9. TENSIONI DI CONTATTO – FATICA DI CONTATTO

Tensioni di contatto (teoria di Hertz 1881)

Quando due corpi aventi superfici esterne curve vengono pressati tra loro, la zona di contatto, a causa della deformazione elastica, avviene su superfici e non linee o punti (fig.1). Poiché tali superfici sono generalmente piccole, le pressioni mutue risultano elevate e negli elementi, in prossimità del contatto, si genera uno stato tensionale tridimensionale.

Tensioni di contatto si generano, ad esempio, tra le sfere e la ralla nei cuscinetti a rotolamento, tra i denti delle ruote dentate, tra rotaie e ruote.

Le tensioni dovute al contatto sono descritte dalla teoria di *Hertz* nella quale vengono considerati

- solidi elastici, omogenei, isotropi,
- superfici lisce,

raggi di curvatura grandi rispetto alle superfici a contatto,

- tensioni tangenziali di attrito nulle.

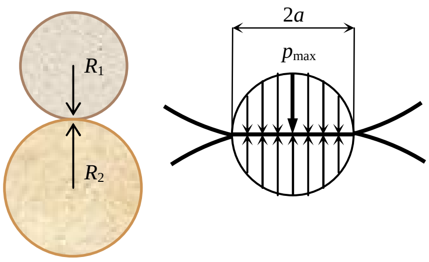


Fig.9.1 - Pressioni di contatto tra sfere o cilindri.

Pressione massima e raggio di contatto

Sfere

Nel caso di due solidi sferici di raggi R_1 ed R_2, i cui materiali hanno costanti elastiche E_1, ν_1, E_2, ν_2, pressati l'uno contro l'altro da una forza F, l'area di contatto ha forma circolare di raggio a dato dall'equazione:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2}{1/R_1 + 1/R_2}} \tag{9.1}$$

ponendo rispettivamente

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{9.2,3}$$

la (1) può essere riscritta come

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{\rho}{\Delta}} = 0.91 \sqrt[3]{F \frac{\rho}{\Delta}} \tag{9.4}$$

La (4) mostra che l'ampiezza della superficie di contatto è proporzionale al raggio di curvatura delle superfici e inversamente proporzionale alle rigidezze dei materiali.

La pressione sulla superficie di contatto ha una distribuzione semisferica rispetto al raggio a. La massima pressione si ha al centro dell'area di contatto e può essere ottenuta con la seguente equazione:

$$p_{max} = 0.364 \sqrt[3]{F \frac{\Delta^2}{\rho^2}} = \frac{3}{2\pi} \frac{F}{a^2} = 0.48 \frac{F}{a^2} \tag{9.5}$$

Solidi cilindrici

In questo caso la teoria di Hertz si riferisce a solidi cilindrici pieni, di lunghezza infinita, con assi paralleli. La forza di pressione agente è una forza ad unità di lunghezza q. La superficie di contatto ha semilarghezza a data da:

$$a = \sqrt{\frac{4}{\pi} q \frac{\rho}{\Delta}} = 1.13 \sqrt{q \frac{\rho}{\Delta}} \tag{9.6}$$

con ρ e Δ definiti come nelle eq.(2,3). La superficie di contatto è rigorosamente piana solo nel caso in cui i due cilindri sono uguali, ma, a fini pratici, può essere sempre considerata tale. Se i cilindri hanno sezione non circolare, nella (3) si devono introdurre, al posto dei raggi, i raggi di curvatura delle superfici al contatto.

La pressione ha una distribuzione ellittica lungo la dimensione $2a$ con valore massimo:

$$p_{max} = \sqrt{\frac{q}{\pi} \frac{\Delta}{\rho}} = 0.564 \sqrt{q \frac{\Delta}{\rho}} = \frac{2}{\pi} \frac{q}{a} = 0.64 \frac{q}{a} \tag{9.7}$$

Le formule ottenute sono valide anche per cilindri di lunghezza finita l in zone sufficientemente lontane dagli estremi. Nel caso di contatto tra sfera/cilindro con una superficie sferica/cilindrica esterna, si attribuisce al diametro di quest'ultima (la maggiore) il segno negativo.

Contatto sfera/cilindro con piano

Le precedenti equazioni (4,5) e (6,7) possono essere applicate al contatto tra sfere/cilindri e superfici piane, ponendo per queste ultime $R_2=\infty$.

Tensioni lungo l'asse z al centro del contatto

Sfere

Facendo riferimento ad un sistema di assi cilindrico con l'origine nel centro dell'area di contatto e l'asse delle z in direzione ortogonale all’area di contatto, le tensioni agenti lungo le direzioni r, θ, z, per la simmetria del sistema, risultano principali. Le tensioni in direzione z sono di compressione; anche le tensioni radiali sono negative perché il materiale, compresso in direzione z, tenderebbe ad espandersi per effetto Poisson, ma il materiale limitrofo glielo impedisce.

Ponendo

$$z_a = z/a \tag{9.8}$$

Le equazioni delle tensioni lungo l'asse z per ciascuna sfera (o per il piano) sono:

$$\sigma_z = \frac{-p_{\max}}{1+z_a^2} \qquad \sigma_r = -p_{\max}\left[(1+\nu)\left(1-z_a\cot^{-1}z_a\right)-\frac{1}{2\left(1+z_a^2\right)}\right] \tag{9.9,10}$$

L’andamento è mostrato in fig.2a per il caso ν=0.3.

La massima tensione tangenziale $\tau_{\max}=(\sigma_z-\sigma_r)/2$ agisce nel piano zr; il suo massimo valore, pari a $0.31p_{\max}$, si trova alla profondità $z=0.47a$.

Solidi cilindrici

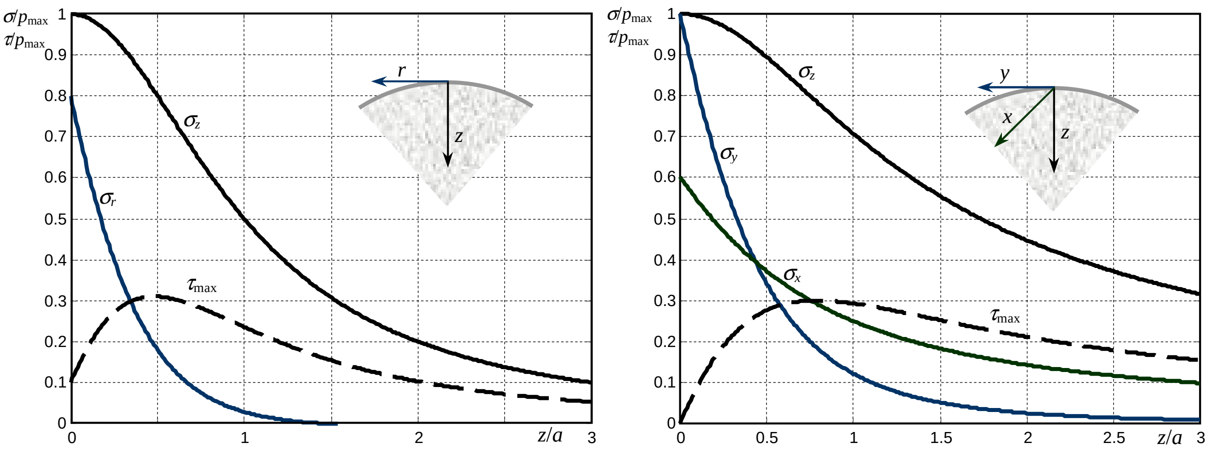
Facendo riferimento ad un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro dell'area di contatto, asse delle z in direzione ortogonale all’area di contatto, asse x nella direzione longitudinale ed asse y in quella trasversale, le tensioni lungo gli assi x, y, z risultano principali. In particolare le espressioni delle tensioni lungo l’asse z, tutte negative, risultano le seguenti:

$$\sigma_z = \frac{-p_{\max}}{\sqrt{1+z_a^2}} \qquad \sigma_x = -2\,\nu\,p_{\max}\left(\sqrt{1+z_a^2}-z_a\right) \tag{9.11,12}$$

$$\sigma_y = -p_{\max}\left[\left(2-\frac{1}{1+z_a^2}\right)\sqrt{1+z_a^2}-2z_a\right] \tag{9.13}$$

L’andamento è mostrato in fig.2b.

La tensione tangenziale massima nel piano zy, $\tau_{\max}=(\sigma_z-\sigma_y)/2$ in figura, non è la massima fra le tre in tutti i punti dell’asse z, ma raggiunge il massimo valore assoluto per $z=0.79a$ e vale $0.3p_{\max}$.



(a) (b)

Fig.9.2 - Tensioni hertziane al centro dell’area di contatto al variare di z per materiali con ν=0.3: (a) caso delle sfere e (b) caso dei cilindri.

Fatica di contatto

Spesso elementi meccanici lavorano venendo a contatto durante un moto relativo di rotolamento e/o strisciamento. Ovvio esempio di questa combinazione è il contatto fra due ruote dentate. L’applicazione ripetuta delle tensioni di contatto può provocare un danneggiamento definito *fatica di contatto* o *usura superficiale* (che non deve essere confusa con l'*usura abrasiva* dovuta allo sfregamento di particelle adesive su una superficie).

L’entità del danneggiamento è influenzata dai seguenti fattori:

- entità delle tensioni hertziane,
- numero di cicli,
- finitura e durezza delle superfici,
- grado di lubrificazione,
- temperatura.

Seguendo la teoria di Hertz si accetta l'ipotesi che il danneggiamento a fatica inizi dove la tensione di taglio è massima e si propaghi verso la superficie. In questo caso il lubrificante entra nella cricca e, a causa della pressione, danneggia ulteriormente il materiale.

La resistenza alla fatica di contatto tra 2 materiali è caratterizzata mediante il *limite di fatica di contatto* che è la pressione di contatto che causa la prima evidenza tangibile di danneggiamento della superficie per numero di cicli N assegnato

$$\sigma_{lc} = \frac{2}{\pi}\frac{q}{a} \tag{9.14}$$

Sostituendo a nella (14) mediante l’espressione (6) e spostando a sinistra dell’equazione tutti i termini che dipendono dal materiale si ottiene

$$\sigma_{lc}^2 \frac{\pi}{\Delta} = \frac{q}{\rho} \tag{9.15}$$

Il termine a sinistra della (15) è definito Fattore carico-tensioni di Buckingam ed indicato con K_1. Normalmente per i materiali ingegneristici si ha ν=0.3, allora può porsi ν_1=ν_2=ν=0.3 nella (2) ottenendo

$$\frac{1}{\Delta} = 0.91\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \tag{9.16}$$

da cui

$$K_1 = 2.857\sigma_{lc}^2\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \tag{9.17}$$

Se si conoscono le caratteristiche dei materiali σ_{lc}, E_1 ed E_2 l'equazione di progetto può essere scritta come

$$\frac{q}{\rho} = \frac{K_1}{n} \tag{9.18}$$

essendo n il coefficiente di sicurezza.

I valori del limite di fatica superficiale per gli acciai relativamente ad N=10^8 cicli possono essere ottenuti dall'equazione:

$$\sigma_{lc} = 2.76Hb - 70 \tag{9.19}$$

dove Hb è la durezza Brinell ed il valore che si ottiene è espresso in MPa. Se i materiali hanno differente durezza si usa il minore fra i due valori.