

11. CRITERI DI RESISTENZA

La verifica di resistenza ha lo scopo di stabilire se lo stato tensionale dell'elemento strutturale analizzato è tale da provocarne il cedimento inteso come rottura o snervamento. Il problema fondamentale è quello di mettere in relazione i parametri critici del materiale, la tensione di snervamento σ_s o quella di rottura σ_r , ottenuti con le semplici prove monoassiali di trazione o compressione, con la resistenza dell'elemento *sogetto a uno stato di tensione in genere biassiale o triassiale*, come quelli mostrati in appendice A.1.

A questo scopo, in base all'osservazione sperimentale del meccanismo fisico con cui il materiale giunge allo stato limite, sono state sviluppate diverse teorie che prendono il nome di *criteri di resistenza*. In particolare, i criteri di resistenza forniscono combinazioni delle tensioni effettivamente agenti (principali o cartesiane), dette *tensioni equivalenti*,

$$\sigma_e = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \text{o} \quad \sigma_e = g(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \quad (11.1)$$

che possono essere confrontate con le tensioni di snervamento e/o rottura del materiale. Per alcuni criteri la tensione equivalente dipende solo dalle tensioni principali massima e/o minima.

Per ciascun un criterio di resistenza, il cedimento in un punto della struttura si verifica se la tensione equivalente raggiunge il valore *limite* di rottura o snervamento, cioè se:

$$\sigma_e = \sigma_l \quad \text{con } l=s,r. \quad (11.2)$$

Nella pratica, salvo casi particolari, le strutture sono progettate affinché le tensioni massime agenti si mantengano sufficientemente al di sotto di quelle critiche. Si definisce *tensione ammissibile* una frazione opportuna della tensione che provoca il danneggiamento. La definizione si ottiene introducendo un fattore $n > 1$ come segue:

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_l}{n} \quad (11.3)$$

Il valore n è detto *coefficiente di sicurezza* ed è il fattore per il quale devono essere moltiplicati i carichi agenti per raggiungere il livello di cedimento; il suo valore (tipicamente $1.3 \leq n \leq 2$, in alcuni casi $n=4$) è imposto da normative o scelto dal progettista in base a considerazioni riguardanti:

- l'incertezza sull'entità del carico e sulle modalità d'applicazione (urti, sollecitazioni di montaggio e trasporto),
- l'incertezza sulle proprietà del materiale (proprietà iniziali, variazioni dovute alla lavorazione, usura e temperatura in esercizio),
- l'imprecisione del modello matematico per il calcolo delle tensioni (uso di teorie semplificate),
- la possibile presenza d'altre tensioni (dovute alla lavorazione o al montaggio),
- la pericolosità del cedimento,
- il costo.

Per verificare se un elemento di geometria nota è in condizione di sicurezza, si calcola il valore della tensione equivalente e si confronta con la tensione ammissibile tramite una disequazione di questo tipo:

$$\sigma_e \leq \sigma_{am} \quad (11.4)$$

Questo tipo di calcolo è detto di *verifica*.

In alcuni casi è possibile scrivere la tensione equivalente σ_e in funzione di un parametro geometrico della struttura (D), imporre che la σ_e eguagli il valore ammissibile con una equazione del tipo:

$$\sigma_e(D) = \sigma_{am} \quad (11.5)$$

ed esplicitare l'equazione rispetto al parametro; questo tipo di calcolo è detto di *progetto*.

Riguardo al meccanismo fisico con cui i materiali giungono al cedimento, si suole effettuare una prima distinzione di massima tra il comportamento dei materiali duttili e di quelli fragili.

I materiali duttili presentano elevate deformazioni plastiche a partire dal raggiungimento della tensione di snervamento σ_s , inferiore al valore di tensione che provoca la rottura. Tali deformazioni sono legate a scorrimenti tra i piani atomici e cristallini che avvengono all'incirca nei piani su cui insistono le *massime tensioni tangenziali*. Alcuni criteri di resistenza suggeriscono che la condizione critica dei materiali duttili è costituita proprio dal raggiungimento dello snervamento e identificano la tensione σ_s ottenuta nella prova di trazione come valore critico di riferimento.

I materiali fragili non presentano elevate deformazioni plastiche e la condizione critica considerata dai criteri di resistenza è solitamente costituita dalla rottura. Poiché i materiali fragili presentano una resistenza a compressione superiore a quella di trazione, i valori critici di riferimento ottenuti dalla prova di trazione sono due: le tensioni di rottura a trazione e compressione σ_{rt} e σ_{rc} . Tipicamente nei materiali fragili la rottura avviene per l'improvvisa propagazione di una frattura in un piano *ortogonale* alla *tensione normale* che raggiunge il suo valore critico. Come si vedrà nel seguito, il cedimento a trazione può essere facilitato dalla simultanea presenza di una tensione di compressione elevata (ovviamente minore della σ_{rc}), superiore, in valore assoluto, a quella massima di trazione.

Criterio della massima tensione normale o di Rankine-Navier

Questo criterio afferma che il cedimento si verifica quando la massima tensione principale agente eguaglia la tensione di snervamento o la tensione di rottura del materiale. In pratica solo la massima tensione principale di trazione o la massima tensione di compressione possono provocare il cedimento, le altre possono essere trascurate.

Siano σ_{st} e σ_{sc} rispettivamente le tensioni di snervamento a trazione e a compressione e σ_{rt} e σ_{rc} le analoghe tensioni di rottura, tutte considerate con il segno appropriato (negativo per quelle di compressione): se σ_1 è la maggiore delle tensioni principali e σ_3 la minore, il cedimento per snervamento o rottura avviene quando

$$\sigma_1 = \sigma_{rt} \quad \text{o} \quad \sigma_3 = \sigma_{rc} \quad (\text{se } \sigma_3 < 0) \quad l=s, r \quad (11.6a,b)$$

Introducendo il rapporto tra le tensioni limite a trazione e a compressione r

$$r = \sigma_{rt} / \sigma_{rc} \quad (11.7)$$

che, si noti, è un numero negativo e sostituendo $\sigma_{rc} = \sigma_{rt} / r$ nella (6b), le (6) possono essere sintetizzate come segue:

$$\max \{ \sigma_1, r\sigma_3 \} = \sigma_{rt} \quad (11.8)$$

La (8) consente di definire una *tensione equivalente* da confrontare con la sola tensione ammissibile a trazione $\sigma_{amm} = \sigma_{rt} / n$, mediante la (4) o la (5), come segue:

$$\sigma_e = \max \{ \sigma_1, r\sigma_3 \} \quad (11.9)$$

Considerando tensioni principali non ordinate, ma tali che σ_1 e σ_3 siano la massima e la minima o viceversa, nel piano σ_1 - σ_3 , gli stati di tensione limite espressi dalle (6) sono rappresentati da un quadrato (vedi fig.1). Questa rappresentazione può essere utilizzata anche in caso di stato di tensione biassiale con $\sigma_2=0$. Se le tensioni sono ordinate ($\sigma_1 > \sigma_3$) l'area segnata in grigio nella figura (per la quale sarebbe $\sigma_1 < \sigma_3$) non deve essere considerata.

Se il punto rappresentativo dello stato tensionale agente nel materiale si trova all'interno del diagramma, il componente è in sicurezza.

Nello stato di tensione tangenziale puro, rappresentato dalla linea tratto-punto in fig.1, si ha $\sigma_1 = -\sigma_3$ con $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = (\sigma_1 + \sigma_1) / 2 = \sigma_1$. Applicando il criterio di Navier (6) a questo caso si ottiene che il cedimento si verifica quando $\sigma_1 = \sigma_s$ cui corrisponde $\tau_{max} = (\sigma_s + \sigma_s) / 2 = \sigma_s$. Dati sperimentali mostrano che quest'eventualità può essere considerata realistica per i materiali fragili, mentre nel caso di materiali duttili lo snervamento si verifica per valori della tensione tangenziale molto minori.

Nel piano σ_n - τ_n ciascuno stato di tensione è rappresentato mediante i 3 cerchi di Mohr di cui quello esterno è relativo al piano in cui agiscono le tensioni principali più elevate in modulo. In fig.2, ad esempio, sono riportati in linea tratteggiata, i cerchi limite a trazione e compressione semplice e con linea punteggiata il caso di $\sigma_1 = \sigma_{rt}$ e $\sigma_2 = \sigma_{rc}$. In particolare, per il criterio di Navier, gli stati di tensione limite sono rappresentati da cerchi di Mohr tangenti alle rette parallele all'asse τ aventi equazione $\sigma = \sigma_{rt}$ e $\sigma = \sigma_{rc}$ mostrate in fig.2. Sul piano di Mohr è possibile definire una *curva limite* data dall'involuppo di tutti i cerchi di Mohr che rappresentano stati di tensione limite. Per il criterio di Navier tale curva limite è la circonferenza tangente alle rette $\sigma = \sigma_{rt}$ e $\sigma = \sigma_{rc}$ rappresentata con linea continua in figura.

Questo criterio:

- può essere utilizzato per materiali con comportamento non simmetrico, tipicamente *fragili*, per prevedere sia lo snervamento, sia la rottura,
- è spesso in contrasto con i dati sperimentali, non prevedendo la rottura nei casi in cui le tensioni σ_1 e σ_3 sono di *segno opposto* (elevate, ma inferiori a quelle limite) e la tensione di *compressione* è la *maggiore* in valore assoluto,
- considera solo le tensioni massime in valore assoluto, trascurando l'effetto di quelle intermedia e minima,
- indica che la tensione tangenziale di snervamento è pari a σ_s ,
- fallisce nel caso di compressione idrostatica pari a $-\sigma_3$ prevedendo il cedimento.

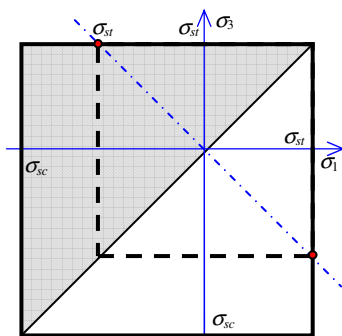


Fig.11.1 - Criterio di Navier nel piano σ_1 - σ_3 (tratteggiato per $\sigma_{rt} = \sigma_{rc}$).

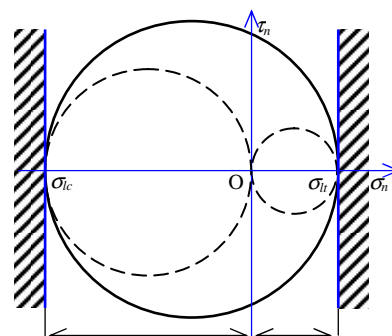


Fig.11.2 - Rappresentazione del criterio di Navier nel piano di Mohr.

Criterio della massima tensione tangenziale o Tresca

Questo criterio afferma che il cedimento (per snervamento) si verifica quando la massima tensione tangenziale nel punto considerato è pari alla massima tensione tangenziale presente nel provino di trazione al momento dello snervamento. Il criterio di Tresca è generalmente utilizzato per predire lo snervamento per i materiali duttili e fornisce risultati abbastanza concordanti con quelli sperimentali. In pratica suppone che la crisi del materiale sia dovuta alla sola tensione tangenziale e, in molti casi, le equazioni di progetto (5) che si ottengono sono facilmente esplicitabili rispetto al parametro geometrico d'interesse.

In un provino soggetto a trazione semplice la tensione tangenziale massima allo snervamento è data da:

$$\tau_s = \frac{1}{2}(\sigma_s - 0) = \frac{1}{2}\sigma_s \quad (11.10)$$

In campo elastico, per uno stato di tensione generico, le tensioni di taglio massime agenti nei piani contenenti le direzioni principali sono date da

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j) \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \quad (11.11)$$

Lo snervamento si verifica quando $\tau_{\max} = \tau_s$, cioè, considerando tensioni principali non ordinate,

$$\max_{i,j} \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| \right\} = \frac{1}{2} \sigma_s, \quad (11.12)$$

nella quale $\|$ significa valore assoluto, da cui:

$$\max_{i,j} \left\{ |\sigma_i - \sigma_j| \right\} = \sigma_s \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \quad (11.13)$$

La tensione equivalente è da confrontare con $\sigma_{am} = \sigma_s/n$ è data da:

$$\sigma_e = \max \left\{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \right\} \quad (11.14)$$

Nel caso biassiale con $\sigma_3=0$ e tensioni agenti nel piano 1-2 la (14) diventa:

$$\sigma_e = \max \left\{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2| \right\} \quad (11.15)$$

In questa espressione si nota che la massima tensione tangenziale nel caso piano è quella agente nel piano 1-2 solo se le tensioni σ_1 e σ_2 sono di segno opposto. Nel caso in cui σ_1 e σ_2 hanno lo stesso segno, la massima tensione tangenziale è quella agente nel piano 1-3, se $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, o nel piano 2-3, se $|\sigma_2| > |\sigma_1|$.

La fig.3 mostra una rappresentazione grafica degli stati limite descritti dalle (15) nel piano σ_1 - σ_2 . Nello spazio σ_1 , σ_2 e σ_3 con le tensioni non ordinate, le (13) sono le equazioni dei piani di un esagono avente per asse di simmetria la trisettrice degli assi.

Nel piano σ_n - τ_n (fig.4) gli stati di tensione limite sono rappresentati da cerchi tangenti alle rette parallele all'asse σ_n aventi equazione: $\tau = \pm \sigma_s/2$. Le curve limite è rappresentata dalle stesse rette di equazione $\tau = \pm \sigma_s/2$.

Questo criterio:

- considera solo le tensioni massima e minima, trascurando l'effetto di quella intermedia,
- vale per materiali con comportamento simmetrico, tipicamente duttili,
- indica che la tensione tangenziale di snervamento è pari alla metà del valore di snervamento a trazione $\tau_s = 0.5\sigma_s$,
- fallisce nel caso di trazione tripla pari a σ_s prevedendo la resistenza,
- non è utilizzabile per prevedere la rottura poiché, in campo plastico, il materiale ha un comportamento diverso in base al tipo di sollecitazione (tipicamente si ha $\tau_r \approx 0.7 \div 0.8\sigma_r$ e non $\tau_r = 0.5\sigma_r$ come prevederebbe il criterio).

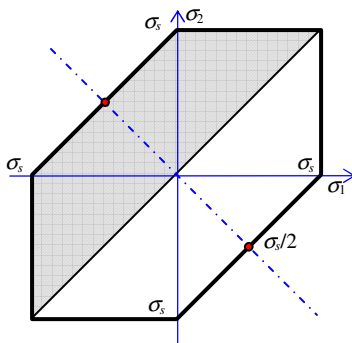


Fig.11.3 - Criterio di Tresca.

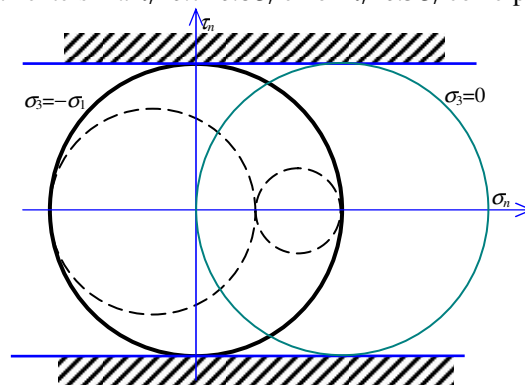


Fig.11.4 - Rappresentazione del criterio di Tresca sul piano di Mohr.

Criterio dell'energia di distorsione o di Von Mises-Hencky

Questo criterio afferma che lo snervamento del materiale si verifica quando l'energia elastica di deformazione immagazzinata raggiunge un valore critico; tale valore può essere determinato con la prova di trazione ed è pari all'energia di deformazione relativa alla tensione monoassiale di snervamento. Il criterio di Von Mises, essendo basata su grandezze definite in campo elastico, può essere impiegato solo per individuare le combinazioni di tensione che provocano lo *snervamento*, combinazioni che rappresentano il limite superiore del campo elastico stesso. Esso è meno semplice da utilizzare rispetto alla teoria della massima tensione tangenziale, ma per i materiali duttili è quella che dà i risultati più aderenti alle situazioni reali.

Il criterio di Von Mises prende origine dall'osservazione che i materiali duttili soggetti ad uno stato di tensione idrostatico (tensioni principali di compressione di uguale valore), per i quali lo stato tensionale provoca localmente una variazione di volume, ma non di forma, hanno una resistenza allo snervamento superiore rispetto al valore ottenuto dalle semplici prove di trazione.

Per ottenere il criterio di Von Mises si determina il lavoro di distorsione U_d come differenza tra il lavoro totale U e quello che provoca una variazione di volume U_v , e si confronta con quello relativo al caso di trazione semplice.

Valutazione del lavoro di distorsione

La valutazione del lavoro di distorsione si effettua nei seguenti passi:

- si valuta il lavoro di deformazione totale U ,
- si calcola la tensione media σ_m agente e si valuta il lavoro da essa compiuto U_v ,
- il lavoro di distorsione si valuta come differenza $U_d = U - U_v$.

Il lavoro per unità di volume compiuto dalle tensioni principali è dato da:

$$U_i = \frac{\sigma_i \varepsilon_i}{2} \quad i = 1, 2, 3; \quad (11.16)$$

sostituendo ε mediante la legge di Hooke, l'energia totale di deformazione è:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right]. \quad (11.17)$$

La sollecitazione agente sul cubetto unitario in ciascuna direzione principale può essere considerata come la somma di una tensione media, definita come

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (11.18)$$

e della tensione σ'_i ($i=1,2,3$), detta tensione *ridotta*, data dalla differenza tra la tensione effettivamente agente e la tensione media stessa, cioè $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_m$. È evidente che la σ_m provoca solo una variazione di volume dell'elemento mentre le σ'_i producono la distorsione di forma del cubetto.

L'energia di deformazione dovuta alla sola variazione di volume si ottiene sostituendo al posto delle tre tensioni principali la componente media (18) nella (17):

$$U_v = \frac{1}{2E} \left[3\sigma_m^2 - 6\nu\sigma_m^2 \right] = \frac{(1-2\nu)}{2E} 3\sigma_m^2 = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (11.19)$$

ovvero:

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right] \quad (11.20)$$

L'energia di distorsione si può ottenere eseguendo la differenza tra U e U_v

$$U_d = U - U_v = \frac{1+\nu}{3E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right]; \quad (11.21)$$

si noti che l'energia di distorsione è zero se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Lavoro di distorsione nel caso di trazione semplice

Nel caso della prova di trazione, allo snervamento si ha $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, da cui l'energia di distorsione risulta:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2 \quad (11.22)$$

Determinazione del criterio

Eguagliando le eq.(21) e (22) si ottiene

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_s^2 \quad (11.23)$$

dalla quale si deriva la condizione limite allo snervamento:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} = \sigma_s \quad (11.24)$$

Tensioni equivalenti

La relazione (24) permette di definire la tensione equivalente (detta di Von Mises) per lo stato di tensione triassiale da confrontare con quella ammissibile:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (11.25)$$

Due stati tensionali definiti da diversi valori delle componenti del tensore degli sforzi, ma aventi lo stesso valore della σ_e data dalla (25) sono equivalenti ai fini dell'energia di deformazione (e quindi dello snervamento).

La (25) può essere riscritta per un sistema di assi non principale e fornisce:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (11.26)$$

Per stato tensionale piano con $\sigma_3=0$ la (25) si trasforma in

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (11.27)$$

e la (26) a sua volta diventa

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (11.28)$$

Le espressioni (25-28) possono essere utilizzate mediante le relazioni (4) e (5) per fini di verifica o progetto tenendo conto che la σ_s che può essere inserita è *solo quella di snervamento*. Sostituendo nelle (25-28) σ_s al posto di σ_e si ottengono le situazioni limite per i vari casi di stato tensionale. Nel caso di stato di tensione puramente tangenziale con $\sigma_1=\tau$ e $\sigma_2=-\sigma_1$, utilizzando la (27), allo snervamento si ottiene:

$$\tau_s = 0.577\sigma_s \quad (11.29)$$

La (29) può essere ottenuta utilizzando anche la (28) che in questo caso si riduce a $\sigma_e = \sqrt{3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3}\tau_s = \sigma_s$. Il confronto con l'analoga relazione ottenuta con la teoria della massima tensione tangenziale mostra che il criterio dell'energia di distorsione indica una resistenza allo snervamento a taglio apprezzabilmente più alta (del 15.4%).

Nello spazio σ_1 - σ_2 - σ_3 l'eq. (24) rappresenta un cilindro avente per asse la trisettrice degli assi di riferimento. Nel piano σ_1 - σ_2 (con $\sigma_3=0$) la sua traccia è un'ellisse di eq.(27) (vedi fig.5).

Questo criterio:

- vale per materiali con comportamento simmetrico, tipicamente duttili,
- considera tutte le tensioni principali (o tutte le tensioni),
- indica che la tensione tangenziale che provoca lo snervamento è $0.577\sigma_s$,
- fallisce nel caso di trazione tripla prevedendo la resistenza,
- non è utilizzabile per prevedere la rottura poiché basato su grandezze valide in campo elastico.

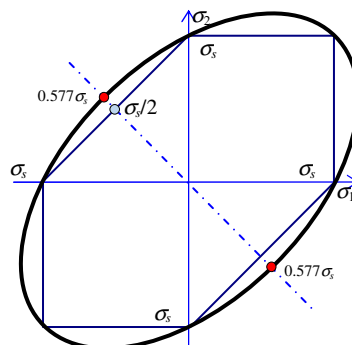


Fig.11.5 – Criteri di Von Mises e Tresca.

Criterio della tensione ottaedrica

Questo criterio afferma che lo snervamento nei materiali duttili avviene quando la *tensione ottaedrica* raggiunge il valore critico. Le tensioni equivalenti ottenute con questo criterio coincidono con quelle ottenute col criterio di Von Mises (25-28). Come visto nel primo capitolo, i 4 piani *ottaedrici* (fig.6) sono caratterizzati dal fatto che i versori delle normali **n** formano con gli assi principali 3 angoli uguali. In particolare nominati i 3 angoli α , β e γ si ha:

$$\alpha = \beta = \gamma = 54.74^\circ \quad \cos 54.74^\circ = 1/\sqrt{3} = 0.577 \quad (11.30,31)$$

Utilizzando le equazioni che consentono di ottenere le tensioni per assegnata giacitura si ottengono le tensioni normali e tangenziali agenti sui piani ottaedrici (1.68) e (1.69), qui riscritte:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \tau_h = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (11.32,33)$$

Nel caso di stato di compressione idrostatica, per il quale non si verifica snervamento nel materiale, le tensioni principali coincidono con la σ_h mentre la τ_h risulta nulla. Questo fa ritenere che quest'ultima sia la causa dello snervamento. In particolare in un provino soggetto ad uno stato di tensione monoassiale le tensioni ottaedriche allo snervamento (fig.7) diventano:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\sigma_s}{3} \quad \tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s = 0.4714 \sigma_s \quad (11.34,35)$$

Nel caso multiassiale lo snervamento si verifica quando la tensione ottaedrica (33) raggiunge il valore critico:

$$\tau_h = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s \quad (11.36)$$

e la tensione equivalente, che coincide con quella di Von Mises (25), può essere espressa come

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (11.37)$$

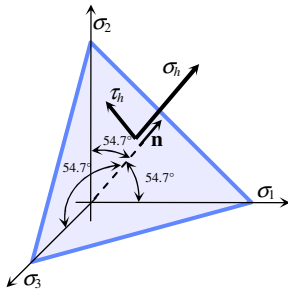


Fig.11.6 - Uno dei 4 piani ottaedrici.

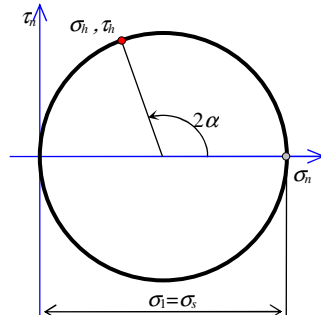


Fig.11.7 - Tensioni ottaedriche allo snervamento.

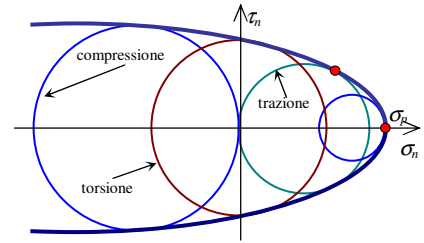


Fig.11.8 - La curva limite di Mohr e cerchi limite per trazione tripla, trazione, torsione e compressione.

Criterio di Mohr

Questo criterio ipotizza che la crisi del materiale si verifichi nel piano in cui si realizza una combinazione critica di tensioni tangenziali e normali. Tali combinazioni vengono identificate sul piano di Mohr $\sigma_n - \tau_n$ imponendo per ogni valore di σ_n una τ_n che provochi la rottura e tracciando il corrispondente cerchio Mohr; la *curva limite di Mohr*, specifica per il materiale analizzato, è l'involuppo dei cerchi ottenuti (fig.8). Ovviamente gli stati tensionali i cui cerchi di Mohr maggiori sono tangenti alla curva limite sono stati tensionali limite.

I punti di tangenza dei cerchi limite con la curva di Mohr rappresentano lo stato tensionale agente nel piano in cui avviene la rottura. Sfruttando le proprietà dei cerchi di Mohr è possibile determinare la direzione di tali piani (fig.9).

Per tracciare le curve di Mohr sarebbe necessario effettuare almeno le prove di trazione, compressione, torsione, più una prova di trazione triassiale con $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_p$. Nonostante la presenza di qualche punto relativo a stati triassiali, le curve di Mohr trascurano l'effetto della tensione intermedia.

Le curve di Mohr hanno le seguenti caratteristiche:

- sono simmetriche rispetto all'asse σ , perché la rottura non dipende dal segno delle τ
- dalla parte delle σ negative tendono a diventare parallele all'asse σ , perché per compressione idrostatica non si ha rottura,
- dalla parte delle σ positive le curve intersecano l'asse σ_n nel punto σ_p , che, per i materiali fragili, tende a coincidere con la tensione di rottura a trazione σ_{rt} ,
- in questo punto la tangente alla curva deve essere verticale perché il cedimento a trazione avviene per distacco.

Se la curva di Mohr per il materiale considerato è disponibile, questo criterio è, probabilmente, il più efficace. La verifica deve essere effettuata confrontando il maggiore dei 3 cerchi di Mohr rappresentativi dello stato di tensione agente con il cerchio limite relativo allo stesso stato (fig.9). Quest'ultimo si ottiene amplificando di un fattore n crescente tutte le tensioni principali $\sigma_{1i} = n\sigma_1, \sigma_{2i} = n\sigma_2, \sigma_{3i} = n\sigma_3$ fino a quando il cerchio ottenuto non risulta tangente alla curva limite: il fattore n per cui si ottiene il cerchio limite è il coefficiente di sicurezza. Il punto di tangenza di coordinate σ_i, τ_i (fig.9) determina la giacitura del piano in cui si verifica la crisi del materiale; la normale al piano forma l'angolo $\phi/2$ con la direzione 1. Poiché per $n=0$ il cerchio di Mohr degenera in un punto coincidente con l'origine, tracciando la congiungente tra l'origine e il punto limite, l'intersezione con il cerchio dello stato tensionale agente permette di determinare graficamente il punto di coordinate $\sigma = \sigma_i/n, \tau = \tau_i/n$ come in fig.9.

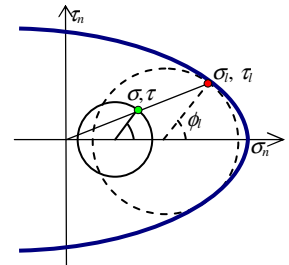


Fig.11.9 - Verifica di resistenza utilizzando la curva limite di Mohr.

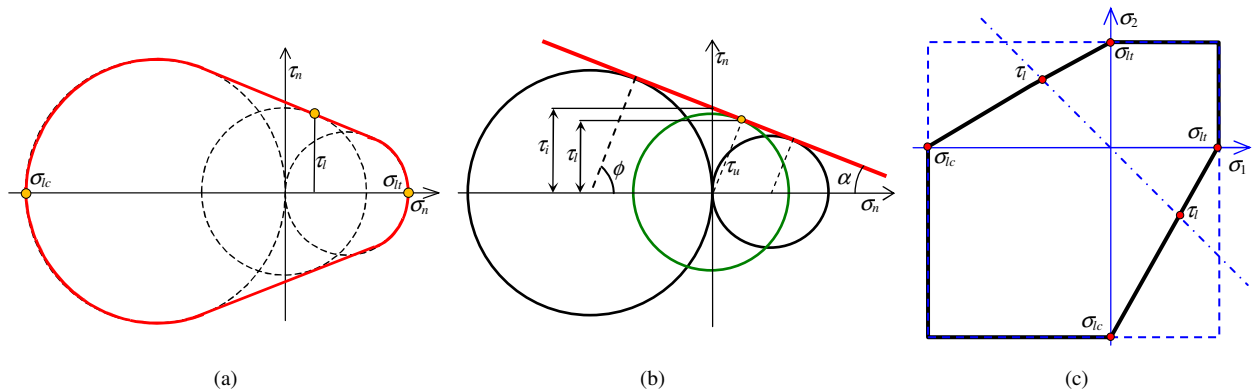


Fig.11.10 - Teoria di Coulomb Mohr: a) curva limite, b) la retta tangente ai cerchi limite di trazione e compressione e relativi parametri, c) la spezzata limite nel piano $\sigma_1 - \sigma_2$ a confronto con quello della massima tensione normale.

Criterio di Coulomb-Mohr

La curva limite di Mohr può essere approssimata utilizzando solo i cerchi di Mohr limite a trazione e compressione e le rette tangenti ai suddetti cerchi (simmetriche rispetto all'asse σ_n) come mostrato in fig.10. Tali rette sul piano di Mohr hanno equazione

$$|\tau| + \mu \sigma = \tau_i \tag{11.38}$$

nella quale τ_i è l'ordinata di intersezione con l'asse τ_n e $\mu = \tan \alpha$ è il coefficiente angolare. La retta di Coulomb è tangente ai cerchi limite in punti la cui congiungente con il centro del cerchio (il raggio) forma un angolo pari a $\phi = \pi/2 - \alpha$ e ha pendenza pari ad $\alpha = \pi/2 - \phi$. Sussiste la seguente relazione:

$$\mu = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \tan 1/\phi \tag{11.39}$$

Se non si ordinano in senso decrescente le tensioni principali, in base a considerazioni geometriche sul piano di Mohr (vedi appendice A2), nello spazio $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$, il criterio può essere descritto con le seguenti equazioni

(equivalenti a 6 per la presenza del valore assoluto):

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + m(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\tau_u \quad |\sigma_2 - \sigma_3| + m(\sigma_2 + \sigma_3) = 2\tau_u \quad |\sigma_3 - \sigma_1| + m(\sigma_3 + \sigma_1) = 2\tau_u \quad (11.40a-c)$$

nelle quali le costanti τ_u (che è il raggio del cerchio limite del caso di stato di tensione puramente tangenziale, vedi fig.10) ed m possono essere espresse in funzione dei diametri dei cerchi limite a trazione e compressione, coincidenti in modulo con σ_{lt} e σ_{lc} , mediante le seguenti relazioni

$$\tau_u = \frac{\sigma_{lc} \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \quad m = \frac{\sigma_{lc} + \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \quad (11.41,42)$$

Le 6 equazioni (40) rappresentano 6 piani che nello spazio formano un vertice nel punto $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_u/m$.

Nel caso piano, considerando $\sigma_3 = 0$ e non ordinando σ_1 e σ_2 , le (40) assumono la seguente forma:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + m(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\tau_u \quad |\sigma_2| + m\sigma_2 = 2\tau_u \quad |\sigma_1| + m\sigma_1 = 2\tau_u \quad (11.43a-c)$$

Queste espressioni possono essere utilizzate anche nel caso triassiale se σ_1 e σ_2 sono la massima e la minima tensione agente o viceversa. Per $m=0$ ($\sigma_{lt} = -\sigma_{lc}$) il criterio di Coulomb-Mohr è equivalente a quello di Tresca.

Nel primo e terzo quadrante, dove σ_1 e σ_2 hanno lo stesso segno, la teoria di Mohr e quella di Navier coincidono. La condizione limite può essere espressa semplicemente come:

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} = \sigma_{lt} \quad \min\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} = \sigma_{lc} \quad (11.44a,b)$$

Nel secondo e quarto quadrante dove le tensioni hanno segno opposto, le due teorie differiscono. In particolare le combinazioni σ_1 e σ_2 limite sono espresse dalla seguente relazione lineare (in forma *segmentaria*):

$$\frac{\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}}{\sigma_{lt}} + \frac{\min\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}}{\sigma_{lc}} = 1 \quad (11.45)$$

Ordinando le tensioni principali in modo che $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, per cui $\max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} = |\sigma_1|$ e $\min\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} = |\sigma_3|$, introducendo il rapporto r tra le tensioni limite a trazione e compressione (7), cioè ponendo nelle (44-45) $\sigma_{lc} = \sigma_{lt}/r$ e ponendo infine $\sigma_{lt} = \sigma_e$, è possibile ottenere la tensione equivalente da confrontare con quella ammissibile a trazione $\sigma_{am} = \sigma_{lt}/n$:

$$\sigma_e = \max\{\sigma_1, r\sigma_3, \sigma_1 + r\sigma_3\} \quad (11.46)$$

La linea avente pendenza $\sigma_1/\sigma_3 = -1$, che rappresenta lo stato di tensione puramente tangenziale, interseca il contorno del rombo nel punto di coordinate $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_l < \sigma_{lt}$. L'analoga intersezione con la linea rappresentativa della teoria di Navier fornisce, invece, $\tau_l = \sigma_{lt}$, che è una caratteristica di molti materiali fragili. In questi materiali, nei casi in cui le tensioni sono discordi e la tensione di trazione è la massima in valore assoluto o è comunque vicina a quella di compressione (nel caso di stato di tensione puramente tangenziale sono uguali), la rottura avviene in piani normali ad essa. Per sollecitazioni di questo tipo il criterio di Coulomb-Mohr risulta eccessivamente conservativo e viene modificato opportunamente.

Criterio di Coulomb-Mohr modificato

Il criterio di Coulomb-Mohr modificato è rappresentato in fig.11 a confronto con quello originale. Il valore σ_l rappresentato in figura è il valore di compressione per il quale la rottura a trazione prevale ancora su quella per scorrimento e dovrebbe essere determinato sperimentalmente; tuttavia, operando in modo conservativo si assume $\sigma_l = \sigma_{lt}$ e la spezzata limite utilizzata è quella rappresentata con linea spessa in fig.11. In questo caso, nel primo e terzo quadrante valgono ancora le (44), nel secondo e quarto quadrante, se la tensione positiva è maggiore in modulo di quella negativa, la condizione limite è ancora espressa dalle (44), viceversa nel caso di $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ e $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ oppure $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$ e $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, ricordando che $\sigma_{lt} > 0$ e $\sigma_{lc} < 0$, è espressa come:

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} \frac{\sigma_{lc} + \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} \sigma_{lt}} + \min\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} \frac{1}{\sigma_{lc}} = 1 \quad (11.47)$$

Operando come nel caso precedente, ricordando la definizione (7) e tenendo conto delle (44) e della (47), l'espressione della tensione equivalente è data da:

$$\sigma_e = \max\{\sigma_1, r\sigma_3, (1+r)\sigma_1 + r\sigma_3\} \quad (11.49)$$

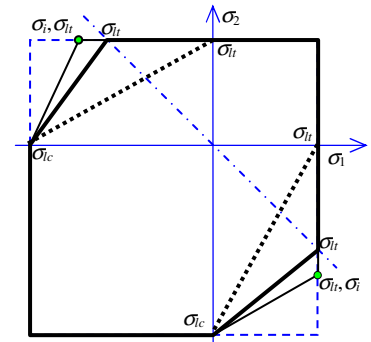


Fig.11.11 – Il criterio di Coulomb Mohr modificato.

Confronto riassuntivo tra i criteri di resistenza

Un confronto tra i criteri di Navier, Tresca, Von Mises, della tensione ottaedrica e di Mohr modificato, può essere effettuato osservando la tabella 1. In tab.1 sono riportate, per ciascun criterio, la grandezza meccanica che porta alla crisi il materiale, derivante dal meccanismo di rottura previsto dal criterio, e la forma assunta dalla grandezza stessa nel caso monoassiale, dalla quale è possibile quantificare il valore critico.

Criterio	Grandezza critica Caso generale triassiale o biassiale	Grandezza critica Caso monoassiale
Navier	$\sigma_{1,3} = \max[\sigma_1, r\sigma_3]$	$\sigma_{1,3} = \sigma_1$
Tresca	$\tau_{\max} = \max \left\{ \left \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right , \left \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right , \left \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right \right\}$	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$
Von Mises	$U_d = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$	$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2$
τ Ottaedrica	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}$	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1$
Mohr modificato	$\sigma_{1,3} = \max \{ \sigma_1, r\sigma_3, (1+r)\sigma_1 + r\sigma_3 \}$	$\sigma_{1,3} = \sigma_1$

Tab.11.1 – Confronto tra i criteri di resistenza: grandezze critiche nei casi di stato di tensione pluriassiale e monoassiale.

I 5 criteri si basano rispettivamente sull'ipotesi che nel materiale si verifichi il cedimento quando il valore critico viene raggiunto da:

1. la massima tensione di trazione o la minima tensione di compressione,
2. la massima tensione tangenziale,
3. la distorsione di forma provocata dalle tensioni,
4. la tensione tangenziale agente sui piani ottaedrici,
5. la massima tensione di trazione o la minima tensione di compressione o una combinazione delle 2 nel caso in cui la minima tensione di compressione superi in modulo la massima di trazione.

Le grandezze critiche per i 5 criteri sono rispettivamente:

1. la tensione che giunge per prima al valore di crisi tra la tensione principale massima di trazione e la tensione principale minima di compressione,
2. la massima tra le tensioni tangenziali,
3. l'energia di deformazione,
4. la tensione tangenziale agente sui piani ottaedrici,
5. la tensione che giunge per prima al valore di crisi tra la tensione principale massima di trazione, la tensione principale minima di compressione e una combinazione delle 2 tensioni, nel caso in cui la minima tensione di compressione superi in modulo la massima di trazione.

I valori critici delle 5 grandezze possono essere ottenuti introducendo il valore di σ_s o σ_r del materiale al posto di σ_1 nelle espressioni delle grandezze critiche nel caso monoassiale.

In linea teorica ciascun criterio potrebbe essere applicato confrontando detti valori critici con il rispettivo valore calcolato nel caso generico triassiale o biassiale; in generale è più comodo confrontare la semplice tensione critica a trazione σ_s o σ_r con la tensione equivalente derivata dal criterio.

Con riferimento alla tab.1, l'espressione della tensione equivalente può essere ottenuta con la procedura già utilizzata nei precedenti paragrafi:

- si pone $\sigma_1 = \sigma_e$ nelle espressioni delle grandezze critiche nel caso monoassiale,
- si uguaglia l'espressione ottenuta alla grandezza relativa al caso generico,
- si semplificano i fattori comuni.

Le tensioni equivalenti per il caso triassiale relative ai vari criteri sono riassunte in tabella 2.

È bene notare che quando il materiale raggiunge lo snervamento durante la prova di trazione, la tensione tangenziale massima è $\tau_{\max} = \sigma_s/2$: questo potrebbe indurre a ritenere che ogni qualvolta la tensione tangenziale raggiunge detto valore si abbia lo snervamento. Questo ragionamento è errato ed equivale ad affermare che il meccanismo di snervamento dei materiali coincide *sempre* con quello su cui si basa il criterio di Tresca.

Se si accetta il criterio della tensione ottaedrica, viceversa, si ipotizza che la crisi del materiale avvenga a causa di quest'ultima, il cui valore critico è $\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s = 0.4714 \sigma_s$. Ovviamente quando il valore della tensione ottaedrica raggiunge questo valore durante la prova di trazione, la massima tensione tangenziale raggiunge il valore $0.5 \sigma_s$, ma

si può osservare che durante una prova di torsione con $\tau_{max}=\sigma_1=-\sigma_2$, quando τ_h raggiunge il valore critico, la *tensione tangenziale massima* diventa $\tau_{max}=0.577\sigma_s$. Anche nel caso in cui si assuma come meccanismo di snervamento il raggiungimento del valore critico dell'energia di distorsione si ottiene lo stesso risultato.

I criteri di Navier e Mohr modificato portano alla conclusione che il valore numerico della tensione puramente tangenziale che porta alla rottura il materiale è pari al valore σ_r . Questa ipotesi è realistica per i materiali fragili per i quali la causa di rottura rimane la tensione normale. Supponendo valido questo meccanismo di cedimento, eseguendo una prova di torsione, alla rottura si ha $\sigma_1=\sigma_r$ ed essendo $\sigma_1=-\sigma_2=\tau_{max}$, ne deriva $\tau_{max}=\sigma_r$.

I valori di tensione puramente tangenziale che portano alla rottura secondo i vari criteri sono riportati in tab.2 e mostrati in fig.12.

Alla fine del capitolo sono riportate le formule applicative dei criteri di Von Mises, Tresca e Mohr modificato per i principali casi di interesse pratico.

Criterio	Tensione Equivalente	Val. critico Stato tang.
Navier	$\sigma_e = \max \{ \sigma_1, r\sigma_3 \}$	$\tau_s = \sigma_s$
Tresca	$\sigma_e = \max \{ \sigma_1 - \sigma_2 , \sigma_1 - \sigma_3 , \sigma_2 - \sigma_3 \}$	$\tau_s = 0.5\sigma_s$
Von Mises τ Ottaedrica	$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ $\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$	$\tau_s = 0.577\sigma_s$
Mohr modificato	$\sigma_e = \max \{ \sigma_1, r\sigma_3, (1+r)\sigma_1 + r\sigma_3 \}$	$\tau_s = \sigma_s$

Tab.11.2 – Confronto tra i criteri di resistenza: tensioni equivalenti e valore della tensione tangenziale critica nel caso di stato di tensione puramente tangenziale (torsione o taglio puro).

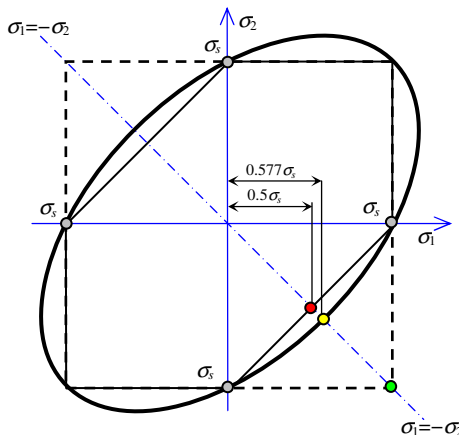


Fig.11.12 – Confronto tra i criteri di resistenza sul piano $\sigma_1-\sigma_2$ nel caso di materiali con proprietà meccaniche simmetriche.

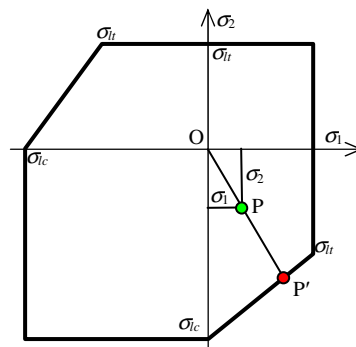


Fig.11.13 – Esempio di verifica effettuata in modo grafico utilizzando il criterio di Mohr modificato.

Verifica di resistenza sui diagrammi

Nel caso di stato piano di tensione, o nel caso in cui è possibile trascurare la tensione principale intermedia, la verifica di resistenza può essere effettuata in *modo grafico* utilizzando i diagrammi dello stato di tensione limite di ciascun criterio (fig.1, 3, 5, 10c, 11). Generalmente si ipotizza che *entrambe* le tensioni agenti nel punto dipendano allo stesso modo dai carichi esterni, risultando entrambe direttamente proporzionali ad essi. In tal caso, con riferimento alla fig.13, relativa al caso del criterio di Mohr modificato, la procedura per la determinazione del coefficiente di sicurezza può essere riassunta nei seguenti passi:

- 1) rappresentazione del punto P relativo dello stato tensionale di progetto, le cui coordinate sono le tensioni provocate dai carichi di progetto;
- 2) tracciamento della retta passante per l'origine O degli assi e il punto P stesso, definita *retta di carico*;
- 3) determinazione del punto limite per il materiale P', dall'intersezione tra la retta di carico e il diagramma dei punti limite del materiale;
- 4) valutazione del coefficiente di sicurezza come rapporto tra le lunghezze dei segmenti OP' e OP.

Il segmento OP' è definito *retta di carico* in quanto rappresenta tutti i possibili stati tensionali del punto al variare dei carichi esterni a partire dal valore nullo (punto O), passando per il valore di progetto (punto P) fino al valore che provoca il cedimento (punto P').

FORMULE APPLICATIVE DEI CRITERI DI RESISTENZA	
VON MISES – TENSIONE OTTAEDRICA	
Assi Principali Triassiale	Assi Principali Biassiale
$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}$	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$
$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$	$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
Assi Cartesiani Triassiale	Assi Cartesiani Biassiale
$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$
$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$	$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2}$
Tangenziale puro	Flessione (σ_x) e torsione (τ_{xy})
$\sigma_e = \sqrt{3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3\sigma_1^2} = \sqrt{3\sigma_2^2} = 1.732 \tau_{xy} = 1.732 \sigma_1 = 1.732 \sigma_2$	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$
TRESCA	
Assi Principali Triassiale	Assi Principali Biassiale
$\sigma_e = \max_{i,j} \{ \sigma_i - \sigma_j \} = \max \{ \sigma_1 - \sigma_2 , \sigma_1 - \sigma_3 , \sigma_2 - \sigma_3 \}$	$\sigma_e = \max \{ \sigma_1 - \sigma_2 , \sigma_1 , \sigma_2 \}$
Assi Cartesiani Biassiale	
$\sigma_e = \max \left\{ \left 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \left \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \left \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right \right\}$	
Tangenziale puro	Flessione (σ_x) e torsione (τ_{xy})
$\sigma_e = 2\tau_{xy}$	$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$
MOHR MODIFICATO	
$\sigma_e = \max \{ \sigma_1, r\sigma_3, (1+r)\sigma_1 + r\sigma_3 \}$	$r = \sigma_{rt} / \sigma_{rc} \quad (r < 0)$
Espressione valida per $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ da confrontare con $\sigma_{am} = \sigma_r / n$ <ul style="list-style-type: none"> • $\sigma_r > 0$: tensione di rottura a trazione • $\sigma_{rc} < 0$: tensione di rottura a compressione. 	

APPENDICE

A1. Esempi di stati di tensione monoassiali e multiassiali

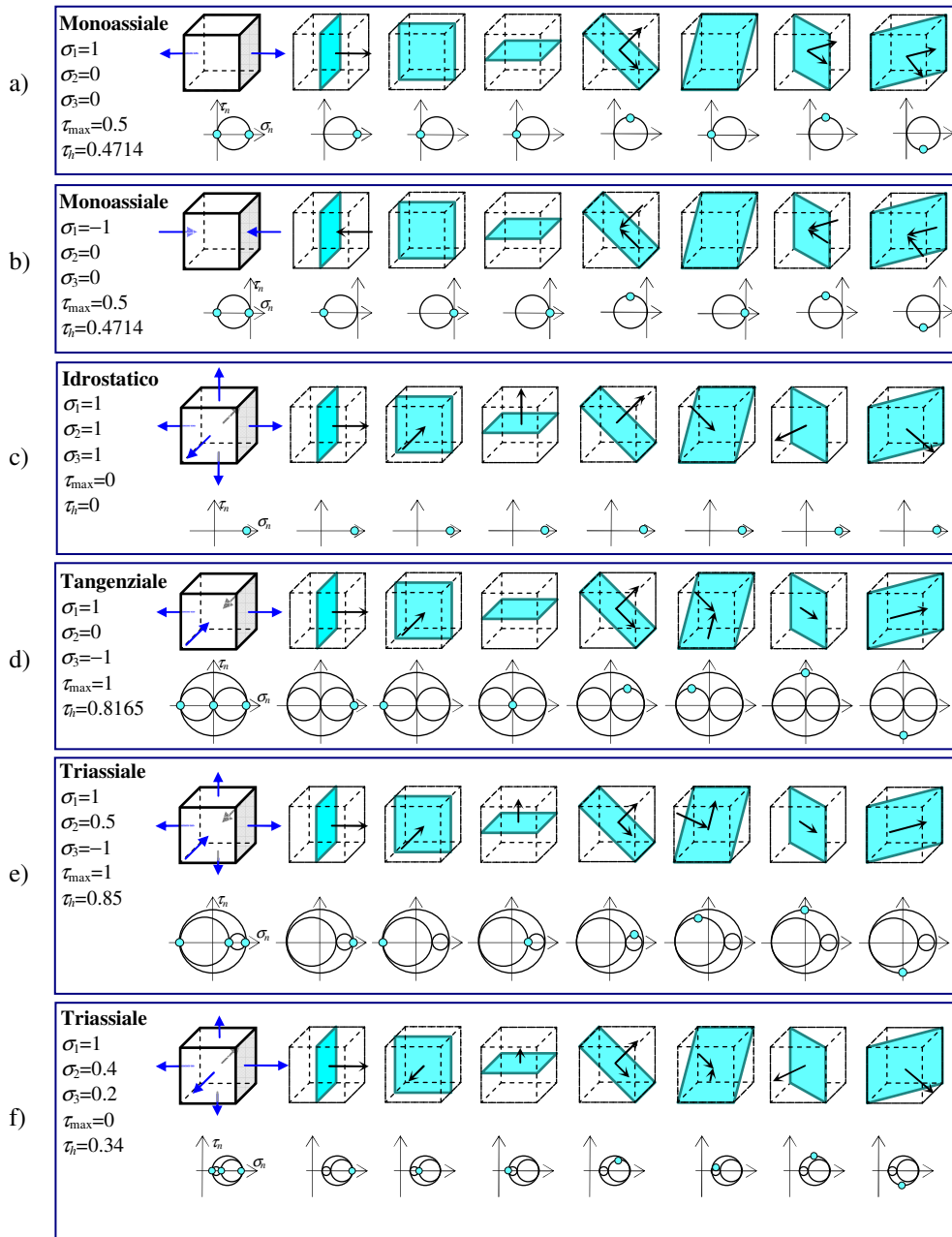


Fig.A1.1 – Esempi di stati tensionali monoassiali e multiassiali: vettori di tensione agenti sui piani di riferimento, vettori di tensione agenti su diversi piani, cerchi di Mohr e punti sui cerchi rappresentativi delle sollecitazioni.

A2. Determinazione delle equazioni del criterio di Coulomb-Mohr nel piano $\sigma_1-\sigma_2$

La retta limite del criterio di Coulomb-Mohr dipende esclusivamente dai valori delle tensioni limite a trazione e compressione del materiale, σ_{lt} e σ_{lc} essendo tangente ai corrispondenti cerchi di Mohr (fig.10b). Per ottenerne l'espressione nel piano $\sigma_1-\sigma_2$ si deve mettere in relazione ciascun punto della retta limite con la coppia di valori σ_1, σ_2 del cerchio di Mohr tangente alla retta limite nel punto stesso (fig.1). A loro volta, i punti della retta limite devono essere messi in relazione con σ_{lt} e σ_{lc} . È opportuno ricordare che, se una retta è tangente a una circonferenza, il raggio passante per il punto di tangenza è perpendicolare alla retta stessa (fig.1).

Osservando la fig.1, nel quale è rappresentato il cerchio di Mohr di un generico stato tensionale limite, considerando il triangolo rettangolo di cui uno dei cateti coincide col raggio del cerchio di Mohr, è possibile scrivere la seguente relazione tra il raggio e i parametri τ_u e α della retta limite:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \left(\frac{\tau_u}{\sin \alpha} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \sin \alpha \tag{A2.1}$$

dalla quale si ricava:

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sin \alpha (\sigma_1 + \sigma_2) = 2\tau_u \tag{A2.2}$$

Confrontando la relazione (40a) con la (2) si osserva che $m \equiv \sin \alpha$.

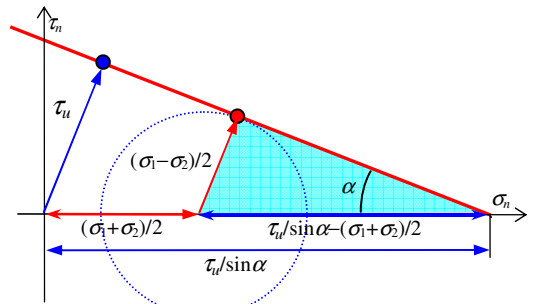


Fig.A2.1 - Determinazione della relazione tra i valori σ_1 e σ_2 e i parametri della curva limite sul piano $\sigma_n-\tau_n$.

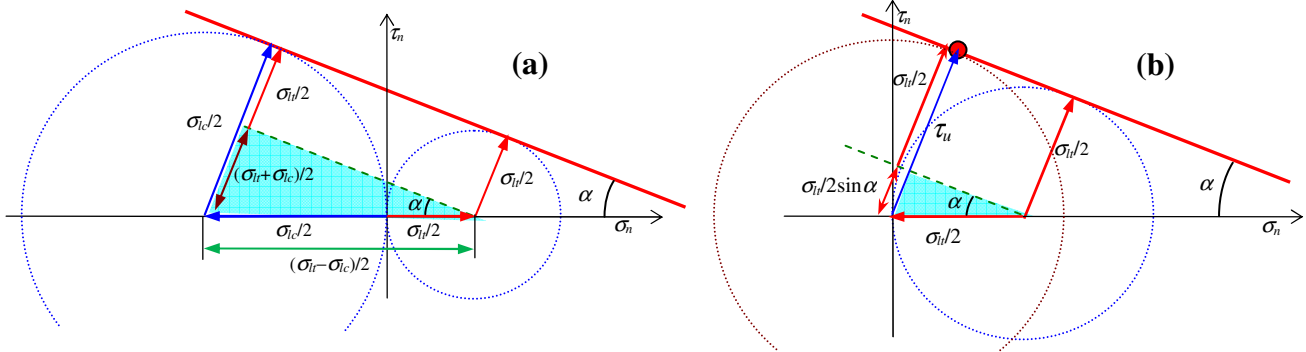


Fig.A2.2 - Determinazione della relazione tra i parametri di resistenza del materiale σ_{lt} e σ_{lc} e i parametri della curva limite $\sin \alpha$ (a) e τ_u (b).

Osservando la fig.2a, nella quale sono riportati i cerchi di Mohr relativi alle prove di trazione e compressione, considerando il triangolo rettangolo la cui ipotenusa è la congiungente dei centri dei cerchi di Mohr, ricordando che $\sigma_{lc} < 0$, è possibile ricavare la seguente relazione tra la funzione $\sin \alpha$ e i valori σ_{lt} e σ_{lc} :

$$\sin \alpha = m = -\frac{(\sigma_{lt} + \sigma_{lc})/2}{(\sigma_{lt} - \sigma_{lc})/2} = -\frac{\sigma_{lt} + \sigma_{lc}}{\sigma_{lt} - \sigma_{lc}} = \frac{\sigma_{lc} + \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \tag{A2.3}$$

La relazione tra τ_u e i valori σ_{lt} e σ_{lc} può essere ottenuta osservando la fig.2b, nella quale sono riportati il cerchio di Mohr relativo alla prove di trazione e il cerchio di Mohr limite del caso di stato di tensione puramente tangenziale di raggio pari a τ_u ; in particolare, considerando il triangolo rettangolo di cui uno dei cateti coincide col raggio del cerchio di Mohr della prova di trazione, si può scrivere:

$$\tau_u = \sigma_{lt}/2 + (\sigma_{lt}/2) \sin \alpha = (1 + \sin \alpha) \sigma_{lt}/2 \tag{A2.4}$$

sostituendo nella (4) l'espressione di $\sin \alpha$ ricavata dalla (3) si ottiene:

$$\tau_u = \left(1 + \frac{\sigma_{lc} + \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \right) \frac{\sigma_{lt}}{2} = \frac{\sigma_{lc} - \sigma_{lt} + \sigma_{lc} + \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \frac{\sigma_{lt}}{2} = \frac{\sigma_{lc} \sigma_{lt}}{\sigma_{lc} - \sigma_{lt}} \tag{A2.5}$$