

## 16. LA RESISTENZA A FATICA: EFFETTO DELLA SOLLECITAZIONE MEDIA

I componenti di macchina sono soggetti a storie di carico variabile nel tempo con differenti modalità; in fig.1 sono mostrati alcuni tipici andamenti della tensione rispetto al tempo:

- tensione alternata simmetrica,
- tensione pulsante con ciclo dello zero,
- tensione pulsante.

Nelle figure sono mostrate storie temporali di tipo sinusoidale, ma le definizioni valgono per funzioni delle sollecitazioni di forma differente, ma nelle quali gli estremi (massimi e minimi) rimangono costanti nel tempo.

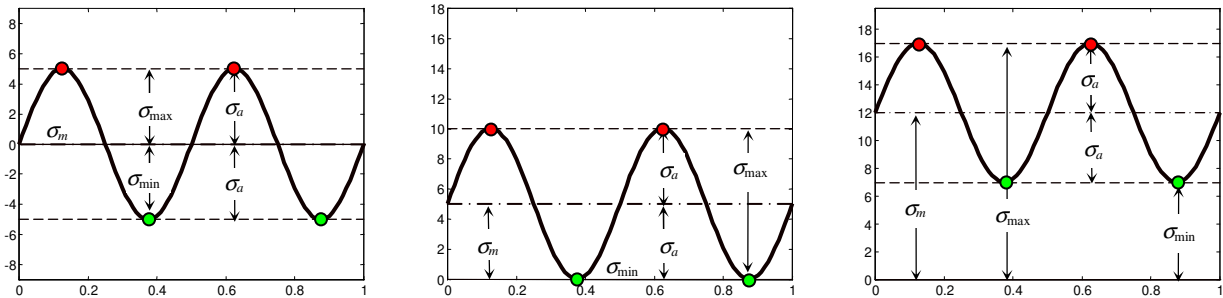


Fig.16.1 - Esempi di storie di carico con diversi valori di tensione media.

In fig.1 sono usati i seguenti simboli:

- $\sigma_{\min}$  tensione minima,
- $\sigma_{\max}$  tensione massima,
- $\sigma_m$  tensione media,
- $\sigma_a$  tensione alternata,

queste ultime definite come:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (16.1,2)$$

L'effetto di sollecitazioni diverse da quella alternata simmetrica sulla vita a fatica può essere ricondotto all'effetto di una tensione media sulla resistenza a fatica per tensione alternata.

Sperimentalmente si osserva che il valore di  $\sigma_f$  corrispondente a un determinato numero di cicli  $N_f$  diminuisce al crescere di una  $\sigma_m$  positiva. Una  $\sigma_m$  negativa è quasi ininfluente poiché le zone di discontinuità nel materiale possono reagire a compressione e non generano zone di concentrazione di tensione.

Per affrontare il problema in teoria si dovrebbe poter disporre delle curve di Wöhler per diversi valori della tensione media. Poiché, in generale, le informazioni a disposizione sono quelle del diagramma di Wöhler per  $\sigma_m=0$ , il problema della vita a fatica in presenza di tensione media è quello di ricondurre la coppia di valori  $\sigma_m, \sigma_a$  (oppure  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ ) effettivamente agenti al valore  $\sigma_f$  cui corrisponde lo stesso numero di cicli di vita  $N_f$  sul diagramma di Wöhler.

Nella caratterizzazione delle sollecitazioni di fatica possono essere utilizzati due ulteriori parametri caratteristici:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R} \quad (16.3a,b)$$

### I diagrammi di Haigh e Goodman-Smith

Le coppie di valori  $\sigma_m, \sigma_a$  cui corrisponde una certa vita  $N_f$  possono essere rappresentate su un piano avente in ascisse il valore  $\sigma_m$  e in ordinate il valore  $\sigma_a$ . Il punto di partenza è sempre il valore  $\sigma_a=\sigma_f$  per  $\sigma_m=0$  che proviene dal diagramma (o dall'equazione) di Wöhler. La tensione  $\sigma_f$  è la resistenza a fatica per la durata  $N_f$  dell'elemento reale che tiene conto di tutti gli effetti relativi a finitura, gradiente e dimensioni. Nel caso di vita infinita naturalmente  $\sigma_f=\sigma_l$ .

Si osserva che i punti sperimentali possono essere interpolati da una curva che viene definita *diagramma di Haigh* (fig.2). Poiché la realizzazione di diagrammi di questo tipo per vari valori di  $N_f$  richiede una mole di dati sperimentali eccessiva, sono stati proposti dei metodi di rappresentazione semplificati che possono essere effettuati dalla semplice conoscenza della corrispondente  $\sigma_f$ , della tensione di snervamento  $\sigma_s$  e di quella di rottura  $\sigma_r$ .

In alternativa è possibile rappresentare i valori  $\sigma_m, \sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  cui corrisponde una certa vita  $N_f$  su un piano avente in ascisse il valore  $\sigma_m$  e in ordinate il valori  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$ . Le curve interpolanti i risultati sperimentali costituiscono il *diagramma di Goodman-Smith*.

**Diagramma di Haigh semplificato**

Il diagramma di Haigh fornisce la tensione alternata  $\sigma_a$  (in ordinate) per fissato numero di cicli di vita  $N_f$  al variare della tensione media  $\sigma_m$  (in ascisse). La sua determinazione richiede una notevole mole di dati sperimentali, di conseguenza sono state proposte delle rappresentazioni approssimate che risultano conservative rispetto a questi ultimi.

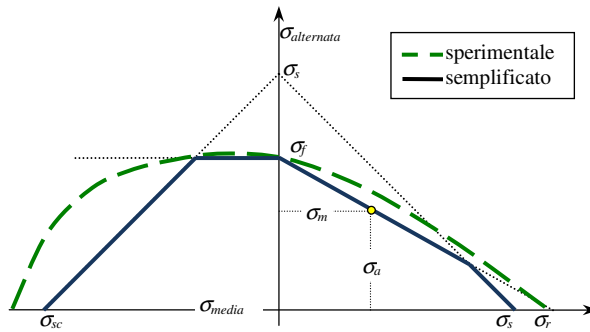


Fig.16.2 - Diagrammi di Haigh sperimentale e semplificato.

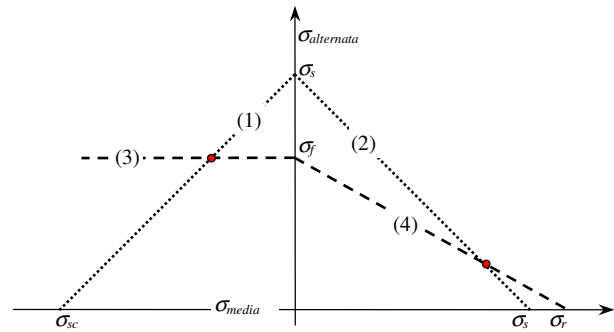


Fig.16.3 - Costruzione del Diagramma di Haigh semplificato.

La fig.2 mostra la curva rappresentativa di un diagramma di Haigh derivato da dati sperimentali e il corrispondente diagramma semplificato che può essere impiegato per scopi di verifica o progetto.

La costruzione del diagramma viene effettuata nei seguenti passi (fig.3):

1. sull'asse  $\sigma_{media}$  si riportano la tensione di snervamento per trazione  $\sigma_s$  e compressione  $\sigma_{sc}$  e la tensione di rottura  $\sigma_r$ , sull'asse  $\sigma_{alternata}$  si riportano la  $\sigma_s$  e il valore di tensione alternata  $\sigma_f$ , corrispondente agli  $N_f$  cicli cui il diagramma è riferito (valore letto sulla curva di Wöhler)
2. si traccia una linea (1) da  $\sigma_{alternata}=\sigma_{sc}$  a  $\sigma_{media}=\sigma_{sc}$  per tensioni medie di compressione,
3. si traccia una linea (2) da  $\sigma_{alternata}=\sigma_s$  a  $\sigma_{media}=\sigma_s$ , per tensioni medie di trazione,
4. si traccia una linea orizzontale (3) da  $\sigma_{alternata}=\sigma_f$  per tensioni medie di compressione,
5. si traccia una linea (4) da  $\sigma_{alternata}=\sigma_f$  a  $\sigma_{media}=\sigma_r$  per tensioni medie di trazione.

La curva limite risultante è la spezzata mostrata in fig.3.

Le linee (1) e (2), dette rette di Langer, delimitano le coppie di valori  $\sigma_m, \sigma_a$  per le quali la tensione massima del ciclo si mantiene al di sotto di quella di snervamento, cioè:  $|\sigma_{max}|=|\sigma_m+\sigma_a|\leq\sigma_s$ . Nella parte delle  $\sigma_{media}>0$  la retta di Langer (2), è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{\sigma_a}{\sigma_s} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_s - \sigma_m \qquad (16.4a,b)$$

la prima delle quali è posta in forma segmentaria, nella quale sono esplicitate entrambe le intersezioni con gli assi.

Le linee (3) e (4) costituiscono una semplificazione delle curve di fatica per tensione media variabile e delimitano i valori  $\sigma_m, \sigma_a$  per i quali la vita a fatica è maggiore o uguale a quella corrispondente a  $\sigma_f$ , cioè:  $N \geq N_f$ . Nella parte delle  $\sigma_{media}>0$  la retta (4), detta retta di Goodman, è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_r} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_f - \frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_m \qquad (16.5a,b)$$

I punti di intersezione delle 2 rette di Langer (1) e (2) con la retta (3) ( $\sigma_a=\sigma_f$ ) e con la retta di Goodman (5) hanno rispettivamente coordinate:

$$\sigma_m = \sigma_f - \sigma_s, \quad \sigma_a = \sigma_f \qquad \sigma_m = \sigma_r \frac{\sigma_f - \sigma_s}{\sigma_f - \sigma_r}, \quad \sigma_a = \sigma_s - \sigma_r \frac{\sigma_f - \sigma_s}{\sigma_f - \sigma_r} \qquad (16.6a-d)$$

Il diagramma di Haigh per tensioni tangenziali medie e alternate deve essere costruito solo nel caso di elementi con intaglio, in quanto in elementi senza concentrazione di tensione una tensione tangenziale media non influisce sulla durata e la retta (4) del diagramma risulta orizzontale.

Il diagramma può essere costruito allo stesso modo di quello per tensioni normali utilizzando come punti limite:

- $\tau_f$ : per  $N_f$  elevato, per materiali duttili,  $0.48\sigma_f < \tau_f < 0.60\sigma_f$ , per materiali fragili  $0.8\sigma_f < \tau_f < 0.9\sigma_f$ ; per valori di  $N_f$  prossimi a 1000 cicli,  $0.67\sigma_f < \tau_f < 0.8\sigma_f$ ;
- $\tau_r$ :  $0.67\sigma_r < \tau_r < 0.8\sigma_r$ , a seconda del materiale.

### Il diagramma di Goodman o Smith semplificato

Il diagramma di Goodman-Smith fornisce le tensioni massima  $\sigma_{max}$  e minima  $\sigma_{min}$  (in ordinate) per fissato numero di cicli di vita  $N_f$ , al variare della tensione media  $\sigma_m$  (in ascisse). Questo diagramma fornisce le stesse informazioni del diagramma di Haigh, ma è particolarmente usato in quanto permette di visualizzare contemporaneamente tutte le componenti di tensione.

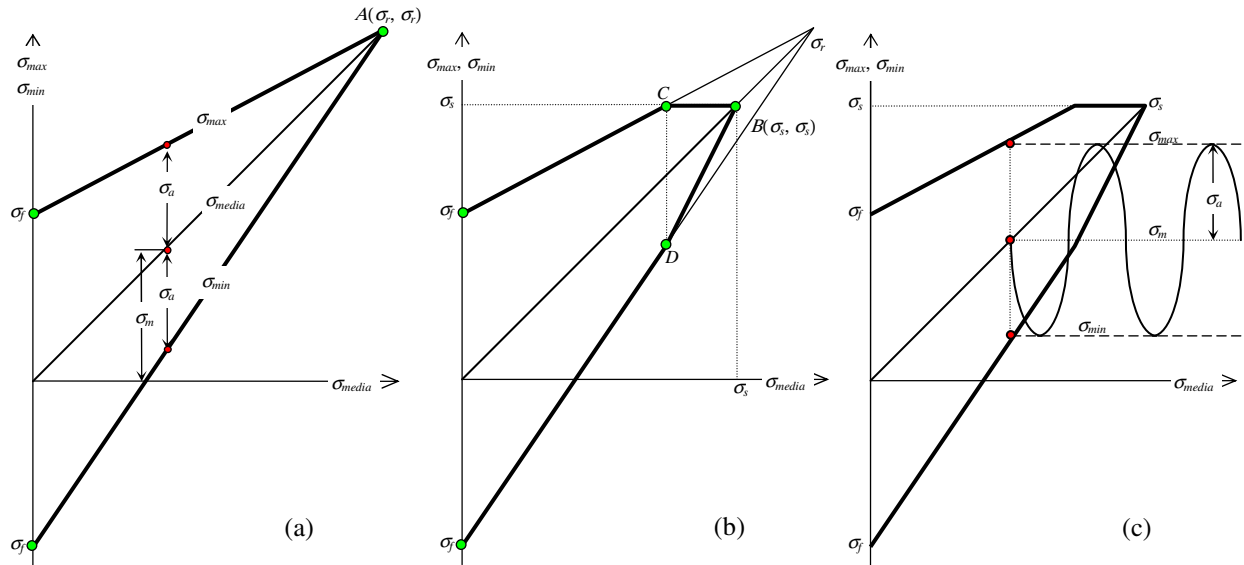


Fig.16.4 - Costruzione del diagramma di Goodman-Smith: (a) i passi da 1 a 3, (b) passi da 4 a 5, (c) esempio.

Il tracciamento del diagramma di Goodman si effettua nei seguenti passi visualizzati in fig.4:

- sull'asse delle ordinate si riportano le tensioni di rottura e snervamento  $\sigma_r$  e  $\sigma_s$  e i valori  $+\sigma_f$  e  $-\sigma_f$ ,
- si traccia la retta  $\sigma_{media}$  che è a  $45^\circ$  dall'origine,
- sulla retta  $\sigma_{media}$  si individua il punto  $A$  corrispondente al valore  $\sigma_r$  e da questo si tracciano le congiungenti con i valori  $+\sigma_f$  e  $-\sigma_f$ , ottenendo le rette  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ ,
- sulla retta  $\sigma_{media}$  si individua il punto  $B$  corrispondente al valore  $\sigma_s$  e da questo si traccia la parallela all'asse  $\sigma_{media}$ , la cui intersezione con la retta  $\sigma_{max}$  è data dal punto  $C$ ,
- dal punto  $C$  si traccia la verticale fino all'intersezione con la retta  $\sigma_{min}$  che è data dal punto  $D$ , quindi si traccia la congiungente tra  $D$  e  $B$ .

Le curve limite risultanti (spezzate) sono rappresentate nella fig.4b,c.

Quando la tensione media è di trazione, il danneggiamento è definito dalla linea di tensione massima  $\sigma_{max}$  o dalla tensione di snervamento.

Quando la tensione media è di compressione, il danneggiamento è definito da due linee parallele a  $+\sigma_f$  e  $-\sigma_f$  nel semipiano delle ascisse negative.

**Verifica a fatica sui diagrammi**

I diagrammi presentati possono essere utilizzati per effettuare calcoli di verifica a fatica e, in taluni casi, anche di progetto. In generale, nella verifica si confronta la tensione limite relativa al materiale con la tensione massima nell'elemento; in particolare il coefficiente di sicurezza  $n$  è dato dal rapporto tra i suddetti valori. Nel caso statico il valore limite è rappresentato in modo univoco dalla tensione di cedimento del materiale,  $\sigma_s$  o  $\sigma_r$ , mentre nel caso della fatica esso deve essere opportunamente determinato in quanto, in generale, la tensione media e la alternata dipendono in modo differente dai carichi agenti.

**Diagramma di Haigh**

Sul diagramma di Haigh (fig.5a-d) lo stato di sollecitazione è rappresentato con un punto  $P$  di coordinate  $[\sigma_a, \sigma_m]$ ; un aumento del carico esterno provoca uno spostamento del punto verso la retta limite in una direzione che dipende dalla nuova combinazione di tensioni medie e alternate che si viene a creare. Al variare dell'entità dei carichi, le tensioni  $\sigma_a, \sigma_m$  possono variare secondo 4 modalità di principale interesse:

1. si mantiene costante il rapporto tra la tensione alternata e la tensione media,
2. si mantiene costante la tensione minima,
3. si mantiene costante la tensione media,
4. si mantiene costante la tensione alternata.

Il luogo dei punti che rappresenta le coppie  $[\sigma_a, \sigma_m]$  al variare del carico esterno in tutti questi casi è una retta passante dal punto di coordinate  $[\sigma_a, \sigma_m]$  assegnato, di inclinazione differente a seconda del caso, definita *retta di carico*.

La retta di carico interseca uno degli assi nel punto  $O'$ , rappresentativo dello stato tensionale che si verifica quando i carichi di fatica si annullano (fig.5a-d).

Il punto limite  $P'$  di coordinate  $[\sigma'_a, \sigma'_m]$ , corrispondente alla situazione assegnata, può essere ottenuto dall'intersezione tra la retta di carico e la retta limite di equazione (5).

Il coefficiente di sicurezza, a sua volta, può essere ottenuto come rapporto tra i segmenti della retta di carico compresi tra il punto  $O'$  e i punti  $P'$  e  $P$  rispettivamente, cioè  $n=O'P'/O'P$ .

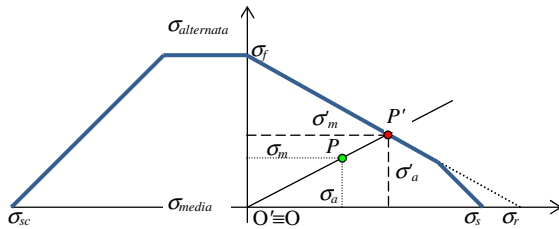


Fig.16.5a – Rapporto  $\sigma_a/\sigma_m$  costante.

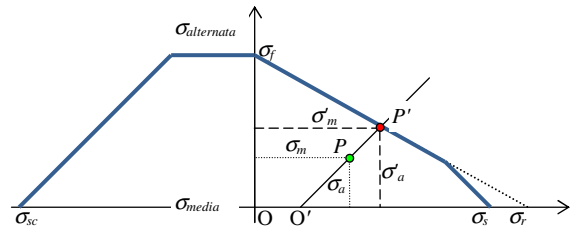


Fig.16.5b – Tensione minima costante.

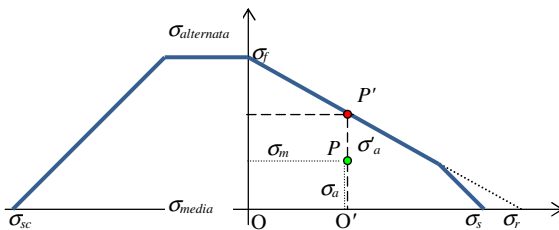


Fig.16.5c - Tensioni medie costanti.

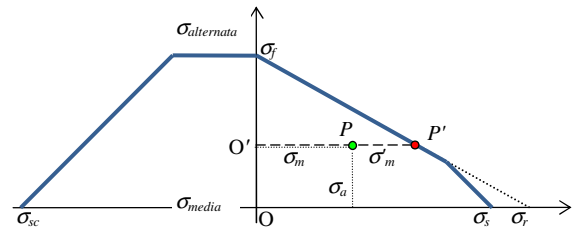


Fig.16.5d – Tensioni alternate costanti.

Nel caso in cui si mantiene costante il rapporto tra la tensione alternata e la tensione media, la retta di carico ha coefficiente angolare  $r=\sigma_a/\sigma_m$  ed equazione  $y=\sigma_a/\sigma_m x$ . Quando i carichi di fatica cessano, infatti, il punto rappresentativo dello stato tensionale  $O'$  coincide con l'origine degli assi e la retta può essere tracciata congiungendo  $O$  con il punto assegnato  $P$  (fig.5a). Il coefficiente di sicurezza è dato dalle seguenti espressioni:

$$n = \frac{O'P'}{O'P} = \frac{OP'}{OP} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} = \frac{\sigma'_m}{\sigma_m} \qquad n = \frac{\sigma_f \sigma_r}{\sigma_m \sigma_f + \sigma_a \sigma_r} = 1 / \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_r} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} \right) \qquad (16.7a-b)$$

essendo

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_m/\sigma_r + \sigma_a/\sigma_f} \qquad \sigma'_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_m/\sigma_r + \sigma_a/\sigma_f} \qquad (16.7c-d)$$

Nel caso in cui il valore della tensione minima  $\sigma_{min}$  si mantiene costante, quindi ad aumentare è la sola  $\sigma_{max}$ , in base alle relazioni (1,2), si osserva che un *incremento* della sollecitazione esterna provoca un *uguale incremento* della tensione media e dell'alternata ( $\Delta\sigma_a = \Delta\sigma_m$ ). In conseguenza di ciò la retta di carico, passando per il punto assegnato  $P$ , forma un angolo di  $45^\circ$  con l'asse orizzontale e assume equazione  $y=x-\sigma_{min}$  (o  $y=x+\sigma_a-\sigma_m$ ) come mostrato in fig.5b. Il punto  $O'$  ha coordinate  $[\sigma_{min}, 0]$ . Il coefficiente di sicurezza è dato dalle seguenti espressioni:

$$n = \frac{O'P'}{O'P} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a} = \frac{\sigma'_m - \sigma_{\min}}{\sigma_m - \sigma_{\min}}, \quad n = \frac{\sigma_a - \sigma_m + \sigma_r}{\sigma_f + \sigma_r} \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (16.8a-b)$$

essendo

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_m - \sigma_a + \sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r} \sigma_r, \quad \sigma'_a = \frac{\sigma_a - \sigma_m + \sigma_r}{\sigma_f + \sigma_r} \sigma_f \quad (16.8c,d)$$

Se la tensione media  $\sigma_m$  si mantiene ragionevolmente costante, la retta di carico è la parallela all'asse  $\sigma_a$  passante dal punto assegnato (fig.5c) di equazione  $x=\sigma_m$ . Al cessare dei carichi il punto  $O'$  assume coordinate  $[\sigma_m, 0]$ . Il coefficiente di sicurezza è dato dalle seguenti espressioni:

$$n = \frac{O'P'}{O'P} = \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}, \quad n = \frac{\sigma_r - \sigma_m}{\sigma_r} \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (16.9a,b)$$

essendo

$$\sigma'_m = \sigma_m, \quad \sigma'_a = \frac{\sigma_r - \sigma_m}{\sigma_r} \sigma_f \quad (16.9c,d)$$

La retta di carico relativa al quarto caso,  $\sigma_a$  costante, è una parallela all'asse  $\sigma_m$  passante dal punto  $P$  assegnato, avente equazione  $y=\sigma_a$ . Al cessare dei carichi il punto  $O'$  assume coordinate  $[0, \sigma_a]$ . Il coefficiente di sicurezza è dato dalle seguenti espressioni:

$$n = \frac{O'P'}{O'P} = \frac{\sigma'_m}{\sigma_m}, \quad n = \frac{\sigma_f - \sigma_a}{\sigma_f} \frac{\sigma_r}{\sigma_m} \quad (16.10a,b)$$

essendo

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_f - \sigma_a}{\sigma_f} \sigma_r, \quad \sigma'_a = \sigma_a \quad (16.10c,d)$$

Nel caso di elevati valori della  $\sigma_m$ , in aggiunta alle condizioni (7-10), si deve considerare la sicurezza rispetto allo snervamento la cui retta limite è descritta dalle eq.(4a,b). I coefficienti possono essere ottenuti dalle (7b-10b) sostituendo  $\sigma_s$  al posto di  $\sigma_r$  e  $\sigma_f$ :

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_m + \sigma_a} \quad n = \frac{\sigma_s + \sigma_a - \sigma_m}{2\sigma_a} \quad (16.11,12)$$

$$n = \frac{\sigma_s - \sigma_m}{\sigma_a} \quad n = \frac{\sigma_s - \sigma_a}{\sigma_m} \quad (16.13,14)$$

Le rette a  $n$  costante, cioè i luoghi delle coppie  $\sigma_m-\sigma_a$  cui corrisponde lo stesso coefficiente di sicurezza sul diagramma di Haigh, per i 4 casi descritti, hanno le seguenti espressioni:

$$\sigma_a = -\frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_m + \frac{\sigma_f}{n} \quad \sigma_a = \frac{\sigma_f (\sigma_m - \sigma_r)}{\sigma_f - n (\sigma_r + \sigma_f)} \quad (16.15,16)$$

$$\sigma_a = -\frac{\sigma_f}{n \sigma_r} \sigma_m + \frac{\sigma_f}{n} \quad \sigma_a = -\frac{n \sigma_f}{\sigma_r} \sigma_m + \sigma_f \quad (16.16,17)$$

In fig.6 sono mostrate le 4 rette per  $n=1.5$ ,  $\sigma_f=50$ ,  $\sigma_r=100$ ; il punto rappresentativo della sollecitazione è  $\sigma_m=10$ ,  $\sigma_a=28.3$  cui corrisponde un coefficiente di sicurezza pari a 1.5, 1.39, 1.59, 4.33 nei 4 casi di carico.

La bisettrice sul piano  $\sigma_a-\sigma_m$  è la retta avente equazione  $\sigma_a=\sigma_m$  che coincide con la linea di carico corrispondente alla tensione pulsante con ciclo dello zero. Poiché passa per l'origine e per ciascun punto si ha  $\sigma_a=\sigma_m$ , essa risulta rappresentativa simultaneamente dei casi 1 e 2; in particolare è la retta di carico corrispondente a  $\sigma_a/\sigma_m=1$  (caso 1) e  $\sigma_{\min}=0$  (caso 2). Le rette rappresentative del caso 2 sono tutte parallele alla bisettrice, poiché hanno coefficiente angolare pari a 1; in particolare si verifica  $\sigma_{\min}<0$  per le rette si trovano a sinistra della bisettrice e  $\sigma_{\min}>0$  per quelle che si trovano a destra. In fig.6 si può osservare che le rette ad  $n$ =costante corrispondenti ai casi 1 e 2 si intersecano in corrispondenza della bisettrice. In base a questa e alle altre osservazioni fatte, si deduce che, fissato il punto rappresentativo della sollecitazione  $P$ , quando la  $\sigma_{\min}$  del 2° tipo di retta di carico risulta *negativa*, tale tipo di carico dà luogo al minore coefficiente di sicurezza fra i 4 descritti. Viceversa, se  $\sigma_{\min}>0$ , è la retta di carico del 1° tipo a dare luogo al fattore di sicurezza minore.

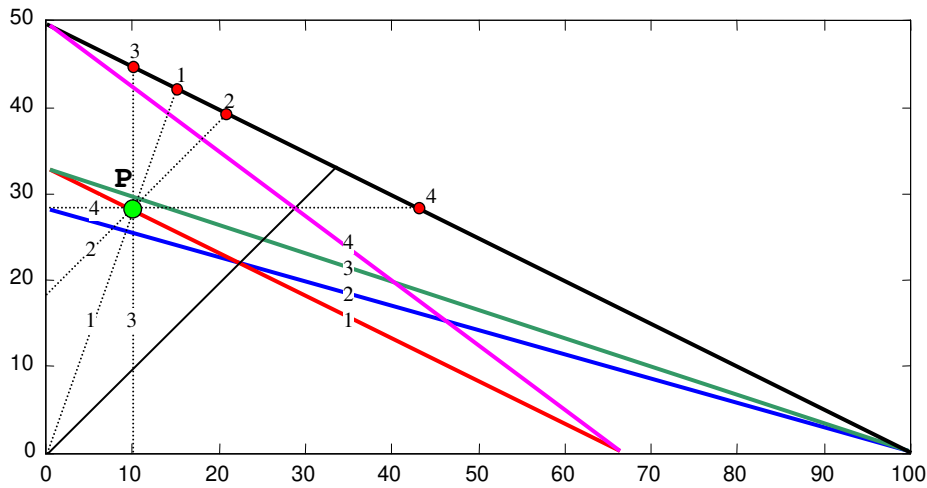


Fig.16.6 - Verifiche sul diagramma di Haigh per  $\sigma_f=50$  e  $\sigma_r=100$ ; il punto  $P$  ha coordinate  $\sigma_m=10$ ,  $\sigma_a=28.3$ . Rette di carico passanti per  $P$  assegnate e rette a  $n=1.5$  costante per i 4 casi di carico.

Le eq.(7b-10b) consentono di valutare il coefficiente di sicurezza per un numero di cicli di vita  $N_f$  assegnato introducendo le tensioni  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$  agenti e il valore di resistenza a fatica  $\sigma_f(N_f)$  letto sul diagramma di Wöhler o calcolato con la nota espressione analitica

$$\sigma_f = \left( \frac{N_f}{K} \right)^\mu = a N_f^b \tag{16.19}$$

Si sottolinea nuovamente il fatto che la tensione  $\sigma_f$  presente nelle formule e sui diagrammi è la resistenza a fatica dell'elemento reale (non quella del provino a flessione rotante) che tiene conto di tutti gli effetti relativi a finitura, gradiente e dimensioni.

Per quanto concerne l'eventuale concentrazione di tensione, la procedura consigliata è quella di moltiplicare le tensioni medie e alternate nominali per l'apposito coefficiente  $K_{ff}$  (invece di correggere la tensione  $\sigma_f$  moltiplicandola per il coefficiente  $k_f$  e utilizzare le tensioni medie e alternate nominali). Nel caso di materiali fragili sia la tensione nominale media che quella alternata devono essere moltiplicate per  $K_{ff}$ , mentre nel caso dei duttili è possibile amplificare solo la componente alternata. Si deve anche verificare che sia  $K_t(\sigma_m + \sigma_a) = K_t \sigma_{max} < \sigma_s$ . L'effetto della concentrazione di tensione è trattato specificamente nell'ultimo paragrafo.

Le tensioni agenti  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$  possono essere espresse in funzione delle forze e dei parametri geometrici di progetto. In alcuni casi è possibile imporre il coefficiente di sicurezza ed esplicitare le relazioni rispetto ad un parametro da determinare, come nel caso degli alberi di trasmissione, ottenendo delle espressioni di progetto.

### Diagramma di Goodman o Smith

Nel diagramma di Smith i cicli di carico aventi lo stesso rapporto  $q = \sigma_{max} / \sigma_m$  sono rappresentati da una linea di carico passante per l'origine e il punto  $P$ . Nel caso in fig.7 i valori relativi al ciclo di esercizio ( $\sigma_m$  e  $\sigma_{max}$ ) sono rappresentati da  $P$ ; i valori limite corrispondenti ( $\sigma_m$  e  $\sigma_{max}$ ) sono rappresentati da  $P'$  determinato dall'intersezione tra la linea di carico e la curva limite di Smith. Il coefficiente di sicurezza si calcola in modo analogo al caso precedente.

Se si mantiene costante la tensione minima, la linea di carico passa da  $P$  e dal punto di intersezione tra la retta  $\sigma_{min} = \text{cost}$  e la bisettrice  $O'$ .

Se la tensione media  $\sigma_m$  si mantiene ragionevolmente costante, il punto limite si trova sulla retta ortogonale alla bisettrice passante  $P$ . Nel caso in cui si mantiene costante la tensione alternata, il punto limite si ottiene tracciando la parallela alla bisettrice passante per  $P$ .

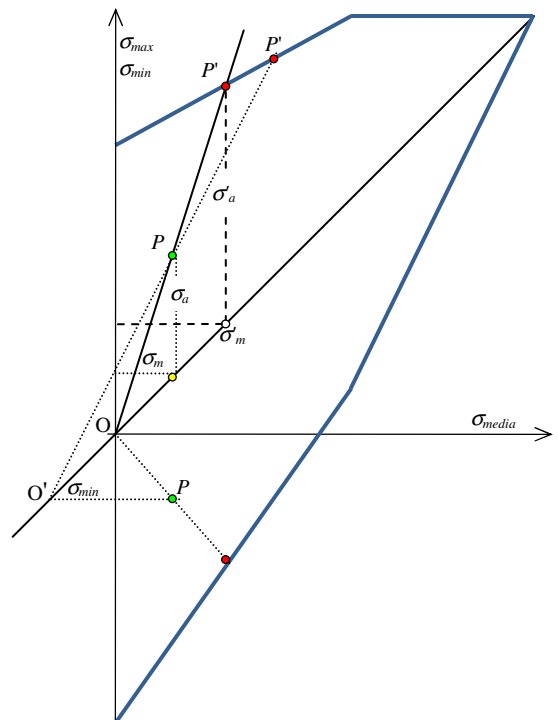


Fig.16.7- Verifiche sul diagramma di Smith.

**Criteri di danneggiamento nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$**

In alternativa alla retta di Goodman di eq.(5) e descritta nel precedente paragrafo, sono stati proposti diversi criteri di danneggiamento. Ciascuno fornisce le coppie di valori delle sollecitazioni  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  per i quali si ha il cedimento per fatica ad un numero di cicli  $N_f$  assegnato. Il valore di  $N_f$  è quello corrispondente al valore di  $\sigma_f$  letto sul diagramma di Wöhler [cioè  $N(\sigma_a, \sigma_m)=N(\sigma_f)$ ] che viene introdotto nel criterio insieme ad un parametro di resistenza del materiale ( $\sigma_s$ , o  $\sigma_r$ ). Questi criteri forniscono delle rappresentazioni semplificate del diagramma di Haigh.

- Il criterio di danneggiamento di *Goodman*, già visto nel precedente paragrafo, è rappresentato da una linea retta da  $[0, \sigma_f]$  a  $[\sigma_r, 0]$  (fig.2,3,5,7-8). Questo criterio non limita la possibilità di snervamento. Se si limita anche lo snervamento il diagramma che si ottiene è quello rappresentato in fig.3 dal lato  $\sigma_m \geq 0$ . L'equazione nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$  è data dalle (5) qui riscritte:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_r} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_f - \frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_m \qquad (16.5a,b)$$

- Il criterio di danneggiamento di *Soderberg* è rappresentato da una linea retta da  $[0, \sigma_f]$  a  $[\sigma_s, 0]$  (fig.8-9). Questo criterio limita anche lo snervamento e viene usato per il dimensionamento degli alberi. Tutte le espressioni dei coefficienti di sicurezza relativi a questo criterio possono essere ottenute dalle (7b-10b) sostituendo la  $\sigma_s$  al posto della  $\sigma_r$ . L'equazione nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$  può essere scritta come:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_f - \frac{\sigma_f}{\sigma_s} \sigma_m \qquad (16.20a,b)$$

- Il criterio di danneggiamento di *Gerber* è rappresentato da una parabola passante da  $[0, \sigma_f]$  a  $[\sigma_r, 0]$  (fig.9), localizzata abbastanza centralmente rispetto ai risultati sperimentali. La possibilità di snervamento deve essere verificata:

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_f \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_r}\right)^2\right] \qquad (16.21a,b)$$

- Il criterio *ASME* è rappresentato da un'ellisse passante da  $[0, \sigma_f]$  a  $[\sigma_s, 0]$  (fig.9). Nonostante la presenza della  $\sigma_s$  nell'equazione, si deve valutare la possibilità di snervamento poiché la curva interseca la linea di snervamento. L'equazione nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$  può essere scritta come:

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_s}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_f}\right)^2 = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_f \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_s}\right)^2} \qquad (16.22a,b)$$

La condizione per la quale la tensione massima è pari allo snervamento ( $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_s$ ), già vista nei paragrafi precedenti, è rappresentata dall'espressione di *Langer* (fig.3,5,8):

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{\sigma_a}{\sigma_s} = 1 \qquad \sigma_a = \sigma_s - \sigma_m \qquad (16.4a,b)$$

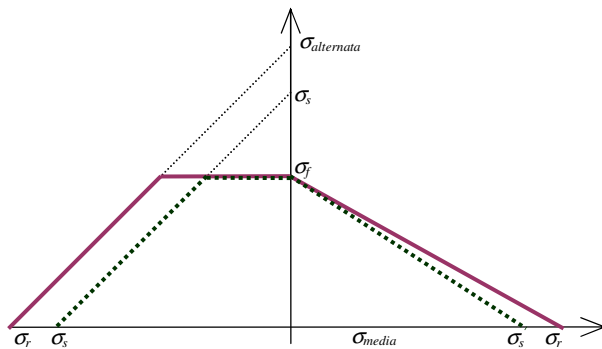


Fig.16.8 - Criteri di Soderberg e di Goodman.

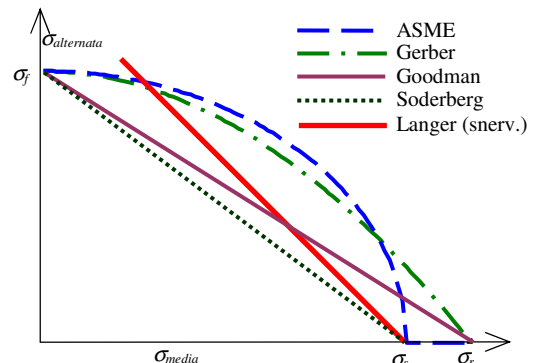


Fig.16.9- Criteri di danneggiamento nel piano  $\sigma_m$ - $\sigma_a$

**Determinazione della vita  $N_f$**

I criteri descritti consentono, in alternativa alla verifica, di valutare la vita a fatica  $N_f$  corrispondente a una sollecitazione di valor medio e ampiezza  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$  assegnati. In questo caso s'inseriscono le tensioni  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$  nelle eq.(4,20-22) e si ricava la  $\sigma_f$  corrispondente. A questo punto il problema della determinazione della vita a fatica in presenza di sollecitazione media viene ricondotto a quello di sollecitazione alternata simmetrica con ampiezza  $\sigma_f$ . Nel caso del criterio di Goodman, ad esempio, si ottiene:

$$\sigma_f = \sigma_G = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r} \tag{16.23}$$

La tensione ottenuta con l'eq.23 è definita *tensione equivalente di Goodman*.

La tabella 1 riassume i criteri introdotti e il valore di tensione equivalente  $\sigma_f$  ottenibile.

Criterio	Goodman	Soderberg	Gerber	ASME
Tipo equazione	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y}{b} = 1$	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
Espressione criterio	$\frac{\sigma_m}{\sigma_r} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1$	$\frac{\sigma_m}{\sigma_s} + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1$	$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{\sigma_a}{\sigma_f} = 1$	$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_s}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_f}\right)^2 = 1$
Espressione di $\sigma_f$	$\sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r}$	$\sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_s}$	$\sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m^2 / \sigma_r^2}$	$\sigma_f = \sigma_a \sqrt{\frac{1}{1 - \sigma_m^2 / \sigma_s^2}}$

Tabella 16.1 - Riassunto dei criteri di danneggiamento.

In corrispondenza a questi valori di  $\sigma_f$  si determina il numero di cicli di vita  $N_f$  sul diagramma di Wöhler. L'operazione può essere effettuata in modo analitico utilizzando l'equazione di Wöhler; nel caso del criterio di Goodman (5), ad esempio, si ottiene:

$$N_f = K \left( \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r} \right)^{-\mu} \qquad N_f = a^{-1/b} \left( \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r} \right)^{1/b} \tag{16.24a,b}$$

Le eq.(24a,b) sono le espressioni delle curve di Wöhler che mettono in relazione l'ampiezza della tensione alternata con il numero di cicli  $N_f$  in presenza di tensione media costante assegnata. Esplicitando le (24) rispetto a  $\sigma_a$  si ottiene:

$$\sigma_a = \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) \left( \frac{N_f}{K} \right)^\mu \qquad \sigma_a = \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) a N_f^b \tag{16.25a,b}$$

Dalle (25) è possibile verificare che, in base ai criteri lineari di Goodman (e di Soderberg, sostituendo  $\sigma_r$  con  $\sigma_s$ ), la presenza di una tensione media costante riduce tutte le ampiezze della curva di Wöhler di un fattore costante, indipendente dal numero di cicli. In coordinate logaritmiche le (25) risultano parallele alla curva di Wöhler originale e traslate verso il basso in misura proporzionale al valore di  $\sigma_m$ .

La determinazione di  $\sigma_f$  può essere effettuata graficamente se si utilizzano i criteri lineari di Goodman o Soderberg. In questo caso, descritto in fig.10, è sufficiente tracciare la retta passante dal punto  $\sigma_r$  (o  $\sigma_s$ ) e dal punto  $[\sigma_m, \sigma_a]$  assegnato. L'intersezione con l'asse  $\sigma_{alternata}$  fornisce il valore di  $\sigma_f$ . Dopo avere valutato il logaritmo di quest'ultimo si entra nel diagramma di Wöhler e si determina  $N_f$  dall'intersezione con la retta di vita limitata. Se  $\text{Log } \sigma_f < \text{Log } \sigma_l$  non vi è intersezione e la vita risultante è infinita.

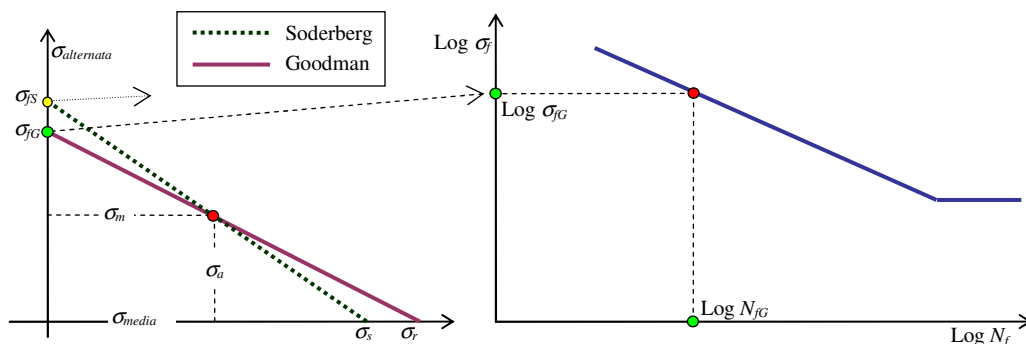


Fig.16.10 - Determinazione di  $\sigma_f$  ed  $N_f$  a partire dai valori di  $\sigma_m$  e  $\sigma_a$  assegnati.



### Effetto della concentrazione di tensione sulla tensione media

Come accennato precedentemente, il coefficiente relativo alla concentrazione di tensione deve essere applicato alla tensione media e a quella alternata in modo differente per materiali fragili e duttili. Nel seguito si suppone che le tensioni siano tali da *non superare lo snervamento*, cioè sia  $\sigma_{\max} = K_t (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_s$ .

#### Materiali fragili

Nel caso dei materiali fragili omogenei la concentrazione di tensione ha effetto sul cedimento statico. Al tendere a zero della tensione alternata, la tensione nominale (media) al cedimento coincide con quella di rottura diviso per il coefficiente di concentrazione delle tensioni:

$$\sigma_{n,am} = \sigma_r / K_t \quad (16.26)$$

Per tensione media nulla, ovviamente, la tensione nominale al cedimento è il limite di fatica moltiplicato per  $k_f$  o diviso per  $K_f$ . Per i materiali fragili si ha  $K_{tf} \approx K_t$  da cui

$$\sigma_f = \sigma'_f k_f = \sigma'_f / K_t \quad (16.27)$$

L'effetto sul diagramma di Haigh è visualizzabile in fig.11a. Di solito è preferibile non alterare le tensioni limite e amplificare le tensioni nominali per il fattore di concentrazione come segue:

$$\sigma_m = K_t \sigma_{m,nom} \quad \sigma_a = K_t \sigma_{a,nom} \quad (16.28,29)$$

L'effetto di quest'operazione sul diagramma di Haigh è visualizzabile in fig.11b.

La valutazione della  $\sigma_f$  per assegnati  $\sigma_{m,nom}$  e  $\sigma_{a,nom}$  può essere effettuata tramite la seguente espressione

$$\sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r} = \frac{K_t \sigma_{a,nom}}{1 - K_t \sigma_{m,nom} / \sigma_r} \quad (16.30)$$

#### Materiali duttili

Nel caso dei materiali duttili la concentrazione di tensione non ha effetto sul cedimento statico; il modo più conservativo di operare è quello di utilizzare le relazioni (28-30) sostituendo il coefficiente  $K_{tf}$  al posto di  $K_t$ .

In alternativa è anche possibile trascurare l'effetto della concentrazione delle tensioni sulla resistenza statica, determinando le tensioni limite sul diagramma (fig.11a) come:

$$\sigma_{n,am} = \sigma_r \quad \sigma_f = \sigma'_f / K_{tf} \quad (16.31,32)$$

Anche in questo caso è preferibile non alterare le tensioni limite e amplificare le tensioni nominali ottenendo:

$$\sigma_m = \sigma_{m,nom} \quad \sigma_a = K_{tf} \sigma_{a,nom} \quad (16.33)$$

La valutazione della  $\sigma_f$  per assegnati  $\sigma_{m,nom}$  e  $\sigma_{a,nom}$  può essere effettuata tramite la seguente espressione:

$$\sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_r} = \frac{K_{tf} \sigma_{a,nom}}{1 - \sigma_m / \sigma_r} \quad (16.34)$$

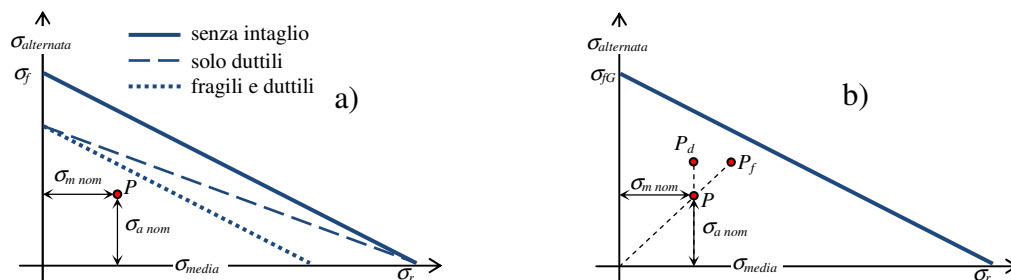


Fig.16.11 - Effetto della concentrazione di tensione per materiali fragili e duttili: a) riduzione dei valori limite; b) incremento delle tensioni ( $P_f$  tensioni teoriche fragile e duttile nel caso più conservativo,  $P_d$  tensioni teoriche duttile).