

13. LA CONCENTRAZIONE DI TENSIONE

Le equazioni per il calcolo della tensione nei casi di sollecitazione di trazione, compressione, flessione e taglio nelle travi sono state ottenute in base alla teoria di De Saint Venant che considera solidi di forma cilindrica senza variazioni di sezione o altre irregolarità geometriche. Nei solidi elastici ogni discontinuità geometrica altera la distribuzione delle tensioni nel suo intorno, provocando generalmente un *incremento* della tensione massima. Le zone in cui ciò accade sono chiamate zone di *concentrazione delle tensioni*.

I componenti strutturali contengono spessissimo variazioni di forma localizzate, realizzate per motivi funzionali, che nel gergo dell'ingegneria meccanica sono definite *intagli* (si sottolinea che con il termine *intaglio* non si intende un difetto, come una *cricca* o *frattura*, ma una variazione di geometria realizzata appositamente nell'elemento). Per esempio gli alberi di trasmissione presentano spesso variazioni di diametro, per diminuire il peso o per permettere la sistemazione dei cuscinetti, cave per chiavette, gole; la testa e la filettatura di una vite costituiscono variazioni di sezione rispetto al diametro del gambo; anche fori e condotti sono esempi di variazioni di forma localizzate.

Generalmente le tensioni massime e i gradienti di tensione risultano tanto più elevati quanto più brusca è la discontinuità geometrica. Raccordi aventi elevata curvatura (cioè piccolo raggio di curvatura) o grandi variazioni di diametro sono esempi di discontinuità geometriche concentrate. In conseguenza degli elevati gradienti, le zone di concentrazione di tensione risultano poco estese, in quanto lo stato tensionale decresce rapidamente mano a mano che ci si allontana dalla discontinuità. Si vedrà nel seguito che questa caratteristica rende meno pericolose le concentrazioni di tensione ai fini della resistenza a fatica, in quanto, in questo caso, la resistenza del componente è influenzata sia dal livello della tensione massima che dall'estensione della zona soggetta a tale tensione.

Il fattore di concentrazione delle tensioni

Al fine di correlare la massima tensione in corrispondenza della discontinuità con la tensione ottenuta con le formule elementari in assenza di discontinuità, definita tensione *nominale*, si usano i *fattori di concentrazione delle tensioni*, detti anche *teorici* o *geometrici*, che possono essere indicati con k_t per le tensioni normali e k_{ts} per le tensioni tangenziali. Essi sono definiti dalle equazioni:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \qquad k_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{nom}}} \qquad (13.1a,b)$$

Come detto, le tensioni nominali σ_{nom} e τ_{nom} generalmente sono quelle calcolate usando le equazioni elementari della teoria dell'elasticità, ottenute applicando le teorie semplificate (ad es. nel caso delle travi la teoria di De Saint Venant per flessione, torsione, taglio e sforzo normale). I parametri geometrici utilizzati per valutare le tensioni nominali possono essere riferiti alla sezione *in presenza* o *in assenza* dell'intaglio, a seconda della scelta effettuata nella determinazione del fattore di concentrazione. In altri casi come tensione nominale viene utilizzato un valore legato al carico agente.

Naturalmente, dovendo calcolare la tensione massima agente nel componente e disponendo del fattore di concentrazione, le (1) vengono esplicitate rispetto a σ_{\max} e la tensione nominale deve essere calcolata introducendo gli stessi parametri geometrici che sono stati utilizzati per determinare il fattore di concentrazione. I fattori di concentrazione delle tensioni sono disponibili sotto forma di diagrammi (come si vedrà meglio nel seguito) o di equazioni empiriche. In entrambi i casi vengono fornite le opportune indicazioni per il calcolo di σ_{nom} o τ_{nom} .

Si noti che σ_{\max} e σ_{nom} possono avere direzioni differenti, poiché lo stato tensionale dell'elemento con intaglio può essere diverso da quello del componente in assenza di variazione geometrica.

I fattori di concentrazione delle tensioni così definiti dipendono dalla sola geometria del componente e non dal materiale con cui è costruito (che comunque potrebbe essere considerato un materiale teorico isotropo-omogeneo-elastico con tensione di snervamento e/o rottura infinite); più avanti si vedrà come essi possono essere modificati per tener conto del particolare comportamento di alcuni materiali.

Altre definizioni del fattore di concentrazione delle tensioni sono *fattore di forma* e *coefficiente di intaglio*.

Spesso la presenza di un intaglio fa sì che lo stato di sollecitazione passi da monoassiale a pluriassiale. In questo caso si può definire un coefficiente calcolato con riferimento al massimo dei rapporti tra ciascuna tensione e quella nominale:

$$k_t = \max_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\sigma_{\max,i}}{\sigma_{\text{nom}}} \right\} \qquad (13.2)$$

In questo e nel caso più generale di stati di tensione pluriassiali, è anche possibile definire un fattore di concentrazione che utilizza le tensioni equivalenti, ad esempio, per materiali duttili, quelle di Tresca (11.14) o di Von Mises (11.25), detto coefficiente di forma *di confronto* o *equivalente*:

$$k_{te} = \frac{\sigma_{\max,e}}{\sigma_{\text{nom},e}} \qquad (13.3)$$

Ad esempio, se si utilizza il criterio di Tresca (11.14), l'espressione (3), nel caso più generale, diventa

$$k_{te} = \frac{\max \left\{ \left| \sigma_{\max,1} - \sigma_{\max,2} \right|, \left| \sigma_{\max,2} - \sigma_{\max,3} \right|, \left| \sigma_{\max,3} - \sigma_{\max,1} \right| \right\}}{\max \left\{ \left| \sigma_{\text{nom},1} - \sigma_{\text{nom},2} \right|, \left| \sigma_{\text{nom},2} - \sigma_{\text{nom},3} \right|, \left| \sigma_{\text{nom},3} - \sigma_{\text{nom},1} \right| \right\}} \quad (13.3b)$$

Determinazione del fattore di concentrazione delle tensioni

Tipicamente al progettista non è richiesta la determinazione del fattore di concentrazione delle tensioni che è già disponibile in varia forma (tabelle, formule teoriche o empiriche) per molti casi di interesse pratico. La determinazione del fattore di concentrazione delle tensioni richiede la valutazione della massima tensione effettivamente agente sul componente, cosa che può essere effettuata per via teorica, tramite la teoria dell'elasticità, o per via numerica o in modo sperimentale, avendo cura, in questo caso, che la tensione massima non raggiunga il valore di snervamento. Nel seguito sono mostrati alcuni esempi.

Caso monoassiale-monoassiale

La fig.1 rappresenta una lastra indefinita caricata uniformemente a grande distanza dal foro da una tensione costante σ_0 in direzione verticale, che viene scelta, per ovvi motivi, come tensione nominale ($\sigma_{\text{nom}} = \sigma_0$). La teoria dell'elasticità mostra che, in presenza di un piccolo foro ellittico di semiassi a e b , la tensione ai bordi laterali del foro agisce in direzione verticale ed è data da:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) = \sigma_0 \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (13.4)$$

essendo ρ il raggio di raccordo così definito $\rho = b^2/a$. In questo caso la tensione nominale coincide con σ_0 e, utilizzando la (1), si ha

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (13.5)$$

Se $a=b$ l'ellisse diventa un cerchio e l'equazione (4) si riduce a $\sigma_{\max} = 3\sigma_0$ da cui $k_t = 3$.

In questo esempio sia la tensione nominale sia la tensione teorica sono monoassiali.

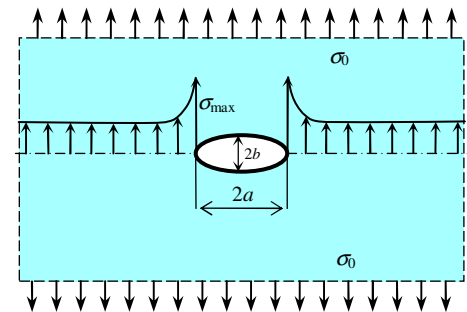


Fig.13.1- Lastra indefinita con foro ellittico

Caso monoassiale-pluriassiale

Nel caso di asta circolare soggetta a trazione, la presenza di una gola di raggio R di curvatura (fig.2a) provoca uno stato di tensione triassiale nell'intorno della discontinuità, ma biassiale sulla superficie esterna. In questo caso utilizzando la (2), per certi valori dei parametri geometrici, si verifica che $k_{t1} = 3$, $k_{t2} = 1$, $k_{t3} = 0$ da cui $k_t = 3$.

In alternativa si può valutare il k_{te} di confronto (4). Utilizzando Von Mises si può dimostrare che si ha:

$$k_{te} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}}{\sigma_{\text{nom}}} = \sqrt{7} \quad (13.6)$$

Caso pluriassiale-monoassiale

Un esempio è costituito dal caso di lastra con foro soggetta a trazione in due direzioni x e y , rispettivamente orizzontale e verticale, con valori σ_{0x} e σ_{0y} . Supponendo $\sigma_{0y} > \sigma_{0x}$, in assenza di foro, si ha ovunque $\sigma_1 = \sigma_{0y}$, $\sigma_2 = \sigma_{0x}$. In presenza di foro, mediante la teoria dell'elasticità, si può dimostrare che ai bordi laterali del foro agisce una tensione in direzione verticale $\sigma_1 = 3\sigma_{0y} - \sigma_{0x}$, essendo sul bordo di normale y $\sigma_2 = \sigma_x = 0$ per le equazioni di equilibrio al contorno, e ai bordi superiore e inferiore agisce una tensione in direzione orizzontale con $\sigma_1 = 3\sigma_{0x} - \sigma_{0y}$, essendo $\sigma_2 = \sigma_y = 0$. Il coefficiente di forma, in base alla (3) è dato da:

$$k_{te} = \frac{3\sigma_{0y} - \sigma_{0x}}{\sqrt{\sigma_{0x}^2 + \sigma_{0y}^2 - \sigma_{0x}\sigma_{0y}}}; \quad (13.7)$$

se $\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = \sigma_0$ si ha che $k_{ts} = 2\sigma_0/\sigma_0 = 2$.

Diagrammi di concentrazione delle tensioni

La determinazione dello stato di tensione effettivo in un componente di geometria complessa richiede in genere una procedura laboriosa. Fortunatamente, per i casi che si presentano più frequentemente nella pratica, sono disponibili diagrammi che forniscono il valore del fattore di concentrazione delle tensioni come, ad esempio, quelli mostrati in fig.2. Usualmente i coefficienti sono riferiti ai parametri geometrici dell'elemento e dell'intaglio riportati in *forma adimensionale*.

Per ottenere la tensione massima, il progettista deve calcolare la tensione nominale facendo uso delle appropriate formule semplici (ottenute applicando le teorie semplificate, ad es. nel caso delle travi la teoria di De Saint Venant per flessione, torsione, taglio e sforzo normale), *che sono indicate sul diagramma stesso*, e moltiplicare il risultato per il coefficiente ottenuto dal diagramma. E' sempre importante prestare attenzione a quali parametri geometrici devono essere introdotti nella formula della tensione nominale che *sono indicati espressamente nel diagramma*. In alcuni casi nella formula della tensione nominale devono essere introdotte le dimensioni della sezione in assenza di discontinuità, come nel caso di fig.2(a).

Spesso per la stessa geometria di componente sono disponibili più diagrammi ciascuno relativo ad un diverso tipo di sollecitazione, ad esempio per trazione e flessione. Nelle fig.2 sono mostrati i casi di trazione, ma per le stesse geometrie esistono i diagrammi per i casi di flessione e torsione.

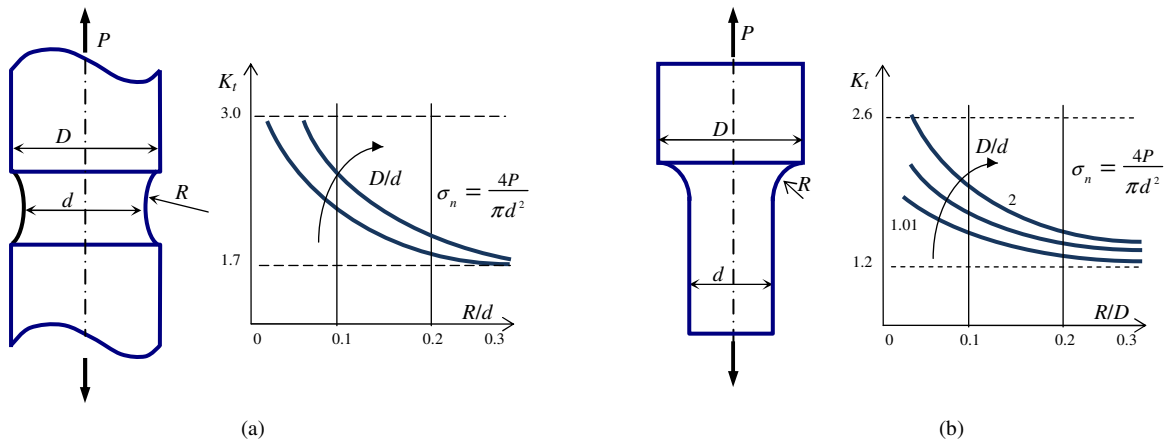


Fig.13.2 – Esempi di diagramma del fattore di concentrazione delle tensioni al variare dei parametri geometrici dell'elemento: a) Barra cilindrica con gola, b) barra cilindrica con variazione di sezione. In entrambi i casi la sollecitazione è di trazione.

Comportamento del materiale in presenza di concentrazione di tensione

In base alla sua definizione, il fattore di concentrazione delle tensioni non è influenzato dal materiale di cui è costituito l'elemento meccanico. Un esame del comportamento reale del componente (in particolare l'esperienza diretta) mostra che l'effetto di una discontinuità di forma dipende dalle caratteristiche del materiale, in particolare dalla sua fragilità o duttilità. Spesso si riscontra che la resistenza di un componente avente una discontinuità di forma è maggiore di quella prevedibile utilizzando il fattore di forma teorico nel calcolo delle sollecitazioni.

Materiali duttili

Un materiale duttile ideale presenta un diagramma σ - ϵ rettilineo sino ad una tensione corrispondente a quella di snervamento σ_s , superata la quale l'incremento di deformazione non richiede un ulteriore incremento di tensione e il diagramma procede con andamento parallelo all'asse delle ascisse sino alla deformazione di rottura.

Nel caso di materiali duttili, se la sollecitazione in prossimità della discontinuità è sufficientemente elevata, si verifica lo snervamento del materiale e la tensione si mantiene al livello σ_s , mentre la deformazione localizzata fa sì che il materiale limitrofo sia costretto ad assorbire l'incremento di tensione. Si noti che il materiale snervato partecipa alla resistenza del componente, in quanto continua a sopportare una tensione pari a quella di snervamento. Il componente resiste fino a quando il carico esterno assume un valore tale da provocare lo snervamento di **tutta** la sezione con successiva rottura; questo valore del carico coincide, praticamente, con quello che provoca la crisi nel provino *non intagliato*.

Questo risultato può essere interpretato nel senso che il collasso avviene quando la tensione nominale eguaglia la tensione di snervamento, anche in presenza d'intaglio, conseguentemente, per un materiale duttile sotto carico statico non è necessario applicare il fattore di concentrazione delle tensioni.

Quest'effetto è tanto più marcato quanto più la concentrazione delle tensioni è localizzata; cioè in presenza di gradienti di tensione elevati. Naturalmente l'estensione delle zone plasticizzate deve comunque essere limitata, in pratica coincidere con le zone interessate alla concentrazione di tensione, affinché le deformazioni non compromettano la funzionalità del componente.

Materiali fragili

Un materiale fragile ideale presenta un diagramma tensioni-deformazioni rettilineo sino alla frattura, cioè quest'ultima non è preceduta da grandi deformazioni nel materiale. Non appena viene raggiunta la σ_r , il materiale cede e non partecipa alla resistenza della sezione, al contrario di quanto accade con i materiali duttili quando raggiungono lo snervamento; il trasferimento delle sollecitazioni al materiale circostante provoca la rottura dello stesso con propagazione a tutta la sezione.

Molte ghise, specialmente quelle a bassa resistenza, hanno un comportamento molto prossimo a quello del materiale fragile ideale. Tuttavia le ghise generalmente non sono omogenee: spesso presentano cavità e inclusioni di grani di grafite; inoltre il processo di produzione spesso produce superfici esterne irregolari. In pratica si può affermare che tali materiali contengono difetti intrinseci che provocano effetti di concentrazione di tensione indipendentemente dalla geometria del componente per la cui costruzione sono utilizzati. La presenza di queste discontinuità nel materiale fa sì che l'ulteriore eventuale discontinuità di forma del componente non abbia una significativa influenza sulla distribuzione di tensione. Ovvero si può affermare che la concentrazione di tensione dovuta all'eventuale intaglio è inferiore a quelle presenti nel materiale per via dei suoi difetti intrinseci.

Inoltre, anche il provino utilizzato per la prova di trazione contiene le concentrazioni di tensione dovute ai difetti intrinseci del materiale e, poiché nella determinazione della tensione di rottura del materiale σ_r non si tiene conto di tali effetti (cioè non s'introduce il fattore di concentrazione nella formula per il calcolo della tensione), si può affermare che la σ_r ottenuta dalla prova di trazione è una *tensione nominale di rottura* e non la massima agente nel provino.

Conseguentemente, in presenza di sollecitazioni statiche agenti su un materiale discontinuo come la ghisa, in fase di verifica o progetto è possibile confrontare il valore nominale della tensione agente con il valore nominale di rottura, senza applicare il fattore di concentrazione delle tensioni.

In realtà, nel caso di sollecitazioni statiche, l'effetto di concentrazione delle tensioni deve essere considerato per materiali fragili ma omogenei, la cui fragilità non è dovuta a discontinuità, come nel caso di molte plastiche.

Sollecitazioni cicliche (di fatica)

L'effetto della concentrazione di tensione è **sempre** rilevante nelle valutazioni di resistenza di elementi soggetti a sollecitazione variabili nel tempo in modo ciclico (di fatica) come si vedrà nel capitolo dedicato a quest'argomento.

Considerazioni intuitive

È utile sviluppare un buon intuito per la concentrazione delle tensioni in modo da prevedere la loro esistenza e il loro effetto, in particolare per estrapolare il fattore di concentrazione delle tensioni da valori calcolati o dai grafici o stimarlo quando non possono essere usati mezzi sperimentali, numerici o la teoria.

L'*analogia di flusso* (vedi fig.3a,b) è probabilmente il miglior modo per *visualizzare* la concentrazione delle tensioni. La figura mostra una barra uniforme in tensione nella quale è possibile visualizzare le linee *isostatiche*, cioè linee alle quali la tensione è tangente in ogni punto e che costituiscono le *traiettorie delle tensioni*. Queste linee sono analoghe alle linee di flusso per il moto dei fluidi. Se nella lastra sono presenti degli intagli le isostatiche risultano deviate. Nelle sezioni prossime all'intaglio queste si avvicinano in modo da passare attraverso la sezione ristretta; la grandezza della concentrazione delle tensioni è proporzionale all'aumento della curvatura delle isostatiche. L'analogia di flusso è importante perché ci dà un'idea dell'esistenza fisica della concentrazione di tensione. Questo metodo può anche essere usato come mezzo qualitativo per individuare come si possa diminuire la concentrazione delle tensioni.

Il fenomeno della curvatura delle isostatiche è simile a ciò che accade nelle barre illustrate in fig.4. Per lo stesso allungamento la barra retta supporterà un carico molto maggiore di quella curva. Inversamente la barra curva si allungherà molto di più di quella retta se è applicato lo stesso valore del carico.

Senza dubbio il caso di rottura che si verifica più frequentemente nelle macchine con organi rotanti è il cedimento dell'albero; tipicamente la rottura si innesca dai punti di calettamento di cuscinetti, ruote dentate ed altri elementi.

Con riferimento alla fig.5, per ottenere un basso valore del fattore di concentrazione delle tensioni, il raggio di raccordo r deve essere il più grande possibile, cosa che non è sempre realizzabile dato che il valore di r è limitato dal progetto della parte che si accoppia all'albero. Un raggio più grande può essere realizzato sagomando l'albero come in b) ottenendo una più bassa concentrazione delle tensioni.

In c) si mostra come, in modo apparentemente sorprendente, *l'aggiunta di scarichi addizionali* spesso riduce la concentrazione delle tensioni (*effetto ombra*). Problemi dovuti a concentrazione di tensione sono stati risolti rimuovendo materiale invece di aggiungerlo.

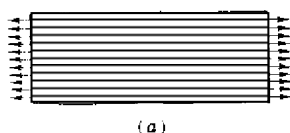


Fig.13.3 - Analogia di flusso.

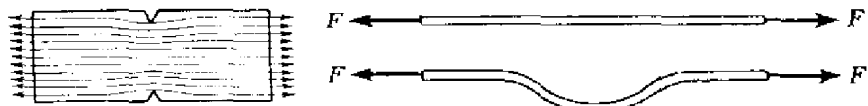


Fig.13.4 - Elementi curvi.

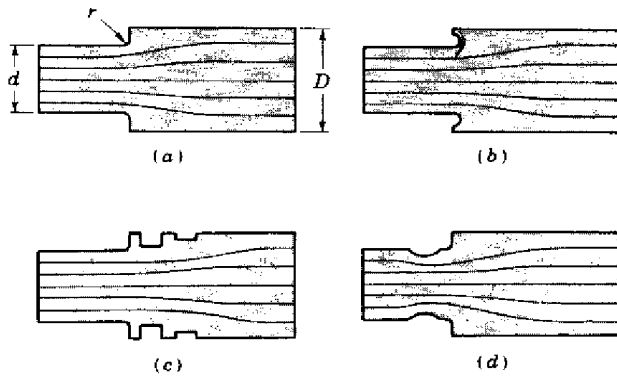


Fig.13.5 – Raggi di raccordo.

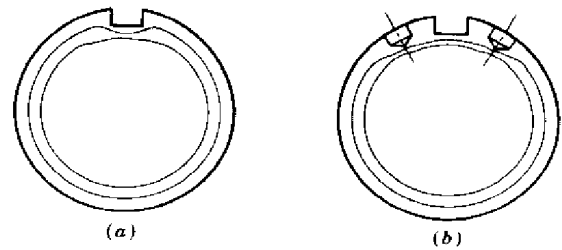


Fig.13.6 – Discontinuità in zona molto sollecitata.

In elementi soggetti a flessione si deve cercare di evitare che gli intagli addizionali si trovino al punto di maggiore momento flettente. Per esempio lo scarico in fig.5d) è da scartare se esso è fatto in un punto ad elevato valore del momento flettente. In generale si deve cercare di fare in modo che le discontinuità si trovino in una zona a basso valore della tensione nominale.

La fig.6 illustra il modo di impiego del metodo delle linee di flusso nel caso di elementi soggetti a tensione di taglio. È riportata la sezione di un albero nel quale è ricavata una cava per chiavetta atta a collegare all'albero un elemento rotante che trasmette una coppia torcente: l'eliminazione di materiale con due fori laterali riduce il fattore di concentrazione delle tensioni a taglio.

In fig.7 sono mostrate le immagini sperimentali ottenute con il *metodo fotoelastico* per 3 casi di forze verticali applicate a 3 elementi con differente forma. Le immagini fotoelastiche sono relative alle aree degli elementi evidenziate in figura. Nell'immagine a) lo stato tensionale corrisponde al caso di trave rettilinea soggetta a trazione e flessione, nell'immagine b) al caso di trave curva soggetta a trazione e flessione, nell'immagine c) al caso di apice di frattura di lastra soggetta a trazione. Le immagini sperimentali mostrano le cosiddette *frange isocromatiche*, linee con uguale colore, luogo dei punti nei quali la *differenza delle tensioni principali nel piano* ($\sigma_1 - \sigma_2$) è *costante*. La differente *forma* delle isocromatiche fornisce un'efficace rappresentazione qualitativa della variabilità dello stato tensionale in dipendenza della forma dell'elemento considerato a parità di tipologia del carico.

Accorgimenti per la limitazione del fattore di intaglio:

- porre le discontinuità lontano dai punti più sollecitati;
- evitare brusche variazioni di diametro;
- utilizzare ampi raggi di raccordo negli intagli;
- introdurre ulteriori discontinuità che riducano l'effetto di una sola (effetto ombra);
- evitare, se possibile, l'uso di materiali ad alta resistenza che sono i più sensibili all'intaglio;
- introdurre tensioni residue di compressione.

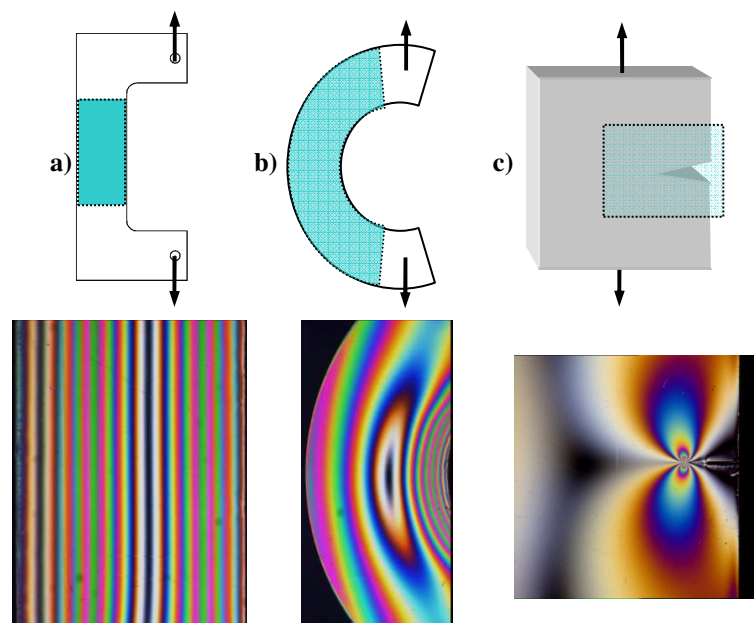


Fig.13.7 - Casi di: a) tenso-flessione in trave rettilinea, b) tenso-flessione in trave curva, c) trazione in presenza di frattura; immagini sperimentali delle frange isocromatiche ottenute mediante modelli fotoelastici.