

34. CILINDRI IN PRESSIONE

Equazioni del problema elastico

In questo capitolo è descritto il problema elastico relativo a solidi geometricamente assialsimmetrici di forma cilindrica, spessore h costante, soggetti a carichi agenti parallelamente al piano ortogonale all'asse di simmetria. La geometria si presta a essere descritta in coordinate cilindriche r , θ e l con il sistema di riferimento disposto come in fig.1a. Un'ipotesi semplificativa consiste nel considerare il problema come piano, anche se in genere l'ipotesi è realmente verificata solo nel caso di elementi sottili (rapporto h/r_e basso, con r_e raggio esterno).

Le equazioni principali del problema elastico in coordinate cilindriche possono essere ottenute da quelle in coordinate cartesiane mediante un'opportuna trasformazione. Le equazioni di equilibrio e di compatibilità nel piano r - θ diventano rispettivamente:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + F_r = 0 \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (34.1)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (34.2)$$

essendo σ_r e σ_θ le tensioni normali agenti in direzione *radiale* e *circonferenziale* (o tangenziale), $\tau_{r\theta}$ le tensioni tangenziali nel piano r - θ , ε_r , ε_θ e $\gamma_{r\theta}$ le corrispondenti deformazioni, u e v gli spostamenti radiali e circonferenziali. In generale possono essere presenti anche tensioni e/o deformazioni longitudinali σ_l ed ε_l .

Le equazioni costitutive nel caso assialsimmetrico possono essere derivate direttamente dalle (3.7) relative ad assi cartesiani sostituendo direttamente le componenti di deformazione (ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$) e di tensione (σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$) corrispondenti.

Un'altra semplificazione può essere ottenuta nel caso in cui il problema elastico sia assialsimmetrico nel suo complesso, ipotesi che risulta verificata se:

- la geometria dell'elemento è assialsimmetrica,
- il materiale è isotropo o ortotropo assialsimmetrico,
- il carico è assialsimmetrico.

Nell'ipotesi di assialsimmetria tutte le grandezze emisimmetriche devono essere considerate nulle ($\tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = v = 0$) e le altre sono funzioni della sola variabile r ; in questo caso σ_r e σ_θ sono tensioni *principali*.

In molti casi la teoria esposta, basata sullo stato piano, può essere accettata per elementi con spessore leggermente variabile con legge $h(r)$. La presenza di piccole irregolarità, come fori, attacchi ecc, rende l'ipotesi di geometria assialsimmetrica meno realistica, ma, in molti casi, ancora accettabile.

Il teorema di Mitchell consente di affermare che, in assenza di forze di massa e sollecitazioni termiche, le ipotesi di tensioni e deformazioni piane portano a soluzioni coincidenti.

Determinazione diretta dell'equazione di equilibrio radiale

L'equazione dell'equilibrio radiale nel caso assialsimmetrico può essere ottenuta direttamente considerando l'equilibrio di un elementino delimitato da due archi di circonferenza di lunghezza rispettiva $rd\theta$ e $(r+dr)d\theta$, con lati di lunghezza dr e altezza h costante (fig.1b). Nel caso di elementi in pressione l'unica forza di massa è il peso che può essere trascurato, per cui, considerando positiva la direzione radiale uscente, le forze agenti sono:

1. forze in direzione radiale dovute alle tensioni σ_r :

$$\begin{aligned} \text{per } r+dr: dF_{1a} &= \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r+dr) h d\theta = \\ &= \sigma_r h r d\theta + \sigma_r h dr d\theta + \frac{d\sigma_r}{dr} h r dr d\theta + \frac{d\sigma_r}{dr} h dr dr d\theta \end{aligned} \quad (34.3)$$

$$\text{per } r: dF_{1b} = -\sigma_r h r d\theta \quad (34.4)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, la risultante delle forze dovute alle tensioni radiali è

$$dF_1 = \sigma_r h dr d\theta + \frac{d\sigma_r}{dr} h r dr d\theta \quad (34.5)$$

2. forze in direzione radiale dovute alle tensioni σ_θ :

$$dF_2 = -2 \sigma_\theta h dr \sin d\theta/2 \quad (34.6)$$

essendo $\sin d\theta/2 \approx d\theta/2$ si ha:

$$dF_2 = -\sigma_\theta h dr d\theta \quad (34.7)$$

Sommando tutte le forze e dividendo per $dV = h r dr d\theta$ si ottiene

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (34.8)$$

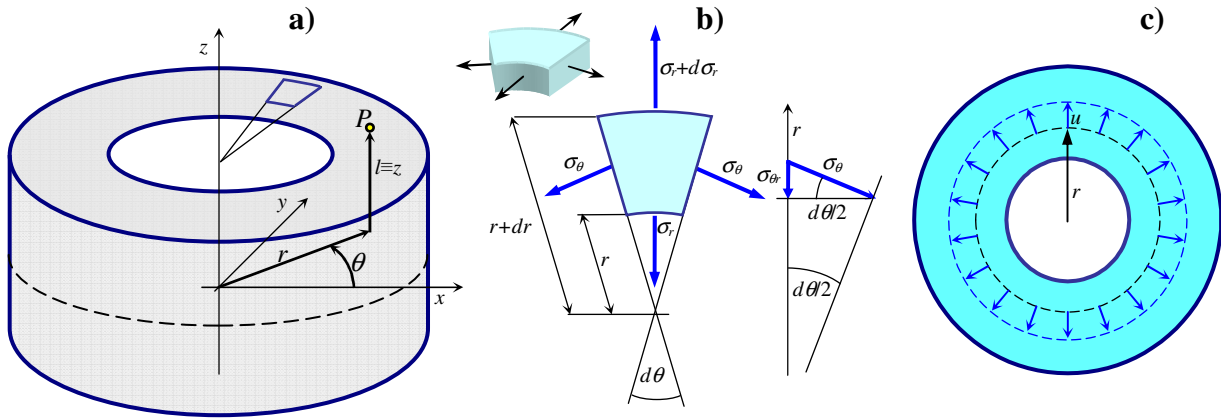


Fig.34.1 – a) Sistema di coordinate cilindriche; b) equilibrio dell’elementino di volume nel piano r - θ ; c) spostamenti radiali u .

Determinazione diretta delle equazioni di compatibilità

Nel caso assialsimmetrico le equazioni di compatibilità dipendono dall’unica funzione di spostamento diversa da 0, lo spostamento radiale $u(r)$ e possono essere ricavate direttamente. Se u è lo spostamento di un punto a distanza r dal centro del cilindro (fig.1c), l’incremento del raggio coincide con tale spostamento e la deformazione radiale risulta data da:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \tag{34.9}$$

A seguito della deformazione tutti i punti appartenenti ad una circonferenza di raggio r , di lunghezza iniziale $2\pi r$, si spostano in direzione radiale della stessa quantità u (fig.1) e la nuova lunghezza della circonferenza risulta $2\pi(r+u)$. La variazione di lunghezza della circonferenza risulta quindi essere $2\pi(r+u)-2\pi r=2\pi u$ e la deformazione circonferenziale ϵ_θ , costante lungo la circonferenza stessa per l’ipotesi di assialsimmetria, può essere espressa, a sua volta, come rapporto tra la variazione di lunghezza e la lunghezza iniziale:

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \tag{34.10}$$

L’allungamento circonferenziale può essere espresso come $2\pi r \epsilon_\theta$ e l’incremento del raggio può essere espresso in funzione della deformazione circonferenziale invertendo la (10):

$$u = r \epsilon_\theta \tag{34.11}$$

Utilizzando le (9) e (10) l’equazione di congruenza interna, che mette in relazione ϵ_θ ed ϵ_r , può essere ottenuta come:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{d(r\epsilon_\theta)}{dr} = r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} + \epsilon_\theta \tag{34.12}$$

Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive possono essere scritte in base alle due ipotesi possibili di stato di tensione piano e stato di deformazione piano.

La prima ipotesi è adatta al problema dei dischi nei quali lo spessore longitudinale non è elevato. In questo caso, essendo nulla la tensione agli estremi, si può considerare tale anche lungo lo spessore, mentre il piccolo spessore permette la presenza di deformazioni longitudinali. La legge di Hooke per materiale omogeneo e isotropo nel caso piano di tensione per $\sigma_z=0$ fornisce:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T \qquad \epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T \tag{34.13,14}$$

essendo α il coefficiente di dilatazione termica e T la variazione di temperatura. Le equazioni (13-14) possono essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_\theta \\ \epsilon_r \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{bmatrix} + \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34.15}$$

La deformazione longitudinale per $\sigma_r=0$ è data dalla seguente equazione indipendente

$$\varepsilon_l = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r) + \alpha T \quad (34.16)$$

Il caso di deformazione assiale nulla risulta verificato in presenza di vincoli posti nelle sezioni di estremità che impediscono gli spostamenti longitudinali o, nel caso di elementi di grosso spessore (longitudinale), in presenza di elevati gradienti di tensione. In questi casi la tensione longitudinale è data dalla seguente espressione:

$$\sigma_l = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha T \quad (34.17)$$

Utilizzando la (17), il legame deformazioni-sforzi tra le variabili principali σ_r , σ_θ ed ε_r , ε_θ risulta espresso dalle seguenti equazioni:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E}[-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta + E\alpha T] \quad \varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + E\alpha T] \quad (34.18,b)$$

In forma matriciale le equazioni (18) assumono la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{bmatrix} + (1+\nu) \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34.19)$$

Soluzione

La soluzione consiste nel determinare σ_r , σ_θ e u funzioni di r . Per la determinazione delle tensioni abbiamo a disposizione l'equazione di congruenza (12) e l'equazione di equilibrio radiale (8); la funzione degli spostamenti può essere ottenuta successivamente mediante l'eq.(11).

Per la determinazione delle tensioni è opportuno ricondursi a un'equazione differenziale in una sola incognita.

Utilizzando la formulazione agli spostamenti:

- con le equazioni costitutive e le equazioni di congruenza si esprimono le tensioni in funzione degli spostamenti $\sigma = \sigma(u)$;
- si introducono le espressioni ottenute nell'equazione di equilibrio che, in questo modo, risulta espressa in funzione degli spostamenti.

Formulazione alle tensioni (equazioni di Michell-Beltrami)

Utilizzando la formulazione alle tensioni:

1. si scrive l'equazione di congruenza interna (12) in funzione delle tensioni sostituendo alle deformazioni le espressioni (15) o (19),
2. dall'equazioni di equilibrio (8) si ottiene l'espressione della tensione circonferenziale in funzione della tensione radiale e della sua derivata,
3. si sostituisce anche questa espressione nell'equazione di compatibilità ottenendo un'equazione in funzione della sola σ_r che può essere risolta agevolmente.

Stato di tensione piano

Nel caso di stato di tensione piano si sostituiscono le espressioni delle deformazioni in funzione delle tensioni (13-14) nell'equazione di congruenza (12) che viene così riscritta in termini di tensioni:

$$\frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta + E\alpha T) = \frac{1}{E}r \frac{d(\sigma_\theta - \nu\sigma_r + E\alpha T)}{dr} + \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r + E\alpha T) \quad (34.20)$$

da cui

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha Er \frac{dT}{dr} = 0 \quad (34.21)$$

In assenza di variazioni di temperatura la (21) diventa

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (34.21b)$$

Una di queste due relazioni accoppiata all'equazione di equilibrio (8) fornisce un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite σ_r e σ_θ .

Stato di deformazione piano

Nel caso di stato di deformazione piano si sostituiscono le espressioni delle deformazioni in funzione delle tensioni (18a,b) nell'equazione di congruenza (12) che viene così riscritta in termini di tensioni

$$\frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + E\alpha T] = \frac{1+\nu}{E} \left\{ r \frac{d[-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta + E\alpha T]}{dr} - \nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta + E\alpha T \right\} \quad (34.22)$$

da cui

$$\sigma_\theta - \sigma_r + (1-\nu)r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha E r \frac{dT}{dr} = 0 \quad (34.23)$$

In assenza di variazioni di temperatura la (23) diventa:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r) + (1-\nu)r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (34.23b)$$

Una di queste relazioni accoppiata all'equazione di equilibrio (8) fornisce un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite σ_r e σ_θ . Sebbene le (21b) e (23b) siano differenti, conducono alla stessa soluzione.

Soluzione per spessore costante in assenza di forze di massa e dilatazione termica

Il caso di spessore costante, assenza di forze di massa e dilatazione termica è utile a descrivere il caso di cilindri sottoposti a pressione interna ed esterna. L'equazione differenziale che si ottiene è l'omogenea associata alle equazioni che si ottengono nei casi in cui sono presenti forze di massa e dilatazioni termiche. In questo caso le soluzioni (le funzioni σ_r e σ_θ) per stato di tensione e deformazione piano coincidono.

Le equazioni a disposizione per la soluzione in termini di tensione sono l'equazione di congruenza in termini di tensioni (21b) o (23b) e l'equazione di equilibrio (8). In particolare, è opportuno scrivere l'equazione di congruenza (21b) in termini della sola σ_r con i due seguenti passaggi:

1. si esprime σ_θ in funzione di σ_r utilizzando l'equazione di equilibrio (8),
2. si sostituisce l'espressione ottenuta nell'equazione di congruenza (21b).

Portando la σ_θ al primo membro della (8) e moltiplicando ambo i membri per r si ottiene

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (34.24)$$

Sostituendo la σ_θ nella (21b) mediante la (24) si ottiene:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{r dr} = 0 \quad (34.25)$$

La (25) è un'equazione omogenea a variabili separabili; ponendo $d\sigma_r/dr=f$ si può scrivere:

$$\frac{d}{dr} f = -3 \frac{f}{r} \quad \frac{df}{f} = -3 \frac{dr}{r} \quad (34.26,27)$$

Risolviendo la (27) ed effettuando la sostituzione $f=d\sigma_r/dr$ si ottiene

$$\ln \frac{d\sigma_r}{dr} = -3 \ln r + C \quad e^{\ln \frac{d\sigma_r}{dr}} = e^{-3 \ln r + C} = e^{-3 \ln r} e^C \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = e^C r^{-3} \quad (34.28a-c)$$

Integrando ulteriormente si ottiene

$$\sigma_r = e^C \frac{r^{-3+1}}{-3+1} + A \quad \sigma_r = A - \frac{e^C}{2} \frac{1}{r^2} \quad (34.29a,b)$$

Infine, ponendo $B=e^C/2$ nella (29b) e sostituendo l'espressione ottenuta nella (24) si ottiene rispettivamente:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad \sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2} \quad (34.30,31)$$

Si osserva che la somma delle tensioni radiali e circonferenziali è ovunque costante ($\sigma_r + \sigma_\theta = 2A$): questo implica che in caso di stato piano di tensione, la deformazione assiale (16) risulta costante in tutti i punti del piano.

Le costanti A e B possono essere determinate nei vari casi imponendo che la (30) rispetti le equazioni di equilibrio al contorno, cioè assuma valori opportuni al raggio interno e al raggio esterno.

Cilindri in pressione

Le equazioni presentate nei seguenti paragrafi sono valide per tubi e serbatoi cilindrici soggetti a pressione interna e/o esterna. Introducendo le tensioni espresse mediante le (30-31) nella (16) è possibile verificare che la deformazione longitudinale risulta costante al variare del raggio, per cui tutti punti del cilindro, a causa delle sole tensioni radiali e circonferenziali, sono soggetti alla stessa deformazione longitudinale. In questo caso, anche nel caso in cui lo spessore longitudinale è elevato, poiché non vi sono zone indeformate che si oppongano alla deformazione longitudinale delle zone più sollecitate nel piano, in assenza di sollecitazioni esterne o di vincoli in direzione longitudinale, la σ_l risulta nulla e lo stato piano di tensione risulta piano.

Nel caso dei tubi si considera l'elemento come indefinito nel senso della lunghezza e la presenza di una σ_l dipende solitamente da eventuali vincoli posti sulle sezioni estreme. Nel caso dei serbatoi la presenza dei fondi provoca delle spinte assiali che creano una tensione longitudinale costante σ_l nello spessore, indipendente dalle tensioni nel piano radiali e circonferenziali. Il problema elastico rimane piano per la determinazione di σ_r e σ_θ (variabili principali del problema) e la tensione σ_l può essere determinata a parte considerando il cilindro come una trave soggetta a trazione/compressione.

La geometria dell'elemento cilindrico può essere descritta dai seguenti parametri (fig.2):

- r_i , il raggio interno,
- r_e , il raggio esterno,
- $s=r_e-r_i$, lo spessore,
- $\beta=r_i/r_e$, con $0 \leq \beta \leq 1$,
- $\rho=r/r_e$, essendo $\beta \leq \rho \leq 1$

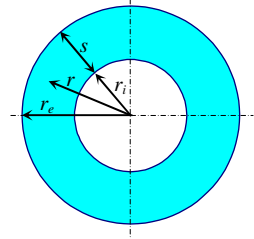


Fig.34.2 - Geometria.

In particolare la variabile adimensionale ρ è utilizzata al posto di r , in modo da rendere β l'unico parametro necessario a descrivere la geometria del cilindro. Naturalmente le (30-31) possono essere riscritte sostituendo ρ al posto di r , utilizzando successivamente i valori assunti dalla variabile ρ ($\rho=\beta$ e $\rho=1$) nella determinazione delle condizioni al contorno. Da notare che $\beta \rightarrow 1$ per $r_e \rightarrow r_i$, cioè per cilindri di *piccola spessore*, mentre $\beta \rightarrow 0$ per $r_e \rightarrow \infty$ cioè per cilindri di *grande spessore* (da notare che $\beta \rightarrow 0$ anche per $r_i \rightarrow 0$, cioè cilindri *pieni*).

Nelle espressioni riportate nel seguito, la pressione agente deve essere introdotta utilizzando come unità di misura il Megapascal [MPa=N/mm²]. In appendice è riportata una tabella di conversione tra le unità di misura più utilizzate per quantificare la pressione.

Tensione longitudinale

L'equazione di equilibrio tra la forza dovuta alle tensioni longitudinali costanti, agenti nello spessore (r_e-r_i) della corona circolare, e la forza dovuta alle pressioni agenti su uno dei fondi è:

$$\sigma_l 2\pi \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right) (r_e - r_i) = \pi (p_i r_i^2 - p_e r_e^2) \quad (34.32)$$

da cui si ricava

$$\sigma_l = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_i - \frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad (34.33)$$

Pressione esterna

Nel caso di pressione esterna agente le *condizioni al contorno* da imporre alle (30,31), avendo sostituito ρ al posto di r , sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_e & \rho &= 1 \quad (r=r_e) \\ \sigma_r &= 0 & \rho &= \beta \quad (r=r_i) \end{aligned} \quad (34.34)$$

Imponendo tali condizioni nelle (30,31)

$$-p_e = A - B \quad 0 = A - B/\beta^2 \quad (34.35)$$

si ottiene

$$A = -\frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad B = -\frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_e \quad (34.36,37)$$

Le espressioni delle tensioni al variare di ρ sono date da:

$$\sigma_r = -\frac{\rho^2 - \beta^2}{\rho^2} \frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad \sigma_\theta = -\frac{\rho^2 + \beta^2}{\rho^2} \frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad \sigma_l = -\frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad (34.38-40)$$

Tutte le tensioni (38-40) risultano di *compressione* e la tensione massima in valore assoluto è quella *circonferenziale* agente al bordo interno, come si vede in fig.3a per il caso di $\beta=0.7$ e in fig.4 per il caso di $\beta=0.5$.

Tensioni massime ed equivalenti

Le tensioni radiali e circonferenziali massime agenti nello spessore del cilindro sono:

$$\sigma_r = -p_e \quad \rho=1 (r=r_e), \quad \sigma_\theta = -\frac{2}{1-\beta^2} p_e \quad \rho=\beta (r=r_i) \quad (34.41,42)$$

Il punto critico si trova al raggio interno ($\rho=\beta$) dove le tensioni sono espresse con le seguenti relazioni:

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = -\frac{2}{1-\beta^2} p_e \quad \sigma_l = -\frac{1}{1-\beta^2} p_e \quad (34.43-45)$$

In fig.4 sono mostrati i cerchi di Mohr dello stato tensionale al bordo interno del cilindro per i casi di $\sigma_l=0$ e $\sigma_l \neq 0$ per un cilindro con $\beta=0.5$; è possibile notare che la tensione σ_l , se presente, assume un valore *intermedio* tra σ_θ e σ_r che sono rispettivamente la massima e la minima tensione principale in valore assoluto. Ovviamente, nel caso di $\sigma_l=0$ lo stato tensionale al bordo interno è *monoassiale* di compressione, essendo solo la tensione σ_θ diversa da 0. Il criterio di Navier, il criterio di Tresca e il criterio di Von Mises, *nel caso in cui sia nulla la tensione longitudinale*, forniscono la stessa tensione equivalente:

$$\sigma_{eq} = |\sigma_\theta| = \frac{2}{1-\beta^2} p_e \quad (34.46)$$

Imponendo che la tensione equivalente sia uguale alla tensione ammissibile σ_{am} è possibile determinare il valore di progetto da assegnare a β :

$$\beta = \sqrt{1 - 2 \frac{p_e}{\sigma_{am}}} \quad (34.47)$$

Nel caso di *tensioni longitudinali diverse da 0* il criterio di Von Mises per materiali duttili fornisce:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{p_e^2}{2} \left[\left(0 + \frac{1}{1-\beta^2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{1-\beta^2} + \frac{2}{1-\beta^2} \right)^2 + \left(0 + \frac{2}{1-\beta^2} \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{3}}{1-\beta^2} p_e \quad (34.48)$$

Dalla (48) può essere ricavato il valore di progetto da assegnare a β :

$$\beta = \sqrt{1 - 1.732 \frac{p_e}{\sigma_{am}}} \quad (34.49)$$

Spostamenti radiali

La funzione degli spostamenti radiali può essere ricavata dalle (11) e (13)

$$u = \varepsilon_\theta r = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (34.50)$$

Dalla (50), utilizzando le (38) e (39) e ricordando che $r=\rho r_e$, si ottiene:

$$u = -\rho \left[(1-\nu) + \frac{\beta^2}{\rho^2} (1+\nu) \right] \frac{1}{1-\beta^2} \frac{r_e p_e}{E} \quad (34.51)$$

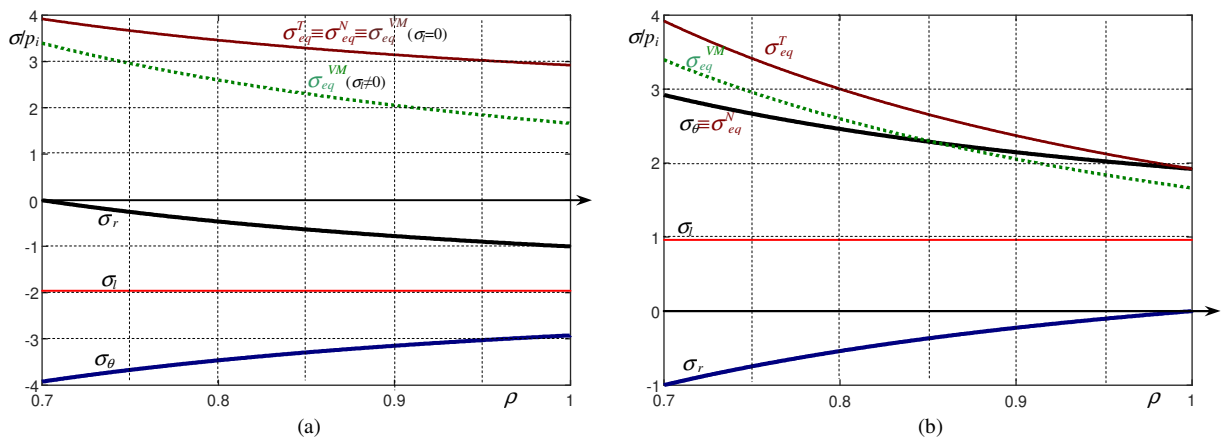


Fig.34.3 - Tensioni normalizzate (σ/p_i) in cilindri con $\beta=0.7$ soggetti a pressione esterna (a) ed interna (b): tensioni radiali σ_r , circonferenziali σ_θ e longitudinali σ_l ; tensioni equivalenti σ_{eq} di Tresca per $\sigma_l=0$ e di Von Mises per $\sigma_l \neq 0$. Le tensioni equivalenti di Navier coincidono con il modulo delle tensioni circonferenziali $|\sigma_\theta|$ in entrambi i casi.

Pressione interna

Operando come nel caso precedente, cioè *imponendo le condizioni al contorno* $\sigma_r = -p_i$ per $\rho = \beta$ e $\sigma_r = 0$ per $\rho = 1$, nel caso di pressione interna si ottengono le seguenti espressioni delle tensioni al variare di ρ :

$$\sigma_r = -\frac{1-\rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_i \quad \sigma_\theta = \frac{1+\rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_i \quad \sigma_l = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_i \quad (34.52-54)$$

Le tensioni *radiali* sono sempre di compressione, mentre le altre di trazione. In fig.3b è mostrato l'andamento delle tensioni radiali, circonferenziali e longitudinali normalizzate al valore della pressione interna p_i per il caso di $\beta=0.7$. È facile notare come la tensione circonferenziale risulti positiva e maggiore in valore assoluto rispetto a quella radiale, con valore massimo al bordo interno. L'andamento delle tensioni è mostrato anche in fig.4 nel caso di $\beta=0.5$.

In fig.5 sono mostrati gli andamenti delle tensioni radiali e circonferenziali normalizzate al valore della pressione interna p_i al variare del raggio r per cilindri con $r_i=1$ e *diversi valori di β* . È possibile notare come le tensioni circonferenziali *crescano notevolmente al crescere di β* e quindi al diminuire dello spessore del cilindro, mentre per le tensioni radiali si ha sempre $-1 < \sigma_r/p_i < 0$ dovendo essere rispettate le condizioni al contorno.

Tensioni massime ed equivalenti

Le massime tensioni in valore assoluto si hanno sulla superficie interna ($\rho = \beta$):

$$\sigma_r = -p_i \quad \sigma_\theta = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} p_i \quad \sigma_l = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} p_i \quad (34.55-57)$$

La σ_θ al bordo interno risulta *sempre la massima tensione* per qualsiasi valore di β , tendendo al valore p_i per $\beta \rightarrow 0$ (spessore $\rightarrow \infty$) e a infinito per $\beta \rightarrow 1$ (spessore $\rightarrow 0$) (fig.5). Anche in questo caso la tensione σ_r , se presente, ha un valore *intermedio* tra quelli della σ_θ e della σ_l (fig.4). La tensione tangenziale massima agisce nel piano $r-\theta$, essendo le tensioni circonferenziali e radiali di segno *opposto*, come si può osservare in fig.4 dove sono mostrati i cerchi di Mohr dello stato tensionale al bordo interno del cilindro per i casi di $\sigma_l=0$ e $\sigma_l \neq 0$.

Per materiali *duttili*, per entrambi i casi di $\sigma_l=0$ e $\sigma_l \neq 0$, il criterio di Tresca (fig.3b) fornisce la seguente tensione equivalente al bordo interno

$$\sigma_{eq} = |\sigma_\theta - \sigma_r| = \frac{2}{1-\beta^2} p_i \quad (34.58)$$

Introducendo la tensione ammissibile σ_{am} , è possibile determinare il valore di progetto da assegnare a β :

$$\beta = \sqrt{1 - 2 \frac{p_i}{\sigma_{am}}} \quad (34.59)$$

Il criterio di Von Mises fornisce un risultato leggermente meno conservativo del criterio di Tresca per *tensioni longitudinali nulle* e l'espressione della tensione equivalente che si ottiene non può essere esplicitata rispetto a β :

$$\beta = \sqrt{1 - \sqrt{3 + \beta^4} \frac{p_i}{\sigma_{am}}} \quad (34.60)$$

La (60) può comunque essere utilizzata in modo iterativo, introducendo inizialmente nella parte destra dell'equazione il valore $\beta=0$. In generale sono sufficienti poche iterazioni affinché il valore di β risulti costante e pari a quello effettivo. Per *tensioni longitudinali diverse da 0*, il criterio di Von Mises fornisce la seguente espressione della tensione equivalente al bordo interno:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{p_i^2}{2} \left[\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} + 1 \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{3}}{1-\beta^2} p_i \quad (34.61a)$$

che consente di determinare il valore di progetto da assegnare a β con la seguente espressione:

$$\beta = \sqrt{1 - 1.732 \frac{p_i}{\sigma_{am}}} \quad (34.61b)$$

L'andamento della tensione di Von Mises al variare di ρ per $\sigma_l \neq 0$ è mostrato in fig.3b.

Nel caso dei materiali *fragili*, per entrambi i casi di $\sigma_r=0$ e $\sigma_r \neq 0$, la tensione equivalente di Navier al bordo interno coincide con la σ_θ (56) e l'equazione di progetto diventa:

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{1 + p_i/\sigma_{am}}} - 1 = \sqrt{\frac{1 - p_i/\sigma_{am}}{1 + p_i/\sigma_{am}}} \quad (34.62)$$

Spostamenti radiali

La funzione degli spostamenti radiali può essere ottenuta operando come nel caso precedente utilizzando la (50). Sostituendo le (55) e (56) nella (50) si ottiene:

$$u = \rho \left[(1 - \nu) + \frac{1}{\rho^2} (1 + \nu) \right] \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{r_e p_i}{E} \quad (34.63)$$

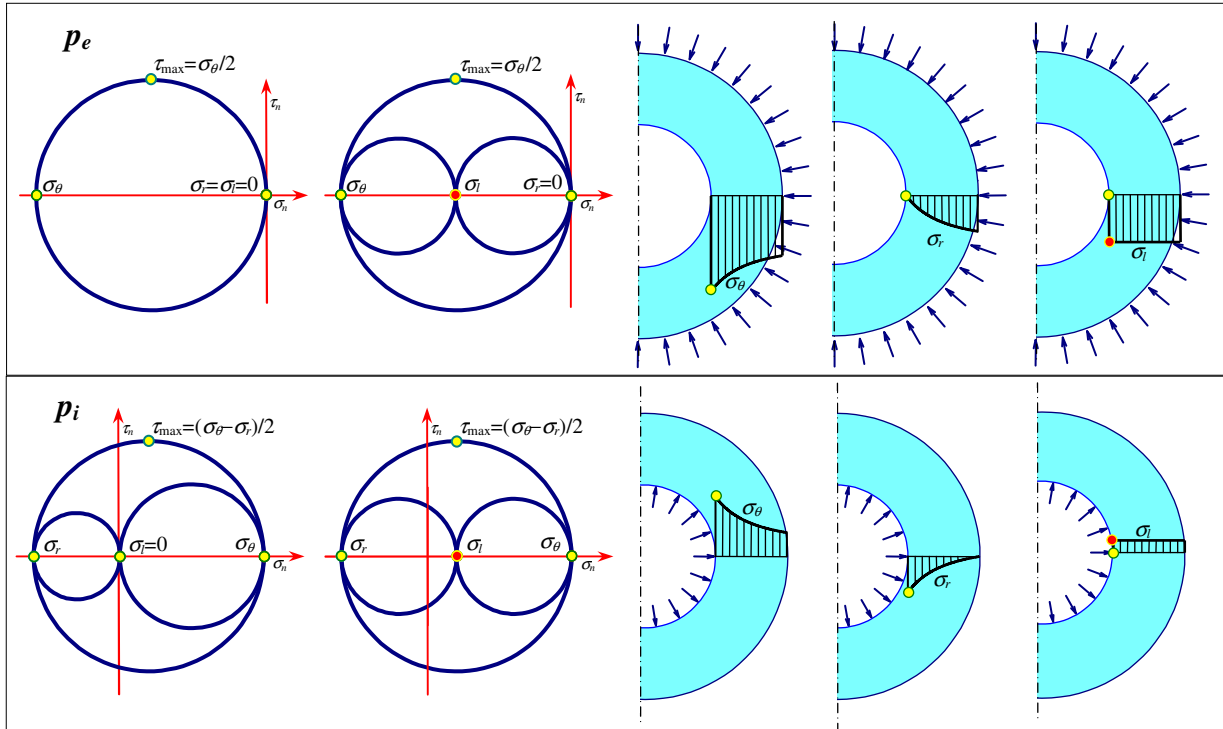


Fig.34.4 - Cilindro con $\beta=0.5$; in alto caso di pressione esterna p_e , in basso caso di pressione interna p_i ($p_e=p_i$). A sinistra cerchi di Mohr relativi ai punti al bordo interno ($\rho=\beta$), per i casi di $\sigma_r=0$ e $\sigma_r \neq 0$. A destra tensioni circonferenziali σ_θ , radiali σ_r e longitudinali σ_l .

Pressione esterna ed interna

In caso di simultanea presenza di pressione esterna ed interna le tensioni radiali e circonferenziali possono essere ottenute mediante la sovrapposizione degli effetti, ottenendo le seguenti espressioni:

$$\sigma_r = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\beta^2 p_i - p_e - \frac{\beta^2}{\rho^2} (p_i - p_e) \right] \quad \sigma_\theta = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\beta^2 p_i - p_e + \frac{\beta^2}{\rho^2} (p_i - p_e) \right] \quad (34.64,65)$$

Le tensioni radiali al raggio interno e al raggio esterno sono date rispettivamente da:

$$\sigma_r = -p_i \quad (\rho=\beta) \quad \sigma_r = -p_e \quad (\rho=1) \quad (34.66a,b)$$

Le tensioni circonferenziali ai raggi interno ed esterno sono date rispettivamente da:

$$\sigma_\theta = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} p_i - \frac{2}{1 - \beta^2} p_e \quad \sigma_\theta = \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2} p_i - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} p_e \quad (34.67a,b)$$

Da notare che le tensioni dovute alla simultanea presenza di pressione interna ed esterna sono inferiori a quelle prodotte dalla massima delle due agente da sola. Lo spostamento radiale diventa:

$$u = \rho \left[(1 - \nu) (p_i \beta^2 - p_e) + (1 + \nu) \beta^2 \frac{p_i - p_e}{\rho^2} \right] \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{r_e}{E} \quad (34.68)$$

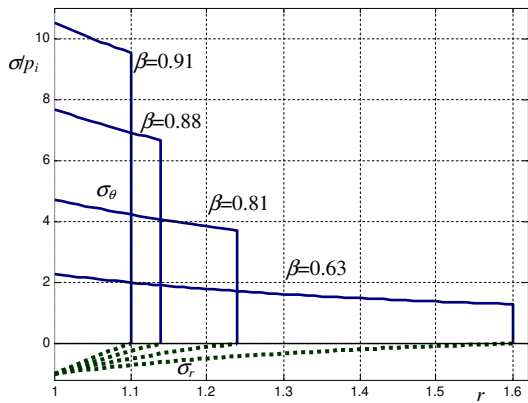


Fig.34.5 – Tensioni radiali e circonferenziali normalizzate in funzione di r per diversi valori di β con $r_i=1$. σ_θ linea continua, σ_r linea punteggiata.

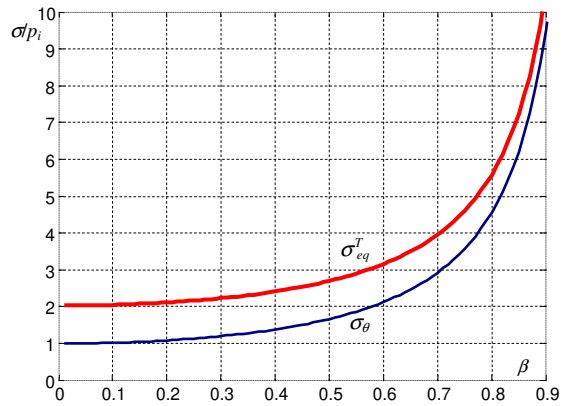


Fig.34.6 – Tensioni di Tresca e circonferenziali per pressione interna per $\rho=\beta$, al variare di β .

Cerchiatura

Nel caso di pressione elevata l’aumento dello spessore non è sempre sufficiente ad evitare la crisi del materiale al bordo interno del cilindro. Nel caso di pressione interna, la relazione (61) non fornisce soluzioni se $p_i > \sigma_{am}/1.732$ e valori della pressione vicini a tale livello producono valori di β tendenti a 0 (cioè $r_e \rightarrow \infty$). In fig.6 è possibile osservare l’andamento delle tensioni circonferenziali e di Tresca (normalizzate rispetto alla pressione), agenti al bordo interno di un cilindro sollecitato a pressione interna, al variare del rapporto β . Si nota come, per $\beta \rightarrow 0$ ($r_e \rightarrow \infty$), la tensione circonferenziale non scende al di sotto di p_i e, conseguentemente, la σ_e di Tresca al di sotto di $2p_i$.

Elevate pressioni interne possono essere sopportate mediante la cosiddetta *cerchiatura* che consiste nel forzare un cilindro esterno sul primo. Con riferimento alla fig.7, il cilindro esterno (2) deve avere un raggio interno r_{i2} leggermente inferiore al raggio esterno del cilindro interno (1) r_{e1} (cioè $r_{e1} > r_{i2}$); la differenza tra tali raggi $\delta = r_{e1} - r_{i2}$ è definita *interferenza*. Per eseguire l’operazione di forzamento si genera una differenza di temperatura fra i due cilindri che rende temporaneamente $r_{i2} > r_{e1}$. Dopo il montaggio e il successivo raggiungimento dell’equilibrio termico, i due raggi diventano coincidenti (cioè $r_{e1} = r_{i2}$): il cilindro interno risulta contratto e quello esterno dilatato. Tale deformazione è legata a una pressione p_f al contatto tra i cilindri (tipicamente tale da rendere praticamente impossibile lo smontaggio; questo è lo stesso metodo con il quale si calettano i mozzi sugli alberi). La pressione p_f viene subita come pressione esterna dal cilindro (1) e interna dal (2); nel cilindro (1) le tensioni circonferenziali dovute al forzamento sono negative e si sottraggono a quelle dovute alla pressione (interna) di esercizio, rendendo lo stato tensionale meno severo; nel cilindro (2) le tensioni circonferenziali di forzamento si sommano a quelle di esercizio.

I punti critici dell’accoppiamento sono ai raggi interni di entrambi i cilindri, poiché la pressione di forzamento può risultare eccessiva per il cilindro esterno. Per il massimo sfruttamento del materiale, il forzamento deve essere effettuato in modo che le tensioni equivalenti in detti punti siano *uguali tra loro e pari alla tensione ammissibile*. In aggiunta alle ipotesi formulate è necessario assumere che i due cilindri abbiano la stessa lunghezza.

Interferenza e pressione di forzamento

Siano r_{i1} , r_{e1} e β_1 il raggio interno, il raggio esterno e il β del cilindro interno (1), r_{i2} , r_{e2} e β_2 le analoghe grandezze del cilindro esterno (2). Come detto l’interferenza δ provoca una pressione di forzamento p_f fra i due cilindri al raggio $r_{e1} = r_{i2}$ che viene subita come pressione esterna dal cilindro (1) e pressione interna dal cilindro (2). Ci si propone di determinare la relazione tra la pressione di forzamento p_f e δ .

Siano:

- δ_{e1} la diminuzione del raggio esterno del cilindro interno in base all’eq.(51)

$$u(1) = \delta_{e1} = - \left(\frac{1 + \beta_1^2}{1 - \beta_1^2} - \nu_1 \right) \frac{r_{e1}}{E_1} p_f \tag{34.69}$$

- δ_{i2} l’incremento del raggio interno del cilindro esterno in base all’eq.(63), avendo posto $r_{e2} = r_{i2} / \beta_2 = r_{e1} / \beta_2$,

$$u(\beta_2) = \delta_{i2} = \left(\frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} + \nu_2 \right) \frac{r_{e1}}{E_2} p_f \tag{34.70}$$

L’interferenza δ è:

$$\delta = \delta_{i2} - \delta_{e1} = \left[\frac{1}{E_2} \left(\frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} + \nu_2 \right) + \frac{1}{E_1} \left(\frac{1 + \beta_1^2}{1 - \beta_1^2} - \nu_1 \right) \right] r_{e1} p_f \tag{34.71}$$

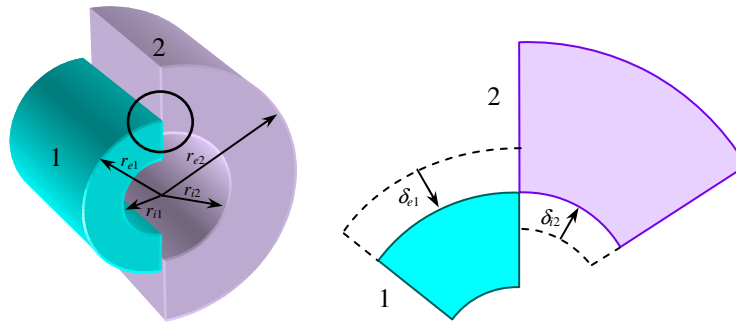


Fig.34.7 – Dimensioni dei cilindri nella cerchiatura.

In queste equazioni E_1 ed E_2 e ν_1 e ν_2 sono, rispettivamente, i moduli di elasticità e i coefficienti di Poisson dei materiali dei due cilindri; se i materiali sono uguali, la relazione si semplifica in

$$\delta = \frac{1 - \beta_1^2 \beta_2^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \frac{2 r_{e1}}{E} p_f \quad (34.72)$$

L'inversa consente di ottenere la pressione per assegnato valore dell'interferenza:

$$p_f = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{E}{2 r_{e1}} \delta \quad (34.73)$$

In fase di progetto i parametri geometrici da determinare per il forzamento sono β_1 , β_2 e δ . Quest'ultimo viene ricavato dalla (72) una volta determinata la pressione di forzamento p_f con le relazioni mostrate nel seguito.

Tensioni ai raggi interni

Le tensioni agenti in corrispondenza del raggio interno dei due cilindri a causa del solo forzamento (fig.8a) si ottengono rispettivamente dalle (43,44) e (55,56), ponendo rispettivamente $\beta = \beta_1$ e $\beta = \beta_2$:

$$\sigma_{rf1} = 0 \quad \sigma_{\theta f1} = -\frac{2}{1 - \beta_1^2} p_f \quad (34.74,75)$$

$$\sigma_{rf2} = -p_f \quad \sigma_{\theta f2} = \frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} p_f \quad (34.76,77)$$

Le analoghe tensioni dovute alla sola pressione interna (fig.8a) si ottengono considerando i due cilindri come un unico cilindro di raggio interno r_{i1} e raggio esterno r_{e2} , avente, quindi, $\beta = r_{i1}/r_{e2} = (r_{i1}/r_{e1})(r_{i2}/r_{e2}) = (r_{i1}/r_{e1})(r_{e1}/r_{e2}) = \beta_1 \beta_2$ (essendo $r_{i2} = r_{e1}$). In particolare al raggio interno si ottengono dalle (55,56) ponendo $\beta = \beta_1 \beta_2$, mentre in corrispondenza del raggio interno del cilindro esterno si ottengono dalle (52,53) ponendo $\beta = \beta_1 \beta_2$ e $\rho = \beta_2$:

$$\sigma_{ri1} = -p_i \quad \sigma_{\theta i1} = \frac{1 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i \quad (34.78,79)$$

$$\sigma_{ri2} = -\frac{\beta_1^2 - \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i \quad \sigma_{\theta i2} = \frac{\beta_1^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i \quad (34.80,81)$$

Gli 8 valori di tensione (74-81), relativi ai 2 cilindri e alle sole pressioni di esercizio e di forzamento, sono mostrati in fig.8a. Le tensioni dovute alla presenza simultanea della pressione di forzamento e della pressione interna per i due cilindri (fig.8b) si ottengono sommando i singoli contributi (o dalle 64-67):

$$\sigma_{r1} = \sigma_{ri1} + \sigma_{rf1} = -p_i \quad \sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta i1} + \sigma_{\theta f1} = \frac{1 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - \frac{2}{1 - \beta_1^2} p_f \quad (34.82,83)$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_{ri2} + \sigma_{rf2} = -\frac{\beta_1^2 - \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - p_f \quad \sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta i2} + \sigma_{\theta f2} = \frac{\beta_1^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i + \frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} p_f \quad (34.84,85)$$

Nel caso dei materiali *fragili* le tensioni equivalenti di Navier dovute alla presenza simultanea del forzamento e della pressione di esercizio in corrispondenza del raggio interno dei due cilindri *coincidono con le tensioni circonferenziali* espresse dalle (83) e (85).

Nel caso dei materiali *duttili*, le tensioni equivalenti di Tresca (fig.8b), in base alle (82,83) e (84,85), risultano:

$$\sigma_{eq1}^T = \sigma_{\theta 1} - \sigma_{r 1} = \frac{2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - \frac{2}{1 - \beta_1^2} p_f \quad (34.86)$$

$$\sigma_{eq2}^T = \sigma_{\theta 2} - \sigma_{r 2} = \frac{2\beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i + \frac{2}{1 - \beta_2^2} p_f \quad (34.87)$$

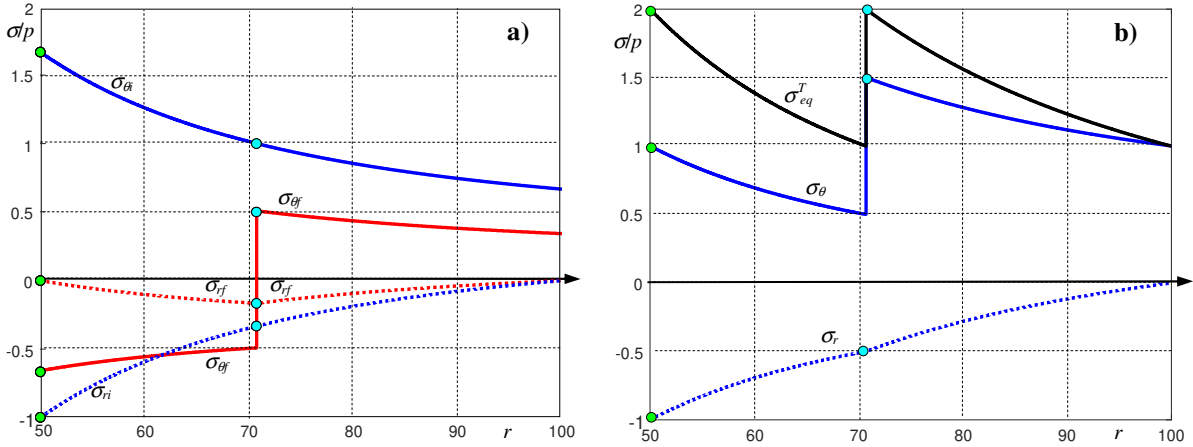


Fig.34.8 – Tensioni normalizzate (σ/p) nel caso di cerchiatura per $r_i=50$ mm, $p_i=100$ MPa, $\sigma_{am}=200$ MPa. I valori ottimali di progetto risultano $\beta_1=\beta_2=\beta_0=0.707$, essendo $\beta=\beta_1\beta_2=0.5$; a) tensioni radiali e circonferenziali dovute alla pressione interna (σ_{ri} e $\sigma_{\theta i}$) e al forzamento (σ_{rf} e $\sigma_{\theta f}$); b) tensioni radiali e circonferenziali dovute all'effetto simultaneo di p_i e p_f ($\sigma_r=\sigma_{ri}+\sigma_{rf}$, $\sigma_{\theta}=\sigma_{\theta i}+\sigma_{\theta f}$) e corrispondenti tensioni di Tresca (σ_{eq}).

Scelte di progetto

Nel caso più generale i parametri da determinare sono tre, β_1 , β_2 e p_f , mentre le equazioni disponibili sono due, cioè le (83) e (85) per i materiali fragili e le (86) e (87) per i materiali duttili. Come anticipato, si deve operare in modo che le tensioni equivalenti di esercizio al raggio interno dei due cilindri risultino uguali e pari alla tensione ammissibile, cioè si abbia $\sigma_{eq1}=\sigma_{eq2}=\sigma_{am}$. Affinché si abbia $\sigma_{eq1}=\sigma_{eq2}$ la pressione di forzamento deve assumere valori appropriati.

Per i materiali fragili, uguagliando i termini di destra delle (83) e (85) ed esplicitando rispetto a p_f , si ottiene:

$$p_f = \frac{1 - \beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_2^2)(1 - \beta_1^2) + 2(1 - \beta_2^2)} p_i \quad (34.88)$$

Per i materiali duttili, uguagliando i termini di destra delle (86) e (87) ed esplicitando rispetto a p_f , si ottiene:

$$p_f = \frac{1 - \beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 - \beta_1^2) + (1 - \beta_2^2)} p_i \quad (34.89)$$

Queste relazioni permettono di ricavare il valore della pressione di forzamento necessaria a *rendere uguali le tensioni equivalenti* σ_{eq1} e σ_{eq2} , per valori assegnati di β_1 e β_2 e della pressione interna p_i . Un'altra equazione di progetto può essere ottenuta imponendo che le tensioni equivalenti di esercizio a raggi interni siano pari alla tensione ammissibile, cioè si abbia $\sigma_{eq1}=\sigma_{am}$ e/o $\sigma_{eq2}=\sigma_{am}$. Utilizzando le espressioni delle tensioni equivalenti di Navier (83) e Tresca (86) e sostituendo p_f con le (88) e (89), si ottiene rispettivamente:

$$\sigma_{eq1}^N = -\frac{\beta_1^2(1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 + 1}{\beta_1^2(1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 - 3} p_i = \sigma_{am} \quad \sigma_{eq1}^T = \frac{2p_i}{(1 - \beta_1^2) + (1 - \beta_2^2)} = \sigma_{am} \quad (34.90,91)$$

È importante sottolineare il fatto che la (90) e la (91) possono essere utilizzate solo se la pressione di forzamento applicata è quella determinata con le (88) e (89), rispettivamente. In fig.8b è mostrato un esempio dell'andamento delle tensioni equivalenti di Tresca ottenute applicando le (89,91).

Poiché, in entrambi i casi, le incognite sono 3 e le equazioni 2, l'operazione più opportuna consiste nell'assegnare il valore di β_1 o di β_2 determinando l'altro tramite la (90) o la (91) e p_f con la (88) o la (89). Ottenuto il valore di p_f , l'interferenza δ da assegnare ai cilindri si determina mediante la (72). Al variare dei valori di β_1 e β_2 si ottengono differenti valori del prodotto $\beta=\beta_1\beta_2$ che determina lo *spessore complessivo dei cilindri accoppiati*.

Scelta ottimale

Si può dimostrare che i valori più bassi dello spessore complessivo dei cilindri (corrispondenti a più alti valori di $\beta=\beta_1\beta_2$) si ottengono se si impone $\beta_1=\beta_2=\beta_0$. In questo caso le (88-91) e la (72) diventano rispettivamente

$$p_f = \frac{1-\beta_0^2}{1+\beta_0^2} \frac{1}{3+\beta_0^2} p_i \qquad p_f = \frac{1-\beta_0^2}{1+\beta_0^2} \frac{p_i}{2} \qquad (34.92,93)$$

$$\sigma_{eq1}^N = -\frac{2\beta_0^2 + \beta_0^4 + 1}{2\beta_0^2 + \beta_0^4 - 3} p_i \qquad \sigma_{eq1}^T = \frac{p_i}{1-\beta_0^2} = \sigma_{am} \qquad (34.94,95)$$

$$\delta = \frac{1+\beta_0^2}{1-\beta_0^2} \frac{2r_{e1}}{E} p_f \qquad (34.96)$$

In questo caso le (94) e (95) consentono di determinare l'unica incognita β_0 e da essa $\beta=\beta_0^2$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}}-1} \qquad \beta_0 = \sqrt{1-p_i/\sigma_{am}} \qquad (34.97,98)$$

$$\beta = \beta_0^2 = \frac{2}{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}}-1 \qquad \beta = \beta_0^2 = 1-p_i/\sigma_{am} \qquad (34.99,100)$$

Le (92) e (93) si trasformano rispettivamente in

$$p_f = \sqrt{1+p_i/\sigma_{am}} \frac{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}-1}{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}+1} p_i \qquad p_f = \frac{1}{2\sigma_{am}/p_i-1} \frac{p_i}{2} \qquad (34.101,102)$$

Sostituendo le (97, 101) e le (99, 102) nella (96), si ottengono i valori di interferenza in funzione delle sole variabili p_i e σ_{am} per i due casi di materiali fragili e duttili:

$$\delta = \frac{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}}{\sqrt{1+p_i/\sigma_{am}}+1} \frac{2r_{e1}}{E} p_i \qquad \delta = \frac{r_{e1}}{E} p_i \qquad (34.103,104)$$

In fig.8 è mostrato un esempio delle tensioni che si ottengono determinando β_0 con la (98); in fig.9a è mostrato il confronto tra la tensione equivalente di Tresca nel caso di singolo cilindro con $\beta=\beta_0^2$ e sola pressione interna agente e quella ottenuta con la cerchiatura. In fig.9b è mostrato un confronto tra i valori del diametro esterno ottenuti utilizzando l'equazione di progetto (59) per singolo cilindro e l'equazione di progetto (100) per la coppia di cilindri forzati.

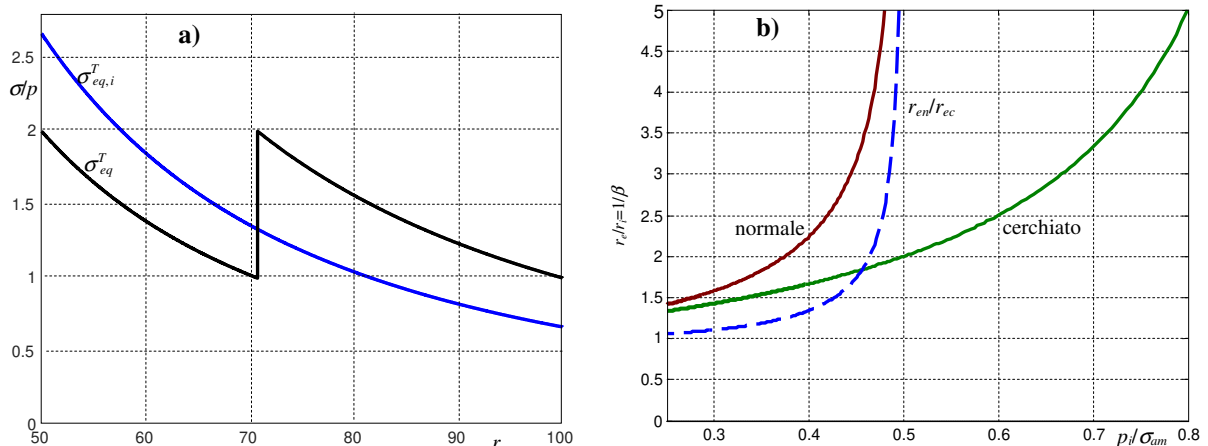


Fig.34.9 - a) Confronto tra le tensioni equivalente di Tresca per i cilindri cerchiati del caso di fig.8 e quella che si otterrebbe per un singolo cilindro con $\beta=0.5$ soggetto alla sola pressione di esercizio. b) Andamenti del rapporto tra raggio esterno ed interno ($r_e/r_i=1/\beta$) determinati con l'eq.(59) per cilindro normale e l'eq.(100) relativa al criterio di Tresca, per coppia di cilindri forzati (con $\beta=\beta_0^2$), al variare del rapporto tra la pressione interna p_i applicata e la tensione ammissibile σ_{am} . Si osserva come tale rapporto diverga per $p_i/\sigma_{am}=0.5$ per cilindro normale. Con linea tratteggiata è indicato il rapporto tra i raggi esterni ottenuti con la (59) (cilindro normale) e la (100) (cilindro forzato); ovviamente l'andamento ha significato sino al valore $p_i/\sigma_{am}=0.5$ oltre il quale non è possibile dimensionare il cilindro singolo.

Contentori multistrato

Utilizzando due cilindri rimane comunque impossibile dimensionare cilindri in materiale duttile, soggetti a pressioni di esercizio il cui valore è prossimo a σ_{am} . Al fine di ridurre lo spessore complessivo del contenitore è possibile utilizzare un numero di cilindri $n > 2$.

Nella determinazione delle formule per il dimensionamento dei contenitori multistrato verranno utilizzate le seguenti definizioni:

- n numero dei cilindri costituenti il contenitore multistrato;
- r_j raggi interni degli n cilindri e raggio esterno del cilindro n , con $j=1, \dots, n+1$ (r_1 ed r_{n+1} coincidono rispettivamente con i raggi *interno* r_i ed *esterno* r_e del contenitore multistrato);
- $\beta_j = r_j / r_{j+1}$ rapporto tra raggio interno e raggio esterno del j -esimo cilindro, con $j=1, \dots, n$;
- $\beta_M = r_1 / r_{n+1}$ rapporto tra raggio interno e raggio esterno del contenitore multistrato;
- $\rho_j = r_j / r_{n+1}$ rapporto tra raggio interno del j -esimo cilindro e raggio esterno del contenitore multistrato, con $j=1, \dots, n$;
- p_j pressione di forzamento tra i cilindri j e $j+1$, con $j=1, \dots, n-1$, agente in corrispondenza del raggio r_{j+1} .

Nel caso più generale della progettazione di un contenitore cilindrico multistrato, le variabili di partenza del problema, a parte il raggio interno $r_i = r_1$, sono costituite dall'entità della pressione interna di esercizio e della tensione ammissibile del materiale, p_i e σ_{am} , mentre i parametri da dimensionare sono: il numero n di cilindri che costituiscono il contenitore, gli n parametri geometrici β_j degli n cilindri, gli $n-1$ valori delle pressioni di forzamento tra i cilindri in contatto, p_j , ($j=1, \dots, n-1$), gli $n-1$ valori dell'interferenza da assegnare alle coppie di cilindri, δ_j .

In generale le pressioni di forzamento dovrebbero essere tali da rendere le tensioni equivalenti ai bordi interni dei cilindri uguali tra loro e, quando possibile, pari a σ_{am} . La determinazione degli spessori dei cilindri deve essere effettuata in modo da rendere minimo lo spessore complessivo del contenitore.

I valori dei parametri β_M e ρ_j possono essere posti in relazione con i valori dei parametri β_j degli n cilindri costituenti il contenitore mediante le seguenti *produttorie*:

$$\beta_M = r_1 / r_{n+1} = \prod_{j=1}^n \beta_j = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \quad \rho_j = r_j / r_{n+1} = \prod_{k=j}^n \beta_k = \beta_j \beta_{j+1} \dots \beta_n \quad (34.105, 106)$$

3.1. Tensioni dovute alla pressione di esercizio

Nel caso del cilindro multistrato la pressione interna agisce sugli n cilindri collegati con forzamento come se fossero un unico cilindro di spessore $s = r_{n+1} - r_1$. Le tensioni radiali e circonferenziali agenti in corrispondenza del bordo interno di ciascun cilindro sono date dalle seguenti relazioni ottenibili dalle (52,53) introducendo i parametri β e ρ_j espressi dalle (105,106):

$$\sigma_{r,j}^{ip} = -\frac{1 - \rho_j^2}{\rho_j^2} \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \quad \sigma_{\theta,j}^{ip} = \frac{1 + \rho_j^2}{\rho_j^2} \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \quad (34.107, 108)$$

In fig.10a è mostrato il caso di $n=5$ cilindri con valori uguali del rapporto r_i / r_e , $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_0 = 0.7746$, con rapporto r_i / r_e del contenitore multistrato $\beta_M = \beta_0^5 = 0.279$, raggio interno $r_i = 100$, raggio esterno $r_e = 358.6$, pressione di esercizio $p_i = 100$ MPa. In fig.10b è riportato l'andamento delle tensioni (107,108) dovute alla pressione di esercizio.

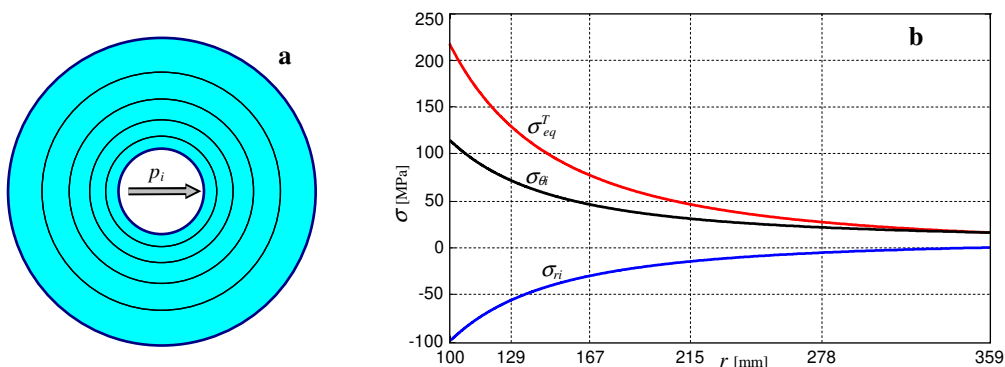


Fig.34.10 - a) Esempio di contenitore costituito da $n=5$ cilindri con uguale valore del parametro $\beta_j=0.7746$, b) tensioni radiali, circonferenziale ed equivalenti di Tresca dovute alla pressione interna $p_i=100$ MPa.

Tensioni dovute al forzamento

Nella determinazione delle tensioni dovute al forzamento si deve tenere conto del fatto che ciascun cilindro subisce l'effetto delle pressioni di forzamento che agiscono *tra tutte le coppie di cilindri*. In particolare, con riferimento alla fig.11, nella quale $n=5$ e $j=3$, le tensioni agenti al *bordo interno* del cilindro j , in posizione r_j , sono provocate:

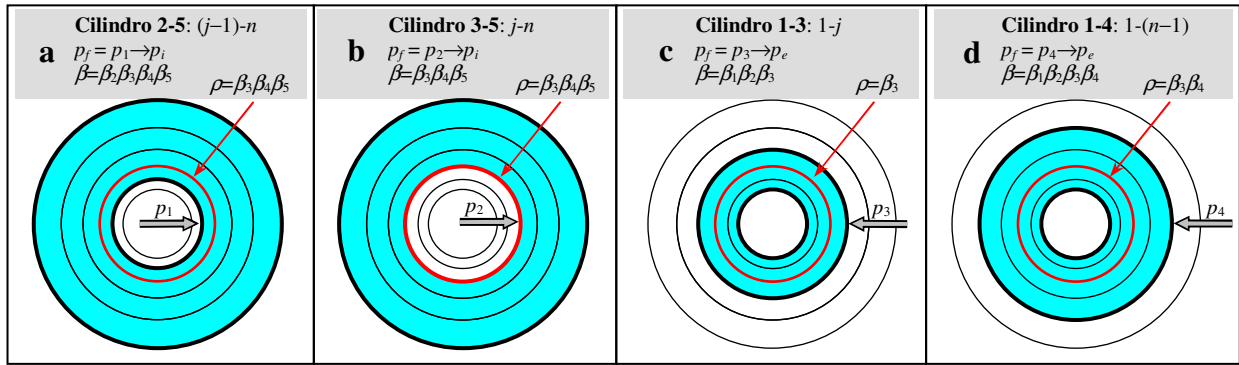


Fig.34.11 - Determinazione delle tensioni di forzamento al bordo interno del cilindro $j=3$ nel caso di $n=5$; pressioni p_j e parametri β e ρ nella determinazione delle tensioni.

1) dalle pressioni di forzamento p_k , con $1 \leq k \leq j-1$, ciascuna delle quali agisce come pressione *interna* su un cilindro avente *raggio esterno* coincidente con il raggio esterno del contenitore multistrato ($r_e=r_{n+1}$) e *raggio interno* coincidente con la posizione in cui agisce la pressione ($r_i=r_2, \dots, r_j$) (fig. 11 a,b):

$$\sigma_{r,j}^{if} = -\frac{1-\rho_j^2}{\rho_j^2} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\rho_k^2}{\beta_k^2 - \rho_k^2} p_k \quad \sigma_{\theta,j}^{if} = \frac{1+\rho_j^2}{\rho_j^2} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\rho_k^2}{\beta_k^2 - \rho_k^2} p_k \quad (34.109,110)$$

2) dalle pressioni di forzamento p_k , con $j \leq k \leq n-1$, ciascuna delle quali agisce come pressione *esterna* su un cilindro avente *raggio interno* coincidente con il raggio interno del contenitore multistrato ($r_i=r_1$) e *raggio esterno* coincidente con la posizione in cui agisce la pressione ($r_e=r_{j+1}, \dots, r_n$) (fig. 11 c,d):

$$\sigma_{r,j}^{ef} = -\frac{\rho_j^2 - \beta_M^2}{\rho_j^2} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_k^2 \beta_M^2} p_k \quad \sigma_{\theta,j}^{ef} = -\frac{\rho_j^2 + \beta_M^2}{\rho_j^2} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_k^2 \beta_M^2} p_k \quad (34.111,112)$$

Le tensioni radiali e circonferenziali totali dovute alle pressioni di forzamento si ottengono sommando tra loro le (109, 111) per σ_r e le (110, 112) per σ_θ .

Le equazioni (109,110) e (111,112) sono state ricavate dalle equazioni (52,53) e (38,39), introducendo al posto di ρ e β gli appositi prodotti dei valori β_j , che, nell'esempio mostrato in fig.11, sono riportati nella figura stessa, e semplificando le espressioni ottenute mediante le (105,106) e le seguenti relazioni:

$$\rho_{k+1}^2 = \rho_k^2 / \beta_k^2 = \prod_{i=k+1}^n \beta_i^2 \quad \prod_{i=1}^k \beta_i^2 = \beta_M^2 / \rho_{k+1}^2 = \beta_M^2 \beta_k^2 / \rho_k^2 \quad (34.113,114)$$

In fig.12 sono mostrate le tensioni radiali e circonferenziali prodotte dalle pressioni di forzamento $p_1=7.55$ e $p_4=7.55$, nel caso di fig.11. È importante notare che al bordo interno del primo cilindro ($j=1$), le pressioni di forzamento provocano solo tensioni circonferenziali di compressione espresse dalla (112), mentre al bordo interno dell'ultimo cilindro ($j=n$), provocano solo tensioni circonferenziali di trazione espresse dalla (110).

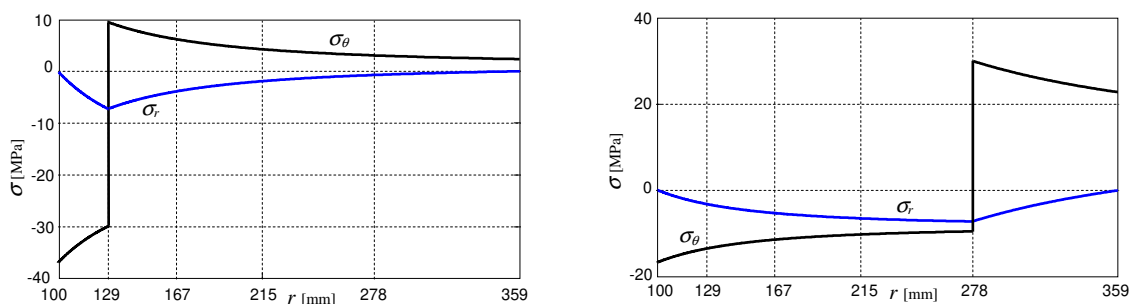


Fig.34.12 - Tensioni radiali e circonferenziali dovute alle pressioni di forzamento $p_1=7.55$ e $p_4=7.55$ mostrate in fig.11a e 11d.

Tensioni equivalenti di Tresca e Navier

L'espressione delle tensioni equivalenti di Tresca agenti ai bordi interni dei cilindri può essere ottenuta sommando le tensioni circonferenziali (108), (110), (112) e sottraendo le tensioni radiali (107), (109) e (111), ottenendo la seguente espressione:

$$\sigma_{eq,j}^T = -\frac{2}{\rho_j^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k + \beta_M^2 \sum_{k=j}^{n-1} R_k^e p_k - \frac{\beta_M^2}{1-\beta_M^2} p_i \right) \quad (34.115)$$

nella quale:

$$R_k^i = \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_k^2} \quad R_k^e = \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_M^2 \beta_k^2} \quad k=1, \dots, n-1 \quad (34.116, 117)$$

L'espressione delle tensioni equivalenti di Navier si ottiene sommando semplicemente le tensioni circonferenziali (108, 110, 112), sempre utilizzando le (116, 117):

$$\sigma_{eq,j}^N = -\frac{1 + \rho_j^2}{\rho_j^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k + \frac{\beta_M^2 + \rho_j^2}{1 + \rho_j^2} \sum_{k=j}^{n-1} R_k^e p_k - \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \right) \quad (34.118)$$

In fig.13a,b sono mostrate le tensioni radiali e circonferenziali totali agenti sui cilindri ottenute sommando rispettivamente le (107, 109, 111) e le (108, 110, 112) nel caso di $n=5$, $p_i = \sigma_{am} = 100$ Mpa ed $r_i = 100$ mm. La fig.13a si riferisce al caso mostrato nelle fig.10 e 11, con $\beta_j = \beta_0 = 0.7746$ e pressioni di forzamento $p_1 = 7.55$, $p_2 = 10.88$, $p_3 = 10.88$ e $p_4 = 7.55$. In fig.13b è mostrato il caso di $\beta_j = \beta_0 = 0.860873$ e pressioni di forzamento $p_1 = 3.01$, $p_2 = 3.88$, $p_3 = 3.38$, $p_4 = 1.99$ MPa. In fig.13a sono mostrate anche le tensioni equivalenti di Tresca, mentre, in entrambi i casi, le tensioni equivalenti di Navier (118) coincidono con le tensioni circonferenziali σ_θ .

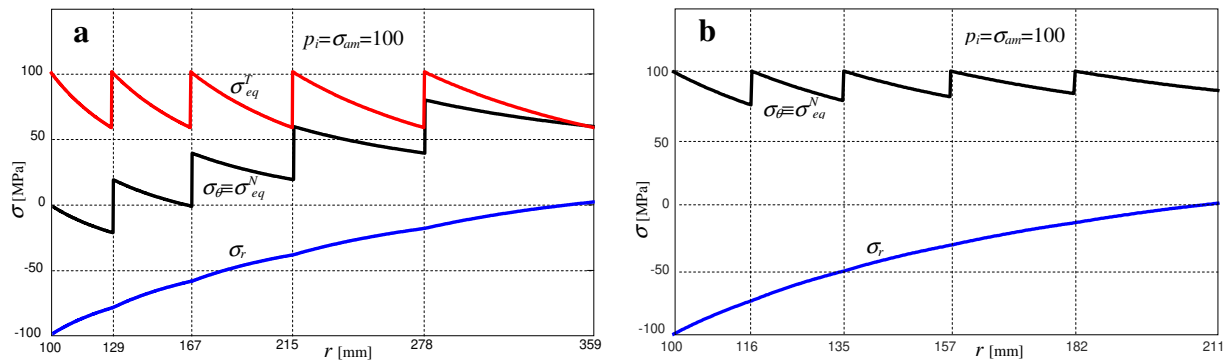


Fig.34.13 – Tensioni radiali e circonferenziali complessive nel caso di $n=5$, $p_i = \sigma_{am} = 100$ Mpa, $r_i = 100$ mm; a) caso di $\beta_j = \beta_0 = 0.7746$ e pressioni di forzamento $p_1 = 7.55$, $p_2 = 10.88$, $p_3 = 10.88$, $p_4 = 7.55$ MPa; b) caso di $\beta_j = \beta_0 = 0.860872$ e pressioni di forzamento $p_1 = 3.01$, $p_2 = 3.88$, $p_3 = 3.38$, $p_4 = 1.99$ MPa. In fig.13a sono mostrate anche le tensioni equivalenti di Tresca.

Parametri di progetto

Come detto, le variabili di partenza del problema, a parte il raggio interno del contenitore, sono le entità della pressione interna e della tensione ammissibile del materiale, p_i e σ_{am} , mentre i parametri da dimensionare in fase di progetto sono il numero di cilindri del contenitore multistrato, n , gli n valori dei parametri β_j , gli $n-1$ valori delle pressioni di forzamento p_j , nonché gli $n-1$ valori dell'interferenza da assegnare alle coppie di cilindri δ_j , ottenibili direttamente dalle pressioni forzamento.

Poiché i punti più sollecitati sono quelli al bordo interno di ciascun cilindro, nelle posizioni identificate dai raggi r_j o dai parametri adimensionali ρ_j , la soluzione ottimale può essere ottenuta nel caso in cui le tensioni equivalenti in corrispondenza di tali punti risultano uguali tra loro e pari alla tensione ammissibile. La determinazione dei valori β_j deve essere effettuata in modo da rendere minimo lo spessore complessivo del contenitore.

Pressioni di forzamento

Il primo passo è consiste nella determinazione delle pressioni di forzamento da imporre affinché le tensioni equivalenti ai bordi interni dei cilindri risultino uguali tra loro. In particolare, imponendo la condizione

$$\sigma_{eq,j+1} - \sigma_{eq,j} = 0 \quad j=1, \dots, n-1 \quad (34.119)$$

per ciascuna delle eq.(115) e (118), si ottiene un sistema lineare di $n-1$ equazioni le cui incognite sono, in generale, le $n-1$ pressioni di forzamento p_j e gli n valori del parametro β_j . Nel caso in cui i valori di β_j siano stati assegnati, il sistema permette di determinare le pressioni di forzamento.

Nel caso del criterio di Tresca, la tensione equivalente al bordo interno del cilindro $j+1$ si ricava modificando opportunamente la (115), ottenendo:

$$\sigma_{eq,j+1}^T = -\frac{2}{\rho_{j+1}^2} \left(\sum_{k=1}^j R_k^i p_k + \beta_M^2 \sum_{k=j+1}^{n-1} R_k^e p_k - \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \right) \quad (34.120)$$

Effettuando la differenza tra i termini di destra delle (115) e (120), separando i termini di indice j dalle sommatorie e ponendo il risultato uguale a 0, si ottiene il seguente sistema di $n-1$ equazioni:

$$\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k - \frac{\beta_j^2 R_j^i - \beta_M^2 R_j^e}{1 - \beta_j^2} p_j + \beta_M^2 \sum_{k=j+1}^{n-1} R_k^e p_k = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.121)$$

Operando allo stesso modo con le tensioni equivalenti ottenute con il criterio di Navier (118) il sistema risulta:

$$\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k - \frac{(\rho_j^2 + \beta_j^2) R_j^i - (\rho_j^2 + \beta_M^2) R_j^e}{1 - \beta_j^2} p_j + \beta_M^2 \sum_{k=j+1}^{n-1} R_k^e p_k = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.122)$$

I sistemi di equazioni (121) e (122) possono essere scritti in forma matriciale come:

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (34.123)$$

essendo \mathbf{p} il vettore contenente le pressioni incognite p_j :

$$\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{n-1}]^T \quad (34.124)$$

\mathbf{b} il vettore dei termini noti, uguali per tutte le equazioni e per i due sistemi:

$$b_j = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.125)$$

\mathbf{A} la matrice dei coefficienti, i cui termini *fuori dalla diagonale* sono uguali per i due sistemi ed espressi come:

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= R_k^i & j = 2, \dots, n-1, k = 1, \dots, j-1 \\ A_{j,k} &= \beta_M^2 R_k^e & j = 1, \dots, n-1, k = j+1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (34.126)$$

A loro volta, i termini *appartenenti alla diagonale* della matrice \mathbf{A} , per i due casi dei criteri di Tresca (121) e Navier, (122) sono espressi rispettivamente come:

$$A_{j,j} = -\frac{\beta_j^2 R_j^i - \beta_M^2 R_j^e}{1 - \beta_j^2} \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.127)$$

$$A_{j,j} = -\frac{(\rho_j^2 + \beta_j^2) R_j^i - (\rho_j^2 + \beta_M^2) R_j^e}{1 - \beta_j^2} \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.128)$$

Nei casi di fig.13 sono state utilizzate pressioni di forzamento ottenute con i sistemi espressi dalle (121,122) per le tensioni equivalenti di Tresca e Navier, rispettivamente.

Valori ottimali dei parametri β_j

Utilizzando il criterio di Tresca è possibile verificare che il minore spessore complessivo del cilindro multistrato può essere ottenuto utilizzando cilindri con lo stesso valore del parametro β_j , $\beta_j = \beta_0$; il valore di β_0 può essere determinato mediante la seguente relazione, che può essere considerata una generalizzazione delle (59) e (98):

$$\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{2}{n} \frac{p_i}{\sigma_{am}}} \quad (34.129)$$

essendo n il numero di cilindri. In questo caso il parametro $\beta_M = r_i/r_e$ del contenitore è $\beta_M = \beta_0^n$. Se si utilizzano cilindri con il valore del parametro $\beta_j = \beta_0$ ottenuto mediante la (129), ciascuna delle $n-1$ equazioni del sistema (121) risulta contenere la sola incognita p_j , che può essere esplicitata semplicemente come

$$p_j = \frac{(\beta_0^{2j} - \beta_0^{2n})(1 - \beta_0^{2j})(1 - \beta_0^2) \sigma_{am}}{\beta_0^{2j} (1 - \beta_0^{2n})} \frac{1}{2} \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.130)$$

Determinando il parametro β_0 mediante la (129) e le pressioni p_j mediante la (130), le tensioni equivalenti di Tresca ai bordi interni dei cilindri risultano pari a σ_{am} , come si vede in fig.13a, essendo le figure da 10 a 13a relative ad un esempio di applicazione delle eq.(129-130), nel caso in cui $p_i = \sigma_{am} = 100$ MPa. In fig.14a (in alto) è mostrata una rappresentazione dello spessore del contenitore multistrato che si ottiene utilizzando la (129); in particolare viene mostrato il rapporto tra lo spessore del contenitore e il suo raggio interno

$$\frac{s}{r_i} = \frac{r_e - r_i}{r_i} = \frac{r_e}{r_i} - 1 = \frac{1}{\beta_0^n} - 1 = \frac{1 - \beta_0^n}{\beta_0^n} \quad (34.131)$$

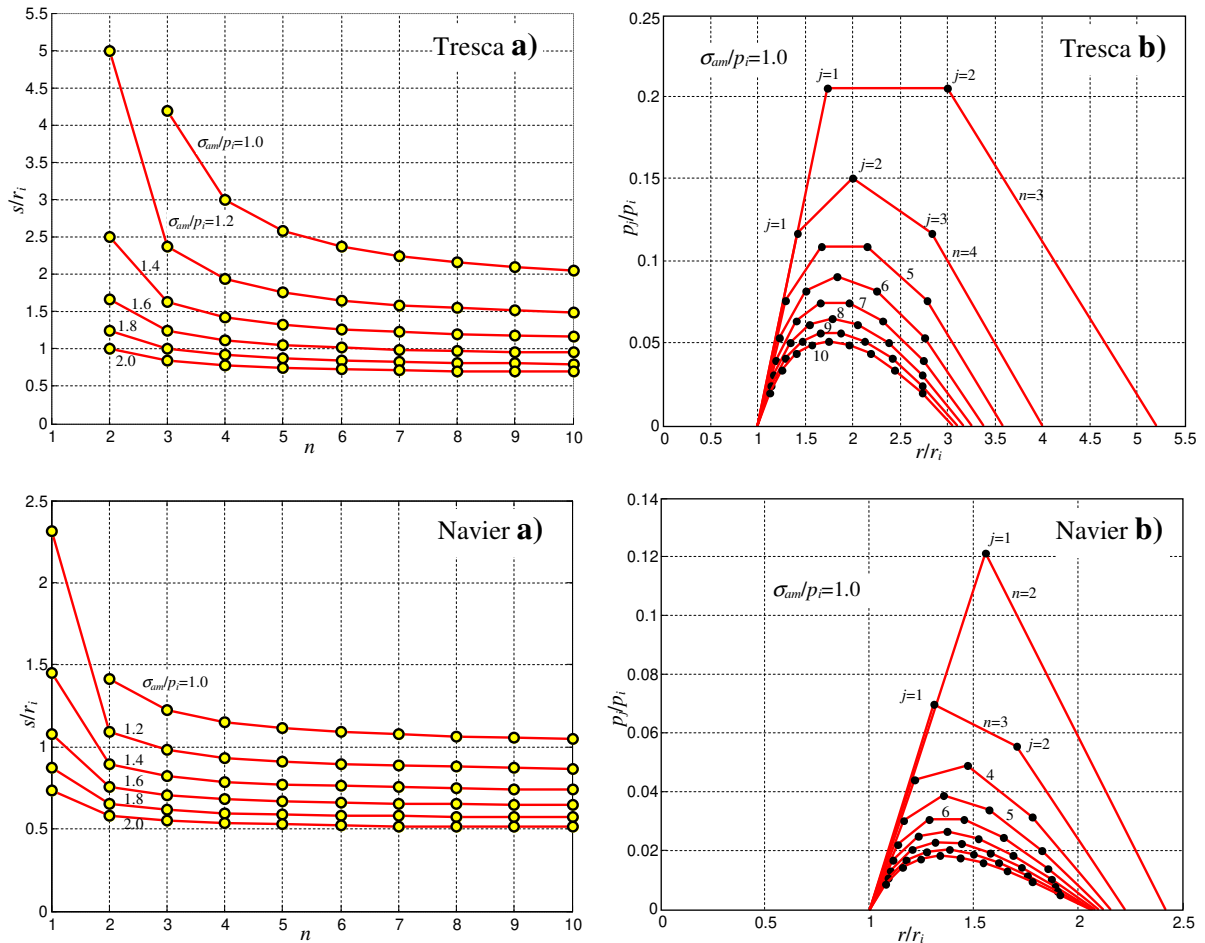


Fig.34.14 - Criterio di Tresca (in alto) e criterio di Navier (in basso): a) rapporto s/r_i al variare del numero dei cilindri, per diversi valori del rapporto σ_{am}/p_i ; b) valori del rapporto p_j/p_i nel caso di $\sigma_{am}/p_i=1$ ed n nel campo $1 \leq n \leq 10$.

per valori discreti del rapporto tra tensione ammissibile e pressione di esercizio nel campo $1 \leq \sigma_{am}/p_i \leq 2$ e per numeri dei cilindri compresi tra $n=2$ ed $n=10$. Ad esempio, nel caso di $\sigma_{am}=1.1p_i$ lo spessore complessivo del contenitore risulta $s=5r_i$ per $n=2$ cilindri ed $s \approx 2r_i$ per $n=4$. La figura mostra come per $1.2p_i \leq \sigma_{am} \leq 2p_i$ il numero minimo di cilindri necessario per il dimensionamento è $n=2$, mentre per $\sigma_{am}=p_i$ il numero minimo di cilindri è $n=3$. La fig.14a può essere utilizzata per effettuare la scelta del numero di cilindri da impiegare nella realizzazione del contenitore, ma è opportuno sottolineare il fatto che la realizzazione di un contenitore con un numero di strati superiore a 4 è, ad oggi, eccessivamente oneroso dal punto di vista tecnologico.

In fig.14b (in alto) è mostrata una rappresentazione delle pressioni di forzamento ottenute mediante la (131); in particolare vengono mostrati i rapporti tra le pressioni di forzamento e la pressione di esercizio ottenuti nel caso più oneroso di $\sigma_{am}/p_i=1$, per numeri dei cilindri compresi tra $n=2$ ed $n=10$. I punti rappresentativi delle pressioni sono posizionati ai raggi in cui le pressioni agiscono, utilizzando come ascissa il rapporto r/r_i .

Anche nel caso del criterio di Navier è stato verificato che il minore spessore complessivo del contenitore multistrato può essere ottenuto utilizzando cilindri con lo stesso valore del parametro $\beta_j = \beta_0$; in particolare il valore di β_0 per un numero di cilindri n può essere determinato mediante la seguente relazione:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{n\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}}}} - 1 \tag{34.132}$$

la (132) può essere considerata una generalizzazione delle (62) e (97) che possono essere ottenute dalla (132) stessa ponendo $n=1$ ed $n=2$, rispettivamente.

Le pressioni di forzamento devono essere determinate risolvendo il sistema (122).

In fig.13b sono mostrate le tensioni complessivamente agenti nel caso di $p_i = \sigma_{am}$ ed $n=5$ cilindri, aventi valore ottimale del parametro β , cioè $\beta_0=0.860872$. Le tensioni circonferenziali, coincidenti con le tensioni equivalenti di Navier, risultano uguali ai bordi interni dei 5 cilindri.

In fig.14a e 14b in basso sono mostrate le rappresentazioni dello spessore del contenitore multistrato che si ottiene utilizzando i valori di β_0 ottenuti con l'eq.(132) e delle pressioni di forzamento ottenute risolvendo il sistema (122), in modo analogo a quanto mostrato in alto relativamente ai materiali duttili.

Interferenza

Il valore dell'interferenza che deve essere imposto tra il cilindro j e il cilindro $j+1$ per ottenere la pressione di forzamento p_j può essere espresso come

$$\delta_j = u_{j+1}^i - u_j^e \quad (34.133)$$

essendo u_{j+1}^i lo spostamento radiale dei punti al bordo *interno* del cilindro $j+1$ ed u_j^e lo spostamento radiale dei punti al bordo *esterno* del cilindro j , in posizione $r=r_{j+1}$.

Gli spostamenti radiali di un punto a distanza r dal centro del cilindro possono essere espressi in funzione delle tensioni radiali e circonferenziali mediante la (50).

Per ciascuna pressione di forzamento, le tensioni agenti al bordo esterno del cilindro interno (p_j agente come *esterna*) e le tensioni agenti al bordo interno del cilindro esterno (p_j agente come *interna*) devono essere determinate rispettivamente mediante le relazioni (38,39) e (52,53), assegnando gli opportuni valori di β e ρ , che possono essere dedotti dall'esempio di fig.15 relativo al caso di $n=5$. Determinati gli spostamenti mediante la (50) e utilizzando la (133), i valori dell'interferenza da assegnare a ciascuna coppia di cilindri, possono essere espressi nel modo seguente:

$$\delta_j = \left(\frac{\rho_j^2 + \beta_M^2 \beta_j^2}{\rho_j^2 - \beta_M^2 \beta_j^2} - \frac{\rho_j^2 + \beta_j^2}{\rho_j^2 - \beta_j^2} \right) \frac{r_{j+1}}{E} p_j \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.134a)$$

Nel caso in cui i cilindri hanno uguale parametro β , cioè $\beta_j = \beta_0$, la (134) può essere riscritta come:

$$\delta_j = \left(\frac{\beta_0^{2j} + \beta_0^{2n}}{\beta_0^{2j} - \beta_0^{2n}} - \frac{\beta_0^{2j} + 1}{\beta_0^{2j} - 1} \right) \frac{r_{j+1}}{E} p_j \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (34.134b)$$

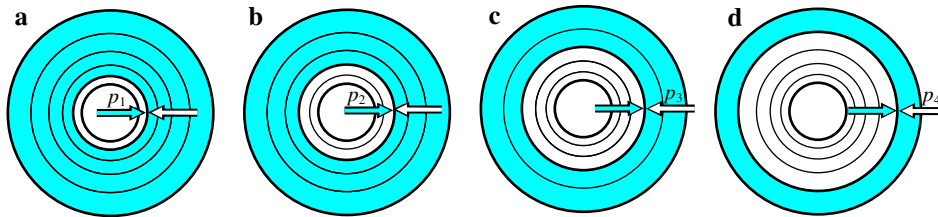


Fig. 34.15 - Configurazioni dei cilindri per la determinazione dei valori d'interferenza.

Soluzione in presenza di dilatazione termica

La determinazione dello stato tensionale causato da gradienti di temperatura in direzione radiale, nel caso di elementi di grande spessore, può essere effettuata utilizzando le equazioni (23), relativa allo stato di deformazione piano, e (24) e operando in modo analogo al caso di assenza di dilatazione termica. In questo caso si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2\sigma_r}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} = 0 \quad (34.135)$$

Nella (135) compare la derivata prima della temperatura rispetto all'ascissa ρ , da cui si deduce che una variazione *uniforme* di temperatura, per materiale isotropo, *non provoca alcuna alterazione dello stato tensionale*.

Come già visto, la soluzione dell'omogenea associata alla (135), cioè la (25), è data dalla (30) qui riscritta:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (34.30)$$

Per ottenere la soluzione completa della (135) è necessario ricavarne una soluzione particolare conoscendo l'andamento della temperatura in funzione del raggio. I due casi di principale interesse sono il caso in cui la funzione temperatura è di tipo logaritmico e il caso in cui è esprimibile come polinomio di grado n .

Transitori termici

Nei transitori di temperatura è necessario conoscere la funzione $T(\rho)$ in funzione del tempo e risolvere, conseguentemente, la (135) istante per istante. Se si provoca una variazione termica istantanea al bordo interno o esterno, cui corrisponde il massimo gradiente teorico di temperatura, cioè lo *shock termico*, il materiale che si trova ancora alla temperatura iniziale impedisce al materiale che ha subito la variazione di temperatura di deformarsi in direzione circonferenziale ed assiale. Le corrispondenti tensioni possono essere calcolate ponendo $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \sigma_r = 0$ nelle equazioni costitutive *complete* (3.58), ottenendo:

$$\sigma_s = \sigma_\theta = \sigma_l = -\frac{\alpha E}{1-\nu} (T_\beta - T_1) \quad (34.136)$$

nella quale σ_s è la tensione di shock termico, che verrà utilizzata nel seguito come valore di riferimento.

Questa espressione può essere utilizzata per verificare se il tubo è in grado di sopportare transitori termici onerosi.

 $T(\rho)$ di tipo logaritmico

Nel caso di flusso termico stazionario, dovuto a differenza di temperatura tra raggio interno ed esterno costante nel tempo, la distribuzione della temperatura lungo il raggio è di tipo logaritmico (fig.16):

$$T(\rho) = T_1 - \frac{T_1 - T_\beta}{\ln \beta} \ln \rho \quad (34.137)$$

La derivata della (137) può essere espressa come:

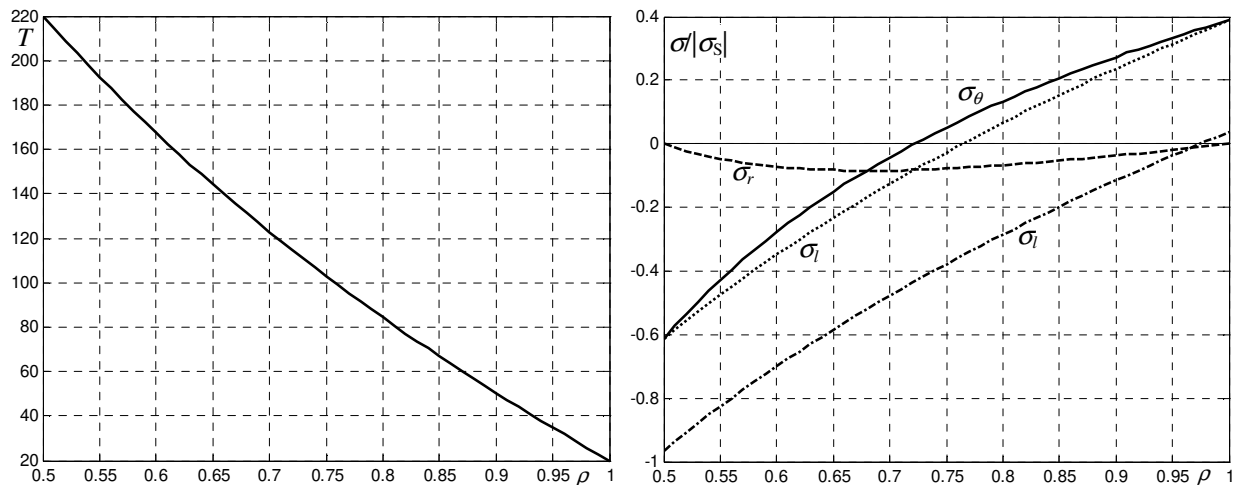


Fig.34.16 – A sinistra l'andamento della temperatura di tipo logaritmico nello spessore per il caso di $T_\beta=220^\circ$, $T_1=20^\circ$ e $\beta=0.5$, a destra le tensioni termiche nello spessore per cilindro in acciaio ($E=210.000 \text{ N/mm}^2$, $\alpha=11 \cdot 10^{-6}$). La σ_l tracciata con linea a tratto e punto è quella relativa al cilindro vincolato agli estremi (eq.144). Le tensioni sono normalizzate rispetto al modulo della tensione per gradiente massimo espressa dall'eq.(136) e pari, in questo caso, a $|\sigma_s|=641.7 \text{ N/mm}^2$.

$$\frac{dT}{d\rho} = -\frac{T_1 - T_\beta}{\ln \beta} \frac{1}{\rho} = \frac{T_\beta - T_1}{\ln \beta} \frac{1}{\rho} \quad (34.138)$$

La (135) diventa

$$\frac{d^2 \sigma_r}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{T_\beta - T_1}{\ln \beta} \frac{1}{\rho^2} = 0 \quad (34.139)$$

Una soluzione particolare della (139), ricordando la (136), è data in questa forma:

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{T_\beta - T_1}{\ln \beta} \ln \rho = \frac{\sigma_s}{2} \frac{\ln \rho}{\ln \beta} \quad (34.140)$$

La soluzione generale si ottiene sommando questa funzione alla soluzione relativa all'omogenea associata (30) e imponendo le condizioni al contorno. Nel caso di sola variazione di temperatura, quindi in assenza di pressione, le condizioni al contorno prevedono che sia $\sigma_r=0$ sia per $\rho=\beta$ che per $\rho=1$. In definitiva, ricordando la (104), le espressioni delle tensioni dovute a gradiente di temperatura nel caso stazionario (fig.16) sono date da:

$$\sigma_r = -\left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\ln \rho}{\ln \beta} \right) \frac{\sigma_s}{2} \quad \sigma_\theta = \left(\frac{1+\rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1+\ln \rho}{\ln \beta} \right) \frac{\sigma_s}{2} \quad (34.141,142)$$

Contrariamente a quanto accade nel caso di sollecitazione dovuta alla sola pressione, la somma delle tensioni radiali e circonferenziali (141) e (142) non risulta costante nel piano e, in base alla (16), anche la deformazione assiale, in assenza di vincoli, avrebbe tale caratteristica. Per elementi di piccolo spessore (longitudinale) tale deformazione è trascurabile, mentre per elementi piani di grosso spessore essa darebbe luogo a notevoli ingobbamenti delle superfici di estremità. Poiché si osserva che la deformazione assiale ε_l in questi casi risulta praticamente costante sulla superficie, cioè tende a rispettare l'ipotesi di stato piano, a sufficiente distanza dalle estremità deve essere presente una tensione longitudinale opportunamente variabile rispetto al raggio che compensi gli effetti della variabilità rispetto a ρ delle (141) e (142) e della dilatazione termica derivante direttamente dalla distribuzione di temperatura (137). In base a questa considerazione è possibile dimostrare che, per cilindro libero alle estremità, la tensione longitudinale a sufficiente distanza dalle estremità risulta data dalla somma della σ_r e della σ_θ (fig.16):

$$\sigma_l = \sigma_r + \sigma_\theta = \left(\frac{2\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{1+2\ln \rho}{\ln \beta} \right) \frac{\sigma_s}{2} \quad (34.143)$$

In fig.17 sono riportate la deformazione longitudinale complessiva (costante) e le varie componenti.

Nel caso di cilindro vincolato alle estremità, viceversa, un'eventuale deformazione longitudinale costante rispetto al raggio, ammessa nello stato di deformazione piano, verrebbe impedita per cui, essendo $\varepsilon_l=0$, in base alla (17) l'andamento della tensione longitudinale (fig.16) risulta data da

$$\sigma_l = \left(\frac{2\nu\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\nu+2\ln \rho}{\ln \beta} \right) \frac{\sigma_s}{2} - \alpha E T_1 \quad (34.144)$$

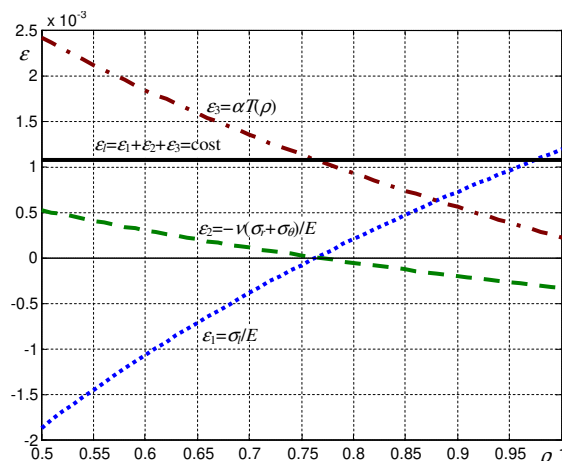


Fig.34.17 – Deformazioni longitudinali nel cilindro di grosso spessore soggetto a variazione di temperatura di tipo logaritmico. ε_l deformazione totale, ε_1 deformazione dovuta alla tensione longitudinale, ε_2 deformazione dovuta alle tensioni nel piano, ε_3 deformazione termica.

Soluzione per il caso generico

La soluzione completa della (103) per il caso generico, considerando pressione interna ed esterna nulle, ha la seguente forma:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho^2 - \beta^2}{1-\beta^2} \int_{\beta}^1 T \rho d\rho - \int_{\beta}^{\rho} T \rho d\rho \right) \quad (34.145)$$

da cui

$$\sigma_{\theta} = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho^2 + \beta^2}{1-\beta^2} \int_{\beta}^1 T \rho d\rho - \int_{\beta}^{\rho} T \rho d\rho - T \rho^2 \right) \quad (34.146)$$

$$\sigma_l = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{2}{1-\beta^2} \int_{\beta}^1 T \rho d\rho - T \right] \quad (34.147)$$

Conoscendo la funzione $T(\rho)$ è possibile valutare gli integrali nelle (145-147) in forma chiusa o numerica.

APPENDICE

A1 La formula di Mariotte

La formula di Mariotte è un'espressione semplificata per il dimensionamento di contenitori e tubi cilindrici di *piccolo spessore*, per i quali $r_e \approx r_i = R$, soggetti a pressione interna. Nella formula di Mariotte si trascura l'effetto della tensione radiale e si utilizza il valor medio della tensione circonferenziale agente nello spessore del cilindro al posto di quella massima. La formula è utilizzabile nei casi di $\beta \geq 0.9$, per i quali la differenza tra la tensione circonferenziale media e quella massima è inferiore al 5%. Il valor medio della distribuzione della tensione circonferenziale (53) può essere ottenuto integrando la (53) rispetto a ρ tra gli estremi β ed 1 e dividendo per il campo di integrazione $1-\beta$ (essendo $1-\beta=s/R$)

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{1-\beta} \frac{\beta^2 p_i}{1-\beta^2} \int_{\beta}^1 \frac{1+\rho^2}{\rho^2} d\rho = \frac{\beta}{1-\beta} p_i = \frac{r_i}{r_e - r_i} p_i \quad (\text{A.1})$$

Introducendo lo spessore del cilindro in funzione di β come $s=(1-\beta)R$, la tensione media (A.1) può essere riscritta come segue

$$\sigma_{\theta} = \frac{\beta}{1-\beta} p_i = \frac{R p_i}{s} = \frac{D p_i}{2s} \quad (\text{A.2})$$

essendo D il diametro del cilindro ($D=2R \approx 2r_e \approx 2r_i$). Il numeratore a destra della (A.2) è pari alla spinta che la pressione interna esercita su metà del cilindro considerato di altezza unitaria. Tale spinta tenderebbe a separare le due metà del cilindro tra loro ed è equilibrata dalla tensione circonferenziale agente sulle 2 sezioni del cilindro stesso.

La (A.2) è nota come formula di Mariotte ed è largamente utilizzata per il calcolo dello spessore di tubi e contenitori cilindrici di piccolo spessore; introducendo la tensione ammissibile σ_{am} ed esplicitando rispetto allo spessore si ottiene:

$$s = \frac{D}{2} \frac{p_i}{\sigma_{am}} \quad (\text{A.3})$$

A2 Fattori di conversione delle unità di misura della pressione

Nella **prima** colonna della tabella A2.1 sono riportati i fattori che permettono di convertire le pressioni espresse nelle diverse unità di misura in quelle espresse in MPa. Ad esempio per $p_i=20$ [atm] si ottiene $p_i=0,1013 \times 20=2.026$ [MPa].

Fattori di conversione delle unità di misura di pressione							
	1 MPa	1 at	1 psi	1 Pascal	1 bar	1 atm	1 Torr
MPa [N/mm ²]	1	10,2	145,038	10 ⁶	10	9,87	7500
at [kg/cm ²]	0,0981	1	14,2	98100	0,981	0,968	736
psi [lbf/in ²]	6,89×10 ⁻³	7,02×10 ⁻²	1	6890	6,89×10 ⁻²	6,8×10 ⁻²	51,80
Pa [N/m ²]	10 ⁻⁶	1,02×10 ⁻⁵	1,45×10 ⁻⁴	1	10 ⁻⁵	9,87×10 ⁻⁶	0,0075
bar [daN/cm ²]	0,1	1,02	14,5	100000	1	0,987	752
atm [760 torr]	0,1013	1,0332	14,7	101325	1,013	1	760
torr	1,33×10 ⁻⁴	1,36×10 ⁻³	1,93×10 ⁻²	133	0,00133	0,00132	1

Tab.A2.1 - Tabella dei fattori di conversione delle unità di misura della pressione. Utilizzare i fattori nella prima colonna per ottenere la pressione in MPa a partire da valori di pressione indicati nelle varie unità di misura (at=atmosfera tecnica, psi=pound square inch, atm=atmosfera fisica).

CILINDRI IN PRESSIONE				
<ul style="list-style-type: none"> • $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_l$ tensioni radiali, circonferenziali, longitudinali • σ_e, σ_{am} tensione equivalente ed ammissibile • $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ deformazione radiale e circonferenziale • u, δ spostamento in direzione radiale, interferenza • α, T coeff. dilatazione termica, variazione di temperatura 	<ul style="list-style-type: none"> • p_i, p_e, p_f pressione interna, esterna e di forzamento • r_i, r_e raggio interno ed esterno • $\beta=r/r_e$ ($\beta < 1$) • $\rho=r/r_e$ ($\beta \leq \rho \leq 1$) • n numero cilindri nei multistrato 			
Equazione di equilibrio	Equazioni di compatibilità-congruenza			
	Def. radiale	Def. circonferenziale	Spostamenti	Equazione di congruenza
$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$	$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$	$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$	$u = r \varepsilon_\theta$	$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_l)}{dr} = r \frac{d\varepsilon_l}{dr} + \varepsilon_l$
Stato piano di tensione (eq. costitutive e compatibilità)				
$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \alpha T$	$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \alpha T$		$\varepsilon_l = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r) + \alpha T$	
$\begin{bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{bmatrix} + \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$			$\sigma_l = 0$	
$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha E r \frac{dT}{dr} = 0$			$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$	
Stato piano di deformazione (eq. costitutive e compatibilità)				
$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E}[-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta + E\alpha T]$	$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta + E\alpha T]$		$\varepsilon_l = 0$	
$\begin{bmatrix} \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{bmatrix} + \alpha T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$			$\sigma_l = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha T$	
$\sigma_\theta - \sigma_r + (1-\nu)r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha E r \frac{dT}{dr} = 0$			$(\sigma_\theta - \sigma_r) + (1-\nu)r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$	
PRESSIONE ESTERNA				
	Tensione radiale	Tensione circonferenziale	Tensione longitudinale	
	$\sigma_r = -\frac{\rho^2 - \beta^2}{\rho^2} \frac{1}{1 - \beta^2} p_e$	$\sigma_\theta = -\frac{\rho^2 + \beta^2}{\rho^2} \frac{1}{1 - \beta^2} p_e$	$\sigma_l = -\frac{1}{1 - \beta^2} p_e$	
$\rho = \beta$	$\sigma_r = 0$	$\sigma_\theta = -\frac{2}{1 - \beta^2} p_e$	Spostamento radiale	
$\rho = 1$	$\sigma_r = -p_e$	$\sigma_\theta = -\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} p_e$	$u = -\rho \left[(1-\nu) + \frac{\beta^2}{\rho^2} (1+\nu) \right] \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{p_e r_e}{E}$	
Criteri di Tresca, Navier e Von Mises (per $\sigma_l=0$) $\rho=\beta$		Criterio di Von Mises (per $\sigma_l>0$) $\rho=\beta$		
$\sigma_e = \frac{2}{1 - \beta^2} p_e$	$\beta = \sqrt{1 - 2 \frac{p_e}{\sigma_a}}$	$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{1 - \beta^2} p_e$	$\beta = \sqrt{1 - 1.732 \frac{p_e}{\sigma_a}}$	
PRESSIONE INTERNA				
	Tensione radiale	Tensione circonferenziale	Tensione longitudinale	
	$\sigma_r = -\frac{1 - \rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	$\sigma_\theta = \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	$\sigma_l = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	
$\rho = \beta$	$\sigma_r = -p_i$	$\sigma_\theta = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	Spostamento radiale	
$\rho = 1$	$\sigma_r = 0$	$\sigma_\theta = \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	$u = \rho \left[(1-\nu) + \frac{1}{\rho^2} (1+\nu) \right] \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{p_i r_e}{E}$	
Criterio di Navier $\rho=\beta$		Criterio di Tresca $\rho=\beta$		Criterio di Von Mises (per $\sigma_l>0$) $\rho=\beta$
$\sigma_e = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} p_i$	$\beta = \sqrt{\frac{2}{1 + p_i/\sigma_{am}} - 1}$	$\sigma_e = \frac{2}{1 - \beta^2} p_i$	$\beta = \sqrt{1 - 2 \frac{p_i}{\sigma_a}}$	$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{1 - \beta^2} p_i$
				$\beta = \sqrt{1 - 1.732 \frac{p_i}{\sigma_a}}$

CERCHIATURA		
Interferenza δ - materiali differenti	Interferenza δ - materiali uguali ($\beta_1 \neq \beta_2$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$)	
$\delta = \left[\frac{1}{E_2} \left(\frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} + \nu_2 \right) + \frac{1}{E_1} \left(\frac{1 + \beta_1^2}{1 - \beta_1^2} - \nu_1 \right) \right] r_{e1} p_f$	$\delta = \frac{1 - \beta_1^2 \beta_2^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \frac{2 r_{e1} p_f}{E}$	$\delta = \frac{1 + \beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \frac{2 r_{e1} p_f}{E}$
Pressione p_f per assegnata interferenza - materiali uguali		
$p_f = \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{\delta E}{2 r_{e1}}$		
Tensioni ai raggi interni per i cilindri 1 e 2 per p_i e p_f		
Radiali r	Circonfenziali $\theta \equiv$ Equivalenti Navier	Equivalenti Tresca
$\sigma_{r1} = -p_i$	$\sigma_{\theta 1} = \frac{1 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - \frac{2}{1 - \beta_1^2} p_f$	$\sigma_{e1} = \frac{2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - \frac{2}{1 - \beta_1^2} p_f$
$\sigma_{r2} = -\frac{\beta_1^2 - \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i - p_f$	$\sigma_{\theta 2} = \frac{\beta_1^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i + \frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} p_f$	$\sigma_{e2} = \frac{2\beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} p_i + \frac{2}{1 - \beta_2^2} p_f$
Scelte di progetto $\sigma_{e1} = \sigma_{e2}$		
NAVIER	TRESCA	
$p_f = \frac{1 - \beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 - \beta_1^2)(1 + \beta_2^2) + 2(1 - \beta_2^2)} p_i$	$p_f = \frac{1 - \beta_1^2}{1 - \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{(1 - \beta_2^2)(1 - \beta_1^2)}{(1 - \beta_1^2) + (1 - \beta_2^2)} p_i$	
$\sigma_{e1} = -\frac{\beta_1^2(1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 + 1}{\beta_1^2(1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 - 3} p_i = \sigma_{am}$	$\sigma_{e1} = \frac{2p_i}{(1 - \beta_1^2) + (1 - \beta_2^2)} = \sigma_{am}$	
Scelta ottimale $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$		
NAVIER	TRESCA	
$p_f = \frac{1 - \beta_0^2}{1 + \beta_0^2} \frac{1}{3 + \beta_0^2} p_i$	$\sigma_{e1} = -\frac{2\beta_0^2 + \beta_0^4 + 1}{2\beta_0^2 + \beta_0^4 - 3} p_i$	$p_f = \frac{1 - \beta_0^2}{1 + \beta_0^2} \frac{p_i}{2}$
$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} - 1} - 1}$	$\beta = \beta_0^2 = \frac{2}{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} - 1} - 1$	$\beta_0 = \sqrt{1 - p_i/\sigma_{am}}$
$p_f = \sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} \frac{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} - 1}{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} + 1} p_i$	$p_f = \frac{1}{2\sigma_{am}/p_i - 1} \frac{p_i}{2}$	
$\delta = \frac{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}}}{\sqrt{1 + p_i/\sigma_{am}} - 2} \frac{2 r_{e1}}{E} p_i$	$\delta = \frac{r_{e1} p_i}{E}$	

MULTISTRATO					
$\beta_M = \frac{r_1}{r_{n+1}} = \prod_{j=1}^n \beta_j$	$\beta_M = \beta_0^n$	$\rho_j = \frac{r_j}{r_{n+1}} = \prod_{k=j}^n \beta_k$	$\rho_j = \beta_0^{n-j+1}$	$R_k^i = \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_k^2}$	$R_k^e = \frac{\rho_k^2}{\rho_k^2 - \beta_M^2 \beta_k^2}$
Interferenza δ					
$\delta_j = \left(\frac{\rho_j^2 + \beta_M^2 \beta_j^2}{\rho_j^2 - \beta_M^2 \beta_j^2} - \frac{\rho_j^2 + \beta_j^2}{\rho_j^2 - \beta_j^2} \right) \frac{r_{j+1}}{E} p_j$			$\delta_j = \left(\frac{\beta_0^{2j} + \beta_0^{2n}}{\beta_0^{2j} - \beta_0^{2n}} - \frac{\beta_0^{2j} + 1}{\beta_0^{2j} - 1} \right) \frac{r_{j+1}}{E} p_j$		
Sistema Pressioni di forzamento $j=1, \dots, n-1$					
$\mathbf{A p} = \mathbf{b}$	$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{n-1}]^T$	$b_j = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i$	$A_{j,k} = R_k^i \quad k = 1, \dots, j-1$	$A_{j,k} = \beta_M^2 R_k^e \quad k = j+1, \dots, n-1$	
TRESCA			NAVIER		
$A_{j,j} = -\frac{\beta_j^2 R_j^i - \beta_M^2 R_j^e}{1 - \beta_j^2}$			$A_{j,j} = -\frac{(\rho_j^2 + \beta_j^2) R_j^i - (\rho_j^2 + \beta_M^2) R_j^e}{1 - \beta_j^2}$		
TRESCA					
Pressioni di forzamento $j=1, \dots, n-1$					
$\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k - \frac{\beta_j^2 R_j^i - \beta_M^2 R_j^e}{1 - \beta_j^2} p_j + \beta_M^2 \sum_{k=j+1}^{n-1} R_k^e p_k = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i$					
Tensione equivalente $\rho = \beta$					
$\sigma_{eq,j}^T = -\frac{2}{\rho_j^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k + \beta_M^2 \sum_{k=j}^{n-1} R_k^e p_k - \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \right)$					
Scelta ottimale $\beta = \beta_0$					
$\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{2}{n} \frac{p_i}{\sigma_{am}}}$			$p_j = \frac{(\beta_0^{2j} - \beta_0^{2n})(1 - \beta_0^{2j})(1 - \beta_0^2) \sigma_{am}}{\beta_0^{2j} (1 - \beta_0^{2n})} \frac{1}{2}$		
NAVIER					
Pressioni di forzamento $j=1, \dots, n-1$					
$\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k - \frac{(\rho_j^2 + \beta_j^2) R_j^i - (\rho_j^2 + \beta_M^2) R_j^e}{1 - \beta_j^2} p_j + \beta_M^2 \sum_{k=j+1}^{n-1} R_k^e p_k = \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i$					
Tensione equivalente $\rho = \beta$					
$\sigma_{eq,j}^N = -\frac{1 + \rho_j^2}{\rho_j^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} R_k^i p_k + \frac{\beta_M^2 + \rho_j^2}{1 + \rho_j^2} \sum_{k=j}^{n-1} R_k^e p_k - \frac{\beta_M^2}{1 - \beta_M^2} p_i \right)$					
Scelta ottimale $\beta = \beta_0$					
$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{1 + p_i/\sigma_{am}}} - 1}$					