

22. ALTRI ELEMENTI DI COLLEGAMENTO

Spine e perni

Le spine ed i perni sono semplici elementi di collegamento di forma cilindrica o conica.

Le spine servono a trasferire momento torcente o a prevenire moto relativo assiale fra gli elementi collegati e, tipicamente, vengono accoppiate agli elementi con *leggero forzamento*.

I perni hanno la funzione di impedire traslazioni relative degli elementi collegati, consentendo *moti relativi di rotazione o di oscillazione*. Essi devono essere accoppiati con *gioco*, costituendo la realizzazione pratica di cerniere cilindriche.

Resistenza delle spine e dei perni

I collegamenti con spina sono effettuati con forzamento iniziale la cui entità è di difficile determinazione, perché dipende sia dalla configurazione degli elementi collegati che dall'interferenza fra spina e foro. Di solito si trascura tale precarico e si limitano le tensioni a valori tabellati dedotti dall'esperienza. Tali valori normalmente coincidono con i valori della tensione ammissibile in compressione.

Tra due superfici cilindriche di uguale raggio r (e diametro $d=2r$) e lunghezza L soggette ad una forza verticale P si genera una pressione di contatto p_0 diretta normalmente alle superfici stesse (fig.1). L'equilibrio tra la forza esterna e la forza risultante dalle pressioni in direzione verticale è data dal seguente integrale:

$$P = \int_A p_0 \cos \theta \, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \cos \theta L r \, d\theta = 2p_0 r L \quad (22.1)$$

da cui la pressione p_0 può essere ottenuta come

$$p_0 = \frac{P}{dL} \quad (22.2)$$

Spine di riferimento

Nelle *spine di riferimento* (fig.2), indicando con

- l_e ed l_i le lunghezze dei tratti esterno ed interno,
- d il diametro della spina,
- P il carico agente

si determinano le seguenti sollecitazioni:

- flessione nella spina (fig.2a), con distribuzione lineare delle tensioni nella sezione di incastro con valore massimo della tensione espresso da:

$$\sigma = \frac{32}{\pi} \frac{P l_e}{d^3} \quad (22.3)$$

- pressione superficiale p tra spina e alloggiamento (fig.2b,c): può essere pensata come la somma di una pressione costante p_c dovuta alla forza posizionata al centro del contatto e una pressione lineare dovuta al momento di trasporto con valore massimo p_l ; uguagliando la forza e il momento ai risultanti delle rispettive distribuzioni si ottiene

$$P = d l_i p_c, \quad P(l_e + l_i/2) = \frac{d l_i}{2} \frac{2 l_i}{3} \frac{p_l}{2} \quad (22.4,5)$$

dalle quali la pressione massima $p=p_c+p_l$ risulta espressa da:

$$p = \frac{P}{d l_i} + \frac{6(l_e + l_i/2)P}{d l_i^2} = \left(4 + 6 \frac{l_e}{l_i} \right) \frac{P}{d l_i} \quad (22.6)$$

In definitiva, le sollecitazioni agenti nei vari punti della spina (3,6) sono riassunte dalle seguenti relazioni facilmente utilizzabili per calcoli di verifica:

$$\sigma = 10.186 \frac{l_e}{d^3} P \quad p = \left(4 + 6 \frac{l_e}{l_i} \right) \frac{P}{d l_i} \quad (22.7,8)$$

In fase di progetto le grandezze da determinare sono il diametro d della spina e la lunghezza l_i . Assegnata la lunghezza l_e , la (7) permette di determinare il diametro della spina come

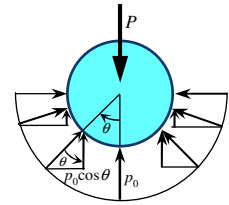


Fig.22.1 - Pressione di contatto.

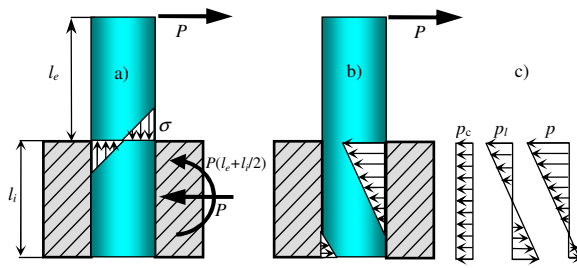


Fig.22.2 - Spina di riferimento

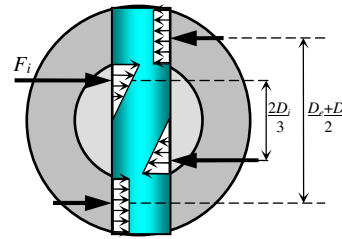


Fig.22.3 - Spina in elementi sollecitati a torsione.

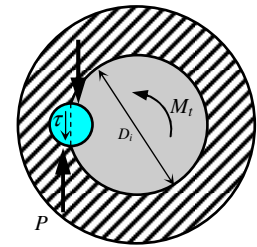


Fig.22.4 - Spina disposta come chiave.

$$d = 2.168 \sqrt[3]{l_e} \sqrt[3]{\frac{P}{\sigma_{am}}} \quad (22.9)$$

La lunghezza l_i deve essere tale che la (8), nella quale si ponga $p = \sigma_{am}$, risulti verificata. La lunghezza minima può essere determinata utilizzando in modo iterativo la seguente espressione ottenuta dalla (8) stessa:

$$l_i = 0.416 \left(4 + 6 \frac{l_e}{l_i} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{l_e}} \sqrt[3]{\frac{P^2}{\sigma_{am}^2}} \quad (22.10)$$

Se tale lunghezza risulta eccessiva è necessario aumentare il diametro d rispetto al valore ottenuto con la (9).

Spine colleganti elementi sollecitati a torsione

Nelle spine colleganti trasversalmente elementi sollecitati in torsione (fig.3), indicando con

- D_i, D_e i diametri degli elementi interno ed esterno,
- d il diametro della spina,
- M_t il momento applicato
- F_i le forze trasmesse alla spina dall'elemento interno,

si determinano le seguenti sollecitazioni:

- compressione superficiale fra la spina ed il suo alloggiamento nell'elemento *interno*, con andamento lineare di valore massimo p_i ; le relazioni tra momento torcente M_t e forze F_i agenti sulla spina, forze F_i e distribuzione di pressione, momento e distribuzione sono le seguenti:

$$M_t = \frac{2D_i}{3} F_i \quad F_i = \frac{d D_i}{2} \frac{p_i}{2} \quad M_t = \frac{d D_i}{2} \frac{2}{3} D_i \frac{p_i}{2} = \frac{d D_i^2}{6} p_i \quad (22.11-12)$$

da cui

$$p_i = \frac{6M_t}{d D_i^2} \quad (22.13)$$

- compressione superficiale fra la spina e il suo alloggiamento nell'elemento *esterno* con valore costante p_e :

$$M_t = \frac{D_e + D_i}{2} \frac{D_e - D_i}{2} d p_e = \frac{D_e^2 - D_i^2}{4} d p_e \quad (22.14)$$

da cui

$$p_e = \frac{4M_t}{d(D_e^2 - D_i^2)} \quad (22.15)$$

- tensione di taglio nella spina dovuta alla forza $F_e = 2M_t/(D_e + D_i)$, massima in corrispondenza del raggio esterno della spina:

$$\tau = \frac{16 F_e}{3\pi d^2} = \frac{32}{3\pi} \frac{M_t}{d^2 (D_i + D_e)} \quad (22.16)$$

In definitiva, le sollecitazioni agenti nei vari punti della spina (13,15,16) sono riassunte dalle seguenti relazioni facilmente utilizzabili per calcoli di verifica:

$$p_i = 6 \frac{M_t}{d D_i^2} \quad p_e = 4 \frac{M_t}{d (D_e^2 - D_i^2)} \quad \tau = 3.395 \frac{M_t}{d^2 (D_i + D_e)} \quad (22.17-19)$$

In fase di progetto tipicamente è necessario determinare il solo diametro della spina d . A questo fine è opportuno esplicitare le (17-19) rispetto a d ed utilizzare il valore massimo tra quelli ottenuti:

$$d = \frac{6}{D_i^2} \frac{M_t}{\sigma_{am}} \quad d = \frac{4}{D_e^2 - D_i^2} \frac{M_t}{\sigma_{am}} \quad d = \frac{1.84}{\sqrt{D_e + D_i}} \sqrt{\frac{M_t}{\tau_{am}}} \quad (22.20-22)$$

Spine disposte come chiavette

Nelle spine disposte come chiavette longitudinali a sezione circolare, fig.4, indicando con

- D_i il diametro dell'elemento interno,
- d, l il diametro e la lunghezza della spina,
- M_t il momento applicato,
- P la forza trasmessa alla spina,

si determinano le seguenti sollecitazioni:

- compressione superficiale fra spina ed albero e fra spina e mozzo. Con riferimento alla fig.4, la relazione tra il momento applicato M_t , la forza trasmessa alla spina $P=2M_t/D_i$ e la conseguente pressione p sono date da:

$$p = \frac{P}{d l} = \frac{1}{d l} \frac{2M_t}{D_i} \quad (22.23)$$

- tensione di taglio τ in corrispondenza del piano di simmetria della spina (fig.4) approssimabile come:

$$\tau = \frac{P}{d l} = \frac{1}{d l} \frac{2M_t}{D_i} \quad (22.24)$$

Sia nel caso di materiali fragili che duttili, il diametro d può essere ricavato dalla (24) come:

$$d = \frac{2}{l D_i} \frac{M_t}{\tau_{am}} \quad (22.25)$$

Perni

Nei perni o nelle spine cilindriche (fig.5) accoppiati a forcilla (l'elemento esterno) e biella, indicando con

- d il diametro della spina,
- s_b, s_f spessori della biella e della forcilla,
- P la forza longitudinale,

si determinano le seguenti sollecitazioni:

- tensione di taglio nel perno con valore massimo in corrispondenza del raggio esterno (fig.5d):

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{4}{\pi d^2} \frac{P}{2} = \frac{8}{3\pi} \frac{P}{d^2} \quad (22.26)$$

- compressione superficiale p_b costante fra spina e biella (fig.5b-e):

$$p_b = P/s_b d \quad (22.27)$$

- compressione superficiale p_f fra spina e forcilla (fig.5b-e); nell'ipotesi che la pressione sia distribuita uniformemente (fig.5c) si ottiene:

$$p_f = \frac{1}{2} \frac{P}{s_f d} \quad (22.28)$$

Nell'ipotesi in cui la pressione si distribuisca in modo analogo al caso della spina di riferimento, il perno può essere considerato come una trave doppiamente incastrata e la pressione in corrispondenza della forcilla è dovuta ad una componente costante (28), che equilibra la reazione verticale, e ad una lineare, che equilibra il momento di incastro $M=Ps_b/12$ (fig.5d); in base a ciò, è possibile dimostrare che il valore massimo della pressione risulta:

$$p_f = \left(1 + \frac{s_b}{s_f}\right) \frac{1}{2} \frac{P}{s_f d} \quad (22.29)$$

In questa ipotesi, nei casi in cui $s_b > s_f$ il massimo valore della tensione lineare supera quello della componente costante e una zona del contatto si dovrebbe trasferire sulla parte superiore (fig.5d); limitando questa possibilità si può ritenere che la massima pressione lineare uguagli quella costante e dia luogo ad una pressione massima (fig.5e):

$$p_f = P/s_f d . \tag{22.30}$$

- flessione al centro della spina (fig.5e) con massima tensione al raggio esterno, dovuta alla pressione tra spina e forcella e alla sollecitazione di contatto tra spina e biella; le risultanti delle due distribuzioni, la prima lineare e la seconda costante, sono applicate rispettivamente a distanza $d_1=s_f/3+s_b/2$ e $d_2=s_b/4$ dal centro della spina, da cui si ottiene:

$$\sigma = \frac{P}{2} \left(\frac{s_f}{3} + \frac{s_b}{2} - \frac{s_b}{4} \right) \frac{32}{\pi d^3} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{4}{3} s_f + s_b \right) \frac{P}{d^3} \tag{22.31}$$

In definitiva, le sollecitazioni agenti nei vari punti del perno (fig.5e) sono date dalle seguenti relazioni facilmente utilizzabili per calcoli di verifica:

$$\tau = 0.85 \frac{P}{d^2} \quad p_b = \frac{P}{s_b d} \quad p_f = \frac{P}{s_f d} \quad \sigma = 1.273 \left(\frac{4}{3} s_f + s_b \right) \frac{P}{d^3} \tag{22.32-35}$$

In fase di progetto, in generale, le grandezze geometriche da determinare sono il diametro d e gli spessori s_b ed s_f . In vari casi gli spessori s_b e/o s_f possono essere predeterminati per problemi indipendenti dalla resistenza, come l'ingombro. La (32) consente di determinare il *diametro minimo* del perno come:

$$d_{\min} \geq 0.92 \sqrt{P/\tau_{am}} \tag{22.36}$$

essendo $\tau_{am}=\sigma_{am}/2$ per il criterio di Tresca nel caso di materiali duttili e $\tau_{am}=\sigma_{am}$ per il criterio di Navier nel caso di materiali fragili. Basandosi sul diametro minimo ottenuto con la (36), le (33-34) consentono di determinare la *lunghezza minima* dei tratti esterni ed interno del perno, cioè degli spessori di biella e forcella:

$$s_b, s_f \geq \frac{1}{d_{\min}} \frac{P}{\sigma_{am}} \tag{22.37}$$

Assegnati gli spessori, il diametro del perno deve essere verificato a flessione con la (35). Nel caso in cui la resistenza non risulti verificata, il dimensionamento deve essere effettuato a flessione esplicitando la (35) rispetto al diametro:

$$d = 1.083 \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} s_f + s_b \right) \frac{P}{\sigma_{am}}} \tag{22.38}$$

Devono essere inoltre verificati i due punti A e B appartenenti alla forcella (fig.5a). In A agisce una tensione di trazione σ_A in direzione verticale legata al carico P , mentre in B agiscono la pressione p_f ed una tensione circonferenziale di trazione σ_B (fig.5). σ_A e σ_B sono ottenibili con le seguenti equazioni, nelle quali i fattori di concentrazione k_A e k_B possono essere dedotti dal diagramma di fig.6, essendo r_i ed r_e mostrati in fig.5:

$$\sigma_A = k_A P/2s_f a \quad \sigma_B = k_B P/2s_f d \tag{22.39,40}$$

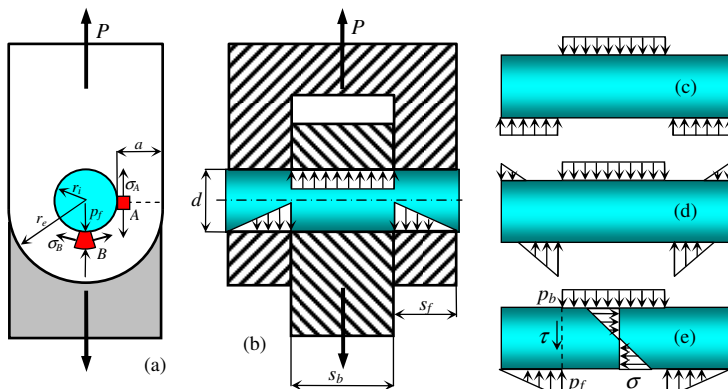


Fig.22.5 – Geometria e condizioni di carico del collegamento perno, biella, forcella.

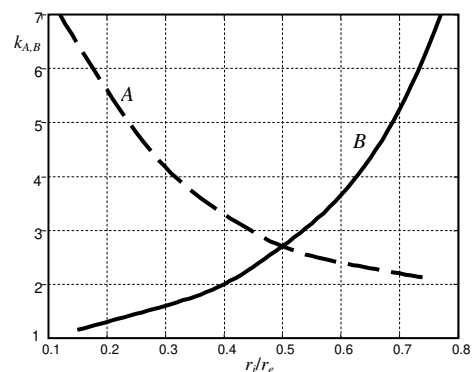


Fig.22.6 – Fattori di concentrazione delle tensioni nei punti A e B della forcella.