verso *concorde* con quello della rotazione dell'albero, se il componente è *cedente* la forza  $F_t$  ha verso *opposto* a quello della rotazione.

Le forze  $F_r$  ed  $F_a$  sono generalmente proporzionali a  $F_t$  e possono essere calcolate con relazioni dipendenti dalle caratteristiche del componente. I versi delle forze dipendono dalla tipologia degli elementi calettati. Ad esempio, nel caso delle ruote dentate la forza  $F_r$  è diretta verso l'asse dell'albero, mentre nel caso di masse eccentriche collegate all'albero, l'accelerazione centripeta provoca una forza  $F_r$  con verso uscente rispetto all'asse; nel caso di ruote cilindriche a denti elicoidali il verso della forza  $F_a$  dipende dal verso di rotazione dell'albero, dal verso d'inclinazione dell'elica e dalla funzione della ruota, cioè se è ricevente o cedente.

Le forze  $F_t$  ed  $F_r$  provocano nell'albero momenti flettenti variabili linearmente con la distanza dall'ascissa  $x_i$  del punto di applicazione, mentre la forza  $F_a$  trasmette un momento flettente costante  $M_t = F_{a,i} R_i$ . Le forze  $F_t$  ed  $F_r$  provocano anche sforzi di taglio, generalmente trascurabili, e la forza  $F_a$  provoca uno sforzo normale costante.

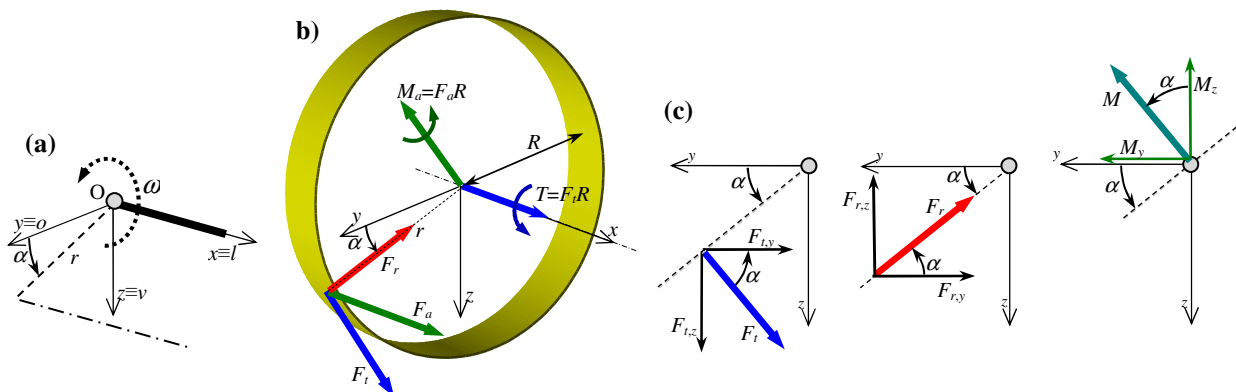


Fig.30.3 – a) Sistema d'assi, b) forze e momenti trasmessi all'albero da un generico elemento, c) angolo d'interasse  $\alpha$

In genere il segmento  $r$  può essere inclinato rispetto al piano orizzontale di un angolo  $\alpha_i$ , definito *angolo d'interasse* (fig.2), che caratterizza la posizione dell'elemento nel piano  $xy$ . Se i componenti hanno angoli d'interasse differenti, a parte il caso in cui differiscono di  $\pm\pi/2$  o  $\pm\pi$ , le forze  $F_{t,i}$  ed  $F_{r,i}$  e i momenti  $M_i$  trasmessi all'albero dai singoli componenti hanno direzioni differenti per cui è opportuno che vengano proiettati nei due piani verticale e orizzontale rispetto ai quali devono poi essere poi determinati i momenti flettenti complessivi. I moduli delle forze e dei momenti agenti nei piani orizzontale  $xy$  e verticale  $xz$  del singolo elemento possono essere ottenuti mediante le seguenti relazioni (fig.2c):

$$\begin{aligned} |F_{y,t}| &= F_t \sin \alpha & |F_{z,t}| &= F_t \cos \alpha & |M_z| &= |M \cos \alpha| \\ |F_{y,r}| &= F_r \cos \alpha & |F_{z,r}| &= F_r \sin \alpha & |M_y| &= |M \sin \alpha| \end{aligned} \quad (30.3a-f)$$

Naturalmente, se tutti gli elementi hanno lo stesso angolo d'interasse o angoli che differiscono di  $\pi/2$  o  $\pi$  (cioè  $\alpha_i = \alpha_0 \pm k\pi/2$ , con  $k=0,1,2$ ) è opportuno ruotare gli assi  $yz$  dell'angolo  $\alpha_0$  per evitare la necessità di utilizzare le (3).

Dopo che tutti i carichi trasmessi all'albero dai componenti sono stati determinati, devono essere calcolate le reazioni vincolari trasmesse dai supporti, in genere costituite da forze ortogonali all'asse dell'albero e passanti per l'asse stesso (es. nel caso di cuscinetti *a singola fila di sfere*), forze parallele all'asse dell'albero (es. cuscinetti *obliqui a sfere*, cuscinetti *assiali*) e, in alcuni casi, momenti di tipo flessionale (es. cuscinetti *a doppia fila di sfere*, cuscinetti *a rulli conici*). Le reazioni vincolari devono essere calcolate utilizzando opportunamente equazioni di equilibrio alla rotazione, nei piani orizzontale e verticale rispetto ai punti in cui sono posizionati i vincoli, e/o alla traslazione, lungo i tre assi di riferimento.

In fig.3a sono mostrate le componenti delle forze  $F$  e delle reazioni vincolari  $R$  nel caso di un albero su cui sono calettate 2 ruote dentate a denti elicoidali 1 e 2, con angolo d'interasse  $\alpha = -\pi/2$ , e vincolato agli estremi A e B con due cuscinetti. Nell'esempio, in particolare:

- l'albero ruota in verso *antiorario* rispetto all'asse  $x$  (guardando verso il piano  $yz$ ),
- le ruote hanno entrambe *elica sinistra* e sono, rispettivamente, 1 *ricevente* e 2 *cedente*,
- il cuscinetto in A esplica una reazione radiale, scomposta in orizzontale  $O_A$  e verticale  $V_A$ ,
- il cuscinetto in B esplica una reazione radiale, scomposta in orizzontale  $O_B$  e verticale  $V_B$ , e una reazione assiale  $A_B$ .

Nella fig.3b sono mostrate le forze relative alle sollecitazioni di flessione nei piani orizzontale e verticale e in fig.3c sono mostrate le forze relative alle sollecitazioni assiali e di torsione; è possibile osservare come le forze  $F_{t,1}$  ed  $F_{t,2}$  hanno versi opposti, cioè rispettivamente concorde e discorde col verso di rotazione dell'albero essendo le ruote, rispettivamente, ricevente e cedente.

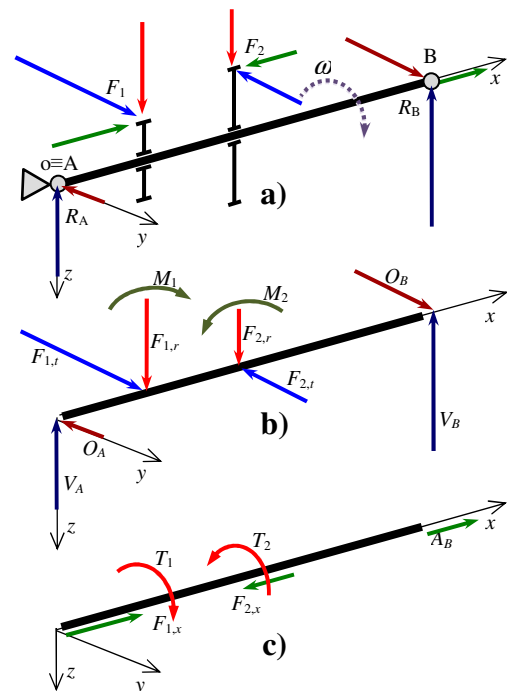


Fig.30.3 – Sollecitazioni sugli alberi: a) il sistema d'assi; b) sollecitazioni di flessione nei piani orizzontale e verticale; c) sollecitazioni assiali e torsionali.

### Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione - tensioni

Per quanto concerne la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione, ovviamente il momento flettente e lo sforzo normale agenti in ciascuna sezione dell'albero devono essere determinati considerando sia i carichi agenti che le reazioni vincolari, mentre il momento torcente agente in ogni sezione dell'albero, poiché i supporti non producono momenti di tipo torsionale che ostacolerebbero la rotazione, è dato dalla somma algebrica di tutti i momenti trasmessi dai componenti calettati su una delle due parti in cui l'albero viene diviso dalla sezione analizzata.

Generalmente il momento flettente assume valori differenti in ciascuna sezione dell'albero come si può osservare in fig.4 dove sono riportati in modo qualitativo i momenti flettenti e torcenti relativi al caso di fig.3; come detto, le forze concentrate radiali e tangenziali (come quelle trasmesse dalle ruote dentate) provocano una variazione *lineare* del momento flettente al variare dell'ascissa  $x$ , mentre le coppie concentrate (come quelle dovute alle forze assiali delle ruote elicoidali), provocano una variazione localizzata del momento (fig.4a).

Il momento torcente (es. fig.4b) agisce sulle porzioni dell'albero comprese tra gli elementi destinati alla trasmissione della potenza (ruote dentate, palettature...) e si mantiene costante tra ciascuna coppia di componenti.

Nel seguito viene analizzato il caso degli alberi a sezione circolare di diametro  $d$ , per i quali l'area della sezione e i momenti d'inerzia polare e assiale della sezione sono dati dalle seguenti espressioni:

$$A = \pi d^2/4 \quad I_o = \frac{\pi}{32} d^4 \quad I_f = \frac{\pi}{64} d^4 \quad (30.4a-b)$$

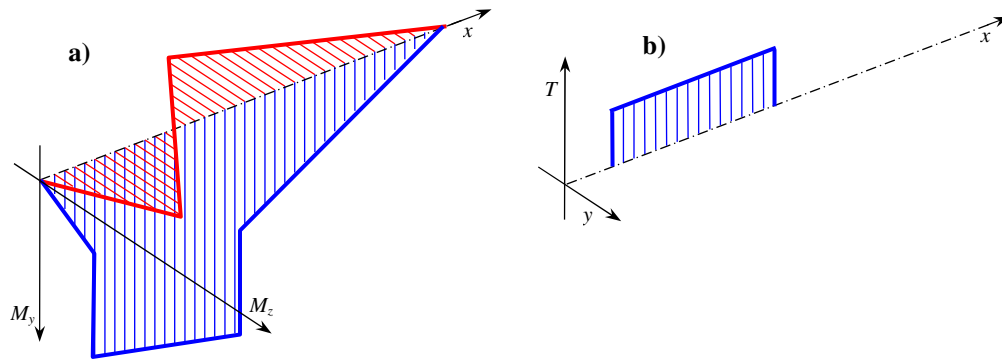


Fig.30.4 – Caratteristiche di sollecitazione nel caso di fig.4: a) momenti flettenti alternati nei piani  $xy$  e  $xz$ ; b) momento torcente medio.

In questo caso, le tensioni  $\sigma_x$  dovute allo sforzo normale sono uguali in tutti i punti della sezione, le tensioni tangenziali  $\tau_x$  dovute alla torsione sono *massime in tutti i punti a distanza  $d/2$  dal baricentro* della sezione (il centro della circonferenza) e le tensioni normali  $\sigma_x$  dovute alla flessione sono *massime nei due punti posti a distanza  $d/2$  dall'asse neutro*, essendo rispettivamente:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{4}{\pi} \frac{N}{d^2} \quad \tau_x = \frac{T}{I_o} \frac{d}{2} = \frac{16}{\pi} \frac{T}{d^3} \quad \sigma_x = \frac{M_f}{I_f} \frac{d}{2} = \frac{32}{\pi} \frac{M_f}{d^3} \quad (30.5a-c)$$

Nel caso in cui agiscono momenti flettenti nei piani  $xy$  e  $xz$ , deve essere determinato il modulo del momento flettente risultante  $M_f$  con la seguente relazione:

$$M_f = \sqrt{M_{f,y}^2 + M_{f,z}^2} \quad (30.6)$$

È importante notare che i valori delle tensioni medie e alternate, nel caso della torsione e dello sforzo normale, dipendono esclusivamente dalle *variazioni* del momento torcente e dello sforzo normale *rispetto al tempo*, mentre, nel caso della flessione, dipendono sia dalla *variazione* del momento flettente nella sezione *rispetto al tempo*, sia dalla *rotazione* dell'albero, che può modificare la distanza del punto analizzato rispetto all'asse neutro.

In particolare, se le forze agenti sull'albero hanno modulo e direzione costante, la posizione dell'asse neutro rimane costante, ma, a causa della rotazione, le distanze dall'asse neutro dei punti della sezione variano in modo sinusoidale al variare del tempo dando luogo alla cosiddetta *flessione rotante* (fig.5a). In questo caso il valore di tensione ottenuto con la (5c) coincide con quello della componente alternata  $\sigma_a$ .

Nel caso in cui le forze mantengono modulo costante, ma ruotano con la stessa velocità angolare dell'albero, come nel caso di una massa eccentrica collegata all'albero, l'asse neutro ruota con l'albero e la tensione espressa dalla (5c) rimane costante. In questo caso il valore di tensione ottenuto con la (5c) coincide con quello della componente media  $\sigma_m$ .

Come mostrato nel seguito, nell'analisi di fatica si suole mettere in relazione diretta il coefficiente di sicurezza  $n$  o il diametro della sezione da dimensionare  $d$ , con le componenti del momento flettente, del momento torcente e, in alcuni casi, dello sforzo normale, agenti nella sezione, che *provocano tensioni medie e alternate* e definiti rispettivamente come  $M_m, T_m, N_m$  ed  $M_a, T_a, N_a$ . Questo tipo di equazioni è di semplice applicazione nei casi di forze con modulo costante e direzione costante o rotante con l'albero, in base a quanto sopra riportato relativamente alle tensioni provocate dai momenti flettenti; negli altri casi può essere più pratico utilizzare formule basate sulle tensioni medie e alternate che devono essere opportunamente determinate. È opportuno sottolineare il fatto che i sistemi di forze agenti sull'albero con *direzione costante* e *direzione rotante* devono essere analizzati *separatamente*, per determinare rispettivamente i momenti flettenti medi e alternati  $M_a$  ed  $M_m$ .

### La concentrazione di tensione

Nel caso in cui nella sezione analizzata sono realizzate variazioni geometriche localizzate le (5a-c) devono essere modificate introducendo gli appositi fattori di concentrazione delle tensioni per sforzo normale, torsione e flessione, ottenibili da vari diagrammi e/o relazioni empiriche, opportunamente corretti per l'analisi di fatica:

$$\sigma_x = \frac{4}{\pi} \frac{1}{d^2} K_{f_N} N \quad \tau_x = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_T} T \quad \sigma_x = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_F} M_f \quad (30.7a-c)$$

Le principali variazioni geometriche degli alberi di trasmissione (fig.1 e appendice A.2) sono: 1) le *variazioni di diametro* negli alberi a gradino, 2) le *gole*, 3) le *cave* per l'alloggiamento di componenti. Gli elementi geometrici che descrivono le variazioni di sezione e le gole sono: il diametro maggiore  $D$ , il diametro minore  $d$  e il raggio di curvatura del raccordo o della gola  $r$ . Generalmente vengono utilizzati i parametri adimensionali  $\delta = D/d$  e  $\rho = r/d$ . Informazioni utili alla determinazione dei fattori  $K_f$  per i vari casi d'interesse sono riportate in appendice A.2.

I coefficienti di concentrazione delle tensioni a fatica si ottengono dai coefficienti geometrici  $K_f$  in base alla sensibilità del materiale, quantificata dal parametro  $q$ , mediante la relazione (15.24),  $K_f = 1 + q(K_f - 1)$ .

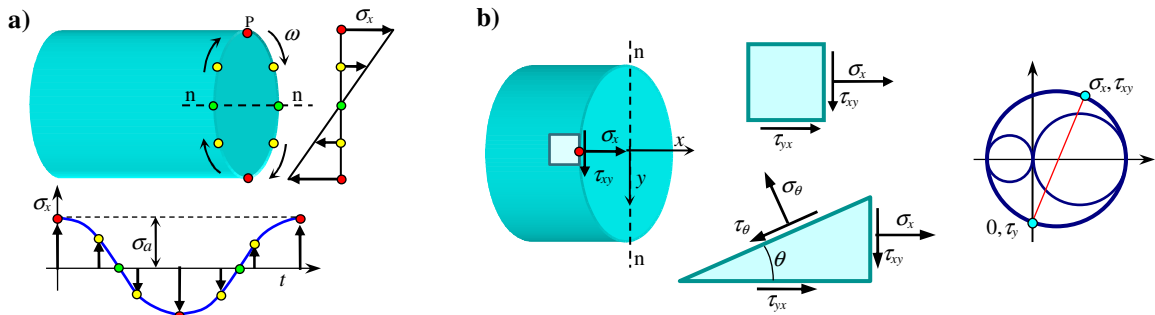


Fig.30.5 – a) La flessione rotante, b) stato tensionale del punto più sollecitato dell'albero (visto dall'alto); x direzione assiale, y circonferenziale, θ direzione generica.

**Fatica per torsione costante e flessione rotante**

Come detto, un albero rotante sottoposto a carichi di flessione aventi retta d'azione fissa e coppie torcenti costanti (fig.5,6) è sollecitato a flessione rotante a causa della rotazione stessa. In base alle (7c,b) la tensione alternata di flessione e la tensione tangenziale costante, possono essere espresse come:

$$\sigma_{x,a} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{fF} M_a \qquad \tau_{xy,m} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{fT} T_m \qquad (30.8a,b)$$

Per ottenere le tensioni in MPa è opportuno introdurre i momenti espressi in [Nmm] e le lunghezze in [mm].

Ovviamente questa coppia di valori non può essere utilizzata nel diagramma di Haigh, poiché le tensioni sono di natura diversa (normali e tangenziali) e agiscono secondo direzioni diverse. È importante notare che, al variare dell'ampiezza della tensione σ\_x durante il tempo, le tensioni principali nel punto variano sia come modulo sia come orientazione (fig.6).

Esistono svariate teorie per l'analisi di fatica che combinano le sollecitazioni (8) per la determinazione del diametro dell'albero o del coefficiente di sicurezza:

- il criterio empirico di Gough e Pollard;
- l'utilizzazione di tensioni medie e alternate *equivalenti* ottenute mediante la teoria dell'energia di distorsione (Von Mises) o della massima tensione tangenziale (Tresca);
- i metodi di piano critico, nei quali vengono determinati i valori della tensione tangenziale media e alternata effettivamente agenti in ogni giacitura e analizzata quella nella quale si verifica la sollecitazione maggiore.

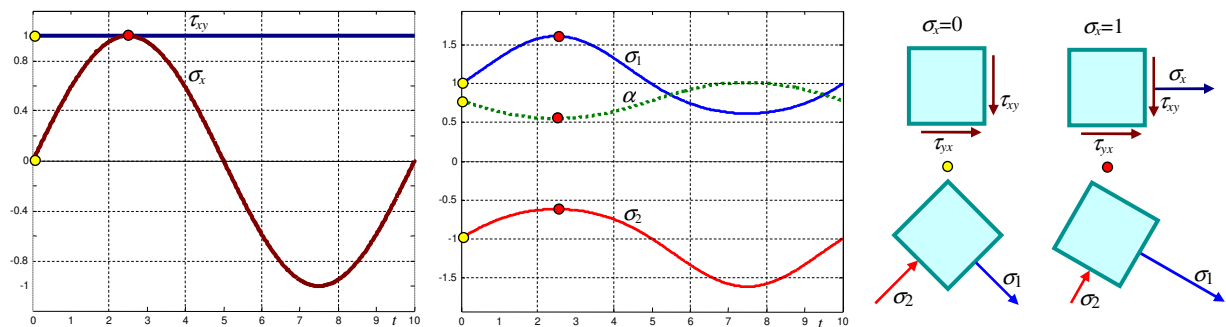


Fig.30.6 – Esempio di andamento delle tensioni durante una rotazione dell'albero (caso in cui σ\_ax=τ\_xy,m=1); da sinistra a destra: le componenti cartesiane σ\_x e τ\_xy, le tensioni principali e l'angolo α formato tra la tensione σ\_1 e l'asse x (espresso in radianti), tensioni cartesiane e principali negli istanti in cui la tensione dovuta alla flessione rotante raggiunge i valori 0 e 1.

**Criterio di Gough e Pollard - criterio di Soderberg**

Il criterio di resistenza a fatica multiassiale di Gough e Pollard, valido per sollecitazioni costituite da tensioni normali e tangenziali *agenti in fase*, fornisce la seguente relazione tra le tensioni agenti e le tensioni normali e tangenziali che rappresentano la resistenza a fatica del materiale, σ\_f e τ\_f, (nel caso degli alberi in genere si utilizzano i *limiti di fatica* a flessione rotante e torsione alternata) e il coefficiente di sicurezza n:

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_s} + \frac{\tau_a}{\tau_f}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (30.9)$$

Nel caso in analisi (τ\_a=σ\_m=0) la (9) può essere riscritta come

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_s}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (30.10)$$

Utilizzando la teoria della massima tensione tangenziale, si può scrivere  $\tau_s = \sigma_s/2$  per le sollecitazioni statiche, e, *in modo approssimato*,  $\tau_f = \sigma_f/2$  per quelle di fatica; in base a ciò, introducendo le (8) nella (10), ed esplicitando la relazione ottenuta rispetto a  $d$  e ad  $n$  si ottiene rispettivamente:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (30.11a,12a)$$

Utilizzando le relazioni (11,12), ovviamente, nella tensione di resistenza a fatica  $\sigma_f$  non deve essere considerato il coefficiente dell'effetto di intaglio ( $k_f=1$ ). Nel caso in cui l'albero è realizzato con materiale duttile, il fattore di concentrazione può essere introdotto in modo da amplificare solo la componente alternata.

Poiché i coefficienti  $K_f$  sono funzione del diametro dell'albero, la (11) deve essere risolta *in modo iterativo* come descritto nel seguito e nell'appendice A4.

Ovviamente nel caso di diametro costante (o variabile in modo continuo) i fattori  $K_f$  devono essere posti pari a uno:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\sqrt{\left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (30.11b,12b)$$

È interessante confrontare la (11b) con l'espressione relativa al dimensionamento per carichi statici ottenibile con il criterio di Tresca - vedi eq.(75) nell'ultimo paragrafo relativo alle sollecitazioni statiche - scritta come segue:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( \frac{M}{\sigma_s} \right)^2 + \left( \frac{T}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (30.13)$$

Come si vedrà nel seguito, le relazioni (11,12) possono essere ottenute anche utilizzando il criterio di Soderberg (16.18a,b), considerando le tensioni tangenziali media e alternata sul diagramma di Haigh.

In conseguenza della variabilità dei momenti flettenti e torcenti nelle sezioni (vedi fig.4), le (11) forniscono diametri variabili da sezione a sezione. I valori dei diametri ottenuti utilizzando le (11) e le curve che li rappresentano vengono definiti di *uniforme resistenza*; come detto, in genere il diametro viene fatto variare solo in alcune sezioni, cioè l'albero viene realizzato in segmenti di diametro costante opportunamente raccordati.

### La resistenza a fatica

Nelle (11,12) il valore di resistenza a fatica  $\sigma_f$  dell'albero dipende principalmente dalla finitura superficiale in base al coefficiente  $k_a$  (o  $C_s$ ) e dalle dimensioni dell'albero in base al coefficiente  $k_b$  (o  $C_g$ ), cioè

$$\sigma_f = k_a k_b \sigma'_f \quad (30.14)$$

Ulteriori informazioni sui parametri di fatica sono riportati in appendice A3.

Poiché il coefficiente  $k_b$  è funzione del diametro, il valore corretto può essere determinato risolvendo l'equazione (11) mediante la procedura iterativa con la quale vengono valutati anche i coefficienti di concentrazione delle tensioni. La procedura si effettua calcolando inizialmente un diametro di prima approssimazione mediante la (11a) introducendo un valore di  $K_f$  stimato, o intermedio, o unitario e un valore di  $k_b$  unitario; nella fase iterativa, utilizzando il valore del diametro determinato al passo precedente si calcolano i coefficienti  $K_f$  e  $k_b$  e si ricalcola il valore del diametro: se la differenza tra diametro il calcolato e quello ottenuto al passo precedente è trascurabile l'iterazione s'interrompe, viceversa viene ripetuta. La procedura è descritta in modo dettagliato nell'appendice A4.

### Il criterio di Goodman

Le relazioni (11,12) possono essere modificate in senso *meno conservativo* introducendo la tensione  $\sigma_r$  al posto di  $\sigma_s$ , come accade per il criterio di Goodman (16.5a,b):

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_r} \right)^2} \right]^{1/3} \quad n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_r} \right)^2}} \quad (30.15,16)$$

**Teoria della massima energia di distorsione**

L'utilizzazione della teoria della massima energia di distorsione prevede che si valutino separatamente le tensioni alternata e media equivalenti tramite le relazioni di Von Mises che, in questo caso di stato di tensione piano riferito a coordinate cartesiane, fornisce:

$$\sigma_{e,a} = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2} = \sqrt{\left(K_f \frac{32M_a}{\pi d^3}\right)^2 + 3(0)^2} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_f} M_a \quad (30.17)$$

$$\sigma_{e,m} = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{xym}^2} = \sqrt{(0)^2 + 3\left(K_{f_r} \frac{16T_m}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{32}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{d^3} K_{f_r} T_m \quad (30.18)$$

I valori ottenuti possono essere introdotti nei vari criteri di danneggiamento per tensioni medie e alternate per ottenere il coefficiente di sicurezza o il diametro. Si ricorda che, nel caso in cui l'albero è realizzato con materiale duttile, il fattore di concentrazione può essere introdotto in modo da amplificare solo la componente alternata.

**Soderberg - Goodman**

Se si utilizza l'approccio di Soderberg, sostituendo le due equazioni precedenti nell'equazione del coefficiente di sicurezza del criterio si ha:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} + \frac{32}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{d^3} K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \quad (30.19)$$

Risolviendo rispetto a  $d$  ed  $n$  si ottiene:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} + \frac{\sqrt{3}}{2} K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right) \right]^{1/3} \quad n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} + \frac{\sqrt{3}}{2} K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s}} \quad (30.20,21)$$

La pendenza della linea di carico sul diagramma di Haigh risulta:

$$r = \frac{\sigma_{e,a}}{\sigma_{e,m}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K_{f_f}}{K_{f_r}} \frac{M_a}{T_m} \quad (30.22)$$

Per utilizzare il criterio di Goodman è sufficiente sostituire la tensione di snervamento  $\sigma_s$  con quella di rottura  $\sigma_r$ . In questo caso è necessario verificare che la tensione massima non superi quella di snervamento.

**Gerber**

Se si utilizza l'approccio di Gerber (16.21a,b), le equazioni di progetto e verifica diventano:

$$d = \left\{ n \frac{16}{\pi} K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \left[ 1 + \sqrt{1 + 3 \left( \frac{K_{f_r} T_m \sigma_f}{K_{f_f} \sigma_r M_a} \right)^2} \right] \right\}^{1/3} \quad \frac{1}{n} = \frac{16}{\pi} K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 3 \left( \frac{K_{f_r} T_m \sigma_f}{K_{f_f} \sigma_r M_a} \right)^2} \right\} \quad (30.23,24)$$

**ASME**

Se si utilizza la relazione ellittica ASME (16.22a,b), le equazioni di progetto e verifica diventano:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (30.25,26)$$

**Caso generale**

Un caso più generale rispetto al precedente è quello in cui l'albero è soggetto a una combinazione di momenti flettenti e torcenti medi e alternati con uguale frequenza e fase:

$$\sigma_{x,m} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_f} M_m \quad \tau_{xy,m} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_T} T_m \quad (30.27,28)$$

$$\sigma_{x,a} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_f} M_a \quad \tau_{xy,a} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} K_{f_T} T_a \quad (30.29,30)$$

Casi più generali prevedono la presenza di carichi assiali fluttuanti e/o sollecitazioni agenti con diverse frequenze e fasi.

**Criterio di Gough e Pollard**

Utilizzando il criterio di Gough e Pollard (9) o la teoria della massima tensione tangenziale combinata con l'approccio di Soderberg, si ottengono le seguenti espressioni di progetto e verifica:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{K_{f_f}^2 \left( \frac{M_a}{\sigma_f} + \frac{M_m}{\sigma_s} \right)^2 + K_{f_T}^2 \left( \frac{T_a}{\sigma_f} + \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (30.31)$$

$$n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\sqrt{K_{f_f}^2 \left( \frac{M_a}{\sigma_f} + \frac{M_m}{\sigma_s} \right)^2 + K_{f_T}^2 \left( \frac{T_a}{\sigma_f} + \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (30.32)$$

**Teoria della massima energia di distorsione**

Utilizzando il criterio di Von Mises si ottengono le seguenti espressioni per le tensioni equivalenti alternate e medie:

$$\sigma_{e,a} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} \sqrt{4K_{f_f}^2 M_a^2 + 3K_{f_T}^2 T_a^2} \quad \sigma_{e,m} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{d^3} \sqrt{4K_{f_f}^2 M_m^2 + 3K_{f_T}^2 T_m^2} \quad (30.33,34)$$

che possono essere sostituite nella relazione di Soderberg ottenendo:

$$d = \left\{ n \frac{32}{\pi} \left[ \frac{1}{\sigma_f} \sqrt{K_{f_f}^2 M_a^2 + \frac{3}{4} K_{f_T}^2 T_a^2} + \frac{1}{\sigma_s} \sqrt{K_{f_f}^2 M_m^2 + \frac{3}{4} K_{f_T}^2 T_m^2} \right] \right\}^{1/3} \quad (30.35)$$

$$n = \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{\frac{1}{\sigma_f} \sqrt{K_{f_f}^2 M_a^2 + \frac{3}{4} K_{f_T}^2 T_a^2} + \frac{1}{\sigma_s} \sqrt{K_{f_f}^2 M_m^2 + \frac{3}{4} K_{f_T}^2 T_m^2}} \quad (30.36)$$



**Alberi cavi**

Gli alberi cavi hanno la sezione resistente a forma di corona circolare e vengono utilizzati principalmente per il contenimento del peso, grazie alla migliore utilizzazione del materiale dovuta al fatto che le massime tensioni dovute alla flessione e alla torsione si trovano in prossimità del diametro esterno.

Definendo  $d_i$  il diametro interno della sezione e  $\beta=d_i/d$  il rapporto tra il diametro interno e quello esterno ( $\beta=0$  per cilindro pieno), i momenti di inerzia assiale e polare della sezione a corona circolare risultano rispettivamente:

$$I_f = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}d^4(1 - \beta^4) \quad I_o = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}d^4(1 - \beta^4) \quad (30.37,38)$$

Utilizzando le (37,38) per il calcolo delle tensioni normali e tangenziali (5b,c), le (11,12a) si trasformano in

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \frac{1}{1 - \beta^4} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_t} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (30.39)$$

$$n = \frac{\pi}{32} \frac{(1 - \beta^4) d^3}{\sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_t} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2}} \quad (30.40)$$

permettendo la determinazione del diametro esterno e del coefficiente di sicurezza nel caso di alberi cavi.

Se il diametro esterno  $d$  è assegnato, la (39) può essere esplicitata rispetto a  $\beta$ :

$$\beta = \left[ 1 - n \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_t} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/4} \quad (30.41)$$

oppure, direttamente rispetto al diametro interno

$$d_i = d \left[ 1 - n \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( K_{f_t} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/4} \quad (30.42)$$

A parità di resistenza (cioè di coefficiente di sicurezza) e materiale utilizzato, il peso dell'albero cavo risulta minore di quello dell'albero pieno, anche se il diametro esterno risulta maggiore (fig.7a). Definendo  $d_c$ ,  $d_p$ ,  $P_c$ , e  $P_p$  rispettivamente diametri e pesi degli alberi cavo e pieno, valgono le seguenti relazioni:

$$d_c = d_p \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \beta^4}} \quad P_c = P_p \frac{1 - \beta^2}{\sqrt[3]{(1 - \beta^4)^2}} \quad (30.43,44)$$

A parità di peso il diametro esterno dell'albero cavo risulta maggiore, ma l'albero risulta più resistente per via della migliore utilizzazione del materiale (fig.7b). In questo caso le relazioni tra i diametri  $d_c$ , e  $d_p$  e i coefficienti di sicurezza  $n_c$  ed  $n_p$  per albero cavo e pieno sono date dalle seguenti espressioni:

$$d_c = d_p \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad n_c = n_p \frac{1 + \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (30.45,46)$$

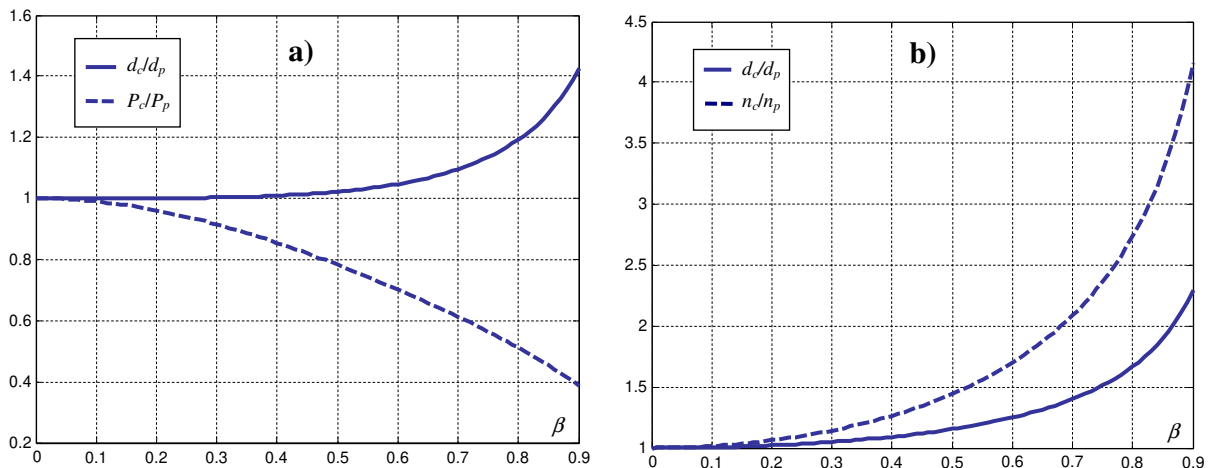


Fig.30.7 – Confronto pieno - cavo: a) rapporti  $d_c/d_p$  e  $P_c/P_p$  a parità di resistenza; b) rapporti  $d_c/d_p$  ed  $n_c/n_p$  a parità di peso.

**Determinazione del piano critico e delle tensioni tangenziali agenti**

La relazione (11) può essere ottenuta anche ricercando il piano nel quale agisce la coppia di tensioni tangenziali media e alternata più pericolosa determinata sul diagramma di Haigh in base al criterio di Soderberg. Il piano su cui agisce tale coppia di tensioni è detto *piano critico*.

**Determinazione di  $\alpha$**

La tensione tangenziale agente nel piano di generica giacitura  $n$  nel caso di stato di tensione piano può essere ottenuta dalla relazione (1.50) qui riscritta:

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{30.47}$$

nella quale  $\theta$  è l'angolo che il piano di normale  $n$  forma con l'asse  $x$  (fig.6). Ponendo a 0 la  $\sigma_y$ , sostituendo al posto di  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  le (8a,b) (trascurando i fattori  $K_f$ ) e moltiplicando la  $\sigma_x$  per  $\cos \alpha$ , la (47) può essere riscritta come:

$$\tau_\theta = -\frac{16 M_a}{\pi d^3} \sin 2\theta \cos \omega t + \frac{16 T_m}{\pi d^3} \cos 2\theta \tag{30.48}$$

Questa equazione mostra che la tensione tangenziale possiede componenti media e alternata differenti su ogni piano formante un angolo  $\theta$  con il piano orizzontale:

$$\tau_{\theta m} = \frac{16 T_m}{\pi d^3} \cos 2\theta \qquad \tau_{\theta a} = \frac{16 M_a}{\pi d^3} \sin 2\theta \tag{30.49,50}$$

Ovviamente per  $\theta=0$  (dir.  $x$ ) la tensione tangenziale alternata è nulla, mentre per  $\theta=45^\circ$  è nulla la componente media. Il rapporto tra la (50) e la (49) è il coefficiente angolare della retta di carico sul diagramma di Haigh.

**Determinazione della giacitura più sollecitata**

Le (49,50) mostrano che ogni giacitura ha uno stato di sollecitazione  $\tau_a$ - $\tau_m$  differente. Quello più pericoloso può essere trovato utilizzando il diagramma di Haigh. L'equazione della retta di Soderberg sul diagramma di Haigh è la (16.18) qui riscritta:

$$\sigma_a = \sigma_f - \frac{\sigma_f}{\sigma_s} \sigma_m \tag{30.51}$$

il cui coefficiente angolare è pari al rapporto  $-\sigma_f/\sigma_s$ .

La linea di Soderberg può essere modificata in modo approssimato per tensioni di fatica tangenziali (fig.8) utilizzando la teoria della massima tensione tangenziale ( $\tau_f = \sigma_f/2$ ,  $\tau_s = \sigma_s/2$ ). L'inclinazione della retta di Soderberg nel piano  $\tau_m$ - $\tau_a$  è uguale a quella nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$ , essendo  $\tau_f/\tau_s = \sigma_f/\sigma_s$ .

La funzione  $\tau_a = f(\tau_m)$  per  $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ , le cui coordinate sono espresse dalle (49,50), è rappresentata da un quarto di ellisse (fig.8). La linea di sicurezza è una linea tangente all'ellisse e parallela a quella di Soderberg. La giacitura più sollecitata di orientazione  $\theta = \theta'$  è quella per la quale la derivata  $d\tau_a/d\tau_m = dy/dx$  è uguale al coefficiente angolare della linea di Soderberg. Tenendo presente che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tau_a}{d\tau_m} = \frac{d\tau_a/d\theta}{d\tau_m/d\theta} \tag{30.52}$$

derivando le (49,50) rispetto ad  $\theta$  si ottiene:

$$\frac{d\tau_a}{d\theta} = \frac{d\tau_{\theta a}}{d\theta} = \frac{32 M_a}{\pi d^3} \cos 2\theta \qquad \frac{d\tau_m}{d\theta} = \frac{d\tau_{\theta m}}{d\theta} = -\frac{32 T_m}{\pi d^3} \sin 2\theta \tag{30.53,54}$$

da cui

$$\frac{d\tau_a}{d\tau_m} = -\frac{M_a}{T_m \tan 2\theta} \tag{30.55}$$

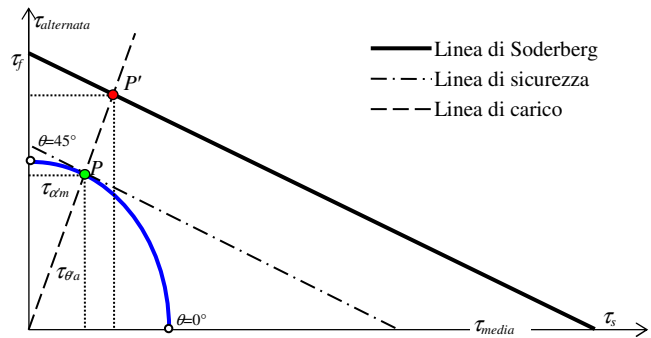


Fig.30.8 - Diagramma di Haigh e andamento delle tensioni tangenziali al variare dell'angolo  $\theta$ .

Ponendo tale derivata pari all'inclinazione della retta di Soderberg ( $-\sigma_f/\sigma_s$ ) si può determinare il valore di  $\theta'$ :

$$\tan 2\theta' = \frac{\sin 2\theta'}{\cos 2\theta'} = \frac{M_a \tau_s}{T_m \tau_f} = \frac{M_a \sigma_s}{T_m \sigma_f} = \frac{M_a \sigma_s}{\sigma_f T_m} \quad (30.56)$$

#### Determinazione del diametro o del coefficiente di sicurezza

Se si suppone che al variare del carico esterno le tensioni medie e alternate varino in modo proporzionale in base al criterio di Soderberg, il coefficiente di sicurezza nel piano  $\tau_m$ - $\tau_a$  è espresso dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{n} = \frac{\tau_a}{\tau_f} + \frac{\tau_m}{\tau_s} = \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \quad (30.57)$$

ricordando che  $\sigma_s=2\tau_s$ ,  $\sigma_f=2\tau_f$ , sostituendo le tensioni tangenziali media (49) e alternata e (50), nelle quali sia  $\theta=\theta'$ , la (57) diventa

$$\frac{1}{n} = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \sin 2\theta' + \frac{T_m}{\sigma_s} \cos 2\theta' \right) \quad (30.58)$$

Esplicitando rispetto a  $d$  si ottiene:

$$d = \left[ n \frac{32}{\pi} \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \sin 2\theta' + \frac{T_m}{\sigma_s} \cos 2\theta' \right) \right]^{1/3} \quad (30.59)$$

Effettuando i passaggi di seguito riportati si può dimostrare che la (59) coincide con la (11). Ponendo:

$$K = \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \sin 2\theta' + \frac{T_m}{\sigma_s} \cos 2\theta' \right) \quad (30.60)$$

elevando al quadrato si ottiene:

$$K^2 = \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 \sin^2 2\theta' + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 2\theta' + 2 \frac{M_a T_m}{\sigma_f \sigma_s} \sin 2\theta' \cos 2\theta' \quad (30.61)$$

utilizzando l'identità trigonometrica fondamentale relativa a  $\sin^2 2\theta$  e  $\cos^2 2\theta$

$$K^2 = \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 - \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 \cos^2 2\theta' - \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \sin^2 2\theta' + 2 \frac{M_a T_m}{\sigma_f \sigma_s} \sin 2\theta' \cos 2\theta', \quad (30.62)$$

e separando i termini senza funzioni trigonometriche, si ottiene

$$K^2 = \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 \cos^2 2\theta' + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \sin^2 2\theta' - 2 \frac{M_a T_m}{\sigma_f \sigma_s} \sin 2\theta' \cos 2\theta' \right] \quad (30.63)$$

La (63) può essere riscritta come:

$$K^2 = \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right) \cos 2\theta' - \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right) \sin 2\theta' \right]^2 \quad (30.64)$$

Utilizzando la (56) si può porre:

$$\frac{M_a}{\sigma_f} = \frac{T_m}{\sigma_s} \tan 2\theta' = \frac{T_m \sin 2\theta'}{\sigma_s \cos 2\theta'} \quad (30.65)$$

Sostituendo questa relazione nel secondo termine in parentesi quadre a destra nella (64) si ottiene:

$$K^2 = \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right) \sin 2\theta' - \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right) \sin 2\theta' \right]^2 = \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \quad (30.66)$$

Uguagliando il termine di destra della (64) a quello di sinistra della (66) si ottiene:

$$\left( \frac{M_a}{\sigma_f} \sin 2\theta' + \frac{T_m}{\sigma_s} \cos 2\theta' \right)^2 = \left[ \left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad (30.67)$$

e infine

$$\frac{M_a}{\sigma_f} \sin 2\theta' + \frac{T_m}{\sigma_s} \cos 2\theta' = \sqrt{\left( \frac{M_a}{\sigma_f} \right)^2 + \left( \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \quad (30.68)$$

Sostituendo il termine di destra della (68) al posto del termine tra parentesi tonda nella (59) si ottiene la (11).

### Analisi per carichi statici

Le equazioni di progetto e verifica per carichi statici sono di utilità per alberi che trasmettono il momento torcente senza rimanere in rotazione.

Nel caso di flessione, sforzo normale e torsione le tensioni agenti in un punto della superficie di un albero a sezione circolare pieno, di diametro  $d$ , soggetto a flessione, sforzo normale e torsione sono:

$$\sigma_x = \frac{32 M}{\pi d^3} + \frac{4 F}{\pi d^2} \quad \tau_{xy} = \frac{16 T}{\pi d^3} \quad (30.69,70)$$

La componente assiale della tensione normale può essere additiva o sottrattiva.

Nel caso di materiali duttili queste tensioni possono essere combinate per ottenere le tensioni equivalenti di Tresca e Von Mises:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (30.71,72)$$

essendo le due tensioni principali non nulle ottenibili mediante la (1.44). Sostituendo le (69,70) a destra nelle (71,72) si ottiene:

$$\sigma_e = \frac{4}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Fd)^2 + 64T^2} \quad \sigma_e = \frac{4}{\pi d^3} \sqrt{(8M + Fd)^2 + 48T^2} \quad (30.73,74)$$

Queste equazioni possono essere usate per determinare il diametro  $d$  o il coefficiente di sicurezza  $n$  imponendo l'uguaglianza con la tensione ammissibile  $\sigma_{am} = \sigma_s/n$  ed esplicitando le equazioni rispetto alla grandezza desiderata:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \frac{n}{\sigma_s} \left[ (8M + Fd)^2 + 64T^2 \right]^{1/6}} \quad d = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \frac{n}{\sigma_s} \left[ (8M + Fd)^2 + 48T^2 \right]^{1/6}} \quad (30.75,76)$$

$$n = \frac{\pi}{4} d^3 \frac{\sigma_s}{\sqrt{(8M + Fd)^2 + 64T^2}} \quad n = \frac{\pi}{4} d^3 \frac{\sigma_s}{\sqrt{(8M + Fd)^2 + 48T^2}} \quad (30.77,78)$$

Le relazioni (75,76) possono essere risolte con una procedura iterativa descritta in appendice A3.

Quando il carico assiale può essere trascurato, le (75,76) possono essere risolte facilmente per ricavare il diametro; sostituendo i valori delle tensioni ammissibili nell'espressione della teoria della massima tensione tangenziale o in quella del lavoro di distorsione si ottiene:

$$d = \left[ \frac{32}{\pi} \frac{n}{\sigma_s} \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{1/3} \quad d = \left[ \frac{16}{\pi} \frac{n}{\sigma_s} \sqrt{4M^2 + 3T^2} \right]^{1/3} \quad (30.79,80)$$

Se il diametro è noto può essere ricavato il coefficiente di sicurezza:

$$n = \frac{\pi}{32} d^3 \frac{\sigma_s}{\sqrt{M^2 + T^2}} \quad n = \frac{\pi}{16} d^3 \frac{\sigma_s}{\sqrt{4M^2 + 3T^2}} \quad (30.81,82)$$

## APPENDICI

### A1. Determinazione dei carichi trasmessi agli alberi da alcuni elementi meccanici

#### A1.1 Ruote dentate

Adottando il sistema di riferimento di fig.1, si definisce:

- $r$  il segmento ortogonale all'asse dell'albero, congiungente l'asse con il punto di applicazione della forza scambiata tra le ruote dentate, di lunghezza pari al raggio della primitiva della ruota analizzata,  $r_p$ ;
- $\alpha$  l'angolo d'interasse formato dal segmento  $r$  con l'asse  $y$ .

Le ruote cilindriche e coniche trasmettono all'albero le seguenti forze e momenti (fig.1a):

- *momento torcente*  $T$ , vettore parallelo all'asse dell'albero, verso *concorde* con quello della rotazione dell'albero per le ruote *riceventi*, opposto per quelle *cedenti*;
- *forza tangenziale*  $F_t$ , con direzione ortogonale a  $r$  e all'asse dell'albero, verso *concorde* con quello della rotazione dell'albero per le ruote *riceventi*, opposto per quelle *cedenti*;
- *forza radiale*  $F_r$ , parallela a  $r$ , ortogonale all'asse dell'albero, diretta verso l'asse dell'albero;

Le ruote cilindriche a denti elicoidali e le ruote coniche trasmettono anche:

- *forza assiale*  $F_a$ , con direzione ortogonale a  $r$  e parallela all'asse dell'albero: nel caso delle ruote coniche, è diretta verso la base del cono (a sinistra, a destra) (fig.2), nel caso delle ruote cilindriche a denti elicoidali, il verso dipende dal verso di rotazione dell'albero, dal verso di avvolgimento dell'elica e dalla funzione della ruota, cioè se è ricevente o cedente (Tab.1);
- *momento flettente*  $M_a$ , vettore perpendicolare al piano contenente l'asse dell'albero e la forza  $F_a$ .

Da notare che:

- nel caso delle ruote coniche con semiangolo  $\gamma=45^\circ$ , la forza radiale agente su una delle ruote è uguale a quella assiale agente sull'altra e viceversa; in particolare per ruote *riceventi* e *cedenti* si ha:  $F_r=F_a$ ,  $F_a=F_r$ ;
- nel caso delle ruote coniche a denti elicoidali i moduli delle forze assiali e radiali dipendono dalla posizione della base del cono (a sinistra, a destra - fig.2), dal verso di rotazione dell'albero (antiorario, orario - fig.1b) e dal verso di avvolgimento dell'elica (sinistra, destra - fig.2, Tab.1).

I parametri necessari per la determinazione dei moduli e delle direzioni delle forze trasmesse dalle ruote dentate sono:

- $P$  potenza ricevuta o trasmessa dalla ruota,
- $\omega$  velocità angolare dell'albero,
- $r_p$  raggio della circonferenza primitiva ( $r_p=d_p/2$ ),
- $\phi/\phi_t$  angolo di pressione ortogonale all'asse della ruota (ruote a denti dritti/ruote a denti elicoidali),
- $s_\omega$  verso di rotazione dell'albero antiorario - orario ( $\pm 1$ ),
- $s_{rc}$  funzione della ruota ricevente - cedente ( $\pm 1$ ),
- $\psi$  angolo d'inclinazione dell'elica (ruote elicoidali),
- $s_e$  verso di avvolgimento dell'elica sinistra - sinistra ( $\pm 1$ ) (ruote elicoidali, fig.2),
- $\gamma$  semi-angolo cono primitivo (ruote coniche),
- $s_c$  posizione base della ruota conica sinistra - destra ( $\pm 1$ ) (ruote coniche, fig.2),

Le formule di calcolo delle forze trasmesse dalle ruote dentate sono riassunte in tabella 2; in tabella 3 sono riportate le componenti cartesiane delle forze per i casi di angolo d'interasse pari a  $\alpha=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  mostrati in fig.1b.

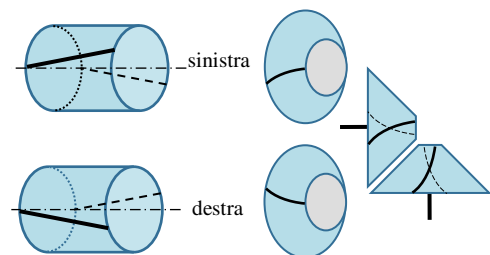
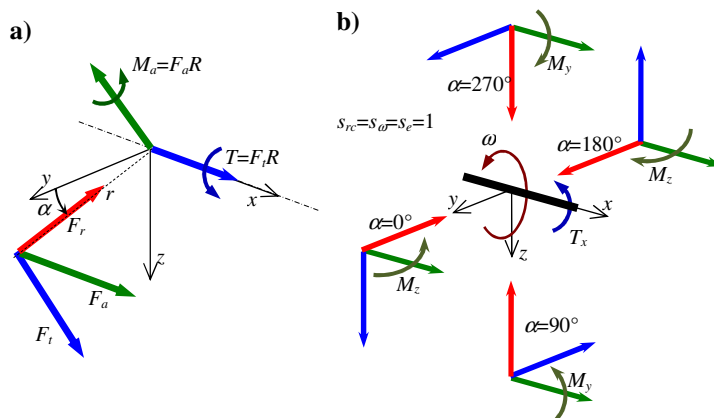


Fig.A1.1 - Forze trasmesse dalle ruote dentate: a) componenti  $T, F_t, F_r, F_a, M_a$ ; b) componenti cartesiane nei casi di  $\alpha=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  per ruota cilindrica a denti elicoidali ricevente, rotazione antioraria, elica sinistra.

Fig.A1.2 - Verso di avvolgimento dell'elica; base del cono a sinistra.

| Verso forza assiale nelle ruote cilindriche a denti elicoidali |                      |                     |                      | Parametro $s$ nelle ruote coniche a denti elicoidali |                    |                                   |                   |  |
|--|----------------------|---------------------|----------------------|--|--------------------|-----------------------------------|-------------------|--|
| $F_{a,r}+$   |                      | $F_{a,r}-$          |                      | convesso $s=s_{\omega} s_e s_c=1$                    |                    | concavo $s=s_{\omega} s_e s_c=-1$ |                   |  |
| cedente $s_{rc}=-1$  | ricevente $s_{rc}=1$ | cedente $s_{rc}=-1$ | ricevente $s_{rc}=1$ | c sinistra $s_c=1$                                   | c destra $s_c=-1$  | c sinistra $s_c=1$                | c destra $s_c=-1$ |  |
| e destra $s_e=-1$  | e sinistra $s_e=1$   | e sinistra $s_e=1$  | e destra $s_e=-1$    | e destra $s_e=-1$                                    | e sinistra $s_e=1$ | e sinistra $s_e=1$                | e destra $s_e=-1$ |  |
| $\omega$ ,<br>anti<br>oraria<br>$s_{\omega}=1$                 |                      |                     |                      |  |                    |                                   |                   |  |
| $\omega$ ,<br>oraria<br>$s_{\omega}=-1$                        |                      |                     |                      |  |                    |                                   |                   |  |

Tab.A1.1 - Ruote elicoidali: verso forze assiali ruote cilindriche, parametro  $s$  ruote coniche.

| FORZE RUOTE DENTATE   |  |  |  |  |                |
|---|--|--|--|--|----------------|
| Moduli forze e momenti  | Componenti cartesiane forze e momenti  |  | $s$  | +1   | -1             |
| $T$ momento torcente  | $F_x, F_y, F_z$ componenti cartesiane forze  |  | $s_{\omega}$ verso rotazione $\omega$  | antioraria                                   | oraria         |
| $F_t$ forza tangenziale   | $M_y, M_z$ momenti nei piani $xz, yz$  |  | $s_{rc}$ ricevente/cedente   | ricevente                                    | cedente        |
| $F_r$ forza radiale   | $M_x$ momento torcente   |  | $s_e$ verso elica  | sinistra                                     | destra         |
| $F_a$ forza assiale   |  |  | $s_b$ posizione base cono  | sinistra                                     | destra         |
| $M_a$ momento dovuto a $F_a$                                      |  |  | $s_{arc}=s_{\omega} s_{rc}$  | ant-ric/or-ced                               | ant-ced/or-ric |
| $T = P/\omega = 9.55 P/n$   |  |  |  |  |                |
| $F_t =  T /r_p$   |  |  |  |  |                |
| CILINDRICHE   |  | CONICHE  |  |  |                |
| Denti dritti  | Denti elicoidali   | Denti dritti   | Denti elicoidali   |  |                |
| $F_r = F_t \tan \phi$   | $F_r = F_t \tan \phi_t$  | $F_r = F_t \tan \phi \cos \gamma$  | $F_{a_r} = F_{r_c} = F_t (\tan \phi_t \cos \gamma + s_c \tan \psi \sin \gamma)$  |  |                |
| —   | $F_a = F_t \tan \psi$  | $F_a = F_t \tan \phi \sin \gamma$  | $F_{r_r} = F_{a_c} = F_t (\tan \phi_t \sin \gamma - s_c \tan \psi \cos \gamma)$  |  |                |
| —   | $M_a = F_a r_p = T \tan \psi$  | $M_a = F_a r_p$  | $M_a = F_a r_p$  |  |                |
|   |  |  | $s_c = s_{\omega} s_e s_b$   |  |                |
|   | $\tan \phi_t = \tan \phi_n / \cos \psi$  |  | $\tan \phi_t = \tan \phi_n / \cos \psi$  |  |                |
| $r_p$ =raggio primitiva<br>$\phi$ =ang. press.                    | $r_p$ =raggio primitiva<br>$\phi$ =ang. press. ortogonale asse ruota<br>$\phi_n$ =ang. press. ortogonale elica<br>$\psi$ =ang. incl. elica | $r_p$ =raggio primitiva<br>$\phi$ =ang. press.<br>$\gamma$ =semi-ang. cono primitivo | $r_p$ =raggio primitiva<br>$\phi$ =ang. press. ortogonale asse ruota<br>$\phi_n$ =ang. press. ortogonale elica<br>$\psi$ =ang. incl. Elica<br>$\gamma$ =semi-ang. cono primitivo |  |                |
| COMPONENTI CARTESIANE   |  |  |  |  |                |
| Azioni nel piano $xy$   |  | Azioni nel piano $xz$  |  | Direzione assiale $x$                        |                |
| $F_y = -F_r \cos \alpha - s_{\omega rc} F_t \sin \alpha$          |  | $F_z = -F_r \sin \alpha + s_{\omega rc} F_t \cos \alpha$                             |  | $T_x = s_{\omega rc} T$                      |                |
| $M_z = -F_x r_p \cos \alpha = -s_{\omega rc} s_e M_a \cos \alpha$ |  | $M_y = F_x r_p \sin \alpha = s_{\omega rc} s_e M_a \sin \alpha$                      |  | cilindriche<br>$F_x = s_{\omega rc} s_e F_a$ |                |
|   |  |  |  | coniche<br>$F_x = -s_c F_a$                  |                |

Tab.A1.2 - Forze trasmesse dalle ruote dentate: moduli nelle direzioni tangenziale, radiale e assiale - componenti cartesiane secondo il sistema d'assi di fig.1.

| $\alpha$ | piano $xy$                    | piano $xz$                    | direzione $x$               |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 0        | $F_y = \mp F_r$               | $F_z = \pm s_{\omega rc} F_t$ | $M_x = s_{\omega rc} T$     |
| 180°     | $M_z = \mp F_x r_p$           | $M_y = 0$                     |                             |
| 90°      | $F_y = \mp s_{\omega rc} F_t$ | $F_z = \mp F_r$               | coniche<br>$F_x = -s_c F_a$ |
| 270°     | $M_z = 0$                     | $M_y = \pm F_x r_p$           |                             |

Tab.A1.3 - Componenti cartesiane delle forze secondo il sistema d'assi di fig.1 nei casi di  $\alpha=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  riportati in fig.2.

Il raggio della circonferenza primitiva  $r_p$  può essere posto in relazione con i seguenti parametri delle ruote dentate:

- $N$  numero di denti,
- $m/m_t$  modulo normale all'asse della ruota (trasversale),
- $p/p_t$  passo ortogonale all'asse della ruota,
- $m_n, p_n$  modulo e passo ortogonale ai denti (normale)

mediante le relazioni:

$$r_p = m N/2 = N p/2\pi \tag{A1.1a}$$

$$r_p = m_t N/2 = N p_t/2\pi \tag{A1.1b}$$

essendo, per le ruote a denti elicoidali:

$$m_t = m_n / \cos \psi \tag{A1.2}$$

$$p_t = p_n / \cos \psi \tag{A1.3}$$

Il raggio della circonferenza primitiva può essere posto in relazione con i seguenti parametri del collegamento tra gli alberi:

- $\rho$  rapporto di trasmissione,
- $I_a$  distanza d'interasse,

mediante le relazioni:

$$r_{p,1} = r_{p,2} / \rho_{12} \qquad r_{p,1} = r_{p,2} \rho_{21} \tag{A1.4,5}$$

$$r_{p,1} = \frac{I_a}{1 + \rho_{12}} \qquad d_{p,1} = \frac{I_a}{1 + 1/\rho_{21}} \tag{A1.6,7}$$

essendo il rapporto di trasmissione tra due ruote definito come

$$\rho_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{d_{p,2}}{d_{p,1}} = \frac{1}{\rho_{21}} \tag{A1.8}$$

**A1.2 Flessibili**

Nelle trasmissioni di potenza mediante cinghia e pulegge, con riferimento alla fig.3, i parametri necessari per la determinazione delle forze trasmesse sono:

- $d$  diametro puleggia collegata all'albero analizzato;
- $d_a$  diametro dell'altra puleggia;
- $I_a$  distanza d'interasse;
- $f$  coefficiente d'attrito;
- $\alpha$  angolo d'interasse;
- $s_\omega$  verso di rotazione dell'albero antiorario - orario ( $\pm 1$ ),
- $s_{rc}$  funzione della puleggia ricevente - cedente ( $\pm 1$ ),

dai quali possono essere calcolati:

- $\theta$  angolo di avvolgimento della cinghia sulla puleggia;
- $\beta$  angolo d'inclinazione del ramo della cinghia rispetto al segmento d'interasse.
- $s_{\omega rc}$  verso di rot. e funzione pul.  $s_{\omega rc} = s_\omega s_{rc}$ , ant-ric/or-ced (+1), ant-ced/or-ric (-1)

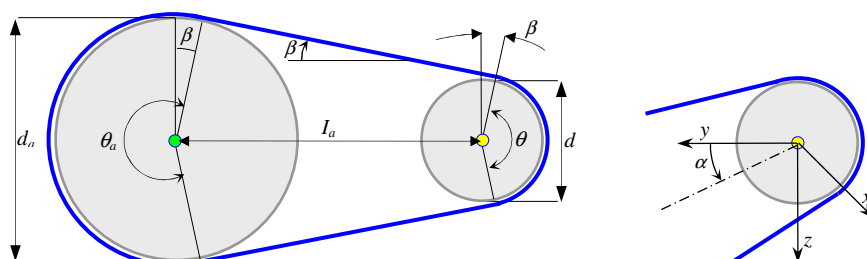


Fig.A1.3 - Parametri geometrici della trasmissione a cinghia, sistema d'assi.

La forza  $F$  trasmessa all'albero è la risultante delle forze che agiscono sui due rami della cinghia; con riferimento alla fig.4, dalla quale è possibile determinare la posizione dei rami della cinghia, si definiscono:

- $F_T$  forza agente sul ramo teso della cinghia, che ha direzione concorde con il verso di rotazione della puleggia per puleggia ricevente e viceversa;
- $F_t$  forza agente sul ramo lasco della cinghia.

La forza  $F$  può essere scomposta in due componenti (fig.4), essendo:

- $F_I$  forza parallela alla direzione d'interasse, diretta verso l'altra puleggia;
- $F_O$  forza ortogonale alla direzione d'interasse, con verso dipendente dal segno dell'angolo  $\beta$  e dalla posizione del ramo teso della cinghia rispetto all'interasse che, a sua volta, dipende dalla funzione della puleggia, cioè se è ricevente o cedente, e dal verso di rotazione della puleggia (fig.4);
- $\phi$  angolo tra il segmento d'interasse e la forza  $F$ .

Le formule di calcolo delle forze trasmesse dalle pulegge sono riassunte in tabella 4.

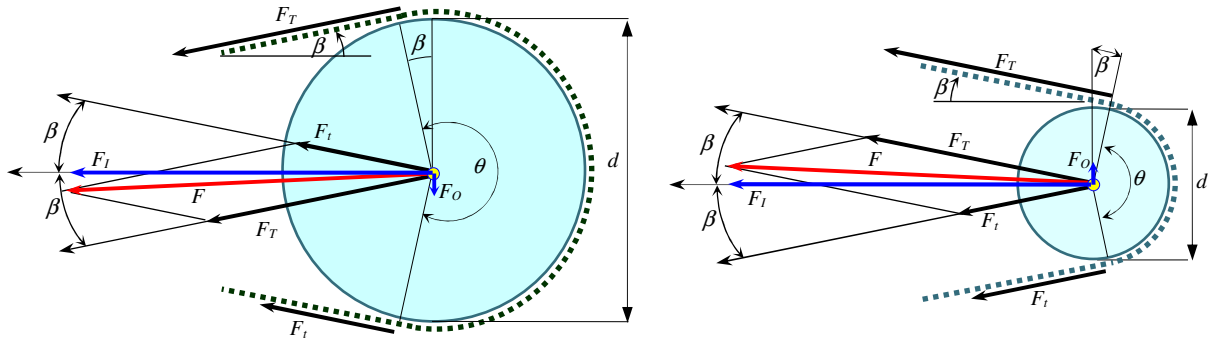


Fig.A1.4 - Forze nella trasmissione a cinghia; la posizione del ramo teso è relativo ai casi di pulegge riceventi e verso di rotazione antiorario o di pulegge cedenti e verso di rotazione orario; nei casi di pulegge riceventi e verso di rotazione orario o pulegge cedenti e verso di rotazione antiorario, le posizioni dei rami teso e lasco sono invertite.

| FORZE FLESSIBILI |   |   |  |
|------------------|---|---|--|
| $F$              | forza trasmessa all'albero  | $F_T, F_t$ forze agenti sui rami teso e lasco della cinghia                 |  |
| $F_I, F_O$       | componenti parallela e ortogonale all'interasse                           | $\theta$ angolo di avvolgimento della cinghia sulla puleggia;               |  |
| $\phi$           | angolo tra segmento interasse e forza $F$                                 | $\beta$ angolo inclinazione rami cinghia rispetto segmento interasse        |  |
| $d$              | diametro puleggia collegata all'albero                                    | $s$   | +1   |
| $d_a$            | diametro dell'altra puleggia  | $s_{\omega}$ rotazione $\omega$   | antioraria   |
| $I_a$            | distanza d'interasse  | $s_{rc}$ ricevente/cedente  | ricevente  |
| $\alpha$         | angolo d'interasse  | $s_{orc}=s_{\omega}s_{rc}$  | ant-ric/or-cred  |
| $f$              | coefficiente d'attrito  |   | -1   |
|                  | <b>ANGOLI</b>   | <b>FORZE NEI RAMI DELLA CINGHIA</b>   |  |
| $\theta$         | $\theta = \pi + 2 \sin^{-1} \frac{d-d_a}{2I_a}$                           | $F_T$   | $F_T = \frac{e^{f\theta} - 1}{e^{f\theta} + 1} \frac{2 T }{d}$             |
| $\beta$          | $\beta = \tan^{-1} \frac{d-d_a}{2I_a}$                                    | $F_t$   | $F_t = \frac{1}{e^{f\theta} + 1} \frac{2 T }{d} = \frac{F_T}{e^{f\theta}}$ |
|                  | <b>FORZE NELLE DIREZIONI D'INTERASSE E ORTOGONALE</b>                     |   |  |
| $F_I$            | $F_I = \frac{e^{f\theta} + 1}{e^{f\theta} - 1} \frac{2 T }{d} \cos \beta$ | $F_I = (F_T + F_t) \cos \beta$  |  |
| $F_O$            | $F_O = \frac{2 T }{d} \sin \beta$   | $F_O = (F_T - F_t) \sin \beta$  |  |
| $ F $            | $ F  = \sqrt{F_I^2 + F_O^2}$  | $ F  = \sqrt{F_T^2 + F_t^2 + 2F_T F_t \cos 2\beta}$                         |  |
| $\phi$           | $\phi = \tan^{-1} \frac{F_O}{F_I}$  | $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{F_T - F_t}{F_T + F_t} \tan \beta \right)$    |  |
|                  | <b>COMPONENTI CARTESIANE</b>  |   |  |
| $F_y$            | $F_y = F_I \cos \alpha - s_{orc} F_O \sin \alpha$                         | $F_y = F_T \cos(\alpha + s_{orc} \beta) + F_t \cos(\alpha - s_{orc} \beta)$ |  |
| $F_z$            | $F_z = F_I \sin \alpha + s_{orc} F_O \cos \alpha$                         | $F_z = F_T \sin(\alpha + s_{orc} \beta) + F_t \sin(\alpha - s_{orc} \beta)$ |  |

Tab.A1.4 - Forze nelle trasmissioni a cinghia: forze nei rami delle cinghie, forze trasmesse all'albero nelle direzioni d'interasse e normale, componenti cartesiane secondo il sistema d'assi di fig.3.



**A2. Determinazione dei fattori di concentrazione delle tensioni**

Nel caso delle *variazioni di diametro* e delle *gole*, con riferimento alla fig.A2.1, i fattori di concentrazione delle tensioni per flessione  $K_{tF}$  e torsione  $K_{tT}$  possono essere ricavati mediante le relazioni di seguito riportate in ordine di applicazione:

$$t = (D - d)/2 \quad \delta = 2t/D \quad \rho = t/r \quad (A2.1.3)$$

$$C_k = \sum_{j=1}^3 a_{k,j} \rho^{\frac{j-1}{2}} = a_{k,1} + a_{k,2} \rho^{0.5} + a_{k,3} \rho \quad k = 1, \dots, 4 \quad (A2.1.4)$$

$$K_{tF} / K_{tT} = \sum_{k=1}^4 C_k \delta^{k-1} = C_1 + C_2 \delta + C_3 \delta^2 + C_4 \delta^3 \quad (A2.1.5)$$

Nel caso di discontinuità geometrica costituita da *variazione di diametro* (fig.1a)  $t$  è la differenza tra i raggi,  $r$  è il raggio di curvatura del raccordo e le costanti  $a_{k,j}$  sono riportate in tabella 1.

Nel caso di discontinuità geometrica costituita dalla presenza di una *gola* (fig.1b),  $t$  ed  $r$  sono rispettivamente la profondità e il raggio di curvatura della gola; le costanti  $a_{k,j}$  sono riportate in tabella 2.

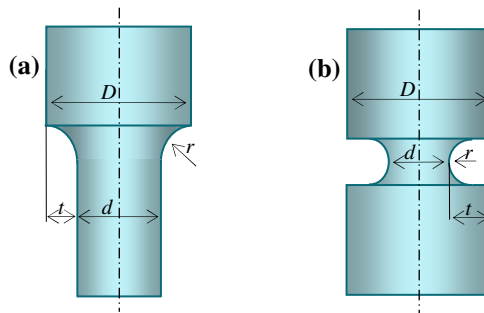


Fig.A2.1 - Parametri per la determinazione dei fattori di concentrazione delle tensioni: a) variazione di diametro, b) gola, c) cava.

| $a_{k,j}$ Flessione      |        |        |                           |        |        | $a_{k,j}$ Torsione        |        |        | $a_{k,j}$ Normale         |        |        |                           |        |        |
|--------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|
| $0.1 \leq \rho \leq 2.0$ |        |        | $2.0 \leq \rho \leq 20.0$ |        |        | $0.25 \leq \rho \leq 4.0$ |        |        | $0.25 \leq \rho \leq 2.0$ |        |        | $2.0 \leq \rho \leq 20.0$ |        |        |
| 0.947                    | 1.206  | -0.131 | 1.232                     | 0.832  | -0.008 | 0.905                     | 0.783  | -0.075 | 0.926                     | 1.157  | -0.099 | 1.200                     | 0.860  | -0.022 |
| 0.022                    | -3.405 | 0.915  | -3.813                    | 0.968  | -0.260 | -0.437                    | -1.969 | 0.553  | 0.012                     | -3.036 | 0.961  | -1.805                    | -0.346 | -0.038 |
| 0.869                    | 1.777  | -0.555 | 7.423                     | -4.868 | 0.869  | 1.557                     | 1.073  | -0.578 | -0.302                    | 3.977  | -1.744 | 2.198                     | -0.486 | 0.165  |
| -0.810                   | 0.422  | -0.260 | -3.839                    | 3.070  | -0.600 | -1.061                    | 0.171  | 0.086  | 0.365                     | -2.098 | 0.878  | -0.593                    | -0.028 | -0.106 |

Tab.A2.1 - Variazione di diametro: coefficienti  $a_{k,j}$  per il calcolo dei fattori  $K$ , a flessione (sinistra), torsione (centro), sforzo normale (destra).

| $a_{k,j}$ Flessione       |         |        |                           |        |        | $a_{k,j}$ Torsione        |         |        |                           |        |        | $a_{k,j}$ Normale         |        |        |                           |        |        |
|---------------------------|---------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|---------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|
| $0.25 \leq \rho \leq 2.0$ |         |        | $2.0 \leq \rho \leq 50.0$ |        |        | $0.25 \leq \rho \leq 2.0$ |         |        | $2.0 \leq \rho \leq 50.0$ |        |        | $0.25 \leq \rho \leq 2.0$ |        |        | $2.0 \leq \rho \leq 50.0$ |        |        |
| 0.455                     | 3.354   | -0.769 | 0.935                     | 1.922  | 0.004  | 1.245                     | 0.264   | 0.491  | 1.651                     | 0.614  | 0.040  | 0.890                     | 2.208  | -0.094 | 1.037                     | 1.967  | 0.002  |
| 0.891                     | -12.721 | 4.593  | -0.552                    | -5.327 | 0.086  | -3.030                    | 3.269   | -3.633 | -4.794                    | -0.314 | -0.217 | -0.923                    | -6.678 | 1.638  | -2.679                    | -2.980 | -0.053 |
| 0.286                     | 15.481  | -6.392 | 0.754                     | 6.281  | -0.121 | 7.199                     | -11.286 | 8.318  | 8.457                     | -0.962 | 0.389  | 2.893                     | 6.448  | -2.516 | 3.090                     | 2.124  | 0.165  |
| -0.632                    | -6.115  | 2.568  | -0.138                    | -2.876 | 0.031  | -4.414                    | 7.753   | -5.176 | -4.314                    | 0.662  | -0.212 | -1.912                    | -1.944 | 0.963  | -0.424                    | -1.153 | -0.106 |

Tab.A2.2 - Gola: coefficienti  $a_{k,j}$  per il calcolo dei fattori  $K$  a flessione (sinistra), torsione (centro), sforzo normale (destra).

**Variazioni diametro**

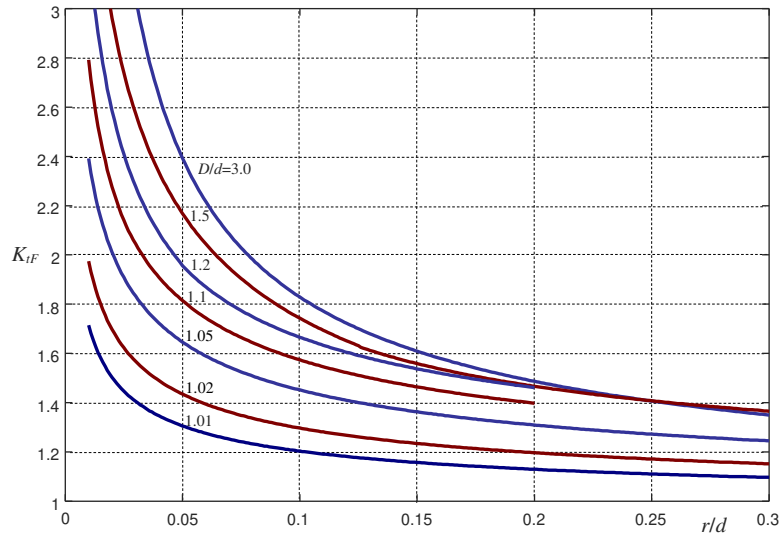


Fig.A2.2 – Fattori di concentrazione  $K_{tF}$  (Flessione) per variazione di diametro.

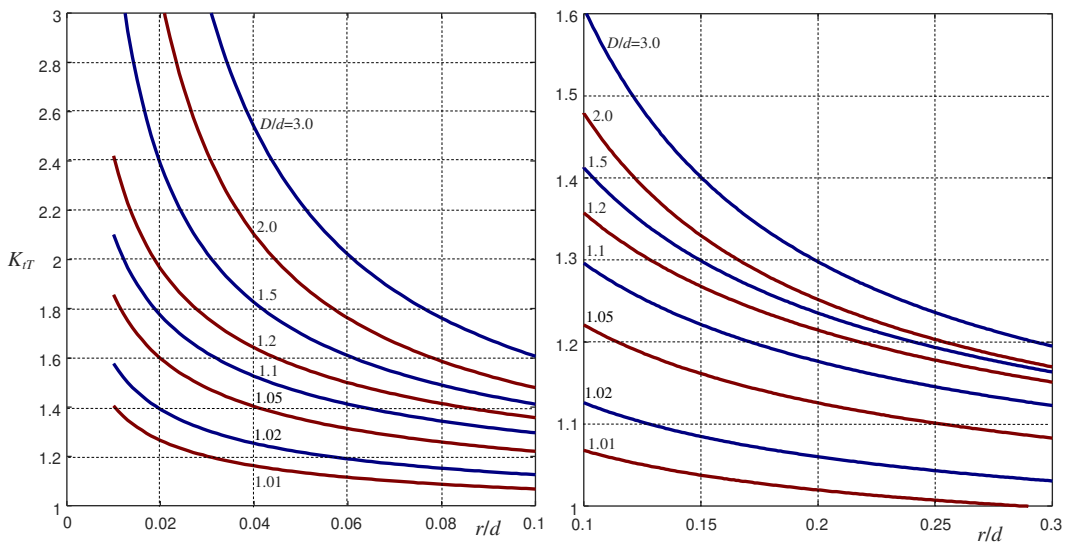


Fig.A2.3 – Fattori di concentrazione  $K_{tT}$  (Torsione) per variazione di diametro.

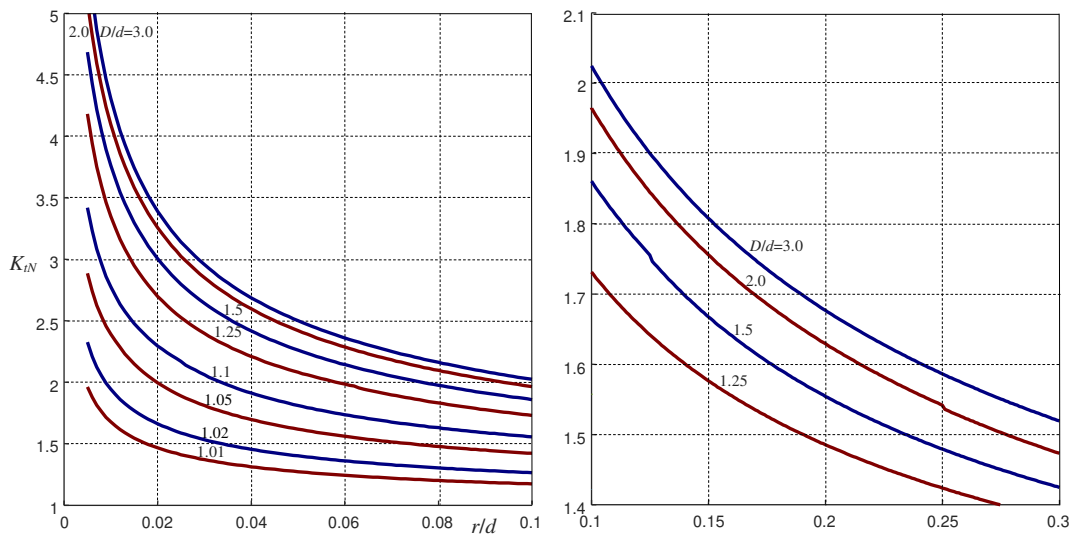


Fig.A2.4 – Fattori di concentrazione  $K_{tN}$  (Sforzo normale) per variazione di diametro.

**Gola**

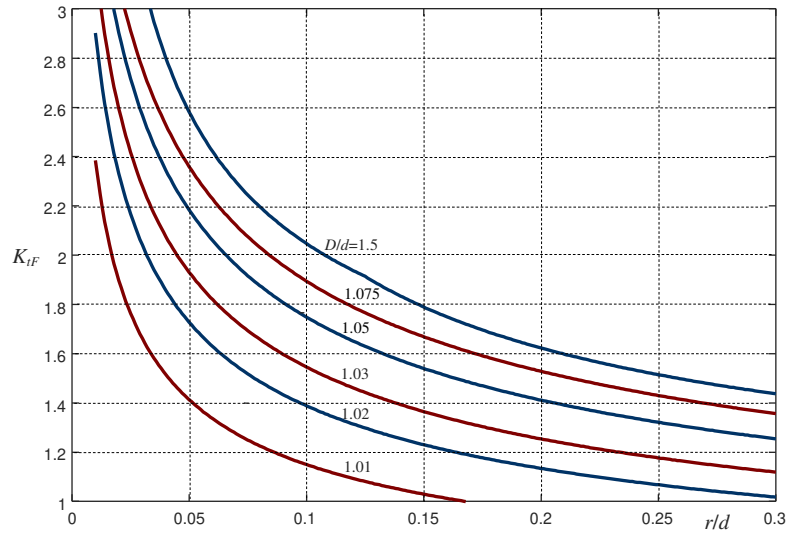


Fig.A2.5 – Fattori di concentrazione  $K_{tF}$  per gola.

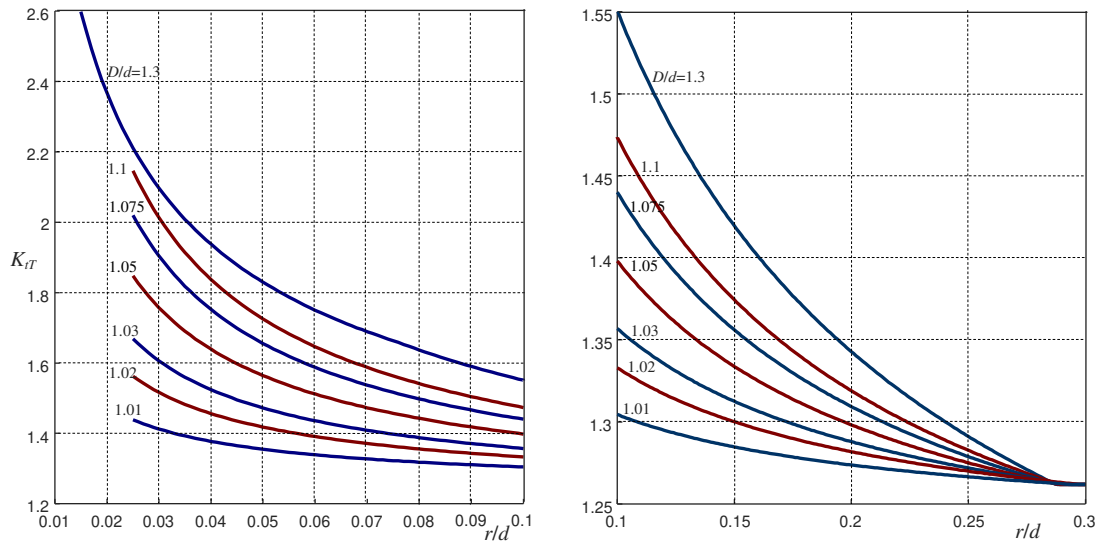


Fig.A2.6 – Fattori di concentrazione  $K_{tF}$  per gola.

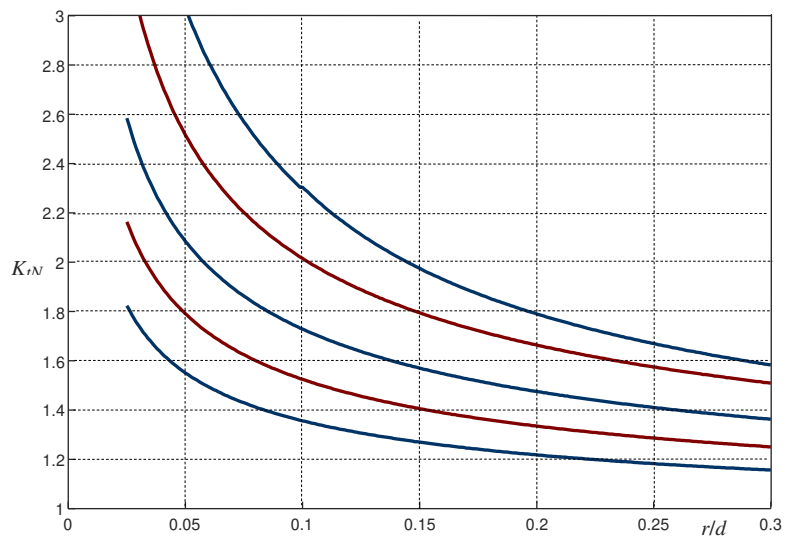


Fig.A2.7 – Fattori di concentrazione  $K_{tN}$  (Sforzo normale) per gola.

**A3. Fattori di fatica**

Le equazioni per la progettazione o la verifica di un albero sottoposto a tensioni variabili nel tempo, richiede la conoscenza del limite di fatica  $\sigma$  (per vita infinita) o della curva di Wöhler del materiale (per vita finita):

$$\sigma'_f = (N_f / K)^{-\mu} \tag{A3.1}$$

essendo  $\sigma_f$  l'ampiezza dei cicli di fatica cui corrisponde il numero di cicli di vita  $N_f$  e  $\mu$  e  $K$  costanti relative al materiale.

Per tenere conto delle caratteristiche di finitura superficiale e delle dimensioni dell'albero l'ampiezza del ciclo di fatica deve essere modificata con la relazione:

$$\sigma_f = k_a k_b \sigma'_f \tag{A3.2}$$

essendo  $k_a$  e  $k_b$  i fattori correttivi per finitura superficiale e dimensioni del componente, rispettivamente.

I fattori  $k_a$  e  $k_b$  possono essere determinati utilizzando i grafici riportati rispettivamente nelle fig.1 e 2, oppure mediante le seguenti relazioni:

$$k_a = a \sigma_r^b \quad k_b = \begin{cases} 1.24 d^{-0.107} & \rightarrow 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51 d^{-0.157} & \rightarrow 51 < d \leq 250 \text{ mm} \end{cases} \tag{A3.3,4}$$

essendo  $\sigma_r$  la tensione di rottura del materiale e le costanti  $a$  e  $b$  riportate in tab.1.

Poiché la presenza di un intaglio influenza la vita a fatica in modo differente nei diversi materiali, che presentano quindi differenti *sensibilità all'intaglio*, il fattore di concentrazione delle tensioni a fatica deve essere calcolato mediante la relazione:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \tag{A3.5}$$

nella quale  $q$  è il coefficiente di sensibilità all'intaglio che può essere determinato con appositi grafici, come quello mostrato in fig.3, o una delle seguenti formule:

$$q = \frac{1}{1 + a/r} \quad q = \frac{1}{1 + \sqrt{b/r}} = \frac{1}{1 + \sqrt{e^{(\sigma_r - 134 \text{ MPa})/586} / r}} \tag{A3.6,7}$$

nelle quali i valori del parametro  $a$  sono riportati in tab.3, mentre il parametro  $b$  è ottenibile dalla seguente relazione empirica:

$$b = e^{(\sigma_r - 134 \text{ MPa})/586} \tag{A3.8}$$

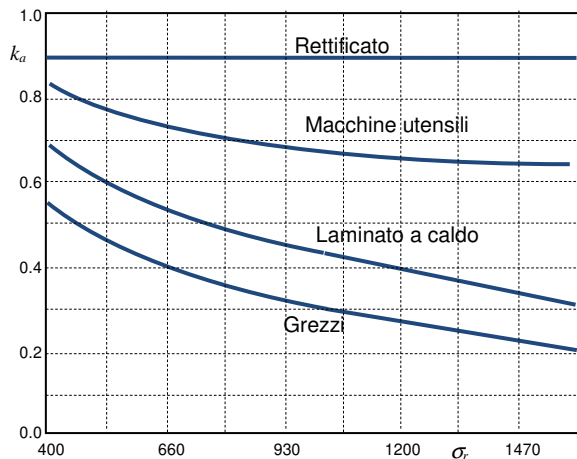


Fig.A3.1. Fattore  $k_a$  funzione della tensione di rottura [Mpa]

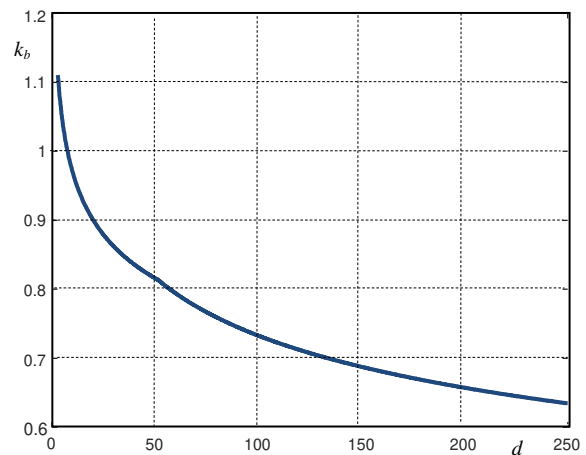


Fig.A3.2. Fattore  $k_b$  funzione del diametro.

| FINITURA            | $a$   | $b$    | $k_a$ ( $\sigma_r=500$ Mpa) |
|---------------------|-------|--------|-----------------------------|
| rettificato         | 1.58  | -0.085 | 0.93                        |
| macchine utensili   | 4.51  | -0.265 | 0.87                        |
| laminato a caldo    | 57.7  | -0.718 | 0.67                        |
| grezzi di forgatura | 272.0 | -0.995 | 0.56                        |

Tab.A3.1 - Fattori relativi al tipo di lavorazione per il calcolo di  $k_a$ .

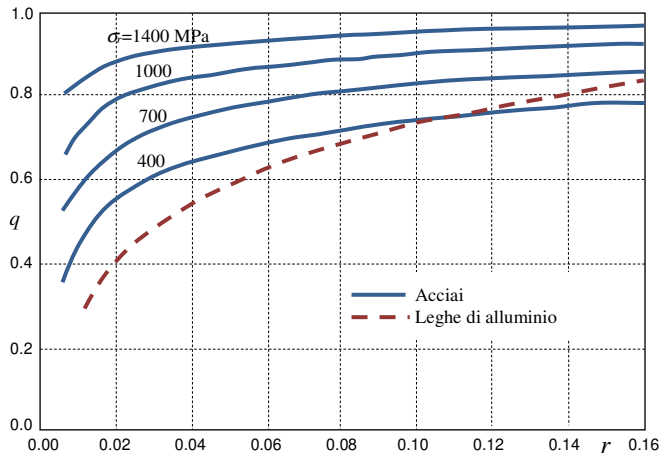


Fig.A3.3 - Sensibilità all'intaglio  $q$  in funzione della dimensione dell'intaglio  $r$  per acciai e leghe di alluminio.

| MATERIALE  | $a$ [mm]                    |
|--|-----------------------------|
| Leghe di alluminio   | 0.508                       |
| Acciaio bonificato o normalizzato a basso tenore di carbonio | 0.254                       |
| Acciaio temprato   | 0.0635                      |
| Acciai alta resistenza ( $\sigma > 550$ MPa)                 | $0.025 (2070/\sigma)^{1.8}$ |

Tab.A3.2 - Valori della costante  $a$  per il calcolo del fattore  $q$ .

**A4. Procedure iterative**

Nei casi in cui la grandezza da valutare appare in entrambi i membri di un'equazione, il risultato può essere ottenuto in modo iterativo, assegnando di volta in volta alla grandezza presente nel membro di destra dell'equazione il risultato ottenuto al passo precedente. Naturalmente alla prima iterazione il valore deve essere ipotizzato e, in molti casi, può essere posto semplicemente a 0, se è presente nella formula come addendo, o a 1, se è presente come fattore. L'iterazione termina quando il valore corrente e quello ottenuto al passo precedente risultano pressoché coincidenti, oppure se è verificata una certa condizione.

Nel caso della determinazione del diametro dell'albero mediante, ad esempio, la (11a) la procedura è costituita dai seguenti passi:

1. si assume un valore unitario o intermedio dei fattori di concentrazione  $K_{f_f}$  e  $K_{f_r}$  e un valore unitario del fattore  $k_b$  e si calcola un valore di prima approssimazione del diametro,  $d_p$ , mediante la (11a)

$$d_p = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( K_{f_f} \frac{M_a}{k_a \sigma'_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (\text{A4.1})$$

2. si effettua una procedura iterativa:

2.1 utilizzando il valore del diametro ottenuto al passo precedente,  $d_p$ , si determinano i fattori di concentrazione di tensione  $K_{t_f}$  e  $K_{t_r}$  e si calcolano valori aggiornati dei fattori  $K_f$  e  $k_b$ ;

$$d_p \rightarrow K_{t_f}, K_{t_r}$$

$$K_{f_f} = 1 + q(K_{t_f} - 1) \quad K_{f_r} = 1 + q(K_{t_r} - 1) \quad (\text{A4.2a,b})$$

$$k_b = \begin{cases} 1.24 d_p^{-0.107} & \rightarrow 3 \leq d_p \leq 51 \text{ mm} \\ 1.52 d_p^{-0.157} & \rightarrow 51 < d_p \leq 250 \text{ mm} \end{cases} \quad (\text{A4.3})$$

2.2 si calcola il nuovo valore del diametro:

$$d_n = \left[ n \frac{32}{\pi} \sqrt{\left( \frac{K_{f_f}}{k_b} \frac{M_a}{k_a \sigma'_f} \right)^2 + \left( K_{f_r} \frac{T_m}{\sigma_s} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (\text{A4.4})$$

2.3 si calcola la differenza tra il diametro calcolato e il diametro ottenuto nell'iterazione precedente:

$$\Delta d = |d_n - d_p|$$

se la variazione di diametro è trascurabile, cioè  $\Delta d < \delta_d$ , essendo  $\delta_d$  un valore piccolo rispetto alla grandezza da confrontare (es.  $\delta_d = 0.01$  mm), l'iterazione termina, viceversa si assegna alla variabile  $d_p$  il valore  $d_n$  ( $d_p = d_n$ ) e si ritorna al passo 2.1.

Nel caso delle (79,80), ad esempio per la (79), si può porre  $d_p = 0$  e applicare iterativamente l'espressione

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \frac{n}{\sigma_s} \left[ (8M + F d_p)^2 + 64T^2 \right]^{1/6}} \quad (\text{A4.3})$$

L'iterazione può essere arrestata se si verifica una delle due condizioni  $d_n \approx d_p$  o  $\sigma_{e,n} \approx \sigma_{e,p}$ .

La  $\sigma_{e,n}$  può essere valutata con la (77)

$$\sigma_{e,n} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{d_n^3} \sqrt{(8M + F d_n)^2 + 64T^2} \quad (\text{A4.4})$$

e le condizioni possono essere imposte con relazioni del tipo:

$$|d_n - d_p| < \delta_d \quad |\sigma_{am} - \sigma_{e,n}| \leq \delta_\sigma \quad (\text{A4.4,5})$$

essendo  $\delta_\sigma$  e  $\delta_d$  valori piccoli rispetto alle grandezze da confrontare (es.:  $\delta_\sigma = 0.01 \sigma_{am}$ ,  $\delta_d = 0.01$  mm).

In questo caso il numero d'iterazioni dipende dall'importanza del prodotto  $Fd$ , rispetto a  $M$  e  $T$ . Effettuando l'iterazione con un software di calcolo si nota che dopo poche iterazioni i valori di  $d_n$  e  $\sigma_{e,n}$  diventano costanti.