

37. MECCANISMI A CAMMA PIANI

Il meccanismo a camma è un sistema a un grado di libertà nel quale un elemento, definito *movente*, mette in movimento un secondo elemento, definito *cedente*, attraverso il contatto diretto; movente e cedente sono tenuti in posizione mediante un *telaio*. Generalmente la *camma* assolve il ruolo di movente e viene sagomata in modo da imporre al cedente una legge di moto con caratteristiche assegnate, come mostrato nei tre esempi di fig.1a-c.

I meccanismi a camma possono essere classificati in base alla tipologia di moto del movente e del cedente che può essere di tipo rotatorio o traslatorio.

Le camme possono essere classificate in base alla forma come *piane* (o *a disco*) e *cilindriche*; esistono camme con forme meno comuni, quali le camme *coniche*, *sferiche*, *spaziali*, ecc.

Il meccanismo a camma piano più diffuso è quello che effettua la trasformazione del moto rotatorio uniforme della camma in un moto alterno di tipo traslatorio (fig.1a-c) o rotatorio del cedente.

Nel caso in cui il cedente è animato da moto traslatorio rettilineo (fig.1) il meccanismo è definito *di prima specie* e il cedente è chiamato *punteria*, nel caso in cui il è animato da moto rotatorio il meccanismo è definito *di seconda specie* e il cedente è chiamato *bilanciere*.

Nel caso di punteria con moto alterno traslatorio, si può ancora distinguere fra punteria *centrata*, se il suo asse passa per il centro della coppia rotoidale della camma, come nei casi di fig.1a-c, e punteria *eccentrica* nel caso opposto, mostrato in fig.1d.

Le punterie possono essere classificate in base alla forma che assume l'elemento cinematico a contatto con la camma:

- *a coltello* o *a spigolo vivo* (con raggio di curvatura molto piccolo), con contatto a strisciamento, usati molto raramente e solo se le forze in gioco sono modeste, fig.1a;
- *a rotella*, molto utilizzati, perché il contatto di rotolamento fra camma e cedente riduce l'attrito e l'usura; a parità d'ingombro, presentano una minore resistenza meccanica dovuta alle ridotte dimensioni del perno della rotella, fig.1b;
- *a piattello* (piano o curvo), con contatto a strisciamento, impiegati in alcuni casi (motori endotermici alternativi), perché realizzano meccanismi compatti e robusti, pur richiedendo una lubrificazione adeguata, fig.1c.

I meccanismi con camme possono essere classificati anche in base al modo in cui si mantiene il contatto fra la camma e il cedente. Si definiscono contatti

- di forza, quelli assicurati da forze agenti sul cedente, in genere prodotte da molle di richiamo, come nel caso di fig.1e, oppure dalla forza di gravità in presenza di pesi agenti sul cedente disposto in direzione verticale;
- di forma, quelli nei quali l'accoppiamento stesso impedisce il distacco fra movente e cedente, ad esempio impegnando la rotella del cedente in una pista.

La scelta della tipologia di meccanismo e la determinazione della forma da assegnare alla camma devono essere effettuate in base all'impostazione dell'intera macchina di cui fa parte. Il dimensionamento si effettua in dipendenza del carico sopportato e della pressione di contatto fra camma e cedente.

I meccanismi a camma sono largamente utilizzati in campo industriale, con particolare riferimento al settore delle macchine automatiche, in quanto permettono di ottenere leggi di moto complesse, con elevata precisione e sono caratterizzati da semplicità progettuale e costruttiva, elevata resistenza meccanica e basso costo.

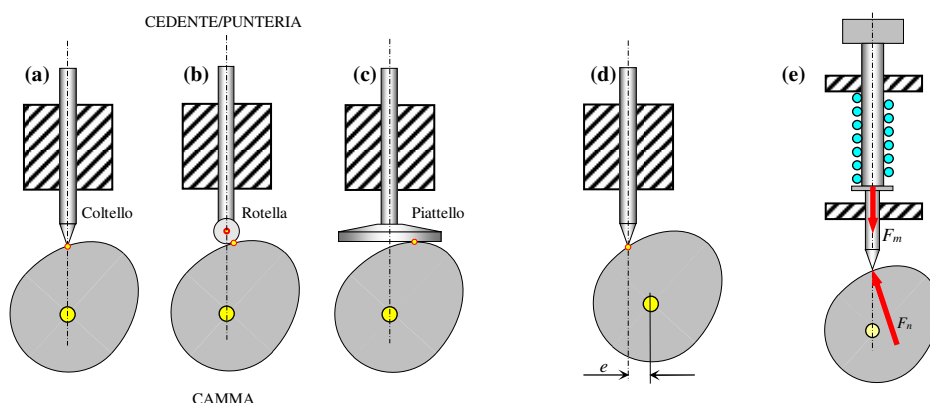


Fig.37.1 – Esempi di meccanismi a camma piani di prima specie, con punteria dotata di moto traslatorio; a-c) differenti tipologie di punteria centrata, d) esempio di punteria eccentrica, e) esempio di contatto di forza realizzato con molla di richiamo (F_m forza applicata dalla molla).

Nei meccanismi a camma, con riferimento alla fig.2, si definiscono:

- O il centro di rotazione della camma;
- P il punto di contatto tra il profilo della camma e la punteria;
- C *punto tracciatore* (Trace Point): è il punto teorico del cedente la cui traiettoria coincide con il *profilo primitivo*; nel caso di punteria a coltello coincide con il punto di contatto tra coltello e camma, nel caso di punteria a rotella coincide con il centro della rotella, nel caso di punteria a piattello è l'intersezione della superficie del piattello con la parallela all'asse della punteria passante per il centro della camma.
- *Profilo Primitivo* (Pitch Curve): è la traiettoria del punto tracciatore nel moto relativo del cedente rispetto alla camma.
- *Profilo della camma* (Cam Profile): è la superficie della camma effettivamente a contatto con il cedente; per la punteria a coltello il profilo della camma coincide con il profilo primitivo.
- *Cerchio Base* (Base Circle): è il più piccolo cerchio tangente al profilo della camma, con centro nell'asse di rotazione della camma.
- *Cerchio Primitivo* (Prime Circle): è il più piccolo cerchio tangente al profilo *primitivo* della camma, con centro nell'asse di rotazione della camma.
- *Cerchio massimo*: è il più grande cerchio tangente al profilo primitivo della camma, con centro coincidente con il centro di rotazione della camma.
- r_b il raggio del cerchio base della camma.
- r_r il raggio della rotella.
- r_0 il raggio del cerchio primitivo; nei casi di punteria a coltello e piattello $r_0=r_b$, per rotella $r_0=r_b+r_r$.
- R, ϕ le coordinate polari dei punti del profilo della camma con polo coincidente con il centro di rotazione della camma; il vettore R può essere scomposto nelle componenti R_o, R_p rispettivamente ortogonale e parallela all'asse della punteria, in base al sistema d'assi fisso $o-p$ con origine in O.
- x, y le coordinate cartesiane dei punti del profilo della camma rispetto a un sistema d'assi $x-y$ solidale con la camma stessa, con origine nel suo centro di rotazione, essendo $x=R \cos \phi, y=R \sin \phi$.
- α l'angolo di pressione: è l'angolo compreso tra la direzione del moto del cedente e la normale di contatto, positivo se antiorario (nullo nel caso di punteria a piattello).
- θ l'angolo di rotazione della camma, positivo se antiorario, essendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- s lo spostamento della punteria: è il valore della coordinata che definisce la posizione della punteria, rispetto alla posizione di riposo; può essere espressa in funzione del tempo t o dell'angolo θ .
- h la corsa o alzata: è la differenza fra le posizioni con maggiore e minore distanza dal centro di rotazione della camma che può assumere la punteria.
- e l'eccentricità: è la distanza tra l'asse della punteria e il centro di rotazione della camma, diversa da 0 nel caso delle punterie eccentriche (fig.1d); nel caso di punterie a piattello, l'eventuale eccentricità modifica la posizione del punto tracciatore rispetto a O, ma *non* quella del punto di contatto P.

Nell'analisi dei meccanismi a camma si definiscono inoltre:

- ρ_0 il raggio di curvatura dei punti del profilo primitivo, positivo per superficie convessa, negativo per superficie concava;
- ρ_c il raggio di curvatura dei punti del profilo della camma;
- b lo spessore della camma, nel caso delle camme piane;
- ω la velocità angolare della camma, positiva se antioraria; per ω costante, l'angolo θ si ottiene come $\theta = \omega t$.
- T il periodo di rotazione della camma corrispondente all'intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, legato alla velocità ω come $T = 2\pi / \omega$.
- F_n la forza scambiata tra camma e punteria, normale alla superficie di contatto (fig.1e).

Durante la rotazione della camma, quando il punto di contatto tra camma e punteria P *coincide con punti della circonferenza base*, lo spostamento s e l'angolo di pressione *sono nulli*, mentre il raggio di curvatura è pari a r_b , come nei casi mostrati in fig.2 a sinistra. Analogamente, quando il punto tracciatore C *coincide con punti della circonferenza primitiva della camma* lo spostamento s e l'angolo di pressione *sono nulli*, mentre il raggio di curvatura del profilo primitivo è pari a r_0 , come si può osservare in fig.2 nel caso della punteria a rotella. Negli altri casi lo spostamento, l'angolo di pressione e il raggio di curvatura nel punto di contatto variano al variare dell'angolo di rotazione della camma θ , dipendendo dalla forma della camma stessa.

In generale lo spostamento s è *pari alla distanza tra il punto tracciatore C e la circonferenza primitiva misurata lungo l'asse della punteria*. (fig.2 a destra, nei casi di punteria *centrata*).

I dati di base della progettazione della camma sono la corsa h e il periodo T oppure la funzione di spostamento s ; i valori da determinare sono:

- le coordinate del profilo della camma in assi polari, $R-\phi$, e/o cartesiani, $x-y$;
- l'angolo di pressione α al variare di θ , che deve essere contenuto per ridurre le forze;
- il raggio di curvatura ρ_c al variare di θ , che deve essere ampio per ridurre le tensioni di contatto;
- il raggio base della camma r_b , che deve essere assegnato in base a considerazioni sulle dimensioni complessive della camma, sull'angolo di pressione e sul raggio di curvatura.

Le coordinate del profilo della camma possono essere determinate mettendo in relazione le coordinate del punto di contatto P con l'angolo di rotazione θ nel sistema d'assi x,y solidale con la camma. Come si vedrà nel seguito, in generale, è opportuno *determinare in primo luogo le coordinate del punto tracciatore C* e da queste determinare quelle di P.

La verifica strutturale della camma richiede la determinazione delle tensioni di contatto dovute alla forza F_n scambiata tra camma e punteria in base alla teoria di Hertz. La forza F_n dipende dalle forze statiche e dinamiche che si oppongono al moto della punteria stessa e dall'angolo di pressione α , mentre le tensioni di contatto sono poste in relazione, oltre che con la forza F_n , con le caratteristiche elastiche dei materiali e i raggi di curvatura delle superfici di camma e punteria nei punti di contatto.

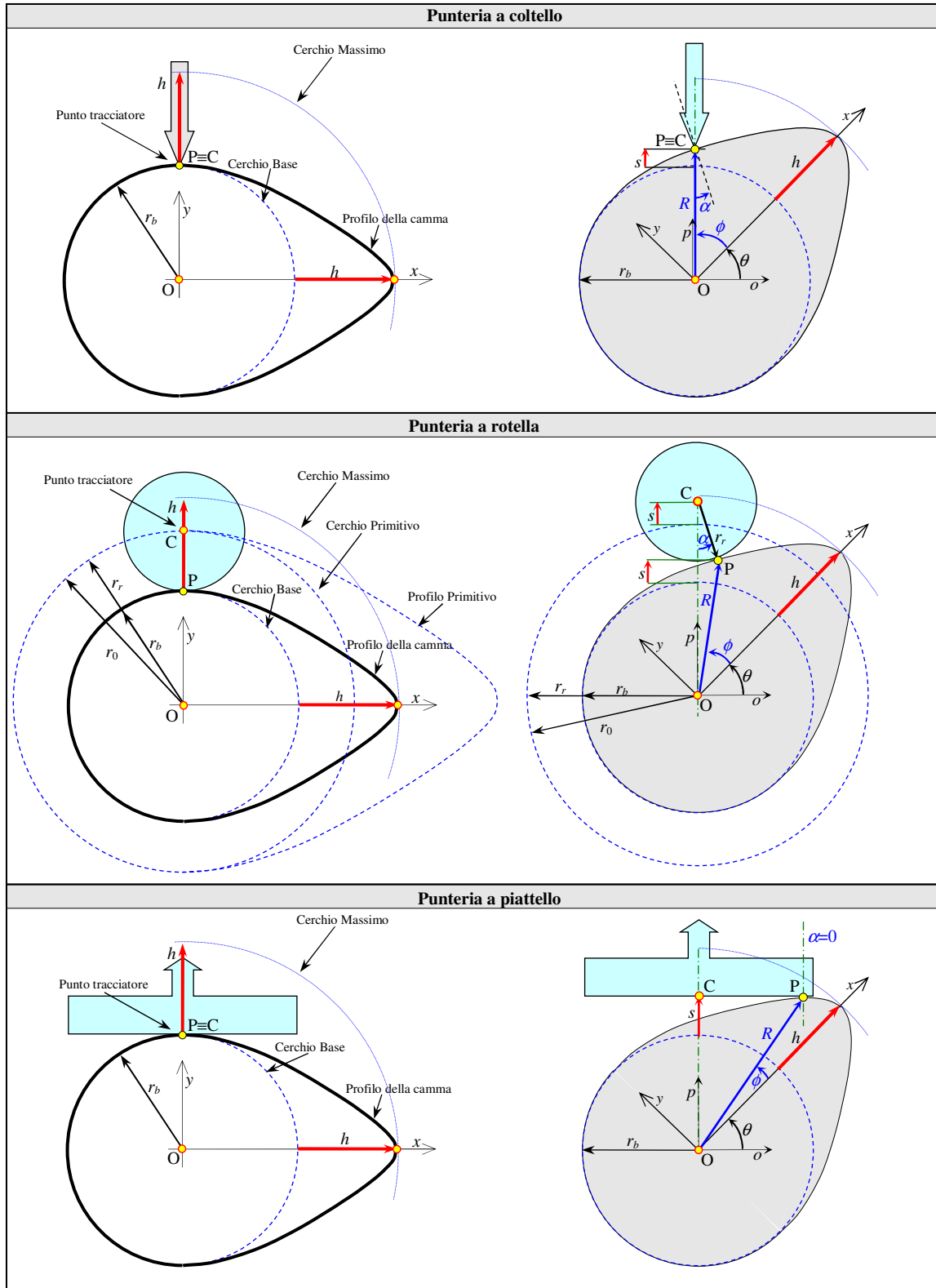


Fig.37.2 – Parametri di riferimento nell'analisi dei meccanismi a camma con punteria a coltello, a rotella e a piattello.

Legge del moto

Il meccanismo a camma piano con punteria è un sistema a un grado di libertà in cui la camma ruota con velocità angolare costante ω e il suo profilo è sagomato in modo tale che il cedente, posto a contatto diretto con la camma, risulti animato da un moto traslatorio alterno con legge assegnata; la legge del moto può essere espressa al variare del tempo o dell'angolo di rotazione della camma come $s=s(t)$ o $s=s(\theta)=s(\omega t)$. Nota la funzione s , il profilo della camma può poi essere determinato con appositi metodi grafici o analitici come descritto nei successivi paragrafi.

La legge del moto s è rappresentata mediante il *diagramma delle alzate* (fig.3a), con il quale viene stabilita la successione, la durata e l'ampiezza dei movimenti che il meccanismo deve effettuare in base alla funzione che deve essere svolta. In fig.3b sono riportati i profili delle camme con punteria a coltello e rotella che possono realizzare la legge del moto di fig.3a, nel caso di $r_b=50$ mm, $h=100$ mm ed $r_r=30$ mm, $e=0$. In fig.4 sono riportati i corrispondenti diagrammi dell'angolo di pressione α (positivo se antiorario) e del raggio di curvatura ρ_c al variare dell'angolo θ .

Tipicamente nel diagramma delle alzate possono essere identificati quattro intervalli principali in cui risultano suddivisi l'angolo di rotazione 2π e il periodo T (fig.3a):

- 1) θ_h / T_h di salita, durante il quale s passa con continuità da 0 all'alzata h ;
- 2) θ_a / T_a di arresto, con $s=h$;
- 3) θ_d / T_d di discesa, durante il quale s diminuisce con continuità da h a 0;
- 4) θ_r / T_r di riposo, nel quale si ha $s=0$ (il punto P rimane a distanza r_b da O);

essendo $\theta_h+\theta_a+\theta_d+\theta_r=2\pi$ e $T_h+T_a+T_d+T_r=T$. In diversi casi i periodi di salita e discesa possono essere a loro volta divisi in sotto-intervalli per assegnare alla funzione s un andamento specifico.

Nella maggior parte dei casi pratici sono assegnati i valori di h , degli intervalli $\theta_h, \theta_a, \theta_d, \theta_r$ e del periodo T o della velocità angolare ω , mentre non è strettamente fissata la legge del moto s in salita e discesa, la cui scelta deve essere effettuata (come meglio spiegato successivamente) tenendo conto della velocità e dell'accelerazione cui è soggetto il cedente che possono essere determinate derivando s rispetto al tempo:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \qquad \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (37.1,2)$$

A loro volta, la velocità e l'accelerazione del cedente al variare dell'angolo di rotazione della camma (fig.3a) possono essere ottenute derivando s rispetto a θ .

$$s' = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\dot{s}}{\omega} \qquad s'' = \frac{d^2s}{d\theta^2} = \frac{\ddot{s}}{\omega^2} \qquad (37.3,4)$$

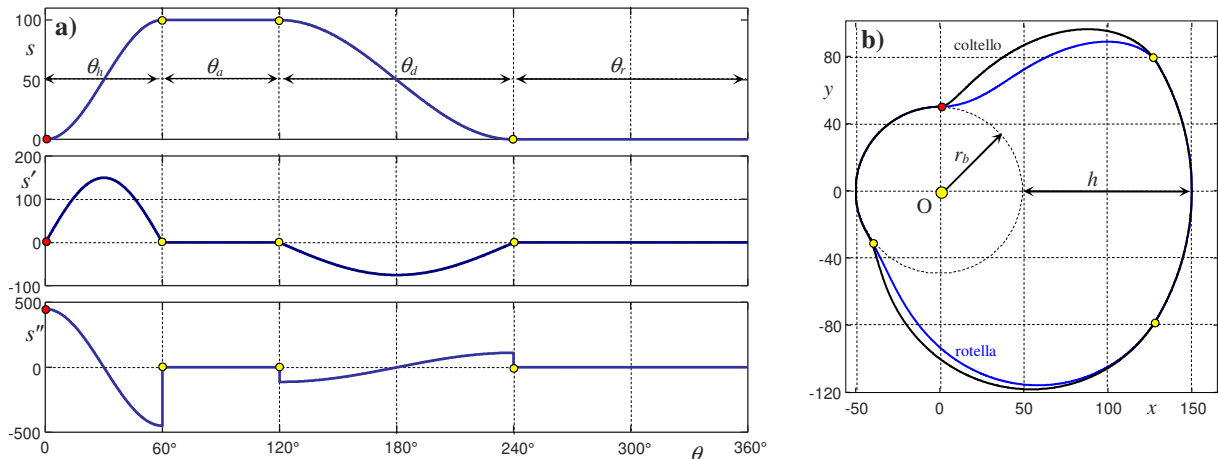


Fig.37.3 - a) esempio di legge di moto del cedente rispetto all'angolo di rotazione della camma θ , con funzioni di salita e discesa di tipo sinusoidale ($r_b=50$ mm, $h=100$ mm); b) i corrispondenti profili delle camme per punteria a coltello (esterna) e rotella con $r_r=30$ mm (interna).

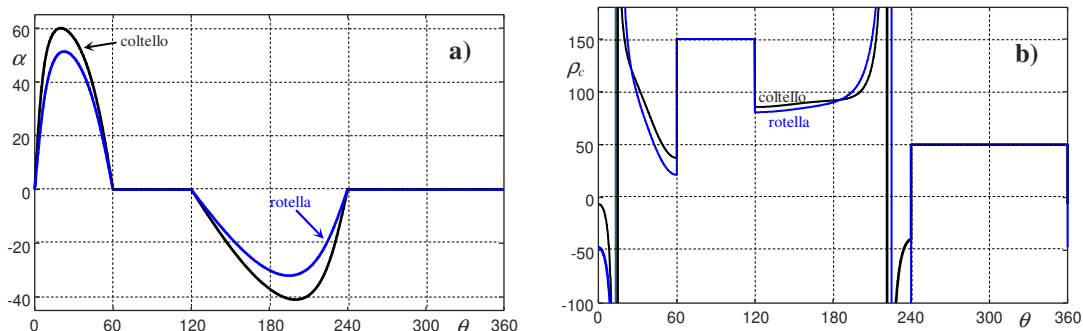


Fig. 37.4 - L'angolo di pressione α (a) e il raggio di curvatura ρ_c (b) al variare dell'angolo θ per i profili di camma mostrati in fig.3b.

I termini di destra delle (3,4) possono essere ottenuti mediante le seguenti relazioni:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = s' \omega \quad \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{ds'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(s' \omega)}{dt} = s'' \omega^2 \quad (37.5,6)$$

È importante osservare che leggi di moto simili possono dare luogo ad andamenti e valori massimi della velocità \dot{s} e dell'accelerazione \ddot{s} molto diversi, come nei 4 casi rappresentati nelle fig.5 e 7 e in tabella 1: a) moto con velocità costante, b) moto armonico, c) moto parabolico, d) moto cicloidale. Le funzioni $s(\theta)$ coincidono con le corrispondenti $s(t)$, essendo semplicemente $\theta = \omega t$; le funzioni $\dot{s}(t)$ ed $\ddot{s}(t)$ possono essere determinate, in base alle (5,6), moltiplicando le funzioni $s'(\theta)$ ed $s''(\theta)$ per ω e ω^2 rispettivamente. In fig.6 sono mostrati i profili delle camme corrispondenti alle leggi di moto mostrate nelle fig.5,7.

Le relazioni (5-8) mostrano che, fissata la legge del moto, e quindi le corrispondenti derivate s' ed s'' , la velocità e l'accelerazione della punteria si incrementano proporzionalmente alla velocità angolare della camma; valori elevati dell'accelerazione comportano valori elevati delle forze d'inerzia, mentre il massimo valore negativo dell'accelerazione può provocare una perdita di contatto tra camma e punteria. Inoltre, è importante notare che brusche variazioni delle funzioni s' ed s'' (anche in presenza di elevati valori del rapporto tra l'alzata e il raggio base h/r_b) possono dare luogo a profili non realizzabili in cui le linee si sovrappongono, come nel profilo relativo al caso della legge del moto cicloidale (fig.7d) e punteria a piattello, mostrato in fig.6d, o nel caso di velocità costante (fig.7a), nel quale non è possibile realizzare i profili per punteria a piattello e rotella.

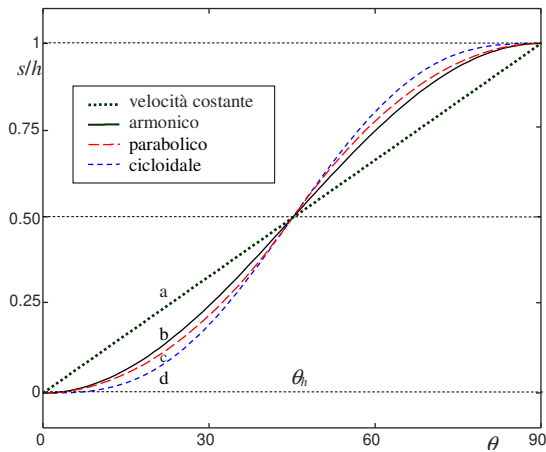


Fig.5 - Quattro esempi di differenti leggi di moto $s(\theta)$ in salita, con uguale alzata h (unitaria).

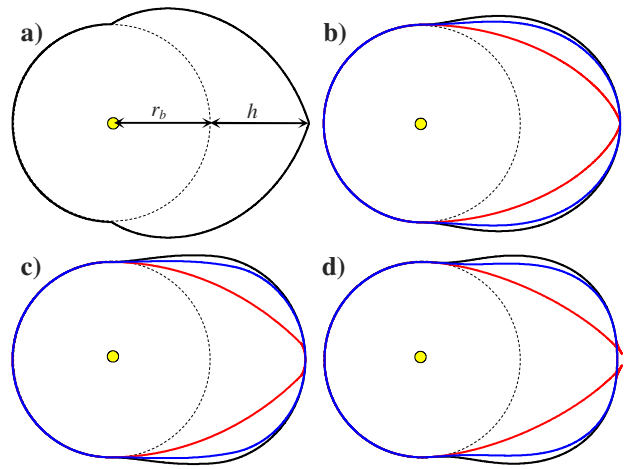


Fig.6 - Profili delle camme per le leggi di moto delle fig.5,7 ($r_b=h$): dall'esterno all'interno: punteria a coltello, rotella ($r_r=0.2h$), piattello.

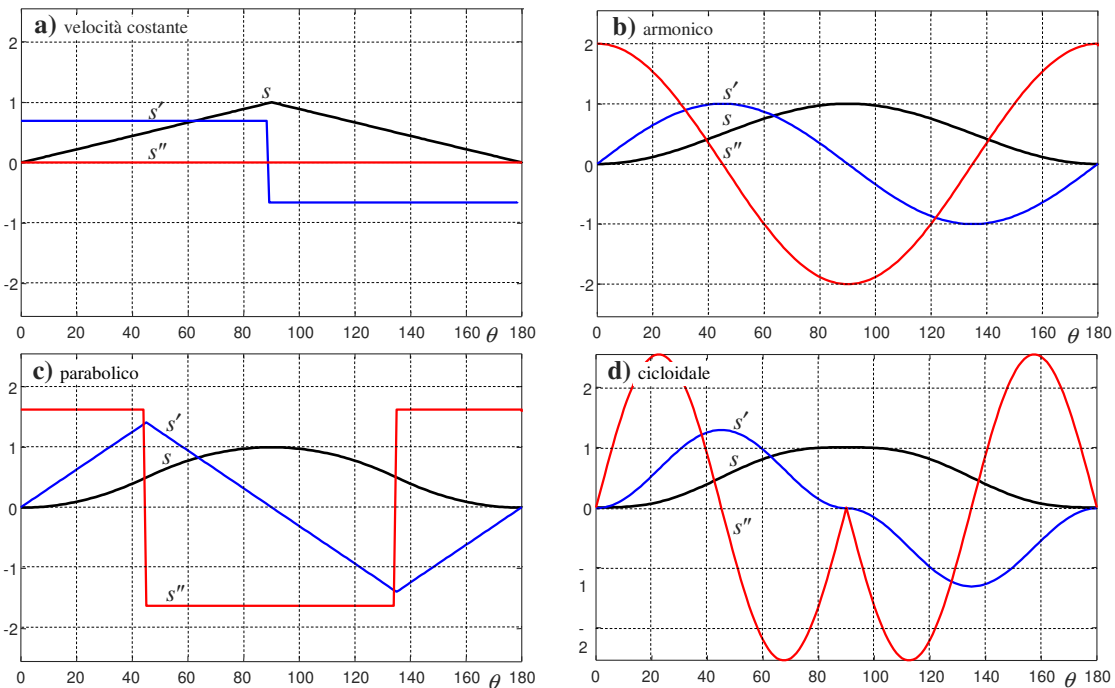


Fig.7 - Funzioni $s(\theta)$, $s'(\theta)$, $s''(\theta)$ per le quattro di leggi di moto di fig.5 a) velocità costante, b) armonico, c) parabolico, d) cicloide.

moto con velocità costante					
$0 \leq \theta \leq \theta_h$			$\theta_h \leq \theta \leq \theta_h + \theta_d$		
$s = h \frac{\theta}{\theta_h}$	$s' = \frac{h}{\theta_h}$	$s'' = 0$	$s = h \left(1 - \frac{\theta}{\theta_d}\right)$	$s' = -\frac{h}{\theta_d}$	$s'' = 0$
moto armonico					
$\theta_1 = \theta_h + \theta_d$			$0 \leq \theta \leq \theta_1$		
$s = \frac{h}{2\theta_1} \left(1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\theta_1}\right)$	$s' = \frac{h}{2} \frac{2\pi}{\theta_1} \sin 2\pi \frac{\theta}{\theta_1}$	$s'' = \frac{h}{2} \left(\frac{2\pi}{\theta_1}\right)^2 \cos 2\pi \frac{\theta}{\theta_1}$			
moto parabolico $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_h/2 = \theta_d/2$					
$0 \leq t \leq \theta_1$	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_h$	$\theta_h \leq \theta \leq \theta_h + \theta_3$	$\theta_h + \theta_3 \leq \theta \leq \theta_h + \theta_d$		
$s = \frac{h}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2$	$s = h - \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2}\right)^2$	$s = h - \frac{h}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_3}\right)^2$	$s = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_4}\right)^2$		
$\dot{s} = \frac{h}{\theta_1} \frac{\theta}{\theta_1}$	$s' = \frac{h}{\theta_2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_2}\right)$	$s' = -\frac{h}{\theta_3} \frac{\theta}{\theta_3}$	$s' = -\frac{h}{\theta_4} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_4}\right)$		
$s'' = \frac{h}{\theta_1^2}$	$s'' = -\frac{h}{\theta_2^2}$	$s'' = -\frac{h}{\theta_3^2}$	$s'' = \frac{h}{\theta_4^2}$		
moto cicloidale					
$0 \leq \theta \leq \theta_h$			$\theta_h \leq \theta \leq \theta_h + \theta_d$		
$s = h \left(\frac{\theta}{\theta_h} - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\theta}{\theta_h}\right)$			$s = h \left(1 - \frac{\theta}{\theta_d} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\theta}{\theta_d}\right)$		
$s' = \frac{h}{\theta_h} \left(1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\theta_h}\right)$			$s' = \frac{h}{\theta_d} \left(1 - \cos 2\pi \frac{\theta}{\theta_d}\right)$		
$s'' = h \frac{2\pi}{\theta_h^2} \sin 2\pi \frac{\theta}{\theta_h}$			$s'' = -h \frac{2\pi}{\theta_d^2} \sin 2\pi \frac{\theta}{\theta_d}$		

Tabella 1 - Funzioni $s(\theta)$, $s'(\theta)$, $s''(\theta)$ per le quattro di leggi di moto di fig.7.

A parte il caso in cui la velocità di rotazione della camma è molto bassa, nel dimensionamento dei meccanismi, in generale, si deve selezionare opportunamente la legge del moto; in particolare può essere opportuno modificare la funzione di spostamento in modo che non presenti spigoli, con corrispondenti salti nella funzione della velocità e, in alcuni casi, può essere conveniente scegliere inizialmente il diagramma delle accelerazioni $\ddot{s}(t)$ e determinare il diagramma degli spostamenti $s(t)$ mediante doppia integrazione

Per la determinazione della funzione s è opportuno ricordare che la velocità della punteria è nulla in corrispondenza dei punti iniziali e finali del periodo di salita e che l'integrale della funzione s' esteso nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \theta_h$ è pari all'alzata h , da cui si evince che il valor medio della velocità nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \theta_h$ è pari al rapporto tra h e θ_h :

$$s'(0) = 0 \quad s'(\theta_h) = 0 \quad \int_0^{\theta_h} s' d\theta = h \quad E[s'] = \frac{1}{\theta_h} \int_0^{\theta_h} s' d\theta = h/\theta_h \quad (37.7a-d)$$

L'integrale della funzione s'' esteso nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \theta_h$, in base alle (7a-c), fornisce risultato nullo:

$$\int_0^{\theta_h} s'' d\theta = s'(\theta_h) - s'(0) = 0 \quad (37.7e)$$

Si definisce coefficiente di velocità k_v il rapporto tra la velocità massima e quella media:

$$k_v = \frac{s'_{\max}}{E[s']} = s'_{\max} \frac{\theta_h}{h} \quad (37.8)$$

Per approfondimenti concernenti la corretta determinazione della funzione s si rimanda agli appositi testi di meccanica applicata alle macchine.

Forze e tensioni di contatto

Ai fini del dimensionamento, l'analisi delle forze agenti sul meccanismo viene effettuata considerando camma e punteria come corpi rigidi e trascurando l'attrito in corrispondenza del punto di contatto.

Nella verifica strutturale del meccanismo hanno un ruolo importante le tensioni di Hertz che si generano nelle parti della camma a contatto con la punteria e le sollecitazioni agenti nell'asse della punteria stessa. Entrambe le sollecitazioni hanno un andamento ciclico che può causare cedimenti per fatica.

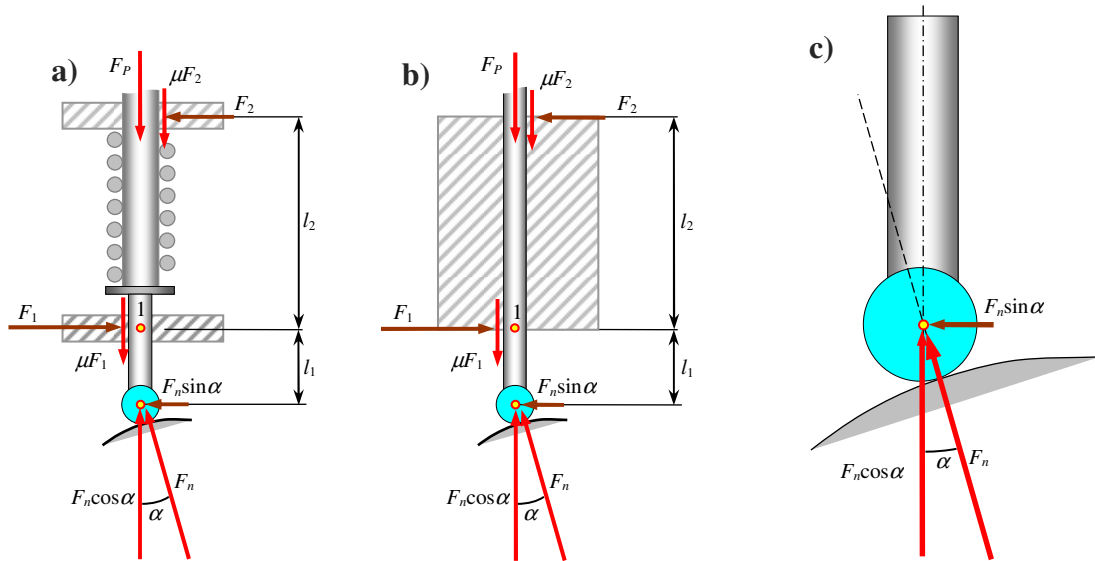


Fig.37.8 – Forze agenti sulla punteria: a) e b) casi di differente geometria delle guide, c) forza scambiata tra camma e punteria.

In fig.8 sono riassunte in modo qualitativo le forze che agiscono sulla punteria e che, solitamente, vengono schematizzate in tre tipologie: la forza F_n scambiata tra camma e punteria, le forze F_1 ed F_2 trasmesse dalle guide e la forza F_p , risultante delle forze trasmesse alla punteria dall'esterno, dalle masse collegate e dalla massa della punteria stessa.

La forza F_n agisce in corrispondenza del punto di contatto tra camma e punteria e ha direzione perpendicolare alla superficie della camma, risultando inclinata dell'angolo di pressione α rispetto alla direzione del moto della punteria. La forza F_n può essere scomposta nella componente utile alla generazione del moto della punteria, $F_n \cos \alpha$, parallela alla direzione del movimento, e nella componente laterale, $F_n \sin \alpha$, che si incrementa al crescere del valore dell'angolo α .

La componente laterale della forza F_n provoca delle forze di reazione sui lati opposti della guida della punteria, F_1 ed F_2 . Le due forze sono applicate in corrispondenza degli estremi della guida (fig.8a,b) e possono essere poste in relazione con la componente $F_n \sin \alpha$ mediante le equazioni di equilibrio della punteria alla rotazione e alla traslazione in direzione ortogonale al moto della punteria. Dall'equazione di equilibrio alla rotazione della punteria rispetto al punto 1 (fig.8a,b), essendo in gioco solo le forze $F_n \sin \alpha$ ed F_2 , si ottiene:

$$F_2 = -\frac{l_1}{l_2} F_n \sin \alpha \quad (37.9)$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale della punteria e utilizzando la (9) si ottiene:

$$F_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2} F_n \sin \alpha \quad (37.10)$$

Le due forze laterali producono due forze di attrito tra la superficie della guida e la punteria che si oppongono al moto della punteria stessa, μF_1 e μF_2 (fig.8a,b).

F_p è la risultante di tutte le forze che si oppongono al moto della punteria, a parte quelle dovute all'attrito, e, in particolare, è data dalla somma:

- della forza esterna di esercizio (dato di progetto) e della forza applicata dalla molla di ritorno (se presente);
- delle forze dovute al peso delle masse esterne collegate alla punteria e al peso della massa della punteria stessa;
- delle forze d'inerzia dovute all'accelerazione \ddot{s}
 - delle masse esterne collegate alla punteria,
 - della massa della punteria stessa,
 - della molla, della quale ne deve essere considerato un terzo.

Definendo:

- F_e la forza esterna che resiste al movimento della punteria;
- F_m la forza della molla di ritorno;
- M_e la massa degli elementi del meccanismo esterno collegato al cedente (ad esempio, la massa di un pistone);
- M_P la massa della punteria;
- M_m la massa della molla;

la forza risultante che si oppone al movimento della punteria può essere espressa come:

$$F_p = F_e + F_m + (M_e + M_P)g + (M_e + M_P + M_m/3)\ddot{s} \quad (37.11)$$

Definendo inoltre

$$M = M_P + M_m/3 + M_e \quad (37.12)$$

la (11) può essere riscritta come:

$$F_p = F_e + F_m + (M_e + M_P)g + M\ddot{s} \quad (37.13)$$

Naturalmente nelle diverse applicazioni alcune delle forze elencate possono essere *nulle o trascurabili*. Si deve notare che il contributo dell'accelerazione sull'entità della forza F_p può essere importante, per cui, come riportato nel precedente paragrafo, la legge di moto della punteria deve essere determinata in modo opportuno.

La molla di ritorno deve essere dimensionata in modo da tenere sempre il cedente a contatto con la camma. La forza $F_m(s)$ che la molla esercita per qualsiasi spostamento s è data dalla seguente espressione:

$$F_m = Ks + F_{m,p} \quad (37.14)$$

nella quale K è la costante elastica della molla ed $F_{m,p}$ la forza di precarico, che serve a prevenire lo scorrimento del rullo all'inizio del movimento. La costante K può essere determinata tenendo conto che, a elevate velocità, la forza che tenta di separare il cedente dalla superficie della camma è dovuta alla massima accelerazione negativa che si raggiunge nell'istante t_h in cui lo spostamento raggiunge il valore massimo $s=h$. In tale istante la molla deve esercitare la forza determinata con la seguente relazione:

$$F_m(h) = Kh + F_{m,p} = M\ddot{s}(t_h) - M_Pg - F_e \quad (37.15)$$

dalla quale si ottiene:

$$K = \frac{F_m(h) - F_{m,p}}{h} = \frac{M\ddot{s}(t_h) - M_Pg - F_e - F_{m,p}}{h} \quad (37.16)$$

Una volta che la forza F_p (13) è stata determinata, la forza F_n può essere calcolata utilizzando l'equazione di equilibrio dinamico della punteria nella direzione del moto:

$$F_p - F_n \cos \alpha - \mu F_1 - \mu F_2 = 0 \quad (37.17)$$

nella quale, come detto, il termine F_p tiene conto delle forze dovute all'accelerazione. Sostituendo le (9,10) nell'equazione di equilibrio si può scrivere:

$$F_p - F_n \cos \alpha - \mu \frac{l_1 + l_2}{l_2} F_n \sin \alpha + \mu \frac{l_1}{l_2} F_n \sin \alpha = 0 \quad (37.18)$$

infine, esplicitando la (18) rispetto a F_n si ottiene:

$$F_n = \frac{F_p}{\cos \alpha - \mu \frac{2l_1 + l_2}{l_2} \sin \alpha} = \frac{F_e + F_m + (M_e + M_P)g + M\ddot{s}}{\cos \alpha - \mu \frac{2l_1 + l_2}{l_2} \sin \alpha} \quad (37.19)$$

L'eq.(19) mostra come l'entità delle forze che agiscono sul meccanismo, oltre che dai carichi esterni e dalla forza della molla, dipendono dall'accelerazione \ddot{s} e dall'angolo di pressione α , che, a loro volta, dipendono dalla forma della camma determinata in base alla legge del moto $s(t)$ scelta in fase di progetto e dalla dimensione del raggio base o del raggio primitivo della camma.

Nella tabella 2 sono riportate le espressioni dell'angolo di pressione α per i tre casi di punteria considerati, la cui determinazione è descritta nei paragrafi successivi.

Oltre a quelle analizzate nella trattazione possono generarsi forze dinamiche dovute al gioco e alla flessibilità dei componenti e a variazioni della velocità di rotazione della camma.

Tensioni di contatto

La massima pressione agente sulla superficie di contatto tra camma e cedente può essere calcolata, in base alla teoria di Hertz, mediante la seguente relazione:

$$p_{max} = 0.564 \sqrt[3]{\frac{F_n \Delta}{b \rho}} \tag{37.20}$$

nella quale F_n è la forza normale alla superficie di contatto scambiata tra camma e punteria (19), il parametro Δ dipende dalle costanti elastiche dei materiali di camma e punteria:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1 - \nu_c^2}{E_c} + \frac{1 - \nu_r^2}{E_r} \tag{37.21}$$

e il parametro ρ dipende dai raggi di curvatura della camma ρ_c e della punteria ρ_p nel punto di contatto:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{\rho_p} \tag{37.22}$$

Nel caso del piattello il raggio di curvatura è infinito, $\rho_p = \infty$, per cui il secondo termine della (22) è nullo, mentre nel caso della rotella coincide con il raggio della rotella stessa, $\rho_p = r_r$. La variabile ρ_c risulta positiva nei punti in cui il profilo della camma è convesso e negativa nei punti in cui il profilo è concavo.

La sollecitazione di compressione è massima quando la punteria è a contatto con la parte convessa del profilo della camma con il più piccolo raggio di curvatura.

Tipicamente il cedimento delle camme o delle rotelle è dovuto alla fatica, per cui, nella scelta del materiale, un fattore importante da considerare è la resistenza all'usura superficiale dei materiali utilizzati, cioè il limite di fatica di contatto e la durezza.

Nella tabella 2 sono riportate le espressioni dei raggi di curvatura per i tre casi di punteria considerati, la cui determinazione è descritta nei paragrafi successivi.

Se le tensioni sono troppo elevate, è necessario modificare la geometria della camma:

- aumentando le dimensioni della camma in modo da ridurre l'angolo di pressione e aumentare il raggio di curvatura;
- utilizzando una diversa funzione di spostamento s o modificandola nei punti più critici;
- aumentando l'angolo/tempo di salita della camma θ_h/T_h ;
- aumentando lo spessore b della camma, verificando che le deflessioni del cedente siano abbastanza piccole da mantenere un carico uniforme su tutta la larghezza della camma;
- cambiando la tipologia di cedente, utilizzandone una che permetta di abbassare l'angolo di pressione (punteria eccentrica o a bilanciere).

	Parametri		
	r_b raggio base camma r_r raggio rotella $r_0 = r_b + r_r$ e eccentricità	$s = s(t) = s(\theta)$ $s' = ds/d\theta$ $s'' = d^2s/d\theta^2$	$R_s = \sqrt{(r_b + r_r)^2 - e^2} + s$ $s'_e = s' - e$
	Angolo di pressione α	Raggio di curvatura ρ_c	
coltello $r_r = 0$ rotella	$\alpha = \tan^{-1} \frac{s'_e}{R_s}$	$\rho_c = \frac{\sqrt{(R_s^2 + s_e'^2)^3}}{R_s^2 + e^2 - R_s s'' - 3e s' + 2s'^2} - r_r$	
piattello	$\alpha = 0$	$\rho_c = r_b + s + s''$	

Tabella 37.2 – Espressione degli angoli di pressione e dei raggi di curvatura delle camme nei meccanismi con punteria a coltello e rotella centrati o con eccentricità e , e a coltello. Nel caso di punteria centrata porre $e=0$ nelle formule, nel caso di punteria a coltello porre $r_r=0$.

Determinazione del profilo e dell'angolo di pressione della camma

In questo paragrafo vengono determinate in modo analitico le coordinate polari, $R-\phi$, e cartesiane, $x-y$, dei profili della camma in meccanismi con punteria a coltello, rotella e piattello, nonché i valori degli angoli di pressione α .

I dati d'ingresso per la determinazione del profilo sono costituiti dalle funzioni di spostamento, velocità e accelerazione della punteria, $s(\theta)$, $s'(\theta)$ ed $s''(\theta)$, dall'eventuale valore dell'eccentricità e , dal raggio di base della camma r_b e, nel caso della punteria a rotella, dal raggio della rotella stessa, r_r .

Come precedentemente riportato, le coordinate del profilo della camma possono essere determinate mettendo in relazione le coordinate del punto di contatto P con l'angolo di rotazione θ in un sistema d'assi $x-y$ solidale con la camma e con origine nel centro di rotazione O della stessa, come mostrato nelle fig.2,9. Nell'analisi viene utilizzato anche un sistema d'assi fisso $o-p$ con origine in O e assi o e p rispettivamente ortogonale e parallelo all'asse della punteria (orizzontale e verticale nei casi mostrati nelle fig.2,9). L'angolo tra l'asse x , solidale con la camma, e l'asse o coincide con l'angolo di rotazione della camma θ .

Nel seguito, le coordinate polari sono ricavate con semplici considerazioni sulla geometria dei vari meccanismi e da queste sono poi determinate le coordinate cartesiane; l'angolo di pressione viene determinato utilizzando le relazioni esistenti tra le velocità della punteria e della camma e la velocità relativa tra punteria e camma in corrispondenza del *punto tracciatore*, sfruttando il fatto che il vettore della velocità relativa è tangente al profilo della camma e quindi inclinato dell'angolo α rispetto all'asse p .

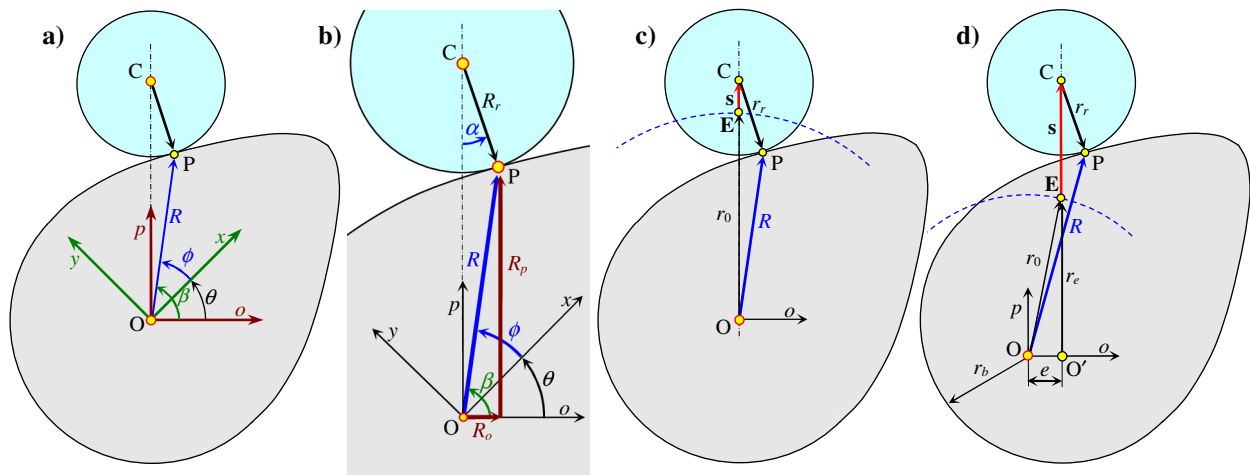


Fig.37.9 - a) Sistemi d'assi $x-y$ e $o-p$; b) Coordinate polari del punto P; c) Posizione del punto C nei casi di punteria a rotella centrata ed eccentrica.

Coordinate polari nel caso generale

A parte il caso della punteria a coltello centrata, il punto P è spostato rispetto all'asse della punteria (fig.2,9) per cui, in generale, la coordinata polare R deve essere determinata tramite le componenti parallele agli assi $o-p$, R_o ed R_p , come

$$R = \sqrt{R_p^2 + R_o^2} \quad (37.23)$$

La coordinata polare ϕ può essere identificata come differenza tra gli angoli β e θ formati con l'asse o rispettivamente dal vettore R e dall'asse x , solidale con la camma (fig.9b); poiché, come detto, β è l'angolo formato dal vettore R con l'asse o , esso può essere determinato utilizzando le componenti R_p ed R_o di R come

$$\beta = \sin^{-1} \frac{R_p}{R} = \cos^{-1} \frac{R_o}{R} = \tan^{-1} \frac{R_p}{R_o} \quad (37.24)$$

da cui si può scrivere

$$\phi = \beta - \theta = \tan^{-1} R_p / R_o - \theta \quad (37.25)$$

Le coordinate cartesiane del profilo della camma possono essere ottenute dalle relazioni tra coordinate polari e cartesiane:

$$x = R \cos \phi = R_p \sin \theta + R_o \cos \theta \quad (37.26a)$$

$$y = R \sin \phi = R_p \cos \theta - R_o \sin \theta \quad (37.26b)$$

I termini di destra delle (26) possono essere determinati utilizzando le seguenti espressioni delle funzioni seno e coseno dell'angolo ϕ :

$$\cos \phi = \cos(\beta - \theta) = \frac{R_p}{R} \sin \theta + \frac{R_o}{R} \cos \theta \quad \sin \phi = \sin(\beta - \theta) = \frac{R_p}{R} \cos \theta - \frac{R_o}{R} \sin \theta \quad (37.27a,b)$$

ottenute sfruttando la relazione (24), per la quale $\sin \beta = R_p/R$ e $\cos \beta = R_o/R$, e utilizzando le formule trigonometriche di sottrazione, $\cos \phi = \cos(\beta - \theta) = \sin \beta \sin \theta + \cos \beta \cos \theta$, $\sin \phi = \sin(\beta - \theta) = \sin \beta \cos \theta - \cos \beta \sin \theta$. Le relazioni (26) sono utili anche per la determinazione dei raggi di curvatura del profilo della camma come mostrato nell'apposito paragrafo.

Per determinare le componenti R_p ed R_o , in generale, è opportuno determinare inizialmente la posizione del punto tracciatore C rispetto agli assi $o-p$ e da questa determinare la posizione del punto P rispetto agli assi $x-y$.

Nella determinazione della posizione del punto tracciatore è opportuno ricordare che:

- il punto tracciatore giace sull'asse della punteria che è parallelo all'asse p ;
- per punteria centrata, l'asse della punteria coincide con l'asse p e interseca l'asse o in O;
- per punteria eccentrica, l'asse della punteria interseca l'asse o nel punto O' a distanza e da O;
- lo spostamento s è pari alla distanza del punto C dalla circonferenza primitiva, misurata lungo l'asse della punteria.

In base a quanto sopra riportato e osservando le fig.9c,d, la distanza del punto C dall'asse p risulta essere semplicemente $o_C=e$ e $o_C=0$ per punteria eccentrica e centrata rispettivamente. Per quanto concerne la distanza del punto C dall'asse o , definendo E il punto d'intersezione tra l'asse della punteria e la circonferenza primitiva ed r_E la distanza di detto punto dall'asse o (fig.9c,d), essa può essere ottenuta come somma di r_E e dello spostamento s . Considerando il triangolo i cui estremi sono i punti O, O' ed E, nel caso di punteria eccentrica, e il segmento OE, nel caso di punteria centrata, r_E può essere espresso rispettivamente come:

$$r_E = \sqrt{r_0^2 - e^2} = \sqrt{(r_r + r_b)^2 - e^2} \quad r_E = r_0 = r_r + r_b \quad (37.28a,b)$$

da cui la distanza di C dall'asse o , definita nel seguito R_s per la dipendenza dallo spostamento s , può essere ottenuta come:

$$R_s = r_E + s = \sqrt{r_0^2 - e^2} + s = \sqrt{(r_r + r_b)^2 - e^2} + s \quad R_s = r_E + s = r_0 + s = r_r + r_b + s \quad (37.29a,b)$$

Determinata la distanza del punto C dall'asse o è possibile determinare le coordinate polari del punto P per i casi di punteria a coltello e rotella con e senza eccentricità e a piattello come mostrato nei paragrafi successivi.

Come si vedrà nel seguito, la determinazione del profilo della camma nel caso di punteria a rotella richiede la preventiva determinazione dell'angolo di pressione α , che viene descritta nel paragrafo successivo.

Angolo di pressione

Come riportato in precedenza, l'angolo di pressione α è l'angolo compreso tra la normale di contatto e la direzione del moto della punteria (fig.10,11), che coincide con l'angolo compreso tra la normale al profilo primitivo e la direzione della velocità del cedente. La velocità assoluta del punto tracciatore C appartenente al cedente, \mathbf{v}_a , ha direzione parallela all'asse della punteria e può essere espressa come somma della velocità di trascinamento della camma (\mathbf{v}_t), che ruota con velocità angolare ω attorno al centro O, e della velocità relativa tra camma e punteria (\mathbf{v}_r):

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r \quad (37.30)$$

Il vettore \mathbf{v}_r (fig.10) ha direzione tangente al profilo della camma ed è inclinato dell'angolo α rispetto all'asse della punteria, per cui si può scrivere:

$$\tan \alpha = \frac{v_{r,p}}{v_{r,o}} = \frac{v_r \sin \alpha}{v_r \cos \alpha} \quad (37.31)$$

La componente di \mathbf{v}_a nella direzione del moto del cedente coincide con s , essendo $v_a = \pm |\mathbf{v}_a| = s$, mentre la velocità di trascinamento è ortogonale al segmento OC (fig.10):

$$v_t = \overline{OC} \omega = \sqrt{R_s^2 + e^2} \omega \quad (37.32)$$

Le componenti di \mathbf{v}_t parallela e ortogonale all'asse della punteria possono essere determinate utilizzando le distanze del punto C dagli assi $o-p$ con le seguenti relazioni (fig.10):

$$v_{t,o} = R_s \omega \quad v_{t,p} = e \omega \quad (37.33a,b)$$

La componente di \mathbf{v}_r ortogonale all'asse della punteria, $v_{r,o}$, è uguale e opposta all'analoga componente della velocità di trascinamento (33b), da cui:

$$v_{r,o} = v_{t,o} = R_s \omega \quad (37.34)$$

La componente di \mathbf{v}_r parallela all'asse della punteria, $v_{r,p}$, può essere determinata in base al fatto che la velocità assoluta del cedente \mathbf{v}_a è data dalla somma della stessa $v_{r,p}$ e della componente della velocità di trascinamento della

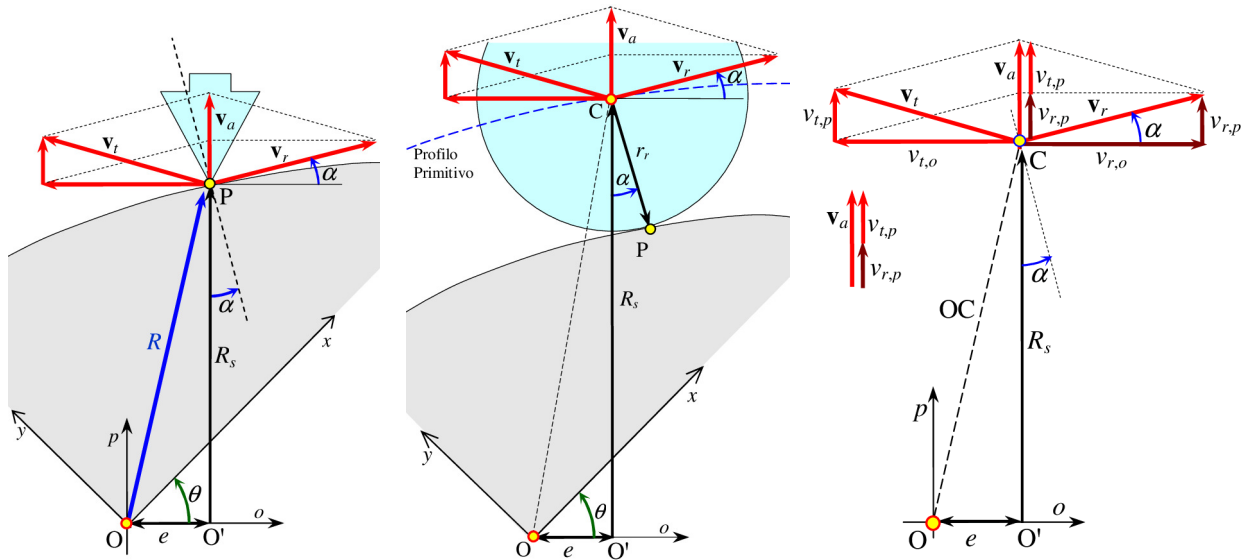


Fig.37.10 - Determinazione dell'angolo di pressione α nel caso di punterie eccentriche.

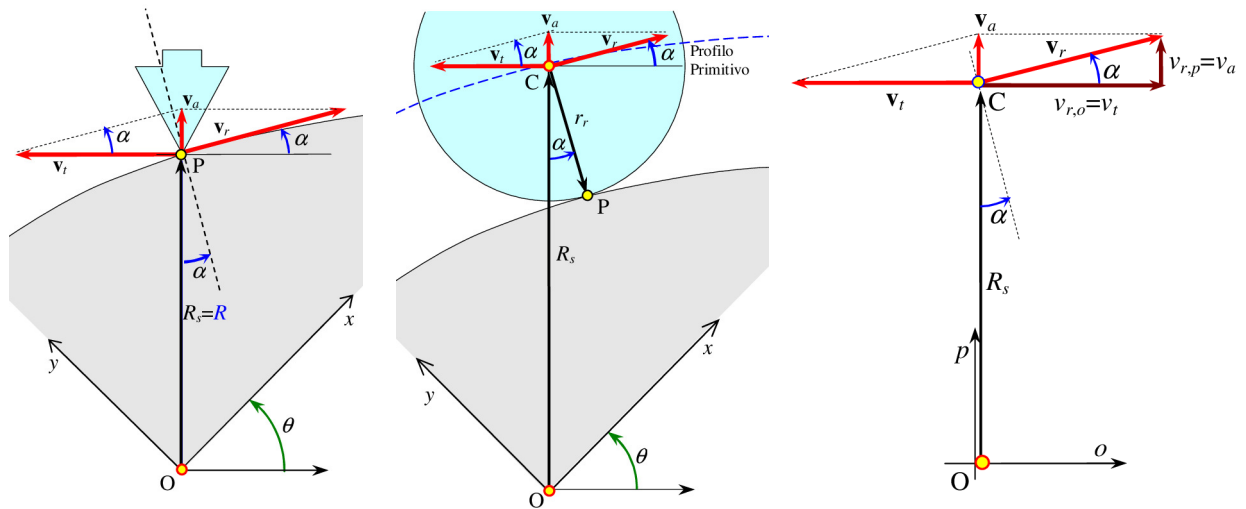


Fig.37.11 - Determinazione dell'angolo di pressione α nel caso di punterie centrate.

camma parallela all'asse della punteria stessa, $v_{r,p}$ (fig.10):

$$v_a = \dot{s} = s' \omega = v_{r,p} + v_{t,p} \quad (37.35)$$

esplicitando la (35) rispetto a $v_{r,p}$ si ottiene:

$$v_{r,p} = v_a - v_{t,p} = s' \omega - e \omega = (s' - e) \omega = s'_e \omega \quad (37.36)$$

avendo posto

$$s'_e = s' - e \quad (37.37)$$

Infine, sostituendo le (34) e (36) nella (31) si ottiene:

$$\alpha = \tan^{-1} s'_e / R_s \quad (37.38)$$

Nei casi di punteria a coltello e a rotella centrate (fig.11), in base alle (29), la (39) può essere riscritta come

$$\alpha = \tan^{-1} s' / (r_o + s) \quad \alpha = \tan^{-1} s' / (r_b + s) \quad (37.39a,b)$$

Nel caso della punteria a piattello, poiché la superficie del piattello è piana e ortogonale alla direzione del vettore spostamento s e si mantiene tangente alla superficie della camma in corrispondenza del punto di contatto, la normale alla superficie di contatto è parallela all'asse p e l'angolo di pressione è sempre $\alpha=0$.

Per semplificare alcune relazioni sulla punteria a rotella è utile il modulo della velocità relativa v_r (34,36):

$$v_r = \sqrt{v_{r,o}^2 + v_{r,p}^2} = \omega \sqrt{R_s^2 + (s' - e)^2} = \omega \sqrt{R_s^2 + s_e'^2} \quad (37.40)$$

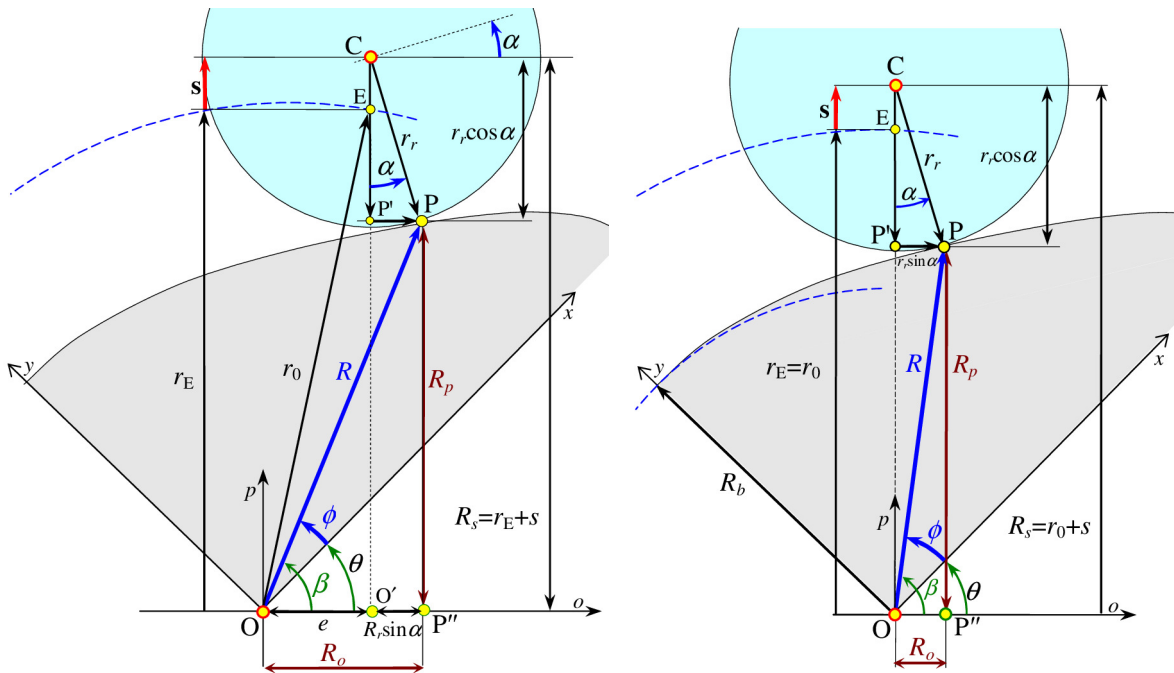


Fig.37.13 - Determinazione dei parametri R_p ed R_o per punteria a rotella eccentrica e centrata.

La componente R_p può essere determinata dalla differenza tra la lunghezza R_s , espressa dalle (29a,b), e la proiezione del raggio della rotella lungo l'asse della punteria, da cui, per i casi di punteria eccentrica e centrata, si può scrivere

$$R_p = R_s - r_r \cos \alpha \qquad R_p = r_0 + s - r_r \cos \alpha \qquad (37.49a,b)$$

Dalle fig.10,11 a destra, utilizzando le eq.(34),(36),(40), è possibile porre in relazione diretta le funzioni seno e coseno dell'angolo α con i parametri R_s ed s'_e :

$$\cos \alpha = \frac{v_{r,o}}{v_r} = \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}} \qquad \sin \alpha = \frac{v_{r,p}}{v_r} = \frac{s'_e}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}} \qquad (37.50a,b)$$

da cui le equazioni dei parametri R_p ed R_o (48,49) possono essere riscritte eliminando l'angolo α come:

$$R_p = R_s - R_s \frac{r_r}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}} \qquad R_o = e + s'_e \frac{r_r}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}} \qquad (37.51a,b)$$

Particolarizzando le (23, 25) per il caso specifico, le coordinate polari R e ϕ possono essere espresse come

$$R = \sqrt{(R_s - r_r \cos \alpha)^2 + (e + r_r \sin \alpha)^2} \qquad R = \sqrt{(r_0 + s - r_r \cos \alpha)^2 + r_r^2 \sin^2 \alpha} \qquad (37.52a,b)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{R_s - r_r \cos \alpha}{e + r_r \sin \alpha} - \theta \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{r_0 + s - r_r \cos \alpha}{r_r \sin \alpha} - \theta \qquad (37.53a,b)$$

Dalle coordinate polari (52,53), effettuando alcuni passaggi, è possibile ricavare direttamente le coordinate cartesiane del profilo per i casi di punteria eccentrica

$$x = R_s \sin \theta + e \cos \theta - r_r (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) \qquad (37.54a)$$

$$y = R_s \cos \theta - e \sin \theta - r_r (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \qquad (37.54b)$$

e centrata

$$x = (r_0 + s) \sin \theta - r_r (\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta) \qquad (37.55a)$$

$$y = (r_0 + s) \cos \theta - r_r (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \qquad (37.55b)$$

Da notare che le formule per punteria a rotella possono essere utilizzate in tutti gli altri casi ponendo semplicemente $r_r=0$ per il caso di punteria a coltello ed $r_r=0, \alpha=0, e=0$ per il caso di punteria a piattello.

Punteria a piattello

Nel caso della punteria a piattello l'eventuale eccentricità non ha effetto sulla posizione del punto P, com'è facile dedurre dalle figure in cui questa tipologia di meccanismo è rappresentata (fig.1,2,14). Il punto tracciante e il punto di contatto hanno uguale distanza dall'asse o (fig.14), per cui il profilo della camma coincide con il profilo primitivo e il cerchio primitivo coincide con quello di base, essendo $r_0=r_b$.

Come nel caso della punteria a coltello, si ha $r_E=r_b$ per cui il parametro R_s è risulta pari alla somma del raggio base della camma e dello spostamento s (fig.14):

$$R_s = r_E + s = r_b + s \quad (37.56)$$

La componente R_p è uguale ad R_s

$$R_p = R_s = r_b + s \quad (37.57)$$

mentre la componente R_o può essere determinata considerando il fatto che la velocità di spostamento del piattello \dot{s} coincide con la componente verticale della velocità del punto della camma a contatto con il piattello stesso. La velocità del punto della camma è $v=\omega R$ e la sua componente verticale è $v_o=\omega R \cos \beta$, da cui si può scrivere

$$\dot{s} = \omega s' = \omega R \cos \beta = \omega R_o \quad (37.58)$$

essendo $R_o=R \cos \beta$. Esplicitando la (58) rispetto a R_o si ottiene

$$R_o = s' \quad (37.59)$$

Utilizzando le (57,59) e le (23,25), le coordinate polari dei punti della camma possono essere espresse come:

$$R = \sqrt{(r_b + s)^2 + s'^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{r_b + s}{s'} - \theta \quad (37.60,61)$$

È facile osservare come, in questo caso, la geometria della camma dipende sia dalla funzione s che dalla sua derivata rispetto all'angolo θ , s' .

Utilizzando le (60,61) le coordinate cartesiane dei punti del profilo possono essere ottenute come

$$x = (r_b + s) \sin \theta + s' \cos \theta \quad y = (r_b + s) \cos \theta - s' \sin \theta \quad (37.62a,b)$$

Come detto, la normale alla superficie di contatto tra camma e piattello è parallela all'asse p e l'angolo di pressione è sempre $\alpha=0$.

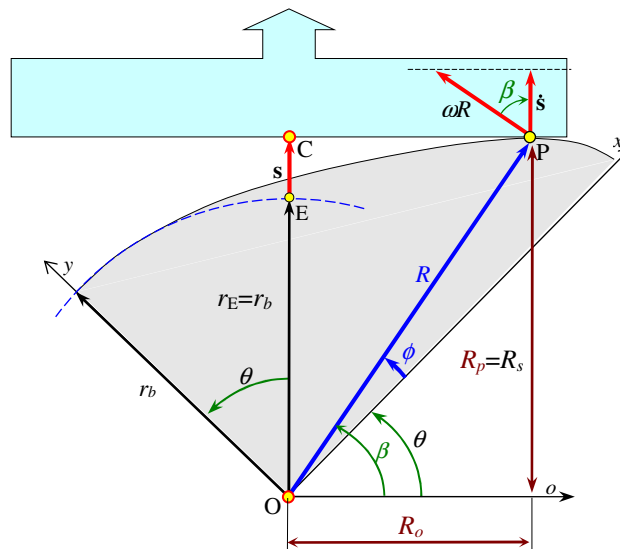


Fig.37.14 - Determinazione dei parametri R_p ed R_o per punteria a piattello.

Determinazione dei raggi di curvatura

In ogni punto del profilo il raggio di curvatura della camma, ρ_c , deve essere il più ampio possibile al fine di prevenire sollecitazioni di contatto troppo elevate ed evitare la sotto quotazione della parte convessa.

In generale il raggio di curvatura di una curva le cui coordinate possono essere espresse con una relazione del tipo $y_c=f(x_c)$ può essere determinato in ciascun punto con la seguente relazione

$$\rho_c = \frac{dr}{d\phi} = \frac{dx_c}{d\phi} \frac{dr}{dx_c} = \frac{1 + \left(\frac{dy_c}{dx_c}\right)^2}{\frac{d^2 y_c}{dx_c^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_c}{dx_c}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy_c}{dx_c}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 y_c}{dx_c^2}} \tag{37.63}$$

nella quale r e ϕ sono rispettivamente la *coordinata curvilinea* della funzione nel punto considerato e l'angolo della retta tangente alla funzione nel punto.

Nel caso in cui i punti della curva sono identificati mediante coordinate polari R_c , ϕ_c il raggio di curvatura può essere determinato con la seguente equazione:

$$\rho_c = \frac{\sqrt{\left[R_c^2 + \left(\frac{dR_c}{d\phi_c}\right)^2\right]^3}}{R_c^2 + 2\left(\frac{dR_c}{d\phi_c}\right)^2 - R_c \frac{d^2 R_c}{d\phi_c^2}} \tag{37.64}$$

Nel caso in cui le coordinate cartesiane dei punti della curva sono espresse in funzione di un parametro γ cioè $x_c=x_c(\gamma)$ e $y_c=y_c(\gamma)$, il raggio di curvatura può essere espresso come:

$$\rho_c = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx_c}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\gamma}\right)^2\right]^3}}{\frac{dx_c}{d\gamma} \frac{d^2 y_c}{d\gamma^2} - \frac{dy_c}{d\gamma} \frac{d^2 x_c}{d\gamma^2}} \tag{37.65}$$

Nel caso della camma, l'utilizzazione dell'eq.(63) non è conveniente non essendo semplice descriverne il profilo con una funzione $y=f(x)$; le (64,65) possono essere utilizzate nei casi in cui la coordinata polare ϕ_c o il parametro γ coincidono con l'angolo di rotazione θ , viceversa l'espressione delle derivate è troppo complessa.

Nei casi di punteria a piattello e coltello è possibile fare direttamente riferimento al punto P per cui nelle (64,65) possono essere introdotte rispettivamente la coordinata polare R (44) in luogo di R_c e le coordinate cartesiane x , y (26) del profilo della camma in luogo di x_c e y_c , utilizzando l'angolo θ in luogo di ϕ_c e γ come mostrato nel seguito.

Viceversa, nel caso della punteria a rotella (fig.15a,16a) è opportuno semplificare il problema determinando i raggi di curvatura del profilo *primitivo* della camma ρ_0 introducendo nelle (64, 65) le coordinate polari e cartesiane del punto tracciatore C; il raggio di curvatura del profilo della camma può essere determinato sottraendo semplicemente il raggio della rotella al raggio di curvatura del profilo primitivo:

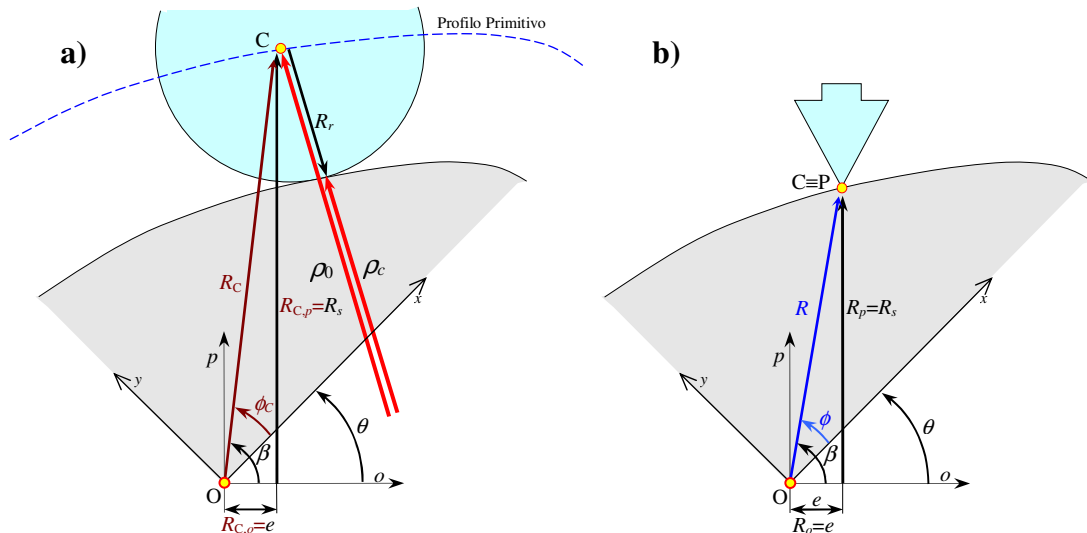


Fig.37.15 - Determinazione del raggio di curvatura nel caso di punterie a rotella e a coltello eccentriche.

$$\rho_c = \rho_0 - r_r \quad (37.66)$$

Nel caso generale di punterie eccentriche la (64) non può essere utilizzata in quanto la coordinata polare ϕ del punto P della camma, (45a), nel caso della punteria a coltello, e del punto tracciatore C, nel caso della punteria a rotella, non dipendono esclusivamente dall'angolo θ ; in questi casi è possibile utilizzare la (65) sfruttando le eq.(26) nel modo descritto nel seguito.

Le eq.(26) sono le relazioni tra coordinate polari e cartesiane utilizzate nel caso dei punti del profilo della camma; nel caso d'interesse, tenendo conto del fatto che per punteria a rotella è necessario fare riferimento al punto tracciatore, è opportuno riscriverle relativamente a un generico punto C nel piano $o-p$:

$$x_C = R_C \cos \phi_C = R_{C,p} \sin \theta + R_{C,o} \cos \theta \quad (37.67a)$$

$$y_C = R_C \sin \phi_C = R_{C,p} \cos \theta - R_{C,o} \sin \theta \quad (37.67b)$$

Anche nel caso di un punto generico è possibile esprimere l'angolo ϕ_C in funzione dell'angolo θ operando come nel caso delle eq.(24-27), per cui, in base al fatto che i parametri $R_{C,o}$ e $R_{C,p}$ sono indipendenti da ϕ , come mostrato nel seguito, il parametro θ assume il ruolo di γ nella (65).

Derivando le (67) rispetto a θ si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{dx_C}{d\theta} = R'_{C,p} \sin \theta + R_{C,p} \cos \theta + R'_{C,o} \cos \theta - R_{C,o} \sin \theta$$

$$\frac{dy_C}{d\theta} = R'_{C,p} \cos \theta - R_{C,p} \sin \theta - R'_{C,o} \sin \theta - R_{C,o} \cos \theta$$

$$\frac{d^2 x_C}{d\theta^2} = R''_{C,p} \sin \theta + R''_{C,o} \cos \theta + 2R'_{C,p} \cos \theta - 2R'_{C,o} \sin \theta - R_{C,p} \sin \theta - R_{C,o} \cos \theta \quad (37.68a-d)$$

$$\frac{d^2 y_C}{d\theta^2} = R''_{C,p} \cos \theta - R''_{C,o} \sin \theta - 2R'_{C,p} \sin \theta - 2R'_{C,o} \cos \theta - R_{C,p} \cos \theta + R_{C,o} \sin \theta$$

nelle quali $R'_{C,o}$, $R''_{C,o}$, $R'_{C,p}$, $R''_{C,p}$ sono le derivate delle funzioni $R_{C,o}$ ed $R_{C,p}$ rispetto a θ . Sostituendo le (68) nella (65) i termini seno e coseno possono essere eliminati ottenendo:

$$\rho_c = \frac{\sqrt{\left[(R_{C,p} + R'_{C,o})^2 + (R'_{C,p} - R_{C,o})^2 \right]^3}}{R_{C,p}^2 + R_{C,o}^2 - R''_{C,p} (R_{C,p} + R'_{C,o}) + R''_{C,o} (R'_{C,p} - R_{C,o}) + R'_{C,o} (3R_{C,p} + 2R'_{C,o}) + R'_{C,p} (2R'_{C,p} - 3R_{C,o})} \quad (37.69)$$

Come detto, nel caso della punteria a rotella con eccentricità il punto d'interesse è il punto tracciatore C; come visto nel paragrafo relativo alle coordinate polari nel caso generale, ricordando la (29a) e osservando la fig.15a, le espressioni di $R_{C,o}$ ed $R_{C,p}$ sono le seguenti

$$R_{C,o} = e \quad R_{C,p} = R_s = \sqrt{r_0^2 - e^2} + s \quad (37.70a,b)$$

Le derivate di $R_{C,o}$ ed $R_{C,p}$ rispetto a θ risultano:

$$R'_{C,o} = R''_{C,o} = 0 \quad R'_{C,p} = s' \quad R''_{C,p} = s'' \quad (37.71a-d)$$

e la (69), in base alla (66) e ricordando che $s'_e = s' - e$, può essere esplicitata nel modo seguente:

$$\rho_c = \frac{\sqrt{(R_s^2 + s_e'^2)^3}}{R_s^2 + e^2 - R_s s'' - 3e s' + 2s'^2} - r_r \quad (37.72)$$

Nel caso di punteria a coltello con eccentricità (fig.15b), le espressioni di $R_{C,o}$ ed $R_{C,p}$ coincidono con le (42a,43a), di seguito riportate

$$R_{C,o} = R_o = e \quad R_{C,p} = R_p = R_s = \sqrt{r_b^2 - e^2} + s \quad (37.42a,43a)$$

Le derivate di $R_{C,o}$ ed $R_{C,p}$ rispetto a θ risultano uguali a quelle del caso precedente (71a-d), per cui la (69) può essere esplicitata come

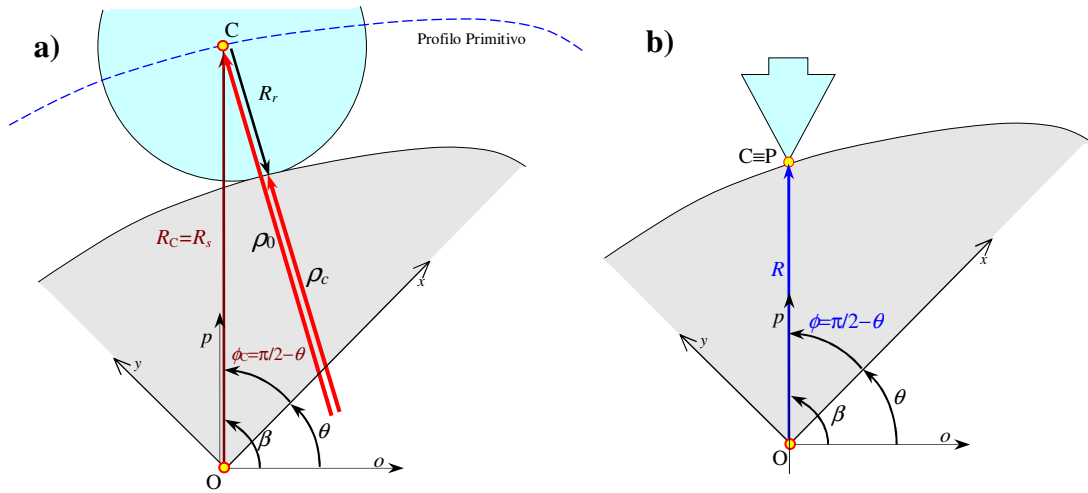


Fig.37.16 - Determinazione del raggio di curvatura nel caso di punterie a rotella e a coltello centrate.

$$\rho_c = \frac{\sqrt{[R_p^2 + (s' - R_o)^2]^3}}{R_p^2 + R_o^2 - R_p s'' - 3R_o s' + 2s'^2} = \frac{\sqrt{(R_s^2 + s_e'^2)^3}}{R_s^2 + e^2 - R_s s'' - 3e s' + 2s'^2} \quad (37.73)$$

Nei casi di punterie centrate le espressioni dei raggi di curvatura possono essere ottenute ponendo semplicemente $e=0$ nelle (72) e (73). Ricordando che per punteria a rotella centrata $R_s=r_0+s$, la (72) diventa

$$\rho_c = \frac{\sqrt{[R_s^2 + s'^2]^3}}{R_s^2 - R_s s'' + 2s'^2} - r_r = \frac{\sqrt{[(r_0 + s)^2 + s'^2]^3}}{(r_0 + s)^2 + 2s'^2 - (r_0 + s)s''} - r_r \quad (37.74)$$

Nel caso di punteria a coltello centrata $R=R_s=r_b+s$, da cui la (73) diventa

$$\rho_c = \frac{\sqrt{(R^2 + s'^2)^3}}{R^2 + 2s'^2 - R s''} = \frac{\sqrt{[(r_b + s)^2 + s'^2]^3}}{(r_b + s)^2 + 2s'^2 - (r_b + s)s''} \quad (37.75)$$

Le relazioni (74,75) possono essere ottenute anche utilizzando la (64) e le coordinate polari del punto C per punteria a rotella e del punto P per punteria a coltello; in entrambi i casi la coordinata polare R_c coincide con R_s e la coordinata polare è $\phi_c = \pi/2 - \theta$ per cui le derivate presenti nella (64) possono essere calcolate rispetto all'angolo θ .

Nel caso della punteria a piattello, ricordando che lo spostamento e l'accelerazione della punteria sono funzioni dell'angolo θ , essendo $s=s(\theta)$ ed $s''=s''(\theta)$, è possibile determinare il raggio di curvatura mediante la (65) utilizzando le equazioni delle coordinate x, y della camma espresse in funzione di θ (60a,b) ottenendo:

$$\rho_c = R_s + s'' = r_b + s + s'' \quad (37.76)$$

essendo le derivate delle funzioni $x(\theta)$ e $y(\theta)$ (60a,b) rispetto al parametro θ ottenibili come:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -(r_b + s + s'') \sin \theta & \frac{d^2x}{d\theta^2} &= -(r_b + s + s'') \cos \theta - (s' + s''') \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= (r_b + s + s'') \cos \theta & \frac{d^2y}{d\theta^2} &= -(r_b + s + s'') \sin \theta + (s' + s''') \cos \theta \end{aligned} \quad (37.77a-d)$$

Formule generali	
$R_s = \sqrt{(r_b + r_r)^2 - e^2} + s$	Coltello $r_r = 0$
$s'_e = s' - e$	Piattello $r_r = 0 \quad e = 0$
Componente R_p	Componente R_o
$R_p = R_s - r_r \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}}$	$R_o = e + r_r \frac{s'_e}{\sqrt{R_s^2 + s_e'^2}}$
Coordinata ϕ	Coordinata R
$\phi = \tan^{-1} \frac{R_p}{R_o} - \theta$	$R = \sqrt{R_p^2 + R_o^2}$
Coordinate x,y	
$x = R_p \sin \theta + R_o \cos \theta$	$y = R_p \cos \theta - R_o \sin \theta$
Coltello - Rotella	
Angolo di pressione α	
$\alpha = \tan^{-1} \frac{s'_e}{R_s}$	$\alpha = 0$
Raggio di curvatura ρ_c	
$\rho_c = \frac{\sqrt{[R_s^2 + (s' - e)^2]^3}}{R_s^2 + e^2 - R_s s'' - 3e s' + 2s'^2} - r_r$	$\rho_c = r_b + s + s''$

r_b raggio base camma	$s = s(t) = s(\theta)$
r_r raggio rotella	$s' = ds/d\theta$
$r_0 = r_b + r_r$	$s'' = d^2s/d\theta^2$
e eccentricità	

Punterie centrate		
COLTELLO		
Angolo di pressione α	Coordinate R- ϕ	Raggio di curvatura ρ_c
$\alpha = \tan^{-1} \frac{s'}{r_b + s}$	$R = r_b + s$	$\rho_c = \frac{\sqrt{[(r_b + s)^2 + s'^2]^3}}{(r_b + s)^2 + 2s'^2 - (r_b + s)s''}$
	$\phi = \tan^{-1} \frac{\pi}{2} - \theta$	
Coordinate x-y		$\rho_c = \frac{\sqrt{(R^2 + s'^2)^3}}{R^2 + 2s'^2 - R s''}$
$x = (r_b + s) \sin \theta$	$y = (r_b + s) \cos \theta$	
ROTELLA		
Angolo di pressione α	Coordinate R- ϕ	Raggio di curvatura ρ_c
$\alpha = \tan^{-1} \frac{s'}{r_0 + s}$	$R = \sqrt{(r_0 + s - r_r \cos \alpha)^2 + (r_r \sin \alpha)^2}$	$\rho_c = \frac{\sqrt{[(r_0 + s)^2 + s'^2]^3}}{(r_0 + s)^2 + 2s'^2 - (r_0 + s)s''} - r_r$
	$\phi = \tan^{-1} \frac{R_0 + s - r_r \cos \alpha}{r_r \sin \alpha} - \theta$	
Coordinate x-y		
$x = (r_0 + s) \sin \theta - r_r (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta)$	$y = (r_0 + s) \cos \theta - r_r (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta)$	
PIATTELLO		
Angolo di pressione α	Coordinate R- ϕ	Raggio di curvatura ρ_c
$\alpha = 0$	$R = r_b + s$	$\rho_c = r_b + s + s''$
	$\phi = \tan^{-1} \frac{\pi}{2} - \theta$	
Coordinate x-y		
$x = (r_b + s) \sin \theta + s' \cos \theta$	$y = (r_b + s) \cos \theta - s' \sin \theta$	