

### 35. DISCHI ROTANTI

I rotori di turbine a gas, gli organi rotanti per le trasmissioni di potenza ed altri elementi rotanti devono essere schematizzati come *dischi rotanti*. Le macchine rotanti sono sottoposte a velocità sempre maggiori per trasmissione di elevata potenza, per aumento della produttività, per la produzione di campi centrifughi.

Gli elementi rotanti sono soggetti a condizioni di carico dipendenti dalla rotazione (forze di inerzia: campo centrifugo, momenti giroscopici, accelerazione angolare) e indipendenti dalla rotazione (spinte assiali, torsione, forzamento). Alle condizioni di carico in molti casi vanno aggiunti altri fattori: elevate temperature di esercizio, necessità di riduzione della massa. Deve anche essere presa in considerazione la *pericolosità* degli elementi rotanti.

La teoria esposta riguarda i solidi geometricamente assialsimmetrici di forma cilindrica o con spessore  $h$  variabile lentamente rispetto al raggio e carichi agenti in direzione ortogonale all'asse di simmetria. La geometria si presta ad essere descritta in coordinate cilindriche  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ .

Le equazioni principali del problema elastico in coordinate cilindriche possono essere ottenute da quelle in coordinate cartesiane mediante una trasformazione di coordinate, oppure ricavate direttamente.

Un'ipotesi semplificativa è quella di considerare il problema come piano, con tensioni costanti rispetto allo spessore, anche se l'ipotesi è realmente verificata solo nel caso di elementi sottili (rapporto  $h/r_e$  basso) a spessore costante. Un'ulteriore semplificazione può essere ottenuta nel caso in cui il problema elastico sia assialsimmetrico. Questa ipotesi è applicabile se:

- la geometria dell'elemento è assialsimmetrica,
- il materiale è isotropo o ortotropo assialsimmetrico,
- il carico è assialsimmetrico.

In caso di assialsimmetria tutte le grandezze emisimmetriche risultano nulle ( $\tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$ ) e le altre risultano funzioni della sola variabile  $r$ .

In generale lo spessore è variabile con legge  $h(r)$ , quindi già dal punto di vista geometrico non si ha un problema piano; inoltre la presenza di piccole irregolarità, come fori, attacchi ecc, rende l'ipotesi di geometria assialsimmetrica meno realistica.

Per quanto riportato a proposito del problema elastico piano, nel caso di elementi di grande spessore l'ipotesi di stato di deformazione piano risulta più aderente alla realtà, viceversa, se lo spessore dell'elemento è limitata, risulta maggiormente plausibile l'ipotesi di stato di tensione piano. In assenza di forze di massa e sollecitazioni termiche, o se  $\epsilon_l$  è costante nelle varie sezioni, le ipotesi di tensioni e deformazioni piane portano a soluzioni coincidenti.

#### Determinazione diretta dell'equazione di equilibrio radiale e di compatibilità

L'equazione dell'equilibrio radiale nel caso assialsimmetrico può essere ottenuta direttamente considerando l'equilibrio di un elementino di volume delimitato da 2 facce cilindriche, la prima posta a una distanza generica dal centro del cilindro pari ad  $r$ , di altezza  $h$  e delimitata da 2 archi di circonferenza di lunghezza  $r d\theta$  e la seconda posta a una distanza dal centro del cilindro pari ad  $r+dr$ , di altezza  $h+(dh/dr)dr$  e delimitata da 2 archi di circonferenza di lunghezza  $(r+dr)d\theta$ . Considerando positiva la direzione radiale uscente, le forze agenti sull'elementino sono:

1. forze radiali dovute alle tensioni  $\sigma_r$ :

$$\begin{aligned} \text{per } r+dr: \quad dF_{1a} &= \left( \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) \left( h + \frac{dh}{dr} dr \right) (r+dr) d\theta = \\ &= \sigma_r h r d\theta + \sigma_r h dr d\theta + \frac{d\sigma_r}{dr} h r dr d\theta + \sigma_r \frac{dh}{dr} r dr d\theta \end{aligned} \quad (35.1)$$

$$\text{per } r: \quad dF_{1b} = -\sigma_r r h d\theta \quad (35.2)$$

sommando i termini (1) e (2) e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, la risultante è

$$dF_1 = \frac{d\sigma_r}{dr} h r dr d\theta + \sigma_r h dr d\theta + \sigma_r \frac{dh}{dr} r dr d\theta \quad (35.3)$$

2. forze circonferenziali dovute alle tensioni  $\sigma_\theta$ :

$$dF_2 = -2 \sigma_\theta h dr \sin d\theta/2 \quad (35.4)$$

essendo  $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$  si ha:

$$dF_2 = -\sigma_\theta h dr d\theta \quad (35.5)$$

3. forze di massa; in caso di elemento rotante con velocità angolare costante  $\omega$  [rad/sec], la forza di inerzia a unità di volume agente in direzione radiale centrifuga, dovuta all'accelerazione centripeta  $\omega^2 r$ , è data da:

$$F_m = \mu \omega^2 r \quad (35.6)$$

essendo  $\mu$  la densità del materiale; moltiplicando per il volume dell'elementino  $dV=hrdrd\theta$ , si ottiene la forza radiale agente sull'elementino

$$dF_3 = \mu \omega^2 r^2 h dr d\theta \quad (35.7)$$

Affinché la forza radiale agente sull'elementino (7) risulti espressa in Newton (N), le tensioni devono essere espresse in Newton al metro quadro ( $N/m^2$ ) e le lunghezze in metri; se le tensioni sono espresse in MPa ( $N/mm^2$ ) e le lunghezze sono espresse in millimetri, è opportuno esprimere  $\mu$  in  $kg/mm^3$  e dividere la (7) per  $10^3$ . Sommando le tre forze e dividendo per  $dA=rdrd\theta$  si ottiene:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} h + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} h + \sigma_r \frac{dh}{dr} + \mu \omega^2 r h = 0 \quad (35.8)$$

Questa equazione può essere riscritta moltiplicando tutti i termini per  $r$  e compattando i primi tre termini contenenti  $\sigma_r$  in una derivata:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_\theta h + \mu \omega^2 r^2 h = 0 \quad (35.9)$$

Per  $h$  costante la (8) si riduce a

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \mu \omega^2 r = 0 \quad (35.10)$$

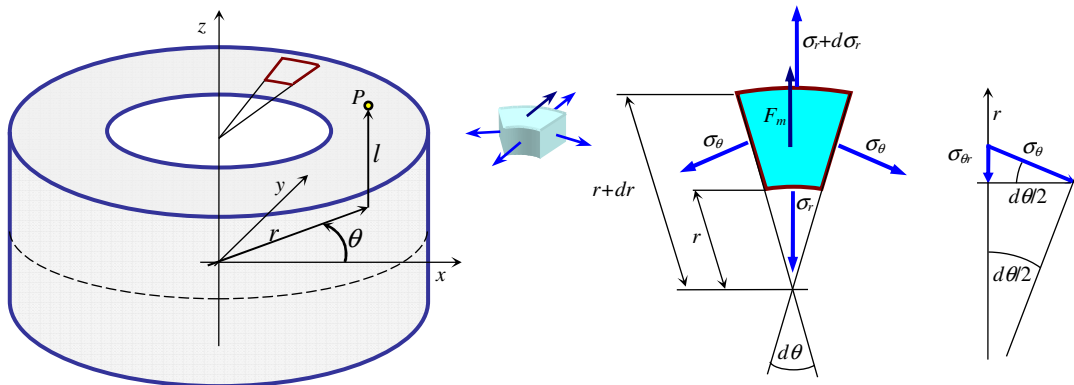


Fig.35.1 – Sistema di coordinate cilindriche  $\theta$ - $r$ - $l$  ed equilibrio dell'elementino di volume nel piano  $r$ - $\theta$ .

**Equazioni di compatibilità e costitutive**

Come visto nel caso dei cilindri in pressione, le equazioni di compatibilità per elementi assialsimmetrici sono:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \epsilon_r = r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} + \epsilon_\theta \quad (35.11-13)$$

Le equazioni costitutive di questo caso sono quelle relative allo stato di tensione piano:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad \epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad \epsilon_l = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r) \quad (35.14-16)$$

**Soluzione**

La soluzione del problema consiste nel determinare  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  ed  $u$  funzioni di  $r$ . Per la determinazione delle tensioni abbiamo a disposizione una delle equazioni di equilibrio radiale, (9) o (10), e l'equazione di congruenza (13) che può essere scritta in funzione delle tensioni utilizzando le (14-15) per stato piano di tensione:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1 + \nu) + r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (35.17)$$

Per la determinazione delle tensioni è opportuno utilizzare un'equazione differenziale in una sola incognita che può essere ottenuta sostituendo la tensione circonferenziale nella (17) mediante la (10) o la (9):

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \mu \omega^2 r^2 \quad \sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_r + \mu \omega^2 r^2 \quad (35.18,19)$$

**Disco a spessore costante**

Sostituendo la tensione circonferenziale nella (17) con il termine a destra della (18) si ottiene la seguente equazione differenziale nella sola variabile  $\sigma_r$  valida per elementi rotanti a spessore costante:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + (3+\nu) \mu \omega^2 = \frac{d^2 \sigma_r}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\sigma_r}{d\rho} + (3+\nu) \mu \omega^2 r_e^2 = 0 \quad (35.20)$$

La relazione a destra della (20) si ottiene moltiplicando tutti i termini a sinistra per  $r_e^2$  e ponendo  $\rho=r/r_e$ , essendo  $\beta \leq \rho \leq 1$  e  $\beta=r_i/r_e$ . Si deve osservare che, pur utilizzando la coordinata adimensionale  $\rho$ , nella (20) compare il raggio esterno del disco  $r_e$ , in quanto la sollecitazione dovuta alle forze di inerzia dipende dalla distanza effettiva dal centro di rotazione. Si può dimostrare che una soluzione particolare di questa equazione è la seguente

$$\sigma_r = C' \rho^2 \quad (35.21)$$

introducendo questa espressione nella (20)

$$\frac{d^2}{d\rho^2} C' \rho^2 + \frac{3}{\rho} \frac{d}{d\rho} C' \rho^2 + (3+\nu) \mu \omega^2 r_e^2 = 0 \quad (35.22)$$

risolvendo rispetto a  $C'$  e sostituendo l'espressione ottenuta nella (21) si ottiene

$$\sigma_r = C' \rho^2 = -\mu \omega^2 r_e^2 \frac{3+\nu}{8} \rho^2 = -\sigma_0 c \rho^2 = -C \rho^2 \quad (35.23)$$

nella quale

$$c = (3+\nu)/8 \quad \sigma_0 = \mu \omega^2 r_e^2 \quad (35.24,25)$$

$\sigma_0$  è la tensione circonferenziale agente su *anello* di raggio  $r_e$ , di sezione rispetto piccola al raggio, realizzato con il materiale del disco, posto in rotazione alla velocità  $\omega$  (vedi Appendice A.2). Il valore  $\sigma_0$  rappresenta la massima tensione nel punto più sollecitato per un disco di spessore costante posto a quella velocità di rotazione e può essere utilizzato come valore di riferimento. Introducendo la (23) nella (18) si ottiene inoltre  $\sigma_\theta = -(1+3\nu)\sigma_0\rho^2/8 = -D\rho^2$ .

La soluzione completa della (20), ricordando la (34.30), è data da

$$\sigma_r = A - \frac{B}{\rho^2} - C \rho^2 = \left( a - \frac{b}{\rho^2} - c \rho^2 \right) \sigma_0 \quad (35.26)$$

L'espressione di  $\sigma_\theta$ , ricordando la (34.31), diventa:

$$\sigma_\theta = A + \frac{B}{\rho^2} - D \rho^2 = \left( a + \frac{b}{\rho^2} - d \rho^2 \right) \sigma_0 \quad (35.27)$$

Nel caso di disco solo rotante, le condizioni al contorno da imporre nella (26) per ricavare le costanti  $A$  e  $B$  sono  $\sigma_r=0$  per  $r=r_e$  ( $\rho=1$ ) e  $\sigma_r=0$  per  $r=r_i$  ( $\rho=\beta=r_i/r_e$ ). In questo caso le costanti presenti nelle (26) e (27) diventano:

$$a = c(1 + \beta^2) \quad b = c \beta^2 \quad c = \frac{3+\nu}{8} \quad d = c \frac{1+3\nu}{3+\nu} \quad (35.28a-d)$$

essendo  $A=a\sigma_0$ ,  $B=b\sigma_0$ ,  $C=c\sigma_0$ ,  $D=d\sigma_0$ . La  $\sigma_r$  e la  $\sigma_\theta$  possono essere scritte anche come

$$\sigma_r = \left( 1 + \beta^2 - \frac{\beta^2}{\rho^2} - \rho^2 \right) c \sigma_0 \quad \sigma_\theta = \left( 1 + \beta^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \rho^2 \right) c \sigma_0 \quad (35.29,30)$$

La massima tensione circonferenziale si ha al raggio interno, mentre il massimo valore della radiale si verifica per  $\rho=\beta^{0.5}$ . In fig.2 sono mostrati gli andamenti delle tensioni radiali e circonferenziali ottenuti con le (29-30).

Come detto, per evitare problemi con le dimensioni delle costanti è possibile esprimere  $\mu$  in  $\text{kg/m}^3$ ,  $r$  in metri e le eventuali tensioni al contorno in  $\text{N/m}^2$ , ottenendo le tensioni in  $\text{N/m}^2$ ; le tensioni in MPa possono essere ottenute moltiplicando i risultati per  $10^{-6}$ . Per utilizzare ed ottenere le tensioni in MPa è possibile utilizzare come unità di misura delle lunghezze il mm (con  $\mu$  in  $\text{kg/mm}^3$ ) e dividere il termine  $\sigma_0$  ottenuto con la (25) per il valore  $10^3$ .

La funzione dello spostamento radiale può essere ottenuta esplicitando la (12) rispetto ad  $u$ , cioè  $u=r\varepsilon_\theta$ , esprimendo  $\varepsilon_\theta$  in funzione delle tensioni tramite l'equazione costitutiva (14), ottenendo  $u=r(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E$ , e sostituendo le tensioni con le (29) e (30):

$$u = \left[ (1-\nu)(1 + \beta^2) + (1+\nu) \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{1-\nu^2}{3+\nu} \rho^2 \right] r_e c \sigma_0 \quad (35.31)$$

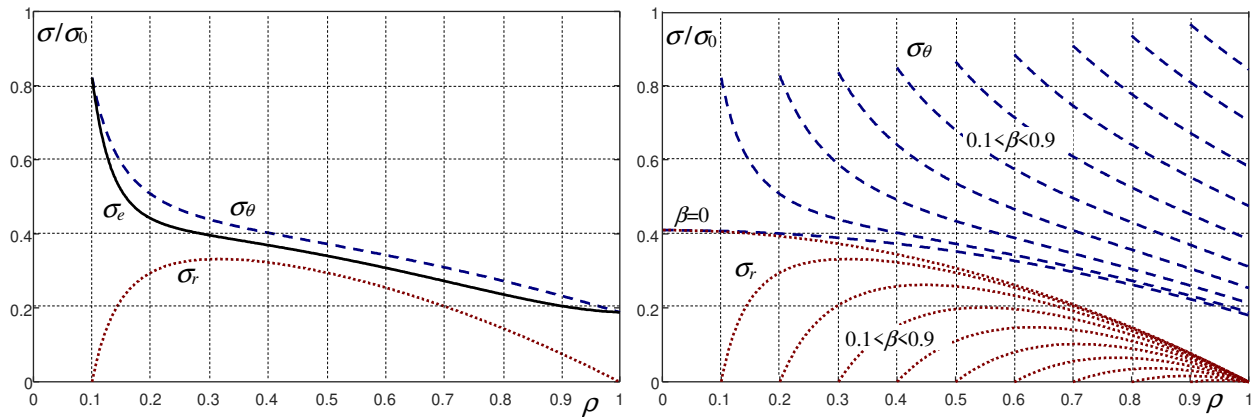


Fig.35.2 – A sinistra, esempio di andamento delle tensioni normalizzate rispetto a  $\sigma_0$  per disco forato con  $\beta=0.1$  al variare di  $\rho$  (le tensioni equivalenti sono valutate con il criterio di Von Mises). A destra, andamento delle tensioni al variare di  $\rho$  per dischi con  $\beta$  che assume valori da 0 (disco non forato) a 0.9 con passi di 0.1.

### Non forato rotante

Nel caso di disco non forato è sufficiente porre  $\beta=0$  nelle (29-31) ottenendo:

$$\sigma_r = (1 - \rho^2) c \sigma_0 \quad \sigma_\theta = \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \rho^2\right) c \sigma_0 \quad u = \left(1 - \nu - \frac{1-\nu^2}{3+\nu} \rho^2\right) c \sigma_0 r_e \quad (35.32-34)$$

### Disco a spessore variabile

Anche in questo caso si utilizza una sola equazione differenziale funzione di  $\sigma_r$ , ottenuta sostituendo nell'equazione di compatibilità (17) la funzione  $\sigma_\theta$  e la sua derivata ottenute mediante l'equazione di equilibrio (19).

Ricordando le seguenti relazioni

$$\frac{d}{dr} \ln h = \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) = \frac{d \ln h}{dr} + r \frac{d^2 \ln h}{dr^2} \quad (35.35,36)$$

l'equazione differenziale risolutiva viene ottenuta nei seguenti 3 passaggi:

1. l'equazione di equilibrio (19) viene esplicitata rispetto alla tensione circonferenziale:

$$\sigma_\theta = \left(1 + r \frac{d \ln h}{dr}\right) \sigma_r + r \frac{d \sigma_r}{dr} + \mu \omega^2 r^2 \quad (35.37)$$

2. derivando la (37) si ottiene la derivata di  $\sigma_\theta$ :

$$\frac{d \sigma_\theta}{dr} = \left[ \left(1 + r \frac{d \ln h}{dr}\right) \frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) \sigma_r \right] + \left( \frac{d \sigma_r}{dr} + r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} \right) + 2\mu \omega^2 r \quad (35.38)$$

$$\frac{d \sigma_\theta}{dr} = \left[ \left(1 + r \frac{d \ln h}{dr}\right) \frac{d \sigma_r}{dr} + \left( \frac{d \ln h}{dr} + r \frac{d^2 \ln h}{dr^2} \right) \sigma_r \right] + \frac{d \sigma_r}{dr} + r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 2\mu \omega^2 r \quad (35.39)$$

che diventa:

$$\frac{d \sigma_\theta}{dr} = r \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left(2 + r \frac{d \ln h}{dr}\right) \frac{d \sigma_r}{dr} + \left( \frac{d \ln h}{dr} + r \frac{d^2 \ln h}{dr^2} \right) \sigma_r + 2\mu \omega^2 r \quad (35.40)$$

3. si sostituiscono  $\varepsilon_r$  and  $\varepsilon_\theta$  nell'equazione di congruenza (17) utilizzando le (37) e (40) si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left( \frac{3}{r} + \frac{d \ln h}{dr} \right) \frac{d \sigma_r}{dr} + \left( \frac{2+\nu}{r} \frac{d \ln h}{dr} + \frac{d^2 \ln h}{dr^2} \right) \sigma_r + (3+\nu) \mu \omega^2 = 0 \quad (35.41)$$

Infine, introducendo la variabile adimensionale  $\rho=r/r_e$ , si ottiene:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{d\rho^2} + \left( \frac{3}{\rho} + \frac{d \ln h}{d\rho} \right) \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \left( \frac{2+\nu}{\rho} \frac{d \ln h}{d\rho} + \frac{d^2 \ln h}{d\rho^2} \right) \sigma_r + (3+\nu) \mu \omega^2 r_e^2 = 0 \quad (35.42)$$

Le soluzioni d'interesse riguardano casi nei quali l'altezza  $h$  è una funzione nota di  $\rho$  e si determina la funzione  $\sigma_r$ ; nel caso particolare dei dischi di *uniforme resistenza* s'impone che le tensioni siano costanti al variare di  $\rho$  e si determina la funzione  $h(\rho)$ .

### Disco di uniforme resistenza

Il disco di uniforme resistenza è un disco avente profilo  $h(\rho)$  variabile in modo che le tensioni radiali e circonferenziali si mantengano uguali ad un valore prefissato  $\sigma_U$ . Per determinare tale profilo s'impone il valore costante delle tensioni radiali e circonferenziali nell'equazione di equilibrio (8)

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \text{cost} = \sigma_U \quad (35.43)$$

ottenendo la seguente equazione differenziale funzione di  $h$

$$\frac{dh}{dr} + \frac{\mu \omega^2}{\sigma_U} r h = 0 \quad (35.44)$$

Introducendo la variabile adimensionale  $\rho = r/r_e$  e separando le variabili si ottiene

$$\frac{dh}{h} = - \frac{\mu \omega^2 r_e^2}{\sigma_U} \rho d\rho \quad (35.45)$$

Integrando la (45) e ricordando l'espressione di  $\sigma_0$  (25), si ottiene l'equazione del profilo

$$h = C e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U} \rho^2} \quad (35.46)$$

La costante  $C$  si determina imponendo un valore arbitrario (opportuno scelto)  $h_c$  al raggio  $\rho_c$

$$C = h_c e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U} \rho_c^2} \quad (35.47)$$

da cui

$$h = h_c e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U} (\rho^2 - \rho_c^2)} \quad (35.48)$$

Se si utilizza  $\rho_c = 0$  (il centro *virtuale* del disco) oppure  $\rho_c = 1$  (il raggio esterno), la (44) può essere espressa rispettivamente come

$$h = h_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U} \rho^2} \quad h = h_e e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U} (\rho^2 - 1)} \quad (35.49, 50)$$

nelle quali  $h_0$  ed  $h_e$  sono rispettivamente i valori di  $h$  in corrispondenza del centro del disco e del raggio esterno.

Dalle (48-50) si osserva che la forma del profilo  $h$  dipende esclusivamente dal rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ , nel quale  $\sigma_0 = \mu \omega^2 r_e^2$  riassume le condizioni di carico e  $\sigma_U$  la condizione di lavoro desiderata; in particolare, al diminuire del rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ , (cioè al crescere di  $\sigma_0/\sigma_U$ ) cresce il rapporto tra gli spessori al centro del disco e al bordo esterno:

$$h_0/h_e = e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U}} \quad (35.51)$$

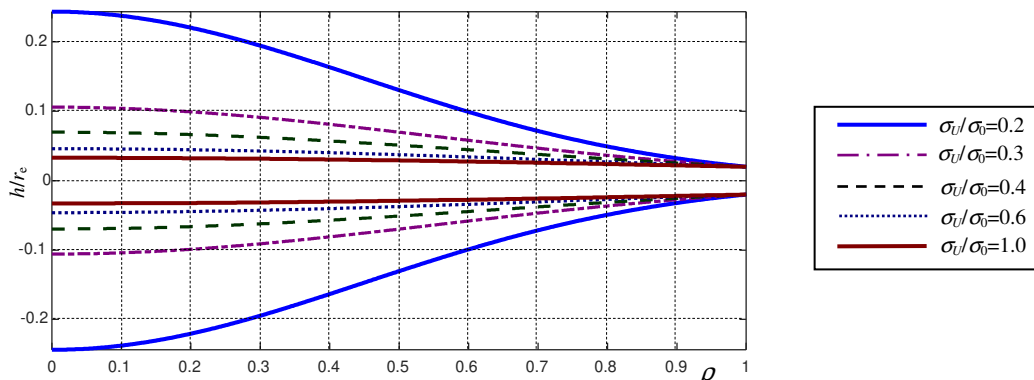


Fig.32.3 – Profili di uniforme resistenza normalizzati rispetto a  $r_e$ , nel caso di  $h_e = 0.02r_e$ , per diversi valori del rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ .

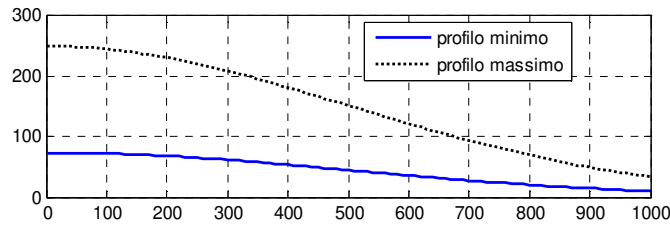


Fig.32.4 – Profili di uniforme resistenza minimo e massimo ottenuti nel caso di  $\omega=68.8$  rad/sec,  $\mu=8530$  kg/m<sup>3</sup>,  $r_e=1000$  mm,  $\sigma_U=0.25\sigma_0$ .

Come dovrebbe essere chiaro in base alle (46-51), fissato il valore del rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ , variando tutte le ordinate del profilo in misura proporzionale, le tensioni agenti sul disco rimangono invariate e pari a  $\sigma_U$ . In fig.3 sono mostrati i profili di uniforme resistenza ottenibili al variare del rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ , avendo fissato lo spessore al bordo esterno. I profili hanno una forma a campana e, com'è ovvio, presentano spessore al centro del disco  $h_0$  crescente al diminuire del rapporto  $\sigma_U/\sigma_0$ .

Naturalmente, affinché sia verificata la (43), al bordo esterno e al bordo interno del disco (se è forato) devono essere presenti delle *tensioni radiali al contorno* pari alla tensione di uniforme resistenza:  $\sigma_{r_i}=\sigma_{r_e}=\sigma_U$ . Solitamente le tensioni radiali agenti al bordo *esterno* sono dovute alla presenza di una corona e/o di una schiera di palette e risultano di *trazione* a causa dell'accelerazione centripeta  $\omega^2 r$ : in questi casi la corona e la schiera di palette devono essere dimensionate imponendo che le tensioni radiali e circonferenziali in corrispondenza all'attacco con il disco ( $\rho=1$ ) risultino uguali a  $\sigma_U$ , come descritto nel seguito. In generale, è praticamente impossibile generare *tensioni radiali di trazione al bordo interno*, in particolare, non è possibile collegare il disco all'albero tramite il forzamento che provoca tensioni radiali di compressione. Per i suddetti motivi i dischi di uniforme resistenza *non vengono forati e vengono collegati all'albero mediante flange*. In tal caso, al centro del disco non forato si ha  $\sigma_{r_i}=\sigma_{\theta_i}=\sigma_U$ .

Per motivi tecnologici:

- lo spessore al centro del disco  $h_0$  non deve essere superiore a 25 volte lo spessore al bordo esterno  $h_e$ ;
- lo spessore al centro del disco  $h_0$  non deve essere superiore a  $0.25 \div 0.3$  volte il valore del raggio esterno  $r_e$ ;
- lo spessore al bordo esterno  $h_e$  non deve essere inferiore ad un centesimo del raggio esterno  $r_e$ .

I tre vincoli descritti si traducono nelle seguenti relazioni:

$$h_0/h_e \leq 25 \quad h_0/r_e \leq (0.25 \div 0.3) \quad h_e/r_e \geq 0.01 \quad (35.52-54)$$

La condizione (52), in base alla (51), implica che  $\sigma_0/\sigma_U \leq 2 \log 25 \approx 6.438$ , da cui si ricava una condizione per l'assegnazione del valore  $\sigma_U$ :

$$\sigma_U \geq 0.1553 \sigma_0 = 0.1553 \mu \omega^2 r_e^2 \quad (35.55)$$

Si noti ancora che, in base alla (51), assegnando  $\sigma_U$  rimane fissato il rapporto  $h_0/h_e$ .

Le condizioni (52-53) possono essere utilizzate più facilmente se modificate in modo da esprimere i valori limite della sola  $h_0$  o della sola  $h_e$ . Esprimendo  $h_0$  in funzione di  $h_e$ ,  $h_e$  in funzione di  $h_0$  mediante la (51) e introducendo le espressioni ottenute rispettivamente nella (54) e nella (53), si ottengono le seguenti espressioni (del tutto equivalenti), ciascuna delle quali sintetizza entrambe le condizioni (53) e (54):

$$0.01 e^{\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U}} \leq h_0/r_e \leq (0.25 \div 0.3) \quad 0.01 \leq h_e/r_e \leq (0.25 \div 0.3) e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_U}} \quad (35.56a,b)$$

Dalle (56) si possono dedurre il valore minimo e massimo di  $h_0$  e  $h_e$ , cioè

$$\begin{aligned} h_{0_{\min}} &= 0.01 e^{0.5 \frac{\sigma_0}{\sigma_U}} r_e; & h_{0_{\max}} &= (0.25 \div 0.3) r_e \\ h_{e_{\min}} &= 0.01 r_e; & h_{e_{\max}} &= (0.25 \div 0.3) e^{-0.5 \frac{\sigma_0}{\sigma_U}} r_e \end{aligned} \quad (35.57a-d)$$

Operativamente, poiché  $r_e$  è legato alle caratteristiche della macchina, è opportuno:

1. scegliere una tensione  $\sigma_U$  che rispetti la (55) e sia inferiore alla tensione ammissibile,
2. scegliere un valore di  $h_0$  che rispetti la disequazione (56a) oppure un valore di  $h_e$  che rispetti la (56b).

Se si sceglie il valore minimo di  $h_0$  o di  $h_e$  il disco risulta, ovviamente, il più sottile possibile.

Da notare che se s'impone una tensione  $\sigma_U$  pari al termine di destra della (55) si ottiene esattamente  $h_0=25h_e$ , com'è ovvio, ma anche  $h_0=0.25 r_e$  e  $h_e=0.01 r_e$ , cioè le condizioni limite espresse dalle (53,54). La soluzione è quindi univoca e coincidente con le situazioni limite. Assegnando a  $\sigma_U$  valori tendenti a  $\sigma_0$  i valori degli estremi delle disequazioni (57) si allontanano tra loro e, conseguentemente, i valori degli spessori minimi e massimi.

Ad esempio, nel caso in cui sia  $\omega=68.8$  rad/sec,  $\mu=8530$  kg/m<sup>3</sup>,  $r_e=1000$  mm, imponendo  $\sigma_U=0.25\sigma_0$ , si ottiene:

- $h_0/h_e=7.39$ , da cui viene rispettata la condizione (52),
- la disequazione (56b), ad esempio, diventa  $0.01 \leq h_e/r_e \leq 0.0338$ ,

- da questa si ottiene:  $h_{e\min}=10 \text{ mm}, \quad h_{e\max}\approx 34 \text{ mm},$
- dal rapporto  $h_0/h_e$  si ottiene:  $h_{0\min}\approx 80 \text{ mm}, \quad h_{0\max}=250 \text{ mm}.$

È facile osservare che i valori di  $h_e$  ed  $h_0$  minimi e massimi rispettano le condizioni (54,53), essendo

- $h_{e\min}/r_e = 0.01, \quad h_{e\max}/r_e \approx 0.034,$
- $h_{0\min}/r_e \approx 0.08, \quad h_{0\max}/r_e = 0.25.$

I profili relativi allo spessore minimo e massimo sono mostrati in fig.4.

### Dimensionamento della corona

La corona può essere considerata come un disco di spessore costante, piccolo rispetto al suo raggio medio, assimilabile ad un anello sottile, per il quale il calcolo delle tensioni risulta semplificato. Le grandezze geometriche che caratterizzano il problema sono:

- l'area della sezione diametrale della corona  $S_c$ ,
- il raggio baricentrico della sezione  $r_c$ .

Avendo assimilato la corona ad un anello sottile (Appendice 2), è possibile determinare la tensione circonferenziale media agente sulla sua sezione diametrale considerando che la risultante sia applicata nel baricentro in posizione  $r_c$  e ricavare la tensione agente in corrispondenza dell'attacco con il disco, in posizione  $r_e$ , ritenendo che le tensioni nelle due posizioni siano proporzionali alle distanze dal centro di rotazione, cioè nel rapporto  $r_c/r_e$ .

La tensione circonferenziale media agente sulla sezione diametrale della corona  $\sigma_{\theta_c}$  è la somma di 3 contributi:

1.  $\sigma_{\theta_1}$  dovuto alla forza centrifuga agente sulla corona stessa,
2.  $\sigma_{\theta_2}$  dovuto alla forza centrifuga agente sulla palettatura,
3.  $\sigma_{\theta_3}$  dovuto alla tensione radiale applicata al bordo interno pari a  $\sigma_U$ .

La  $\sigma_{\theta_1}$  si ottiene scrivendo l'equazione di equilibrio tra la risultante delle tensioni circonferenziali agenti sulle due sezioni della mezza corona ( $2S_c\sigma_{\theta_1}$ ) e la forza centrifuga agente su mezza corona stessa ottenendo

$$\sigma_{\theta_1} = \frac{1}{2S_c} \mu \omega^2 r_c \int_0^\pi S_c r_c \sin \theta d\theta = \mu \omega^2 r_c^2 \quad (35.58)$$

La  $\sigma_{\theta_2}$  si ottiene dall'equilibrio tra la risultante delle tensioni circonferenziali agenti sulle due sezioni della mezza corona ( $2S_c\sigma_{\theta_2}$ ) e la forza centrifuga trasmessa dalla palettatura alla mezza corona stessa. Se  $m_p$  è la massa di tutte le palette ed  $r_p$  è la posizione del raggio medio della palettatura, la forza centrifuga ad unità di lunghezza trasmessa dalla palettatura alla corona può essere valutata dividendo il prodotto  $m_p \omega^2 r_p$  per la lunghezza della corona in corrispondenza del baricentro data da  $2\pi r_c$ . L'equazione di equilibrio della mezza corona può essere scritta come

$$\sigma_{\theta_2} = \frac{1}{2S_c} \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi r_c} \int_0^\pi r_c \sin \theta d\theta = \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi S_c} \quad (35.59)$$

La  $\sigma_{\theta_3}$  si ottiene dall'equilibrio tra la risultante delle tensioni circonferenziali agenti sulle due sezioni della mezza corona ( $2S_c\sigma_{\theta_3}$ ) e la forza dovuta alla tensione radiale  $\sigma_r$  (che nel caso dei dischi di uniforme resistenza è pari a  $\sigma_U$ ) agente su mezza corona in corrispondenza della sezione di attacco tra disco e corona di altezza  $h_e$ :

$$\sigma_{\theta_3} = -\frac{1}{2S_c} \sigma_r \int_0^\pi h_e r_e \sin \theta d\theta = -\frac{h_e r_e \sigma_r}{S_c} \quad (35.60)$$

Infine la tensione circonferenziale media agente sulla sezione diametrale della corona ( $r=r_c$ ) risulta

$$\sigma_{\theta_c} = \mu \omega^2 r_c^2 + \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi S_c} - \frac{h_e r_e \sigma_r}{S_c} \quad (35.61)$$

Come detto, avendo assimilato la corona ad un anello sottile, la tensione circonferenziale agente in corrispondenza al raggio di attacco con il disco, cioè  $r_e$ , può essere ricavata dalla tensione media  $\sigma_{\theta_c}$  come

$$\sigma_{\theta_e} = r_c/r_e \sigma_{\theta_c} \quad (35.62)$$

Nel caso dei dischi di uniforme resistenza la (61) e la (62) possono essere utilizzate per determinare i parametri geometrici  $r_c$ ,  $S_c$  (o anche  $\sigma_U$ ) sostituendo la (61) nella (62) e ponendo  $\sigma_{\theta_c}=\sigma_r=\sigma_U$ . In particolare si ottiene:

$$\left( \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi r_e} - h_e \sigma_U \right) \frac{r_c}{S_c} + \frac{\mu \omega^2}{r_e} r_c^3 - \sigma_U = 0 \quad (35.63)$$

Questa relazione permette di determinare una delle variabili  $r_c$ ,  $S_c$  o  $\sigma_U$  assegnando le altre 2.

### Dischi di profilo arbitrario: il metodo di Grammel

Il metodo di Grammel per la valutazione dello stato tensionale in dischi di profilo arbitrario con spessore  $h(r)$  si basa sulla discretizzazione del disco in un numero finito di elementi di spessore costante, per ognuno dei quali le tensioni possono essere ottenute sfruttando le soluzioni (26) e (27) descritte nei paragrafi precedenti.

Il primo passo del metodo di Grammel è costituito dalla discretizzazione del profilo originale (fig.5) in  $N$  elementi delimitati da  $N+1$  valori dell'ascissa indicati con  $r_k$ , essendo  $k=1,2,..(N+1)$ , aventi altezza  $h_k$  pari all'altezza media del profilo reale in corrispondenza ad essi. I dati da considerare dopo la discretizzazione sono:

- le  $N+1$  ascisse degli estremi degli elementi,  $r_k$ ;
- le  $N+1$  altezze degli elementi in corrispondenza delle  $N+1$  ascisse,  $h_k$  (da notare che  $h_{N+1}=h_N$ );
- gli  $N+1$  spessori del disco *non discretizzato* in corrispondenza delle  $N+1$  ascisse,  $H_k=h(r_k)$ .

Utilizzando le tensioni radiali note al bordo interno ed esterno del disco,  $\sigma_{rI}$  e  $\sigma_{rE}$ , è possibile ricavare in successione le tensioni agenti in tutti gli elementi della discretizzazione utilizzando in modo opportuno le equazioni (26,27); se la discretizzazione è sufficientemente fitta il risultato ottenuto con la procedura completa approssima bene l'andamento delle tensioni del disco continuo. La valutazione delle tensioni nel *primo* disco della discretizzazione richiede l'imposizione di *due* condizioni al contorno per la determinazione delle costanti  $A$  e  $B$  nelle (26) e (27), mentre è nota soltanto la tensione radiale al bordo interno. Per tale motivo, al primo passaggio è opportuno assegnare valore nullo alla tensione circonferenziale al bordo interno  $\sigma_{\theta I}$  ed effettuare la determinazione delle tensioni effettive mediante 3 passaggi che consentono di sfruttare la conoscenza della tensione radiale effettiva al bordo esterno  $\sigma_{rE}$ :

1. si determinano le tensioni radiali e circonferenziali  $\sigma'$  agenti ai raggi  $r_k$  per il caso di disco *rotante*, sul cui contorno agiscono la tensione radiale effettiva  $\sigma_{rI}$  e tensione circonferenziale nulla (imponendo  $\sigma_{\theta I}=0$ );
2. si determinano le tensioni radiali e circonferenziali  $\sigma''$  agenti ai raggi  $r_k$  per il caso di disco *non rotante* ( $\omega=0$ ), sul cui contorno la tensione radiale è nulla e la tensione circonferenziale è pari ad un valore ipotizzato  $\Sigma_{\theta I}$ , che deve essere diverso da 0 (ad esempio  $\Sigma_{\theta I}=1$ ) e può essere pensato come il prodotto della tensione circonferenziale effettiva per una costante  $k$  incognita, cioè  $\Sigma_{\theta I}=k\sigma_{\theta I}$ ;
3. si calcolano le tensioni radiali e circonferenziali *effettive* agenti ai raggi  $r_k$  come somma delle tensioni  $\sigma'$  e delle tensioni  $\sigma''$  moltiplicate per un fattore  $K$ , che viene determinato imponendo che la tensione radiale complessiva al bordo esterno abbia il valore noto al contorno  $\sigma_{rE}$ , cioè sia  $\sigma'_{re} + K\sigma''_{re} = \sigma_{rE}$ .

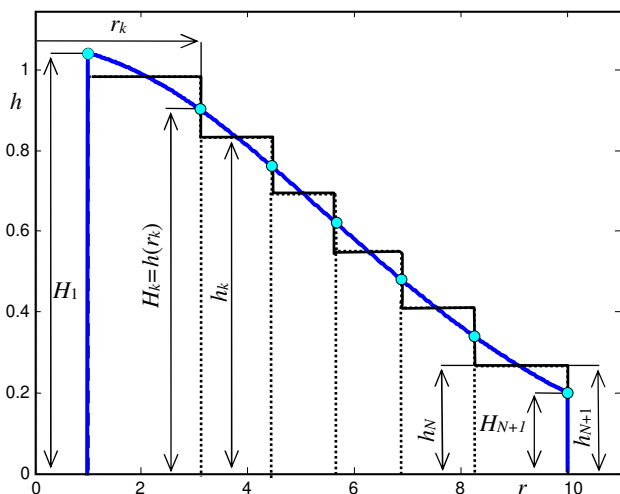


Fig.35.5 - Esempio di discretizzazione in 6 elementi di un profilo.

In pratica, definendo  $\sigma_r^a$  la distribuzione di tensioni radiali dovuta alle forze centrifughe e alla tensione radiale al contorno e  $\sigma_r^b$  la distribuzione dovuta alla tensione circonferenziale *effettiva*, la tensione radiale effettiva  $\sigma_r$  è data dalla somma delle 2 distribuzioni, cioè  $\sigma_r = \sigma_r^a + \sigma_r^b$ . Le tensioni  $\sigma_r^a$  coincidono con il primo termine:

$$\sigma_r^a = \sigma_r^a \quad (35.64)$$

La distribuzione di tensioni  $\sigma_r^b$  è dovuta alla sola  $\Sigma_{\theta I}=k\sigma_{\theta I}$  ipotizzata, cioè coincide con la  $\sigma_r^b$  a meno della costante  $k$ :

$$\sigma_r^b = k \sigma_r^b \quad (35.65)$$

Affinché la  $\sigma_r^b$  assuma il valore corretto  $\sigma_r^b$  deve essere moltiplicata per un fattore correttivo  $K=1/k$ , che può essere determinato al raggio esterno, dove la

tensione radiale  $\sigma_{rE}$  è nota. Infatti si può scrivere:

$$\sigma_{rE} = \sigma_{r_e}^a + \sigma_{r_e}^b = \sigma_{r_e}^a + K\sigma_{r_e}^b = \sigma_{r_e}^a + Kk\sigma_{r_e}^b \quad (35.66)$$

dalla quale si ricava

$$K = 1/k = (\sigma_{rE} - \sigma_{r_e}^a) / \sigma_{r_e}^b \quad (35.67)$$

A sua volta, sinteticamente, la determinazione delle tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  in ciascun elemento è effettuata in 2 passi:

1. si assegnano al bordo interno le tensioni calcolate al bordo esterno dell'elemento precedente, opportunamente corrette per la variazione di spessore; solo al primo passo si assegnano al bordo interno del primo elemento il valore della tensione radiale al contorno e la tensione circonferenziale di tentativo;
2. si determinano le tensioni agenti al bordo esterno dell'elemento stesso utilizzando le espressioni della tensione per il caso di disco a spessore costante, dopo avere valutato le costanti di integrazione a partire dalle tensioni al bordo interno determinate al passo 1.



Si deve osservare che a ciascun raggio  $r$  al quale si verifica una variazione dello spessore dovuta alla discretizzazione, dove sono in contatto il bordo esterno e il bordo interno di due elementi consecutivi, le tensioni agenti sui due elementi sono differenti rispetto a quelle calcolate al punto 2. Tali tensioni sarebbero valide se l'elemento a spessore costante si estendesse *al di là del raggio al quale viene calcolata la tensione*. Viceversa, in corrispondenza delle variazioni di spessore, devono essere rispettate le condizioni di equilibrio e di congruenza, cioè devono essere uguali:

- la forza radiale applicata al bordo esterno dell'elemento interno e la forza radiale applicata al bordo interno dell'elemento esterno;
- gli spostamenti radiali del bordo esterno dell'elemento interno e del bordo interno dell'elemento esterno, cosa che, in base alla (12), implica l'uguaglianza delle deformazioni circonferenziali.

Con riferimento alla fig.6, se  $h_1$  ed  $h_2$ ,  $\sigma_{r1}$  e  $\sigma_{r2}$ ,  $\sigma_{\theta1}$  e  $\sigma_{\theta2}$ ,  $\varepsilon_{\theta1}$  ed  $\varepsilon_{\theta2}$  sono rispettivamente le altezze, le tensioni radiali, le tensioni circonferenziali e le deformazioni circonferenziali al raggio  $r$  dei due dischi 1 e 2 in contatto in corrispondenza del raggio  $r$  stesso; in base a quanto detto, devono essere verificate le seguenti relazioni:

$$\sigma_{r2} h_2 2 \pi r = \sigma_{r1} h_1 2 \pi r \quad \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\theta1} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta2} - \nu \sigma_{r2}) = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta1} - \nu \sigma_{r1}) \quad (35.68,69)$$

Esplicitando la (68) rispetto a  $\sigma_{r2}$  ed introducendo il risultato nella (69), le tensioni agenti sull'elemento 2 in corrispondenza del bordo interno possono essere espresse in funzione di quelle agenti sull'elemento 1 come segue

$$\sigma_{r2} = \sigma_{r1} h_1/h_2 \quad \sigma_{\theta2} = \sigma_{\theta1} - \nu \sigma_{r1} (1 - h_1/h_2) \quad (35.70,71)$$

Per quanto concerne la determinazione delle tensioni agenti al bordo esterno ( $r_e$ ) di ciascun disco di spessore costante, note le tensioni al bordo interno ( $r_i$ ), esse possono essere ottenute utilizzando le relazioni (26,27):

$$\sigma_{r_e} = A - \frac{B}{r_e^2} - C r_e^2 \quad \sigma_{\theta_e} = A + \frac{B}{r_e^2} - D r_e^2 \quad (35.72,73)$$

qui riscritte utilizzando il raggio effettivo  $r$  e non quello normalizzato, per cui le costanti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  differiscono per il fattore  $1/r_e^2$  da quelle presenti nelle (26,27).

In generale, se sono note le tensioni radiali e circonferenziali  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  agenti *ad un certo raggio*  $r$  è possibile valutare le costanti presenti nelle (72,73) e, di conseguenza, le tensioni a qualsiasi altro raggio. Per  $r=r_i$  le costanti  $A$  e  $B$  possono essere determinate mediante le seguenti relazioni

$$A = (t + s)/2 \quad B = r^2 (t - s)/2 \quad (35.74,75)$$

nelle quali

$$s = \sigma_{r_i} + C r_i^2 \quad t = \sigma_{\theta_i} + D r_i^2 \quad (35.76,77)$$

e le costanti  $C$  e  $D$  per disco rotante ( $C=c\sigma_0/r_e^2$  e  $D=d\sigma_0/r_e^2$ ) e non rotante sono espresse rispettivamente come:

$$C = \frac{3+\nu}{8} \mu \omega^2 \quad D = \frac{1+3\nu}{8} \mu \omega^2 \quad (35.78,79)$$

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (35.80,81)$$

È facile osservare che le costanti  $C$  e  $D$  sono uguali per tutti gli elementi e devono essere calcolate una sola volta.

Nel caso specifico, con riferimento alla fig.6, per l'elemento  $k$ -esimo della discretizzazione, si ha

$$r = r_k, \quad h_1 = h_{k-1}, \quad h_2 = h_k, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r_{e_{k-1}}}, \quad \sigma_{r2} = \sigma_{r_{i_k}}, \quad \sigma_{\theta1} = \sigma_{\theta_{e_{k-1}}}, \quad \sigma_{\theta2} = \sigma_{\theta_{i_k}} \quad (35.82)$$

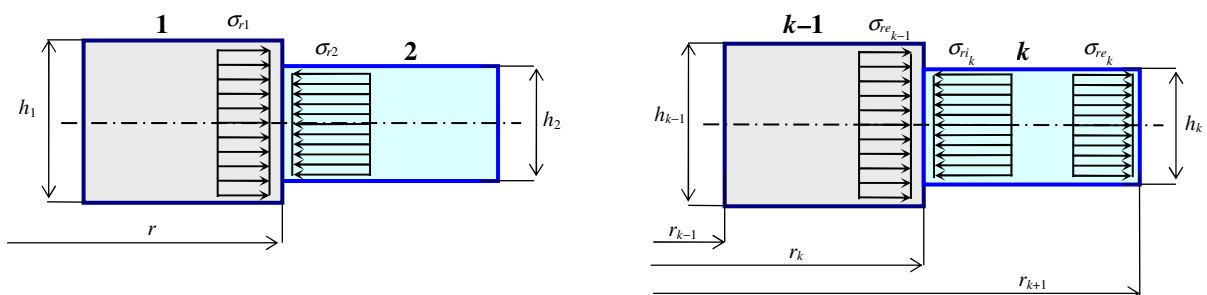


Fig.35.6 – A sinistra equilibrio di 2 elementi consecutivi, a destra parametri geometrici e meccanici dell'elemento  $k$ -esimo.

Note le tensioni al bordo esterno dell'elemento  $(k-1)$ -esimo, le tensioni agenti al bordo interno, possono essere ottenute direttamente mediante le seguenti relazioni ottenute dalle (70,71):

$$\sigma_{\theta_k} = \sigma_{\theta_{k-1}} - \nu \sigma_{r_{k-1}} \left(1 - h_{k-1}/h_k\right) \quad \sigma_{r_k} = \sigma_{r_{k-1}} h_{k-1}/h_k \quad (35.83,84)$$

Note le tensioni (83,84) al bordo interno, si determinano le costanti  $A$  e  $B$  mediante le (74-77), che, particolarizzate per l'elemento  $k$ -esimo, diventano:

$$s = \sigma_{r_k} + C r_k^2 \quad t = \sigma_{\theta_k} + D r_k^2 \quad (35.85,86)$$

$$A = (t + s)/2 \quad B = r_k^2 (t - s)/2 \quad (35.87,88)$$

e si valutano le tensioni al raggio esterno dell'elemento  $r_{ek}=r_{k+1}$  con le (72,73):

$$\sigma_{r_{ek}} = A - \frac{B}{r_{k+1}^2} - C r_{k+1}^2 \quad \sigma_{\theta_{ek}} = A + \frac{B}{r_{k+1}^2} - D r_{k+1}^2 \quad (35.89,90)$$

nelle quali le costanti  $C$  e  $D$  sono date dalle (78,79) per valutare le tensioni  $\sigma'$ , mentre sono poste a 0 (80,81) per valutare le tensioni  $\sigma''$ .

Come detto, al primo passo i valori delle tensioni radiali e tangenziali devono essere imposti in base alla condizione al contorno  $\sigma_{r_i} = \sigma_{r_l}$  e all'ipotesi  $\sigma_{\theta_i} = 0$ , per il calcolo di  $\sigma'$  e in base alle condizioni  $\sigma_{r_i} = 0$  e  $\sigma_{\theta_i} = \Sigma_{\theta_i}$ , per il calcolo di  $\sigma''$ ; inoltre la correzione della tensione al bordo interno deve essere effettuata anche per il primo elemento, considerando la differenza tra lo spessore effettivo al bordo interno  $H_1$  (dove è applicata la  $\sigma_{r_i}$ ) e lo spessore  $h_1$ . In base a queste considerazioni, *al primo passo*, le (83-84) devono essere sostituite dalle seguenti espressioni:

$$\sigma'_{\theta_i} = 0 \quad \sigma'_{r_i} = \sigma_{r_l} H_1 / h_1 \quad \sigma''_{\theta_i} = \Sigma_{\theta_i} \quad \sigma''_{r_i} = 0 \quad (35.91-94)$$

Le tensioni radiali e circonferenziali  $\sigma'$  e  $\sigma''$  da utilizzare per determinare le tensioni effettive devono essere costituite dalle *tensioni ai bordi interni degli  $N$  dischi*, che agiscono nelle sezioni  $r_k$ , con  $k=1,2,..n$ , calcolate con le (83,84), cui devono essere aggiunte *le tensioni al bordo esterno dell'ultimo disco*, cioè nella sezione  $r_e=r_{N+1}$ , calcolate con le (89,90). È utile notare che le tensioni al bordo esterno dei primi  $N-1$  dischi, ottenute mediante le (89,90) costituiscono il risultato di un passaggio intermedio il cui fine ultimo è la determinazione delle tensioni (83,84) al bordo interno del disco successivo; solo le tensioni al bordo esterno del disco  $N$  devono poi essere inserite come ultimo elemento nelle tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$ .

Le tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  così ottenute sono relative alle sezioni  $r_k$  *del disco discretizzato* cui corrispondono gli spessori  $h_k$ , mentre nel *disco non discretizzato* gli spessori sono dati dai valori  $H_k=h(r_k)$ . Per ottenere risultati più precisi è opportuno effettuare sulle tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  una correzione *inversa* rispetto a quella effettuata al bordo interno con le relazioni (91-94). In pratica, per le  $N+1$  sezioni, corrispondenti ai bordi interni di tutti i dischi più il bordo esterno dell'ultimo disco, si deve effettuare la seguente correzione:

$$\sigma''_{\theta_k} = \sigma''_{\theta_k} - \nu \sigma''_{r_k} \left(1 - h_k/H_k\right) \quad \sigma''_{r_k} = \sigma''_{r_k} h_k/H_k \quad (35.95,96)$$

Da notare che l'eq.(95) deve essere applicata introducendo la tensione  $\sigma_{r_i}$  *prima* che venga applicata la correzione mediante la (96).

Ottenute le tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  il fattore  $K$  può essere valutato in base alla (67) come

$$K = (\sigma_{rE} - \sigma'_{re}) / \sigma''_{re} \quad (35.97)$$

Le tensioni finali, a loro volta, possono essere ottenute come:

$$\sigma_r = \sigma'_r + K \sigma''_r \quad \sigma_\theta = \sigma'_\theta + K \sigma''_\theta \quad (35.98,99)$$

In appendice è riportato un riassunto dei dati di ingresso e della sequenza delle operazioni necessarie all'implementazione dell'algoritmo di calcolo.

Nel caso di disco non forato viene a mancare la possibilità di assegnare la condizione al bordo interno, ma al centro del disco si deve verificare la condizione  $\sigma_{\theta} = \sigma_{r_i}$ , come si vede dalle (32,33). In questo caso la procedura può essere applicata determinando  $\sigma'$  per il caso di disco *solo rotante* ( $\sigma_{\theta} = \sigma_{r_l} = 0$ ) e  $\sigma''$  per il caso di disco *non rotante* con tensioni radiali e circonferenziali di tentativo al bordo interno *uguali* ( $\sigma_{\theta} = \sigma_{r_l} = \Sigma_{\theta}$ ). Il fattore  $K$  può essere poi determinato normalmente mediante la (97). In questo caso nelle (64-66)  $\sigma^a$  è la distribuzione di tensioni radiali dovuta alle sole forze centrifughe, mentre  $\sigma^b$  è la distribuzione di tensioni radiali dovuta alle tensioni radiali e circonferenziali al contorno uguali tra loro. Da notare che il metodo di Grammel può essere applicato partendo dal disco esterno invece che da quello interno e applicando la (97) al bordo interno.

Come sopra riportato, le tensioni radiali e circonferenziali  $\sigma'$  e  $\sigma''$  da utilizzare per determinare le tensioni effettive devono essere costituite dalle *tensioni corrette a bordi interni degli N dischi*, cui devono essere aggiunte le *tensioni corrette al bordo esterno dell'ultimo disco*. Nella realizzazione di un algoritmo è possibile utilizzare due soli vettori di dati costituiti da  $N+1$  elementi, uno per le tensioni radiali ed uno per quelle circonferenziali relative agli  $N$  elementi. In questo caso, nel ciclo di calcolo, i valori delle tensioni determinate *al bordo esterno* del  $k$ -esimo disco devono essere memorizzati nel  $k+1$ -esimo elemento dei due vettori; nell'iterazione successiva i valori ottenuti devono essere corretti con relazioni analoghe alle (83,84). In particolare, al posto delle variabili  $\sigma_{r_k}$ ,  $\sigma_{r_{k+1}}$  e  $\sigma_{\theta_k}$ ,  $\sigma_{\theta_{k+1}}$  si possono utilizzare le sole variabili  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$ , come mostrato in fig.7, effettuando le seguenti sostituzioni nelle formule (83-86,89-90):  $\sigma_{r_k}=\sigma_r$ ,  $\sigma_{r_{k-1}}=\sigma_r$ ,  $\sigma_{r_k}=\sigma_{r_{k+1}}$ ,  $\sigma_{\theta_k}=\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{\theta_{k-1}}=\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{\theta_k}=\sigma_{\theta_{k+1}}$ . Le equazioni corrispondenti a questa procedura sono riportate nella tabella A1.2.

In fig.8 è mostrato un esempio di applicazione del metodo di Grammel relativa al un caso puramente teorico di un disco *forato* avente il profilo di un disco di uniforme resistenza (in realtà, come affermato in precedenza, i dischi di uniforme resistenza non possono essere forati), sui cui bordi interno ed esterno agiscono tensioni  $\sigma_{rI}=\sigma_{rE}=\sigma_U=149 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ . Nell'applicazione è stata utilizzata una tensione circonferenziale di tentativo pari alla metà della tensione radiale, cioè  $\Sigma\theta=\sigma_{rI}/2$ . Ovviamente le tensioni dovrebbero risultare costanti e pari a  $\sigma_U$ . In fig.8a è mostrata la discretizzazione in soli  $N=5$  elementi, in fig.7b,c sono mostrate le tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$  rappresentate in  $\text{Nm}^2$ , in fig.8d sono mostrate le tensioni complessive  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$ , avendo ottenuto il coefficiente  $K=2.056 \approx 2$ .

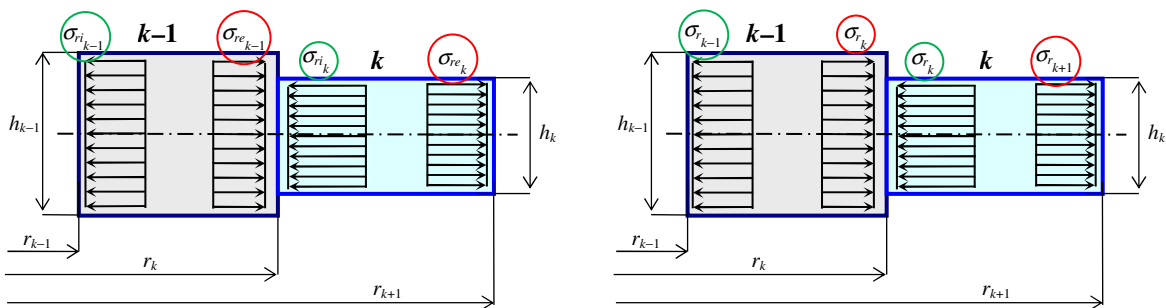


Fig.35.7 - A sinistra uso dei vettori di tensione  $\sigma_{r_k}$  e  $\sigma_{r_{k+1}}$ , a destra uso del solo vettore  $\sigma_r$ .

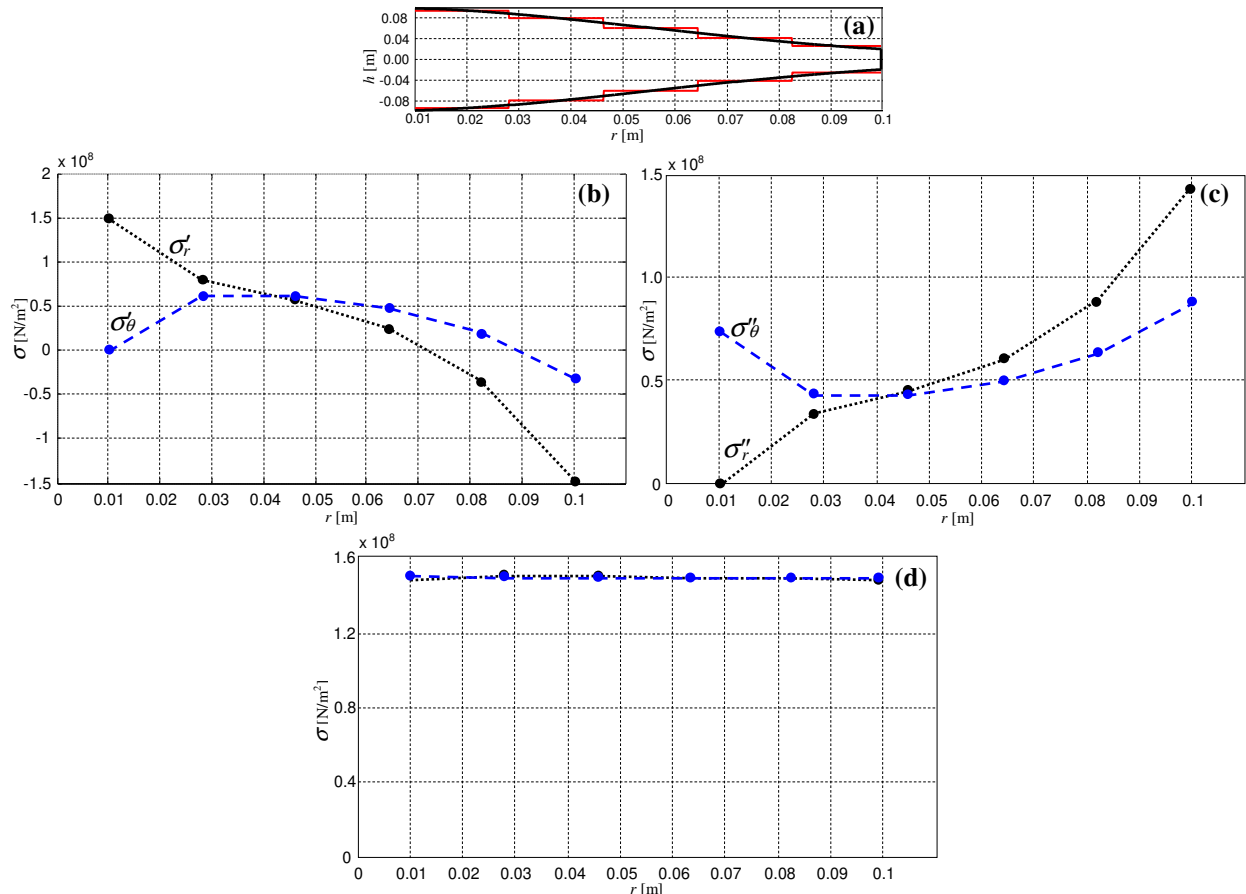


Fig.35.8 - Esempio di applicazione del metodo di Grammel ad un disco di uniforme resistenza: (a) discretizzazione in  $N=5$  elementi del disco; (b-c) tensioni  $\sigma'$  e  $\sigma''$ ; (d) tensioni complessive  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$ .

**APPENDICE**

**A1. Implementazione dell'algoritmo di Grammel**

**Dati di ingresso iniziali:**

- densità [kg/m<sup>3</sup>] e coefficiente di Poisson del materiale  $\mu, \nu$
- velocità angolare del disco [rad/sec]  $\omega$
- profilo del disco [m]  $h(r)$
- tensioni radiali al contorno [N/m<sup>2</sup>]  $\sigma_{rI}, \sigma_{rE}$
- tensione circonferenziale di tentativo [N/m<sup>2</sup>]  $\Sigma_{\theta I}$

**Dati ottenuti dalla discretizzazione:**

- numero degli elementi della discretizzazione  $N$
- $N+1$  ascisse degli estremi degli elementi  $r_k$
- $N+1$  altezze medie dei segmenti  $h_k$
- $N+1$  spessori del disco non discretizzato  $H_k=h(r_k)$

**Passi dell'algoritmo:**

1. Calcolo di  $C$  e  $D$  eq.(78,79)
2. Calcolo di  $\sigma'$  negli  $N$  elementi
  - 2.1 Tensioni al bordo interno
    - elemento 1 eq.(91-92)
    - elementi 2- $N$  eq.(83,84)
  - 2.2 Tensioni al bordo esterno, elementi 1- $N$  eq.(85-90)
  - 2.3 Correzione tensioni
    - bordi interni elementi 1- $N$
    - bordo esterno elemento  $N+1$  eq.(95,96)
3. Calcolo di  $\sigma''$  negli  $N$  elementi ( $C=0, D=0, \sigma_{rI}=0$ )
  - 3.1 Tensioni al bordo interno
    - elemento 1 eq.(93,94)
    - elementi 2- $N$  eq.(83,84)
  - 3.2 Tensioni al bordo esterno, elementi 1- $N$  eq.(85-90)
  - 3.3 Correzioni tensioni
    - bordi interni elementi 1- $N$
    - bordo esterno elemento  $N+1$  eq.(95,96)
4. Calcolo fattore  $K$  eq.(97)
5. Calcolo delle tensioni eq.(98,99)

$C = (3 + \nu)\mu \omega^2 / 8$	$D = (1 + 3\nu)\mu \omega^2 / 8$	$C = 0$	$D = 0$	78,79-80,81
$\sigma'_{ri} = \sigma_{rI} H_I / h_1$		$\sigma''_{ri} = 0$		91,93
$\sigma'_{\theta i} = 0$		$\sigma''_{\theta i} = \Sigma_{\theta I}$	$k=1$	92,94
$\sigma''_{\theta k} = \sigma''_{\theta e_{k-1}} - \nu \sigma''_{re_{k-1}} (1 - h_{k-1} / h_k)$		$\sigma''_{ri} = \sigma''_{re_{k-1}} h_{k-1} / h_k$	$k=2, \dots, n$	83,84
$s = \sigma_{ri} + C r_k^2$	$t = \sigma_{\theta k} + D r_k^2$	$A = (t + s) / 2$	$B = r_k^2 (t - s) / 2$	
$\sigma''_{re_k} = A - \frac{B}{r_{k+1}^2} - C r_{k+1}^2$		$\sigma''_{\theta e_k} = A + \frac{B}{r_{k+1}^2} - D r_{k+1}^2$	$k=1, \dots, n$	85-90
$\sigma''_{ri} = \sigma''_{ri} h_k / H_k$		$\sigma''_{\theta k} = \sigma''_{\theta k} - \nu \sigma''_{ri} (1 - h_k / H_k)$	$k=1, \dots, N+1$	95-96
$K = (\sigma_{rE} - \sigma'_{re_N}) / \sigma''_{re_N}$				97
$\sigma_r = \sigma'_r + K \sigma''_r$		$\sigma_\theta = \sigma'_\theta + K \sigma''_\theta$		98-99

Tab. A1.1 - Algoritmo del metodo di Grammel, utilizzando variabili separate per le tensioni agenti ai bordi interni ed esterni degli elementi della discretizzazione.

$C = (3 + \nu)\mu \omega^2 / 8 \quad D = (1 + 3\nu)\mu \omega^2 / 8$		$C = 0 \quad D = 0$	78,79-80,81
$\sigma'_{r_1} = \sigma_{r1} H_1 / h_1$	$\sigma''_{r_1} = 0$	$k=1$	91,93
$\sigma'_{\theta_1} = 0$	$\sigma''_{\theta_1} = \Sigma_{\theta 1}$		92,94
$\sigma''_{\theta_k} = \sigma''_{\theta_k} - \nu \sigma''_{r_k} (1 - h_{k-1} / h_k)$	$\sigma''_{r_k} = \sigma''_{r_k} h_{k-1} / h_k$	$k=2, \dots, n$	83,84
$s = \sigma''_{r_k} + C r_k^2 \quad t = \sigma''_{\theta_k} + D r_k^2 \quad A = (t + s) / 2 \quad B = r_k^2 (t - s) / 2$ $\sigma''_{r_{k+1}} = A - \frac{B}{r_{k+1}^2} - C r_{k+1}^2 \quad \sigma''_{\theta_{k+1}} = A + \frac{B}{r_{k+1}^2} - D r_{k+1}^2$		$k=1, \dots, n$	85-90
$\sigma''_{\theta_k} = \sigma''_{\theta_k} - \nu \sigma''_{r_k} (1 - h_k / H_k)$	$\sigma''_{r_k} = \sigma''_{r_k} h_k / H_k$	$k=1, \dots, N+1$	95-96
$K = (\sigma_{rE} - \sigma'_{r_{N+1}}) / \sigma''_{r_{N+1}}$			97
$\sigma_r = \sigma'_r + K \sigma''_r$	$\sigma_\theta = \sigma'_\theta + K \sigma''_\theta$		98-99

Tab. A1.2 - Algoritmo del metodo di Grammel, utilizzando una sola variabile per le tensioni agenti ai bordi interni ed esterni degli elementi della discretizzazione.

**A2. Equilibrio di un anello sottile soggetto ad azioni radiali e tensioni circonferenziali**

Le espressioni delle tensioni circonferenziali (25) e (58-60) possono essere ottenute considerando l'equilibrio di un anello di materiale avente sezione piccola rispetto al raggio, soggetto a forze d'inerzia o dovute alle tensioni radiali. In particolare è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale della metà superiore dell'anello stesso soggetto alla forza esercitata sulle 2 sezioni  $S$  dall'altra metà dell'anello tramite la tensione circonferenziale e alla risultante delle azioni agenti in direzione radiale, proiettate in direzione verticale (fig.A2.1). Tali azioni, nei vari casi, sono costituite dalle forze d'inerzia agente sull'anello stesso, dalle forze trasmesse dalla palettatura posta in rotazione con il disco e dalle forze dovute alla tensione radiale agente nella sezione di attacco della corona con il disco in corrispondenza al raggio esterno del disco.

Considerando positiva la direzione verso l'alto, la forza dovuta alle tensioni circonferenziali ritenute costanti nella sezione  $S$  è data sempre dalla seguente espressione:

$$F_{\theta} = -2 \sigma_{\theta} S \quad (\text{A2.1})$$

La forza centrifuga agente su ciascun volumetto elementare dell'anello  $F_V$  è data dal prodotto della densità del materiale  $\mu$  per l'accelerazione centripeta  $\omega^2 r$ . La forza risultante in direzione verticale può essere ottenuta integrando  $F_V$  rispetto al volume del mezzo anello

$$F = \int_V F_V dV = \int_0^{\pi} (\mu \omega^2 r \sin \theta) S r d\theta = 2 \mu \omega^2 r^2 S \quad (\text{A2.2})$$

Nel caso dell'anello a distanza  $r_e$  è sufficiente porre  $r=r_e$ , mentre nel caso della corona è  $r=r_c$ .

La forza centrifuga applicata dalla palettatura alla corona può essere approssimata come una forza ad unità di lunghezza  $F_L$  ottenibile dividendo la forza d'inerzia totale agente su tutte le palette per la lunghezza della corona. La risultante in direzione verticale può essere espressa integrando  $F_L$  rispetto alla lunghezza della mezza corona:

$$F = \int_L F_L dL = \int_0^{\pi} \left( \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi r_c} \sin \theta \right) r_c d\theta = 2 \frac{m_p \omega^2 r_p}{2\pi} \quad (\text{A2.3})$$

La forza applicata alla corona in direzione verticale dalla tensione radiale agente nella sezione d'attacco con il disco può essere ottenuta integrando la tensione stessa rispetto alla superficie su cui agisce

$$F = - \int_A \sigma_r \sin \theta dA = - \int_0^{\pi} \sigma_r \sin \theta h r d\theta = -2 h_e r_e \sigma_r \quad (\text{A2.4})$$

Uguagliando in modo opportuno la forza A.1 alle forze espresse dalle A.2-A.4 e ricordando la soluzione del seguente integrale

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} = 2 \quad (\text{A2.5})$$

è possibile ricavare le (25) e (58-60).

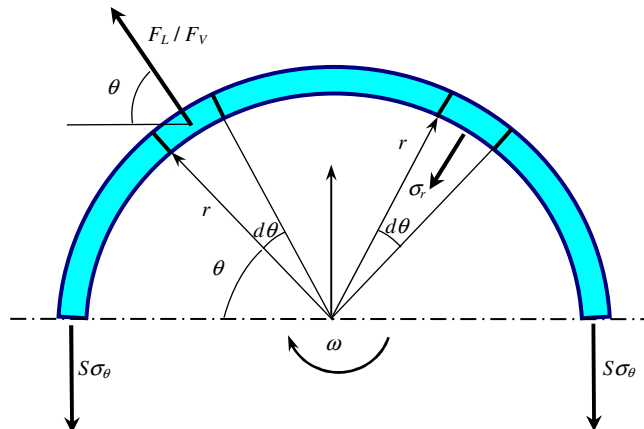


Fig.A2.1 – Equilibrio di un anello sottile soggetto a forze agenti in direzione radiale.

### A3. Confronto stati tensionali per profili differenti

In questa appendice è mostrato un confronto tra le tensioni agenti in dischi rotanti con 4 profili differenti (fig.1): costante, di uniforme resistenza, lineare e iperbolico. I dischi con profilo di uniforme resistenza, lineare e iperbolico hanno uguali spessori ai bordi interno ed esterno, mentre il disco di spessore costante ha spessore pari alla media di quello di uniforme resistenza.

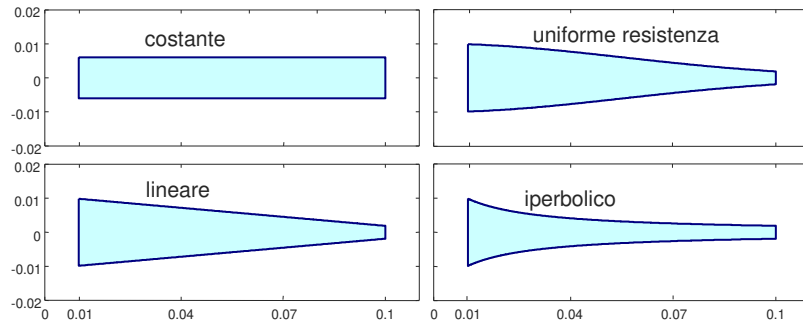


Fig. A3.1 - I profili dei dischi analizzati.

Il confronto è effettuato nel caso di tensioni radiali al contorno nulle (dischi solo rotanti), i cui risultati sono riportati in fig.2, e nel caso puramente teorico in cui sono presenti tensioni radiali di trazione a bordi interno ed esterno, al fine di ottenere tensioni costanti per il disco di uniforme resistenza (fig.3). I dati utilizzati sono:  $\omega=2512$  rad/sec,  $\mu=7870$  kg/m<sup>3</sup>,  $0.01 \leq r \leq 0.1$  m,  $\nu=0.28$ , per entrambi i casi e  $\sigma_{rI} = \sigma_{rE} = \sigma_U = 149 \times 10^6$  Nm<sup>2</sup> per il secondo.

Dalle figure è possibile osservare che: 1) in entrambi i casi, le tensioni più basse si verificano per il disco di uniforme resistenza, 2) le tensioni relative ai profili di uniforme resistenza e lineare sono molto simili, 3) il profilo soggetto alle sollecitazioni maggiori è quello con spessore costante, 4) il disco con profilo iperbolico presenta le tensioni circonferenziali minori al bordo interno.

In pratica, spessori minori verso il bordo esterno (a maggiore distanza dal centro di rotazione) provocano minori sollecitazioni circonferenziali su tutto il disco in quanto è presente meno materiale soggetto ad accelerazioni centripete elevate, mentre spessori maggiori verso il bordo interno riducono le corrispondenti tensioni circonferenziali rispetto al caso di spessore costante, grazie alla maggiore altezza dell'area su cui si distribuisce il carico. In generale, lo spessore decrescente è vantaggioso per il contenimento delle tensioni agenti.

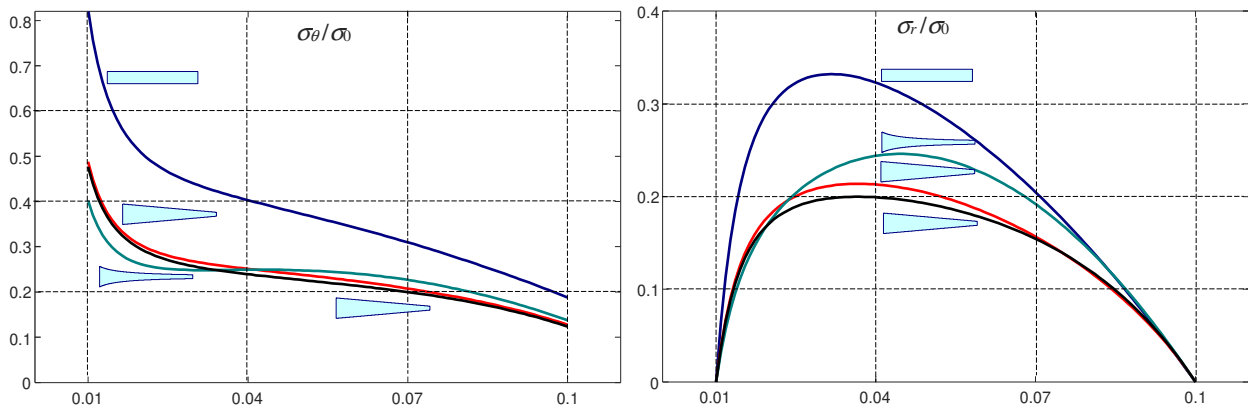


Fig. A3.2 - Tensioni circonferenziali  $\sigma_\theta$  (a sinistra) e radiali  $\sigma_r$  (a destra) normalizzate rispetto a  $\sigma_0$  per il caso di dischi solo rotanti.

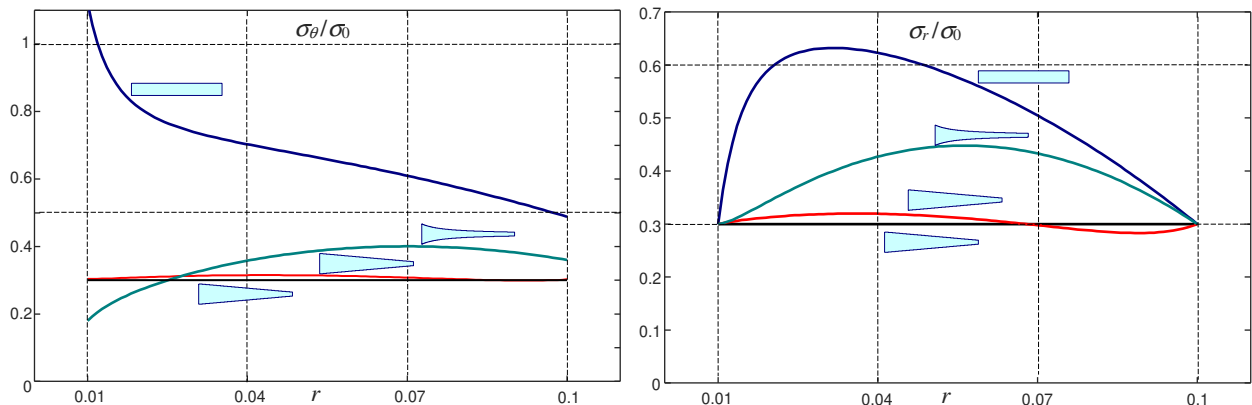


Fig. A3.3 - Tensioni circonferenziali  $\sigma_\theta$  (a sinistra) e radiali  $\sigma_r$  (a destra) normalizzate rispetto a  $\sigma_0$  per il caso di disco rotante con tensioni radiali pari a quelle di uniforme resistenza ai bordi interno ed esterno.