

19. FATICA OLIGOCICLICA – PROPAGAZIONE DELLA FRATTURA

Fatica oligociclica

L'approccio al problema della fatica basato sulle tensioni considera le tensioni presenti nell'elemento a livello macroscopico piuttosto che quelle massime, superiori al limite elastico, agenti in zone microscopiche e che causano effettivamente la propagazione del danno.

L'approccio basato sulla deformazione (strain-life theory 1950-1960), differentemente, mette in relazione la vita dell'elemento con le deformazioni (reali) plastiche localizzate dalle quali le cricche di fatica si innescano e che si verificano nelle zone di concentrazione di tensione o in vicinanza di difetti.

L'approccio basato sulla deformazione è particolarmente indicato nel caso di sollecitazioni tali da causare deformazioni plastiche in zone macroscopiche del materiale e, di conseguenza, una durata costituita da un basso numero di cicli (*fatica oligociclica*), ma, in realtà, è un approccio completo che permette delle stime anche nel caso di lunghe durate in caso di plasticizzazioni molto localizzate.

Nella pratica il problema della *fatica oligociclica* si verifica in vari casi nei quali le sollecitazioni possono raggiungere per brevi periodi livelli estremamente elevati. In questo caso le curve $\sigma_a \text{ nom} - N_r$ non si prestano a stime accurate. Le condizioni della fatica oligociclica sono caratterizzate dalla forma del ciclo di isteresi imposto al materiale, in particolare il parametro che governa la rottura è l'ampiezza della deformazione che è legata alla tensione in modo complesso. Serve, cioè, un diagramma che leghi l'ampiezza della deformazione $\Delta \varepsilon_i$ al numero di cicli a rottura N_r .

Per caratterizzare il materiale, inoltre, non è sufficiente il diagramma $\sigma - \varepsilon$ ottenuto con il carico variabile in modo monotono, ma è necessario avere a disposizione la *curva ciclica* che mette in relazione la deformazione totale $\Delta \varepsilon_i$ (o plastica $\Delta \varepsilon_p$) con la variazione dello sforzo $\Delta \sigma$ per cicli di isteresi stabilizzati.

Le curve di Coffin-Manson $\Delta \varepsilon - N_r$

Nella fatica ad alto numero di cicli la maggior parte del materiale è soggetto a deformazioni elastiche e solo in piccolissime zone si hanno deformazioni plastiche cicliche. Queste ultime sono comunque limitate e il ciclo di isteresi che si realizza nel materiale tende ad essere molto stretto. Nella fatica a basso numero di cicli ($N < 10^3$) si hanno deformazioni plastiche anche a livello macroscopico e la componente plastica della deformazione è tanto ampia da rendere quella elastica trascurabile.

In questo capitolo deformazioni e tensioni reali saranno indicate semplicemente come ε e σ , mentre quelle nominali come ε_N e σ_N . Si ricordano le definizioni di deformazione e tensione reale e le relazioni con quelle nominali:

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL_i}{L_i} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(1 + \varepsilon_N) = \ln \frac{A_0}{A} \quad \sigma = \frac{F}{A} = \sigma_N (\varepsilon_N + 1) \quad (19.1,2)$$

L'ampiezza totale del ciclo di deformazione reale mostrato in fig.1 è data dalla (12.15) qui riscritta

$$\Delta \varepsilon = 2\varepsilon_a = 2\varepsilon_{ae} + 2\varepsilon_{ap} = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p = \frac{\Delta \sigma}{E} + \Delta \varepsilon_p \quad (12.15)$$

nella quale i simboli sono

- ε_a la semi-ampiezza del ciclo di deformazione,
- $\Delta \varepsilon_e$ l'ampiezza della componente elastica,
- $\Delta \varepsilon_p$ l'ampiezza della componente plastica,
- $\Delta \sigma$ l'ampiezza del ciclo di tensione reale.

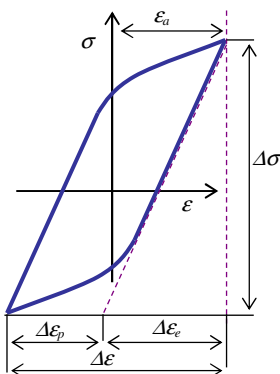


Fig.19.1 - Ciclo di isteresi stabilizzato.

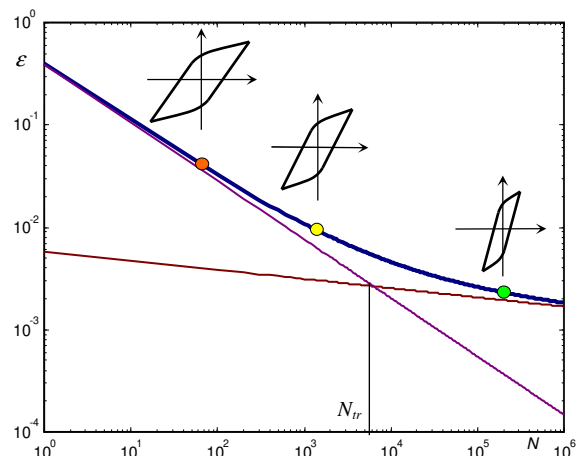


Fig.19.2 - Curve deformazioni-cicli in coordinate doppio logaritmiche.

Le curve deformazione-vita sono curve di fatica (simili a quelle di Whöler) espresse in termini di deformazioni invece che di sforzo, cioè sono diagrammi che legano l'ampiezza di deformazione reale ciclica $\Delta\varepsilon$ al numero di cicli a rottura N_r . La determinazione sperimentale della curva si effettua con macchina servo-controllata, provino cilindrico o a clessidra strumentato con estensimetro per misurare la deformazione puntuale. Si sollecita ciascun provino assialmente in controllo di deformazione tra limiti del campo di deformazione $-\varepsilon_a \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a$, si misura $\Delta\sigma$ e si conta N_r alla rottura determinata dal distacco in 2 parti o da una sensibile riduzione della tensione misurata. In pratica sono le stesse prove effettuate per determinare la curva ciclica, ma portando il provino a rottura.

Poiché nelle prove si impone la deformazione totale e si misura la tensione, l'ampiezza della deformazione elastica $\Delta\varepsilon_e$ è ottenibile dalla tensione dividendo per il modulo di Young e l'ampiezza della deformazione plastica si ottiene per differenza $\Delta\varepsilon_p = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_e$.

Le relazioni che legano la deformazione elastica e quella plastica al numero di cicli di vita sono date rispettivamente da:

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} = \varepsilon_{ae} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b \quad \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_{ap} = \varepsilon'_f (2N)^c \quad (19.3,4)$$

La prima relazione è detta di Basquin (1910), la seconda di Manson-Coffin (1950). Le costanti nelle (3,4) sono relative al materiale e sono rispettivamente:

- b, c esponenti di fatica $(-0.14 < b < -0.06), (-0.7 < c < -0.5)$
- σ'_f coefficiente di resistenza a fatica $(0.80 \sigma_r < \sigma'_f < 1.7 \sigma_r)$
- ε'_f coefficiente di duttilità a fatica $(0.35 \varepsilon_r < \varepsilon'_f < 1.0 \varepsilon_r)$

Sul diagramma bilogarithmico (fig.2) le (3) e (4) sono rette con coefficiente angolare pari a b e c rispettivamente.

σ'_f ed ε'_f si determinano nel diagramma in corrispondenza ad $N=0.5$ (ovvero $2N=1$) e sono simili ai valori di tensione reale e deformazione reale a rottura ottenuti con la prova monotona. Si noti la seguente relazione tra tensione reale e nominale di rottura: $\sigma_r = 1.0 \div 2.0 \sigma_{N_r}$

Dalle relazioni (3) e (4), considerando la deformazione totale, si ottiene la curva di Coffin-Manson per il materiale espressa come:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c \quad (19.5)$$

Il numero di cicli per il quale la componente elastica e la componente plastica della deformazione sono uguali, $\Delta\varepsilon_e = \Delta\varepsilon_p$, viene definito *numero di cicli di transizione* $N_t = 10^3 \div 10^4$ cicli e identifica l'estremo superiore dell'intervallo nel quale si ha la predominanza delle condizioni di fatica oligociclica rispetto a quella a molti cicli.

Come nel caso delle curve di Whöler, la presenza di una tensione media di trazione diminuisce la vita a fatica.

La difficoltà nell'ottenere la deformazione totale in corrispondenza dei punti di concentrazione di tensione limita l'utilità pratica dell'equazione di Coffin-Manson.

Relazioni approssimate

La relazione (5) può essere utilizzata in forma approssimata utilizzando opportuni coefficienti. Come coefficienti b e c possono essere utilizzati i valori tipici (che sono *significativi*), rispettivamente pari a -0.12 e -0.6 , mentre come σ'_f ed ε'_f possono essere utilizzati i valori di tensione e deformazione reale a rottura, dando luogo alla seguente espressione:

$$\Delta\varepsilon = 3.5 \frac{\sigma_r}{E} N^{-0.12} + \varepsilon_r N^{-0.6} \quad (19.7)$$

Per calcoli di prima approssimazione è possibile utilizzare la seguente espressione:

$$\Delta\varepsilon = 2 \frac{\sigma_l}{E} + 0.5 \varepsilon_r N^{-0.5} \quad (19.8)$$

nella quale σ_l è il noto limite di resistenza a fatica.

Propagazione della frattura (legge di Paris)

Come visto precedentemente (cap.14), lo stato tensionale in prossimità di un difetto con raggio di curvatura nullo è caratterizzato dal solo fattore di intensificazione delle tensioni dato dalla seguente espressione

$$K = \beta \sigma_0 \sqrt{\pi a} \tag{14.8}$$

nella quale

- a è la dimensione del difetto,
- β è un fattore adimensionale che dipende dalla geometria elemento-difetto,
- σ_0 una tensione di riferimento, tipica dello stato tensionale agente nell'elemento in assenza del difetto.

Nella maggior parte dei casi la dimensione iniziale dei difetti presenti in un elemento strutturale non è tale da rendere l'elemento stesso inutilizzabile per il livello di tensione esistente, cioè si ha $K < K_c$, tuttavia in presenza di carichi applicati in modo ciclico possono verificarsi le condizioni per le quali il difetto si propaga sino al raggiungimento delle condizioni critiche.

Nel caso in cui la tensione σ_0 varia costantemente tra valori σ_{min} e σ_{max} , cioè si ha $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$, lo stato di sollecitazione può essere caratterizzato mediante la *variazione* del fattore di intensificazione. È importante notare che, poiché gli sforzi di compressione non provocano propagazione della frattura, cicli aventi la stessa σ_{max} , ma differente σ_{min} *negativa*, hanno lo stesso effetto. Al contrario, a parità di $\Delta\sigma$, la presenza di una $\sigma_{min} > 0$ accelera la propagazione. Tipicamente questo effetto si mette in relazione al parametro $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$: il caso "critico" è quello del carico pulsante nel quale si ha $\sigma_{min} = 0$ ed $R = 0$, mentre per $\sigma_{min} > 0$ si ha $0 < R < 1$. Nel caso di riferimento per il quale $\sigma_{min} \leq 0$ ed $R \leq 0$, si può ritenere $\Delta\sigma \approx \sigma_{max}$ e la variazione di K può essere espressa come

$$\Delta K = \sigma_{max} \beta \sqrt{\pi a} = K_{max} \quad \sigma_{min} \leq 0 \tag{19.9}$$

Come detto, deve essere $K_{max} < K_c$ altrimenti si ha rottura sin dal primo ciclo.

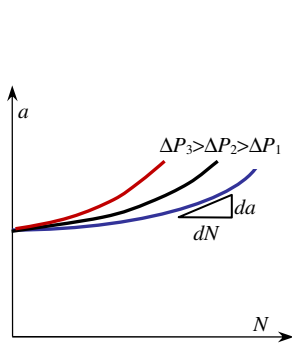


Fig.19.3 – Lunghezza del difetto in elementi soggetti a diversi valori di ΔP al crescere del numero di cicli applicati.

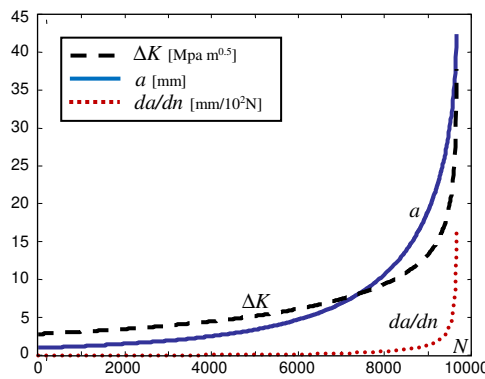


Fig.19.4 – Andamento di ΔK , di a e da/dN al crescere dei cicli in una lastra di acciaio AISI 4340 con difetto centrato, soggetta a trazione con $\Delta\sigma$ costante.

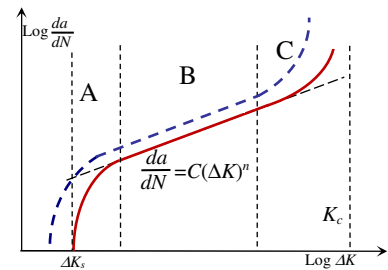


Fig.19.5 – Velocità di propagazione del difetto al variare di ΔK .

Nei test di laboratorio il ΔK viene espresso in modo conveniente rispetto al carico applicato P come segue

$$\Delta K = \frac{P_{max}}{A} \beta \sqrt{\pi a} \quad P_{min} \leq 0 \tag{19.10}$$

essendo A l'area della sezione del provino.

In fig.(3) sono riportate le curve $a(N)$ che rappresentano la dimensione a del difetto in 3 provini uguali ciascuno dei quali è sottoposto a cicli di carico di ampiezza ΔP_i costante, diversa per i tre, al crescere del numero dei cicli stessi. La pendenza delle curve da/dN , espressa in [m/ciclo] o [mm/ciclo], è la *velocità di propagazione del difetto* che è il parametro fondamentale nella determinazione della vita a fatica di elementi in presenza di frattura. Si nota che la velocità di propagazione risulta maggiore per ΔP maggiori, come è logico aspettarsi, e che, nel corso della prova, aumenta all'aumentare della dimensione del difetto stesso. Ciò è dovuto al fatto che, al crescere di a , in base alla (10) aumenta anche ΔK . Si noti che nella (10) varia anche β , poiché, tipicamente, può essere considerato costante solo per piccoli intervalli della lunghezza di frattura, cioè $\beta = \beta(a)$. In fig.4 è mostrato il caso di una lastra rettangolare tipo quella di fig.14.1 avente larghezza $b=500$ mm, spessore $t=10$ mm, altezza $h > 1.5b$, sottoposta ad un carico $\Delta P=50000$ N con $R=0.05$, difetto iniziale centrato di lunghezza iniziale $a=1.0$ mm, in acciaio AISI 4340.

Se si effettuano delle prove imponendo cicli di carico compresi tra i valori P_{min} e P_{max} , misurando a e *calcolando* il valore di ΔK , e si riportano i risultati sperimentali in un grafico con $\text{Log} \Delta K$ in ascissa e $\text{Log}(da/dN)$ in ordinata (fig.5), si osserva un valore di soglia ΔK_s al di sotto della quale la cricca non si propaga e si possono distinguere tre diverse modalità di propagazione in funzione di ΔK :

- $\Delta K < \Delta K_s$ il difetto non si propaga ($\Delta K_s < 4 \text{ Mpa m}^{0.5}$ acciai),
- A propagazione a livello microscopico,
- B velocità di propagazione crescente con legge lineare (in coordinate logaritmiche),
- C propagazione rapida.

Poiché la propagazione del difetto dipende solo da K , i dati ricavati da provini di varia forma in laboratorio possono essere estesi alle strutture reali costruite con lo stesso materiale.

Nella zona B la velocità di propagazione è legata a ΔK con legge data dalla seguente equazione

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n = C \left(\sigma_{\max} \beta \sqrt{\pi a} \right)^n \quad (19.11)$$

nella quale C ed n sono costanti dipendenti dal materiale. In pratica il termine a destra della (11) può essere pensato come l'incremento di lunghezza della frattura provocato da un ciclo per un certo valore di ΔK . Passando ai logaritmi la legge diventa lineare ed è detta legge di Paris (1960):

$$\text{Log} \frac{da}{dN} = \text{Log} C \Delta K^n = \text{Log} C + n \text{Log} \Delta K \quad (19.12)$$

Si osserva che, a parità di ΔK , al crescere della tensione σ_{\min} e quindi di R , le velocità di propagazione risultano più elevate, ma in modo non molto sensibile nella zona B.

Per i materiali metallici n varia tipicamente tra 2.7 e 4. Dal punto di vista dimensionale, la costante C deve fornire una velocità di avanzamento [lunghezza frattura/numero di cicli] per unità del valore di ΔK [$\text{MPa m}^{0.5}$]. La lunghezza della frattura può essere espressa in metri o millimetri. Nel caso di fig.4 le costanti del materiale sono $n=2.715$ e $C=1.21 \cdot 10^{-8}$ [mm/ciclo ($\text{MPa m}^{0.5}$) $^{-n}$].

C può anche essere ottenuta come $C=(1/\Delta K_r)^n$ essendo $\Delta K_r=1.0 \div 6.2$ una costante relativa al materiale data dal valore di ΔK che provoca una velocità di avanzamento pari a 10^{-6} mm/ciclo.

La relazione di Paris può essere utilizzata per determinare l'avanzamento di una cricca in seguito all'applicazione di un certo numero di cicli o il numero di cicli necessario per fare avanzare la cricca da una dimensione iniziale ad una finale, mediante integrazione analitica o numerica.

Sempre nel caso di $\sigma_{\min} \leq 0$ ed $R \leq 0$, ricordando la (9), la (11) può essere riscritta come segue

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n = C \left(\sigma_{\max} \beta \sqrt{\pi a} \right)^n = C \sqrt{\pi}^n (\sigma_{\max} \beta)^n \sqrt{a}^n \quad (19.13)$$

Separando le variabili, si ottiene

$$\frac{da}{\sqrt{a}^n} = C \sqrt{\pi}^n (\sigma_{\max} \beta)^n dN \quad (19.14)$$

Integrando da un valore di lunghezza del difetto iniziale a_i ad un valore finale generico a_f , corrispondente al numero di cicli N_f , la (14) diventa

$$\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\sqrt{a}^n} = C \sqrt{\pi}^n \int_{N_i}^{N_f} (\sigma_{\max} \beta)^n dN \quad (19.15)$$

La soluzione teorica dell'integrale a sinistra della (7) fornisce:

$$\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{\sqrt{a}^n} = \int_{a_i}^{a_f} a^{-n/2} da = \frac{a_f^{1-n/2}}{1-n/2} - \frac{a_i^{1-n/2}}{1-n/2} = \frac{a_f^{n'} - a_i^{n'}}{n'} \quad (19.16)$$

avendo posto $n'=1-n/2$. Considerando un intervallo di crescita di a tale da poter considerare *quasi costante* anche β , l'integrale a destra della (15) diviene semplicemente:

$$\left(\Delta \sigma \beta \right)^n \int_{N_i}^{N_f} dN = \left(\sigma_{\max} \beta \right)^n (N_f - N_i) \quad (19.17)$$

Mediante le (16) e (17), la (15) permette di ottenere la lunghezza della cricca per dato numero di cicli N_f :

$$a_f = \left[C'' (\sigma_{\max} \beta)^n (N_f - N_i) + a_i^{n'} \right]^{1/n'} \quad (19.18)$$

avendo posto $C' = C \pi^{n/2}$ e $C'' = n' C'$, o il numero di cicli necessari al raggiungimento della lunghezza a_f :

$$N_f = \frac{a_f^{n'} - a_i^{n'}}{C'' (\sigma_{\max} \beta)^n} + N_i \quad (19.19)$$

Nel caso di cicli con ampiezza $\Delta\sigma$ costante, se $N_i=0$ e a_f è la lunghezza che provoca la rottura, cioè $a_f=a_c$, dalla (19) si ottiene:

$$\sigma_{\max}^n N_f = \frac{a_c^{n'}}{\beta^n C''} = \text{cost} \quad (19.20)$$

che è l'equazione corrispondente al tratto a vita finita del diagramma di Wohler ($\sigma N^{1/n}=K'$).

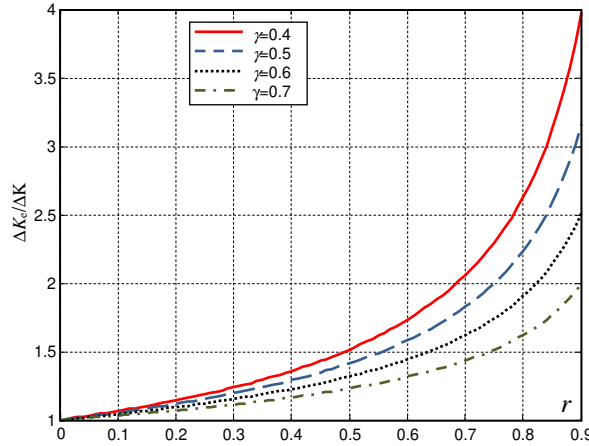


Fig. 19.6 - Rapporto tra ΔK_e e ΔK al variare di r per diversi valori di γ

Effetto di $R>0$

L'effetto di $R>0$, ovvero $\sigma_{\min}>0$, sulla propagazione della frattura può essere previsto con equazioni empiriche delle quali la più utilizzata è l'equazione di Walker. Essa prevede l'introduzione di un ΔK equivalente, funzione di R , al posto di ΔK . Nel caso di $\sigma_{\min}>0$, per il quale $\Delta\sigma=\sigma_{\max}-\sigma_{\min}$, ΔK può essere espresso come segue:

$$\Delta K = \Delta\sigma \beta \sqrt{\pi a} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \beta \sqrt{\pi a} = \left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right) \sigma_{\max} \beta \sqrt{\pi a} \quad (19.21a)$$

da cui, in base alla (9) e utilizzando la definizione di R , si ottiene:

$$\Delta K = (1-R) K_{\max} \quad (19.21b)$$

Il ΔK equivalente, secondo Walker, ha la seguente definizione:

$$\Delta K_e = (1-R)^\gamma K_{\max} \quad (19.22)$$

nella quale γ è una costante relativa al materiale; ad es. per acciaio AISI 4230 $\gamma=0.46$, per leghe di alluminio 7075-T6 e 2024-T3, $\gamma=0.64$ e $\gamma=0.68$, rispettivamente.

Effettuando semplici passaggi sulla (22) si può esprimere il ΔK_e in funzione del ΔK (21b):

$$\Delta K_e = (1-R)^\gamma \frac{1-R}{1-R} K_{\max} = \frac{(1-R)^\gamma}{1-R} \Delta K = \frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} = \frac{\Delta\sigma}{(1-R)^{1-\gamma}} \beta \sqrt{\pi a} \quad (19.23)$$

In pratica, il termine a denominatore amplifica ΔK_e all'aumentare di σ_{\min} , ma in misura inversamente proporzionale al valore di γ , che quantifica le differenti sensibilità del materiale (fig.6).

Introducendo la *tensione equivalente di Walker*

$$\Delta\sigma_e = \frac{\Delta\sigma}{(1-R)^{1-\gamma}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{(1 - \sigma_{\min}/\sigma_{\max})^{1-\gamma}} = \frac{\sigma_{\max}}{(1 - \sigma_{\min}/\sigma_{\max})^{-\gamma}} \quad (19.24)$$

ΔK_e può essere riscritto come segue

$$\Delta K_e = \Delta\sigma_e \beta \sqrt{\pi a} \quad (19.25)$$

Introducendo la (25) nell'equazione di Paris si ottiene un'espressione della velocità di avanzamento valida nel caso di valori di R positivi non prossimi a 0:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_e^n = C \left(\Delta \sigma_e \beta \sqrt{\pi a} \right)^n \quad (19.26)$$

In base alla (26), le eq.(13-20) possono essere riscritte introducendo $\Delta \sigma_e$ al posto di σ_{\max} per tenere conto dell'effetto di $R > 0$, ovvero della presenza di una $\sigma_{\min} > 0$.

Cicli a $\Delta \sigma$ ed R variabili - Procedure numeriche di valutazione della propagazione a frattura

Nel caso generale la sequenza di carico è costituita da cicli aventi ampiezze $\Delta \sigma$ e valori di R variabili, cioè

$$\Delta \sigma_k = \sigma_{\max_k} - \sigma_{\min_k} \quad R_k = \sigma_{\min_k} / \sigma_{\max_k} \quad (19.27,28)$$

per ciascuno dei quali può essere valutato un valore $\Delta \sigma_{e_k}$ in base alla (9) o alla (24) a seconda del valore di σ_{\min} :

$$\Delta \sigma_{e_k} = \sigma_{\max_k} \quad \sigma_{\min} \leq 0 \quad \Delta \sigma_{e_k} = \frac{\Delta \sigma_k}{(1 - R_k)^{1-\gamma}} \quad \sigma_{\min} > 0 \quad (19.29a,b)$$

In questo caso l'integrale a destra della (15) non può essere risolto secondo la (17) per ottenere la lunghezza della frattura a_f ed è necessario considerare l'effetto di ciascun ciclo separatamente trasformando la (18) nella seguente sommatoria

$$a_N = \left[C'' \sum_{k=1}^N (\Delta \sigma_{e_k} \beta)^n + a_i^{n'} \right]^{1/n'} \quad (19.30)$$

nella quale l'indice k si riferisce a ciascun ciclo, N è il numero totale dei cicli, a_i la lunghezza iniziale della frattura e $C'' = n' C' = n' C \pi^{n/2}$ come per la (18). Anche questa relazione può essere utilizzata per numeri di cicli N durante i quali β può essere supposto costante.

Come visto, le relazioni (18) e (30) possono essere utilizzate nel caso in cui sia possibile ipotizzare la costanza del termine β per un certo intervallo della lunghezza di frattura. Nel caso più generale, al fine di determinare il numero di cicli necessario per raggiungere una certa lunghezza di frattura o, viceversa, la lunghezza di frattura per un numero di cicli assegnato, l'eq.(15) può essere riscritta nel seguente modo, separando la geometria elemento-difetto dalla storia di carico:

$$\frac{1}{C} \int_{a_1}^{a_N} (\beta \sqrt{\pi a})^{-n} da = \int_0^N \Delta \sigma_e^n dN \quad (19.31)$$

Ponendo

$$A_N = \frac{1}{C} \int_{a_1}^{a_N} (\beta \sqrt{\pi a})^{-n} da \quad S_N = \int_0^N \Delta \sigma_e^n dN \quad (19.32,33)$$

la (31) può essere riscritta semplicemente come

$$A_N = S_N \quad (19.34)$$

Introducendo il seguente parametro, dipendente esclusivamente dalla geometria elemento-difetto,

$$\alpha = \beta \sqrt{a} \quad (19.35)$$

ricordando le (29a,b) e che $C' = C \pi^{n/2}$, le (32) e (33) possono essere scritte come

$$A_N = \frac{1}{C'} \int_{a_1}^{a_N} \alpha^{-n} da \quad S_N = \sum_{j=1}^N \Delta \sigma_{e_j}^n \quad (19.36,37)$$

La (36) dipende dalla geometria elemento-difetto, tramite il parametro α (35), e dal materiale, tramite l'esponente n . In generale, dalla semplice conoscenza della funzione $\beta(a)$ in forma analitica o numerica, è possibile valutare numericamente la funzione A_N per diversi valori della lunghezza della frattura a_N mediante la (36). In particolare è possibile definire un insieme discreto di valori della lunghezza di frattura nel suo campo di interesse

$$a_k = a_i + k \Delta a \quad (19.38)$$

con Δa sufficientemente piccolo, e determinare i corrispondenti valori assunti da A_N

$$A_k = \frac{1}{C'} \int_{a_1}^{a_k} \alpha^{-n} da \quad (19.39)$$

La funzione S_N (37), a sua volta, dipende dalla sequenza di carico e dalle caratteristiche del materiale tramite l'esponente n . Essa può essere valutata per numeri di cicli k crescenti da 1 al massimo numero di interesse mediante la seguente relazione

$$S_k = \sum_{j=1}^k \Delta \sigma_{e_j}^n \quad (19.40)$$

Per determinare la lunghezza della frattura a_N per assegnato numero di cicli N è possibile applicare una procedura numerica che consiste nei seguenti passi:

- 1) determinazione di S_N mediante la (37);
- 2) determinazione di una serie di valori di A_k mediante le (38,39);
- 3) determinazione di A_N , come il valore di A_k più vicino al valore di S_N ottenuto, in base alla (34);
- 4) determinazione della lunghezza di frattura a_N come il valore di a_k (38) cui corrisponde il valore di A_N determinato al punto 3.

I punti 3) e 4) possono essere sintetizzati mediante una relazione del tipo

$$a_N : \min_{a_k} \{ |S_N - A_k| \} \quad (19.41)$$

Per determinare il numero di cicli N necessario per propagare la frattura fino ad una lunghezza a_N assegnata è possibile applicare una procedura numerica simile alla precedente (nella quale i ruoli delle funzioni A_N ed S_N sono invertiti) che consiste nei seguenti passi:

- 1) determinazione di A_N mediante la (36);
- 2) determinazione di una serie di valori di S_k mediante la (40);
- 3) determinazione di S_N , come il valore di S_k più vicino al valore di A_N ottenuto, in base alla (34);
- 4) determinazione del numero di cicli N come il valore k cui corrisponde il valore S_N determinato al punto 3.

Analogamente al caso precedente, i punti 3) e 4) possono essere sintetizzati mediante una relazione del tipo

$$N : \min_k \{ |A_N - S_k| \} \quad (19.42)$$

Le procedure sono sintetizzate in tab.1.

Nel caso di ampiezza costante dei cicli di tensione equivalente di Walker, S_N può essere valutato come

$$S_N = N \Delta \sigma_e^n \quad (19.43)$$

e la determinazione del numero di cicli N necessario per la propagazione della frattura dalla lunghezza a_i alla lunghezza a_N può essere effettuata molto semplicemente in base alla (34) come

$$N = \frac{A_N}{\Delta \sigma_e^n} \quad (19.44)$$

avendo valutato A_N con la (36).

Incognita	Valore calcolato direttamente	Vettore di dati	Condizione
a_N	$S_N = \sum_{j=1}^N \Delta \sigma_{e_j}^n$	$A_k = \frac{1}{C'} \int_{a_1}^{a_k} \alpha^{-n} da$	$a_N : \min_{a_k} \{ S_N - A_k \}$
N	$A_N = \frac{1}{C'} \int_{a_1}^{a_N} \alpha^{-n} da$	$S_k = \sum_{j=1}^k \Delta \sigma_{e_j}^n$	$N : \min_k \{ S_k - A_N \}$

Tab19.1 - Sintesi delle formule per la determinazione di a_N ed N .

In alternativa alle procedure descritte, l'evoluzione della frattura può essere determinata effettuando una procedura iterativa basata sulla seguente relazione che lega la lunghezza della frattura al ciclo di sollecitazione k -esimo alla lunghezza raggiunta nel ciclo di sollecitazione precedente ($k-1$ -esimo):

$$a_k = a_{k-1} + C \Delta K_{e_k}^n = a_{k-1} + C \left(\Delta \sigma_{e_k} \beta_{k-1} \sqrt{\pi a_{k-1}} \right)^n \quad (19.45)$$

Se si pone $a_1=a_i$ e $\Delta\sigma_{e_1}=0$, ricordando la (35), per $k>1$, la (45) può essere riscritta come

$$a_k = a_{k-1} + C' \alpha_{k-1}^n \Delta\sigma_{e_k}^n \quad (19.46)$$

Al generico passo dell'iterazione, dopo avere determinato la lunghezza a_k mediante la (46), deve essere determinato il corrispondente valore di α_k da introdurre nella (47) stessa alla successiva iterazione

$$\alpha_k = \beta_k \sqrt{a_k} \quad (19.47)$$

avendo calcolato il valore di β_k in base alla lunghezza a_k .

In alternativa è anche possibile calcolare dei valori α_k per un insieme discreto di valori a_k (38) prima di effettuare l'iterazione. Durante l'iterazione è possibile determinare l'indice k_0 cui corrisponde l'elemento a_k più vicino al valore a_k assunto dalla frattura e risalire al corrispondente valore di α_k

$$k_0 = \text{int}[(a_k - a_i) / \Delta a] + 1 \quad \alpha_k \rightarrow \alpha_{k_0} \quad (19.48,49)$$

essendo $\text{int}[\]$ l'operatore che restituisce la parte intera di un numero.

L'iterazione deve essere ripetuta fino al raggiungimento di una condizione riguardante il valore critico di K_{\max} e/o la lunghezza della frattura e/o il numero di cicli effettuato, cioè fino a quando sono verificate condizioni del tipo

$$K_{\max_k} < K_c \quad a_k < a_0 \quad k < N \quad (19.50a-c)$$

Al primo passo dell'iterazione $k=1$, si determinano le seguenti grandezze

$$a_1 = a_i \quad \alpha_1 = \beta_1 \sqrt{a_1} \quad K_{\max_1} = \sigma_{\max_1} \sqrt{\pi} \alpha_1 \quad (19.51a-c)$$

Nei passi successivi, *a partire da $k=2$* , devono essere valutate in sequenza la (46) e la (47) o le (48,49); inoltre, se si utilizza la condizione (50a), si deve calcolare anche

$$K_{\max_k} = \sigma_{\max_k} \sqrt{\pi} \alpha_k \quad (19.52)$$

Dimensioni delle costanti e delle variabili

Nei calcoli di propagazione della frattura è necessario prestare attenzione al fatto che:

- nell'espressione di ΔK la lunghezza della frattura a deve essere espressa in metri e la tensione $\Delta\sigma$ in MPa, cioè $[\text{N}/\text{mm}^2]$;
- la costante C è spesso espressa con dimensioni che permettono di ottenere lunghezze in millimetri, cioè $[\text{mm}/\text{ciclo} (\text{MPa m}^{0.5})^{-n}]$;
- il parametro β dipende dalla lunghezza della frattura a che, spesso, viene introdotta nelle formule in forma adimensionale, dividendo a per una dimensione di riferimento del componente analizzato L , cioè $\beta=\beta(a/L)$.

È opportuno che il calcolo delle tensioni $\Delta\sigma$ presenti nel fattore ΔK venga effettuato esprimendo il carico in Newton e le dimensioni del componente coinvolte nel calcolo in millimetri.

Nei calcoli iterativi è possibile valutare a in millimetri e moltiplicarne il valore ottenuto per 10^{-3} prima dell'introduzione nella formula per la valutazione del ΔK_e , ovvero della valutazione di α_k secondo la (47). In alternativa è possibile valutare direttamente a in metri, moltiplicando, se necessario, la costante C per 10^{-3} . Se si utilizzano valori di α_k valutati preventivamente in funzione di lunghezze a_k , tali lunghezze devono essere state espresse in metri, quindi è necessario moltiplicare la costante C per 10^{-3} durante l'iterazione o nella valutazione dei valori $\Delta\sigma_{e_k}$.

Se nell'espressione del parametro β la lunghezza della frattura a è resa adimensionale dividendo per una dimensione di riferimento del componente L , le due dimensioni devono essere espresse nella *stessa unità di misura*, quindi, se si è scelto di esprimere a in metri, anche L deve essere convertito in metri per il calcolo iterativo.

Ad esempio, nel caso di lastre soggette ad una variazione di carico ΔF [N], si ha $\Delta\sigma=\Delta F/(L t)$ e $\beta=\beta(a/L)$, essendo L la larghezza della lastra e t lo spessore.

In questo caso:

- per il calcolo di $\Delta\sigma$, L deve essere espresso in *millimetri* per il calcolo iniziale di $\Delta\sigma$;
- durante le iterazioni, se si esprime a in metri, anche L deve essere espresso *metri*.

Propagazione della frattura per sollecitazioni costituite da processi aleatori

Nel paragrafo precedente sono state introdotte le relazioni (34, 36 e 37) utili a determinare il numero N di cicli di carico ad ampiezza variabile necessario affinché sia raggiunta una certa lunghezza di frattura a_N , o la lunghezza di frattura corrispondente ad un numero di cicli di carico prefissato, qui riscritte:

$$A_N = S_N \quad A_N = \frac{1}{C'} \int_{a_1}^{a_N} \alpha^{-n} da \quad S_N = \sum_{j=1}^N \Delta \sigma_{e_j}^n \quad (19.34,36,37)$$

essendo la variabile α definita nella (35). Le sollecitazioni ad ampiezza variabile sono rappresentate dalle tensioni equivalenti di Walker $\Delta \sigma_e$ presenti nella (37) e descritte nelle (29a,b).

Nel caso di tensione variabile in modo aleatorio è necessario determinare i cicli di sollecitazione mediante il metodo rainflow in base al quale ogni ciclo è identificato utilizzando una valle e un picco σ_{\min} e σ_{\max} che, in genere, *non sono consecutivi nella storia di carico originale*. Se nell'applicazione del metodo rainflow vengono determinati i valori di ampiezza e valor medio dei cicli m ed r , i corrispondenti valori di σ_{\min} e σ_{\max} devono essere ottenuti come

$$\sigma_{\min} = m - r \quad \sigma_{\max} = m + r \quad (19.53,54)$$

Considerando che i casi di $\sigma_{\min} \leq 0$ (cioè $R \leq 0$) e $\sigma_{\min} > 0$ (cioè $R > 0$) corrispondono rispettivamente a $r \geq m$ ed $m > r$, le (29a,b) diventano rispettivamente:

$$\Delta \sigma_e = \sigma_{\max} = m + r \quad (\sigma_{\min} \leq 0, R \leq 0, r \geq m) \quad (19.55a)$$

$$\Delta \sigma_e = \sigma_{\max} (1 - \sigma_{\min} / \sigma_{\max})^\gamma = (m + r) \left(\frac{2r}{m + r} \right)^\gamma \quad (\sigma_{\min} > 0, R > 0, m > r) \quad (19.55b)$$

Sempre nel caso di sollecitazioni variabili in modo aleatorio la (19.34) può essere riscritta come

$$S_N = N \Delta \bar{\sigma}_e^n \quad (19.56)$$

essendo $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ il valor medio di $\Delta \sigma_e^n$ definito come:

$$\Delta \bar{\sigma}_e^n = E[\Delta \sigma_e^n] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta \sigma_{e_j}^n \quad (19.57)$$

Nel caso in cui sia nota la funzione densità di probabilità congiunta dei valori σ_{\min} e σ_{\max} dei cicli di fatica $p_{\sigma_{\min}, \sigma_{\max}}$, in base alla definizione di $\Delta \sigma_e$ in (55a,b), $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ può essere ottenuto mediante la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}_e^n = E[\Delta \sigma_e^n] = & \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \sigma_{\max}^n p_{\sigma_{\min}, \sigma_{\max}} d\sigma_{\min} d\sigma_{\max} + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\max}^n \left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)^{\gamma n} p_{\sigma_{\min}, \sigma_{\max}} d\sigma_{\min} d\sigma_{\max} \end{aligned} \quad (19.58)$$

Da notare che il campo di integrazione di σ_{\max} è esteso da 0 ad infinito, in quanto cicli con σ_{\max} minore di 0 non fanno propagare la frattura, mentre, come ovvio, i campi di integrazione di σ_{\min} sono diversi per i 2 termini della (58).

Nel caso in cui siano note le distribuzione di probabilità dei cicli rainflow per media m e ampiezza r , $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ può essere ottenuto direttamente da essa mediante una delle seguenti espressioni ottenute considerando la (58), le (55a,b) e le (53,54):

$$\Delta \bar{\sigma}_e^n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U_{r-m} (m+r)^n p_{r,m} dr dm + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U_{m-r} (m+r)^n \left(\frac{2r}{m+r} \right)^{\gamma n} p_{r,m} dr dm \quad (19.59a)$$

$$\Delta \bar{\sigma}_e^n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U_{r-m} (m+r)^n p_{r,m} dr dm + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U_{m-r} (m+r)^{n(1-\gamma)} (2r)^{\gamma n} p_{r,m} dr dm \quad (19.59b)$$

nella quali

$$\begin{aligned} U_{r-m} = 1 & \rightarrow r > m & U_{m-r} = 1 & \rightarrow r < m \\ U_{r-m} = 0 & \rightarrow r < m & U_{m-r} = 0 & \rightarrow r > m \end{aligned} \quad (19.60)$$

Ricordando che nel caso di processi aleatori di sollecitazione dei quali sia nota la densità spettrale di potenza (PSD), il numero di cicli N può essere messo in relazione con il tempo T durante il quale si sono verificati mediante la (17.73), cioè $N=T (\lambda_4/\lambda_2)^{0.5}/2\pi$,

- noto il valore di $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ del processo e valutato S_N mediante la (56),
- fissato il numero di cicli N o la durata temporale T ,

è possibile ricavare il valore di A_N mediante la (34) e da esso la lunghezza della frattura (come visto nel paragrafo precedente):

$$A_N = S_N = N \Delta \bar{\sigma}_e^n = T \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} \Delta \bar{\sigma}_e^n \quad (19.61)$$

mentre,

- noto il valore di $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ del processo,
- fissata una lunghezza di frattura a_N e calcolato il corrispondente valore A_N ,

è possibile ottenere il *numero medio di cicli* che occorre per la propagazione, o il *tempo medio*, mediante la seguente relazione ottenuta sostituendo la (56) nella (34) ed esplicitando rispetto ad N o a T

$$N = T \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} = \frac{A_N}{\Delta \bar{\sigma}_e^n} \quad (19.62)$$

Nel caso di processi stazionari gaussiani con PSD *a banda stretta* i cicli di fatica risultano praticamente alternati simmetrici e si ha sempre $\sigma_{\min} \leq 0$. In tal caso, in base alla (1), il valore di $\Delta \sigma_e$ di ogni ciclo coincide sempre con il valore σ_{\max} del ciclo e $\Delta \bar{\sigma}_e^n$ può essere ottenuta utilizzando la distribuzione di probabilità dei massimi del processo che è una distribuzione di Rayleigh (17.21 e/o 17.75):

$$\Delta \bar{\sigma}_e^n = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{a_{\max}} \sigma_{\max}^{n+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{\max}^2}{\lambda_0}\right) d\sigma_{\max} \quad (19.63)$$

essendo $a_{\max}=4\lambda_0^{1/2}$, come spiegato nel capitolo (17).

La (63) può essere risolta in forma chiusa ottenendo

$$\Delta \bar{\sigma}_e^n = (2\lambda_0)^{n/2} \Gamma(1+n/2) \quad (19.64)$$

essendo Γ la funzione Gamma, i cui valori sono ottenibili tramite tabella o software di calcolo.