

## 17. FATICA AD AMPIEZZA VARIABILE

Spesso i componenti strutturali sono soggetti a storie di carico nelle quali i cicli di fatica hanno ampiezza variabile (fig.1), ad esempio  $n_1$  cicli con tensione alternata  $a_1$  (o  $\sigma_{a1}$ ),  $n_2$  cicli con tensione alternata  $a_2$  (o  $\sigma_{a2}$ ) etc.

Il problema della stima della vita a fatica in queste condizioni non è stato risolto completamente e i risultati ottenuti usando gli approcci presentati sono indicativi; stime molto più precise possono essere ricavate solo da dati sperimentali.

Tra le difficoltà principali si deve ricordare il fatto che la curva di Wöhler viene ricavata utilizzando per ciascun valore dell'ampiezza di ciclo un provino differente (*vergine*). In realtà le proprietà del materiale si vanno modificando mano a mano che vengono applicati i cicli di fatica e, in particolare, l'applicazione di alcuni cicli di ampiezza elevata provoca variazioni di resistenza in senso positivo o negativo a seconda del livello di carico, che dovrebbero essere caratterizzate da un nuovo diagramma di Wöhler.

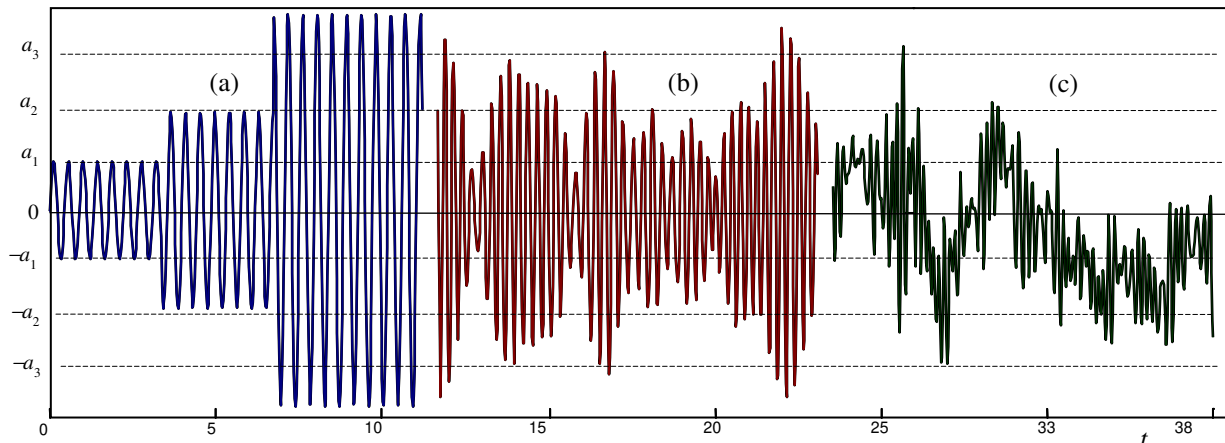


Fig.17.1 - Esempi di storie di carico con cicli ad ampiezza variabile: (a) gruppi di cicli con ampiezza crescente, (b) cicli a media nulla e ampiezza variabile in modo aleatorio (o *random*), (c) cicli con ampiezza e valor medio variabili in modo aleatorio.

### Il criterio di danneggiamento lineare di Miner

Una teoria semplice che descrive in modo approssimato il danneggiamento cumulativo a fatica è quella di Palmgreen-Miner (PM). Si considerino le seguenti definizioni:

- $a_i$  sono le ampiezze dei cicli di fatica classificate in un numero discreto di livelli (come, ad esempio, nei casi a e b di fig.1);
- $N(a_i)$  o  $N_i$  è il numero di cicli di vita corrispondente a ciascuna ampiezza  $a_i$ , determinabile ottenibile dal diagramma di Wöhler (fig.2);
- $n_i$  è il numero di cicli di fatica di ampiezza  $a_i$  applicati al componente;
- $n$  è il numero totale di cicli di fatica applicati al componente;
- $D(a_i)$  o  $D_i$  è il danneggiamento provocato dai cicli di ampiezza  $a_i$ .

Il danneggiamento  $D(a_i)$  o  $D_i$  può essere espresso mediante una delle seguenti relazioni (equivalenti):

$$D(a_i) = \frac{n_i}{N(a_i)} \qquad D_i = \frac{n_i}{N_i} \qquad (17.1a,b)$$

È facile dedurre che il danneggiamento provocato dal singolo  $k$ -esimo ciclo di ampiezza  $a_k$  è dato da

$$D_k = \frac{1}{N_k} \qquad (17.2)$$

Il danneggiamento  $D$  provocato da tutti i cicli può essere ottenuto con le seguenti espressioni

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \qquad D = \sum_{k=1}^n D_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{N_k} \qquad (17.3a,b)$$

la prima delle quali è utile nel caso in cui la distribuzione dei cicli è nota mediante i *valori di conteggio*  $n_i$ , relativi a livelli discreti delle ampiezze, la seconda nel caso in cui le ampiezze dei cicli sono memorizzate in forma digitale in una *successione*  $a_k$  ed è possibile ottenere in modo analitico i corrispondenti valori  $N_k$ , come accade nel caso di sollecitazioni su componenti registrate in esercizio; in questi casi, infatti, non è necessario che esse siano raggruppate generando eventuali valori di conteggio  $n_i$ .

In base alla teoria di PM il cedimento si verifica quando  $D$  raggiunge il *livello critico*  $D_0$ , che, teoricamente, è pari all'unità; infatti, se il provino è sottoposto solo a  $n_k=N_k$  cicli di ampiezza  $a_k$ , per i quali si ha il cedimento, le (3) forniscono:

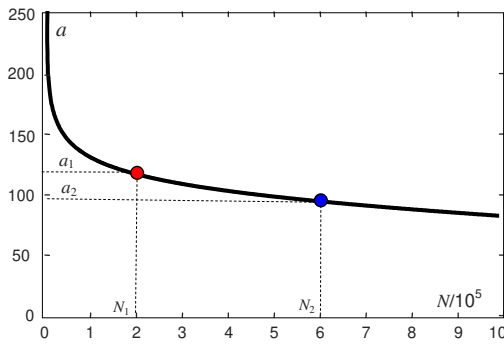


Fig.17.2 - Curva di Wohler: numeri di cicli al cedimento  $N_1$  ed  $N_2$  per le ampiezze  $a_1$  e  $a_2$ .

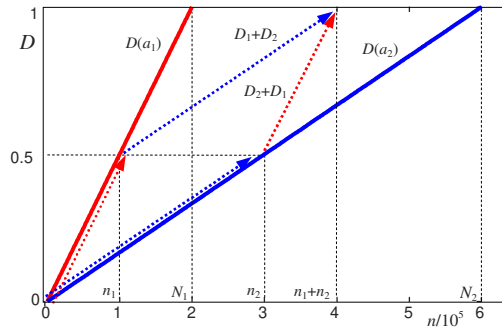


Fig.17.3 - Rette rappresentative del danneggiamento relativo alle ampiezze  $a_1$  e  $a_2$  di fig.2.

$$D_0 = \sum_i D(a_i) = D(a_k) = \frac{N_k}{N_k} = 1$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^n D_k = \sum_{k=1}^{N_k} \frac{1}{N_k} = \frac{N_k}{N_k} = 1 \quad (17.4a,b)$$

Come detto, i valori  $N_i$  (o  $N_k$ ) da introdurre nelle (1) e (3), nel caso di ampiezza media della sollecitazione nulla, può essere ricavato mediante la nota formula empirica che costituisce l'espressione analitica della curva di Wöhler (fig.2a):

$$N_i = K a_i^{-\mu} \quad (17.5)$$

nella quale  $K$  e  $\mu$  sono costanti relative al materiale. La (5) può essere scritta come

$$1/N_i = a_i^\mu / K \quad (17.6)$$

ed essere introdotta nelle (1, 3) ottenendo:

$$D = \frac{1}{K} \sum_i a_i^\mu n_i \quad D = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^n a_k^\mu \quad (17.7a,b)$$

I dati necessari per l'utilizzazione delle (7) sono i parametri della curva di Wöhler e le ampiezze dei cicli di tensione  $a_k$ ; l'eq.(7a) richiede anche che le ampiezze  $a$  siano state classificate in livelli discreti, determinando i corrispondenti numeri di cicli  $n_i$ .

È importante notare che, secondo il criterio di Miner, nel caso di cicli ad *ampiezza costante*, il danneggiamento del componente cresce *linearmente* con il numero di cicli applicati, essendo le (1) equazioni di rette con coefficiente angolare pari a  $dD/dn=1/N$  sul piano  $D-n$  (fig.3). In questo caso un numero  $n$  di cicli ad ampiezza costante provoca un *incremento del danneggiamento che è indipendente dal valore iniziale del danneggiamento stesso* ed è facile verificare che *l'ordine di applicazione di carichi di ampiezza differente non ha effetto sul numero di cicli di vita del componente*. Ad esempio, in fig.3 sono mostrate le rette rappresentative del danneggiamento al variare del numero dei cicli per le ampiezze  $a_1$  ed  $a_2$  di fig.2. In fig.3 sono anche mostrate, con linee punteggiate, le rappresentazioni dei danneggiamenti prodotti da 2 diverse sequenze di cicli: la prima è costituita da  $n_1$  cicli di ampiezza  $a_1$  fino al raggiungimento di un danneggiamento  $D_1=0.5$ , seguiti da  $n_2$  cicli di ampiezza  $a_2$  fino al cedimento ( $D=1$ ); nella seconda sequenza l'ordine dei cicli è invertito, essendo costituita da  $n_2$  cicli di ampiezza  $a_2$  seguiti da  $n_1$  cicli di ampiezza  $a_1$ : il numero dei cicli a rottura è uguale per le due sequenze e pari a  $N=n_1+n_2$ .

In pratica il criterio di PM non tiene conto della variazione delle proprietà di resistenza del materiale che si verifica durante l'applicazione di cicli di fatica ad ampiezza variabile in quanto i valori di  $N(a)$  si riferiscono alla curva di Wöhler che, come già detto, viene ricavata utilizzando provini *differenti*, ciascuno sottoposto a cicli di ampiezza costante. Per tenere conto di questo fatto si potrebbe modificare il valore di  $D_0$  che, in generale, risulta *minore* per cicli di ampiezza *decescente*; il campo dei valori sperimentali ottenuti è  $0.5 \leq D_0 \leq 2.2$ . Esistono criteri di danneggiamento di tipo esponenziale, aventi espressioni del tipo  $D=(n/N)^\beta$ : poiché la *pendenza* della curva rappresentativa del danneggiamento *aumenta* al crescere del numero di cicli, è facile verificare che un fissato numero  $n$  di cicli ad ampiezza costante provoca un *incremento del danneggiamento crescente* al *crescere del danneggiamento iniziale*; in conseguenza di ciò, differenti ordini di applicazione degli stessi carichi danno luogo a danneggiamenti di diversa entità.

### Effetto della tensione media

Le espressioni (7) sono valide per cicli con valor medio  $m$  nullo (ma anche negativo) e possono essere modificate per mezzo del noto criterio di Goodman in modo da tenere conto dell'eventuale valore medio *positivo* dei cicli. In particolare, il criterio di Goodman fornisce la seguente tensione equivalente  $a_G$ :

$$a_G = \frac{a}{1 - m/\sigma_r} \quad (17.8)$$

nella quale  $\sigma_r$  è la tensione di rottura del materiale. Come è noto la tensione  $a_G$  può essere considerata una tensione solo alternata cui corrisponde lo stesso numero di cicli di vita  $N$  della combinazione delle tensioni media ed alternata  $m$  ed  $a$  effettivamente agenti. Sostituendo questa espressione al posto di  $a_i$  nell'eq.(7a) si ottiene la seguente espressione del danno di fatica valida per cicli con valor medio *positivo*:

$$D = \frac{1}{K} \sum_i a_{G_i}^\mu n_i = \frac{1}{K} \sum_{i,j} \left( \frac{a_i}{1-m_j/\sigma_r} \right)^\mu n_{i,j} \quad (17.9)$$

nella quale per  $n_i$  si intende il numero di cicli la cui combinazione di tensione media e alternata secondo la (8) dà luogo allo stesso valore della tensione equivalente  $a_{G_i}$  e per  $n_{i,j}$  si intende in numero di cicli aventi componente alternata pari ad  $a_i$  e componente media pari ad  $m_j$ . In generale conviene calcolare la tensione  $a_G$  per ciascun ciclo, ricavare il numero  $n_i$  di cicli che hanno lo stesso valore della tensione equivalente  $a_{G_i}$  ed utilizzare il secondo termine della (9). Per un'eventuale applicazione *manuale*, il termine di destra della (9), scritto per esteso, fornisce:

$$D = \frac{1}{K} \left[ \left( \frac{a_1}{1-m_1/\sigma_r} \right)^\mu n_{1,1} + \left( \frac{a_1}{1-m_2/\sigma_r} \right)^\mu n_{1,2} + \dots + \left( \frac{a_i}{1-m_j/\sigma_r} \right)^\mu n_{i,j} \right] \quad (17.10)$$

Nel caso in cui i valori delle tensioni medie ed alternate dei cicli costituiscono una sequenza di  $n$  coppie  $a_k, m_k$  memorizzate in forma digitale è opportuno effettuare la somma dei danneggiamenti provocati dai singoli cicli mediante la seguente relazione derivata in modo ovvio dalle (7b) ed (8):

$$D = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^n a_{G_k}^\mu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{1-m_k/\sigma_r} \right)^\mu \quad (17.11)$$

Ovviamente per valor medio negativo continuano a valere le (7).

### La tensione equivalente di Miner

Considerando un insieme di  $n$  cicli di fatica aventi ampiezza *variabile*, si definisce *tensione equivalente di Miner A* il valore di *ampiezza costante che provoca lo stesso danneggiamento per lo stesso numero n di cicli*. La sommatoria presente nella (11) può essere sostituita con il prodotto dell'ampiezza della tensione di Miner per il numero dei cicli:

$$D = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^n a_{G_k}^\mu = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{1-m_k/\sigma_r} \right)^\mu = \frac{1}{K} A^\mu n \quad (17.12)$$

esplicitando la (12) rispetto ad  $A$  se ne ottiene l'espressione:

$$A = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{G_k}^\mu \right)^{1/\mu} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{1-m_k/\sigma_r} \right)^\mu \right]^{1/\mu} \quad (17.13)$$

Nel caso siano noti i valori di conteggio  $n_i$  o  $n_{i,j}$ ,  $A$  può essere ottenuta come

$$A = \left( \frac{1}{n} \sum_i a_{G_i}^\mu n_i \right)^{1/\mu} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i,j} \left( \frac{a_i}{1-m_j/\sigma_r} \right)^\mu n_{i,j} \right]^{1/\mu} \quad (17.14)$$

Naturalmente per cicli con valor medio nullo può essere utilizzato il termine a sinistra delle (13 o 14) considerando  $a_G \equiv a$ . Dalle (13,14) si osserva che la tensione equivalente di Miner coincide con il *valor medio della tensione equivalente di Goodman elevata all'esponente  $\mu$ , elevato ad  $1/\mu$* . Ovviamente, a parità di ampiezza dei cicli, la tensione equivalente di Miner *varia al variare del materiale* per la dipendenza dall'esponente  $\mu$ .

### Storie di carico ripetitive e/o periodiche

Le espressioni (13,14) sono utili nel caso in cui la successione di cicli di fatica è di tipo *periodico* e i valori  $n_i$  possono essere determinati all'interno del singolo periodo. Siano:

- $T$  il periodo della storia di carico,
- $n_T$  il numero totale dei cicli nel singolo periodo  $T$ ,
- $D$  il danneggiamento provocato dalla storia di carico,
- $D_0$  il danneggiamento al cedimento (in mancanza di informazioni specifiche  $D_0=1$ ),
- $N_0$  il numero totale di cicli al cedimento,
- $R_0$  il numero di volte in cui la storia di carico viene ripetuto fino al cedimento,
- $T_0$  la durata *temporale* del componente (espressa in unità di misura temporali) o durata a fatica.

In questo caso è di interesse determinare il numero di ripetizioni del periodo di carico al cedimento,  $R_0$ , o la durata  $T_0$  del componente a partire dalla conoscenza di  $T$  ed  $n_T$ , oltre, naturalmente, ai valori di  $n_i$  e di  $a_i$  o  $a_{G_i}$

(oppure di  $n_{ij}$ ,  $a_i$  e  $m_j$ ) e alle caratteristiche del materiale  $K$ ,  $\mu$  e  $\sigma_r$  con i quali deve essere determinata la tensione equivalente di Miner  $A$  (13,14).

Determinata la tensione equivalente di Miner  $A$  mediante la (13) o la (14), il danneggiamento  $D$  nel periodo può essere calcolato mediante il termine di destra della (12) introducendo  $n_T$  al posto di  $n$ .

Il numero di ripetizioni al cedimento può essere espresso mediante le seguenti relazioni:

$$R_0 = \frac{N_0}{n_T} = \frac{T_0}{T} = \frac{D_0}{D} \approx \frac{1}{D} \quad (17.15)$$

Il numero di cicli a rottura  $N_0$  può essere ottenuto mediante la relazione di Wöhler nella quale venga introdotta la tensione equivalente di Miner espressa mediante la (13) o la (14):

$$N_0 = K/A^\mu \quad (17.16)$$

Sostituendo  $N_0$  nella (15) con il termine di destra della (16),  $R_0$  può essere espresso come

$$R_0 = \frac{N_0}{n_T} = \frac{1}{n_T} \frac{K}{A^\mu} \quad (17.17)$$

Utilizzando ancora la (15),  $T_0$  può essere ottenuto come

$$T_0 = R_0 T = \frac{T}{n_T} \frac{K}{A^\mu} \quad (17.18)$$

### **Il criterio di danneggiamento non lineare di Manson e Halford**

Il danneggiamento di un componente può essere espresso in termini di *rapporto tra la lunghezza attuale della frattura  $a_f$  e la lunghezza al cedimento  $a_{f,1}$*

$$D = a_f / a_{f,1} \quad (17.19)$$

Secondo la teoria di Manson e Halford la relazione tra la lunghezza della frattura  $a_f$  e il numero  $n$  di cicli di carico di ampiezza costante cui corrisponde un numero di cicli di vita  $N$  può essere espressa come:

$$a_f = a_{f,1} (n/N)^\alpha \quad (17.20)$$

essendo l'esponente  $\alpha$  ricavato in modo empirico ed espresso come

$$\alpha = \frac{2}{3} N^{0.4} \quad (17.21)$$

Nel caso in cui la frattura abbia una lunghezza iniziale  $a_{f,0}$  la (20) diventa:

$$a_f = a_{f,0} + (a_{f,1} - a_{f,0}) (n/N)^\alpha \quad (17.20b)$$

Generalmente ciascun numero di cicli di vita a fatica  $N$  può essere determinato dalla relazione di Wöhler (5,6).

In base alle (19,20b), il danneggiamento cumulativo  $D$  può essere espresso come segue:

$$D = \frac{1}{a_{f,1}} \left[ a_{f,0} + (a_{f,1} - a_{f,0}) \left( \frac{n}{N} \right)^\alpha \right] = \frac{a_{f,0}}{a_{f,1}} + \left( 1 - \frac{a_{f,0}}{a_{f,1}} \right) \left( \frac{n}{N} \right)^\alpha \quad (17.22)$$

Nel caso in cui la lunghezza iniziale della frattura sia nulla, la (22) può essere riscritta semplicemente come:

$$D = \left( \frac{n}{N} \right)^\alpha \quad (17.23)$$

La (23) può essere esplicitata rispetto al rapporto  $n/N$  come

$$\frac{n}{N} = D^{1/\alpha} \quad (17.24)$$

permettendo di determinare il numero  $n$  di cicli con durata  $N$  che provocherebbe un danneggiamento pari a  $D$ .

In fig.4a sono rappresentati i danneggiamenti progressivi su un componente inizialmente integro ( $D=0$ ), dovuti a due sequenze di cicli di differente ampiezza, cui corrisponderebbero, rispettivamente, durate di  $N_1$  e  $N_2$  cicli.

Se su un componente integro vengono inizialmente applicati  $n_1$  cicli con durata di  $N_1$ , il danneggiamento si incrementa fino al valore  $D_1$  ed è rappresentato dal tratto OA della curva 1 (fig.4b). Se, a questo punto, vengono applicati dei cicli con durata  $N_2 > N_1$ , il processo di danneggiamento è rappresentato dalla curva 2 a partire dal punto A', che ha ordinata coincidente con il danneggiamento attuale del componente, pari a  $D_1$ , e ascissa data dal *numero di cicli con durata  $N_2$  che provocherebbe un danneggiamento pari a  $D_1$* , definito numero di cicli equivalente  $n_{2eq}$ .

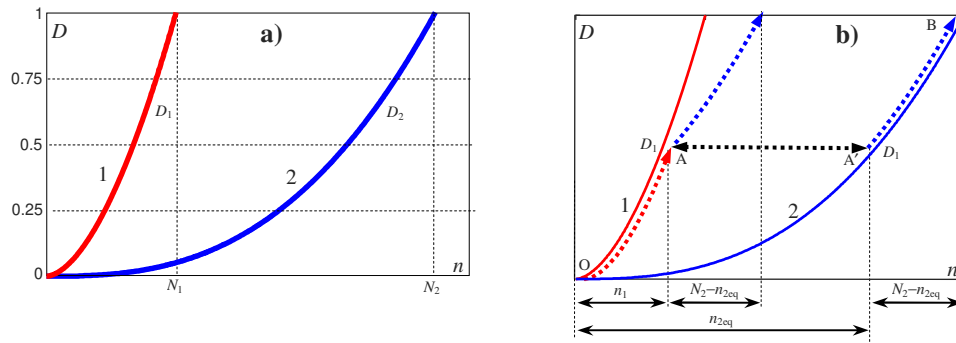


Fig.17.4 - a) Funzioni di danneggiamento non lineare per cicli di durata  $N_1$  ed  $N_2$ . b) Danneggiamento fino a rottura ( $D=1$ ) dovuto ad una sequenza costituita da  $n_1$  cicli con durata  $N_1$  seguiti da  $n_2$  cicli con durata  $N_2$  essendo  $N_1 < N_2$ .

In base alla (24) si può scrivere direttamente:

$$\frac{n_{2eq}}{N_2} = D_1^{1/\alpha_2} \quad (17.25)$$

da cui, essendo

$$D_1 = (n_1/N_1)^{\alpha_1} \quad (17.26)$$

si può scrivere:

$$\frac{n_{2eq}}{N_2} = \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{0.4}} \quad (17.27)$$

In base alla (27) il danneggiamento complessivo dovuto a  $n_1$  cicli di durata  $N_1$  seguiti da  $n_2$  cicli di durata  $N_2$  può essere espresso come il danneggiamento dovuto ad  $n_{2eq} + n_2$  cicli con durata  $N_2$ :

$$D_{1+2} = \left( \frac{n_{2,eq} + n_2}{N_2} \right)^{\alpha_2} = \left( \frac{n_{2,eq}}{N_2} + \frac{n_2}{N_2} \right)^{\alpha_2} \quad (17.28)$$

da cui, in base alle (24,25) si ottiene

$$D_{1+2} = \left( D_1^{1/\alpha_2} + \frac{n_2}{N_2} \right)^{\alpha_2} \quad (17.29a)$$

e, in base alle (23,26), si può anche scrivere:

$$D_{1+2} = \left[ \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{\alpha_2} = \left[ \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{0.4}} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{\frac{2}{3} N_2^{0.4}} \quad (17.29b)$$

È importante osservare che, a differenza del risultato che si ottiene utilizzando il criterio lineare di Miner, cambiando l'ordine di applicazione degli stessi blocchi di cicli, il danneggiamento complessivo del componente risulta differente. In fig.5 sono mostrati i danneggiamenti ottenuti con 2 sequenze di cicli con le stesse ampiezze:

1. la prima è costituita da  $n_1$  cicli con durata  $N_1$  seguiti da  $n_2$  cicli con durata  $N_2$ , essendo  $N_2 < N_1$ ,
2. la seconda è costituita da  $n_2$  cicli con durata  $N_2$  seguiti da  $n_1$  cicli con durata  $N_1$ ;

è facile osservare che, *nel caso in cui i cicli di ampiezza maggiore sono applicati per primi, il danneggiamento risulta maggiore*. Se le ampiezze dei cicli si succedono in modo aleatorio, il danneggiamento calcolato con i criteri non lineari risulta molto simile a quello ottenuto col criterio di Miner.

Bisogna osservare che i danneggiamenti valutati con la (23), essendo basati sulla definizione (19), hanno incrementi molto bassi fino a un numero di cicli prossimo alla rottura e poi crescono bruscamente fino a raggiungere il livello unitario di cedimento, come si vede in fig.6; ciò è dovuto al fatto che la nucleazione della frattura richiede un elevato numero di cicli, mentre la sua propagazione è estremamente più veloce. Poiché questa caratteristica può creare problemi di calcolo, è opportuno effettuare una modifica della definizione (23) in modo che il danneggiamento risulti variabile in modo più uniforme, ma che i numeri di cicli equivalenti (25) e il numero di cicli al cedimento e risultino uguali a quelli ottenuti utilizzando la definizione originale.

L'equazione (27) è indipendente dal materiale e dai parametri geometrici della frattura ( $a_f, a_{f,0}, a_{f,1}$ ) presenti nell'equazione di accumulo del danneggiamento (22); in base a ciò, ai fini del calcolo dei cicli di vita di un componente, è possibile considerare l'ampiezza massima dei cicli di fatica come *ampiezza di riferimento* e utilizzare al posto di  $\alpha$  (21) un esponente così definito:

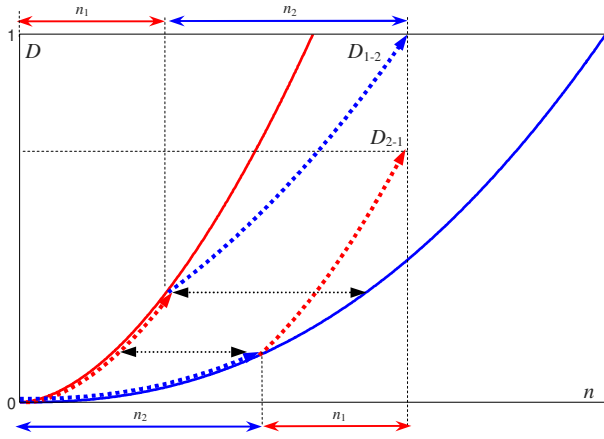


Fig.17.5 - Danneggiamento dovuto a due coppie di blocchi di cicli con sequenza invertita.

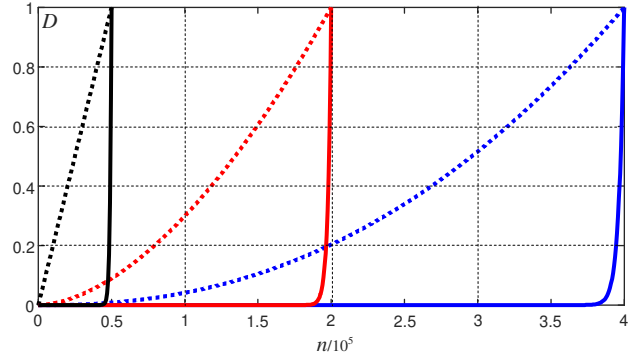


Fig.17.6 - Confronto tra gli andamenti del danneggiamento espresso mediante le eq.(23) (linea continua) e (31) (linea punteggiata) per casi di cicli con durate di  $N=0.5, 2, 4 \times 10^5$  cicli, con  $N_{ref}=0.5 \times 10^5$ .

$$r = \left( N / N_{ref} \right)^{0.4} \quad (17.30)$$

legato al rapporto tra la durata a fatica corrispondente all'ampiezza considerata  $N$  e la durata corrispondente ai cicli di riferimento  $N_{ref}$ , l'espressione del danneggiamento viene modificata come segue

$$D = \left( \frac{n}{N} \right)^r = \left( \frac{n}{N} \right)^{\left( \frac{N}{N_{ref}} \right)^{0.4}} \quad (17.31)$$

La curva di danneggiamento *relativa al livello di riferimento* diventa una retta, risultando  $r=N_{ref}/N_{ref}=1$ .

Ovviamente il danneggiamento calcolato mediante la (31) è differente da quello calcolato con la (23), come si osserva anche in fig.6, tuttavia i numeri di cicli determinati utilizzando le due differenti definizioni è lo stesso. Ad esempio, nel caso considerato in fig.4b, operando in modo analogo a quanto fatto per la (27), l'espressione del numero di cicli equivalente (27) diventa

$$\frac{n_{2,eq}}{N_2} = \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} = \left( \frac{n_1}{N_1} \right)^{\left( \frac{N_1}{N_2} \right)^{0.4}} \quad (17.32)$$

essendo, in questo caso,  $r_1=1$  (per il livello di riferimento) ed  $r_2=N_2/N_1$ ; confrontando i termini di destra delle (27) e (32), si evince che i numeri di cicli valutati utilizzando l'espressione del danneggiamento (31) sono coincidenti con quelli determinati mediante la (23).

Nel caso generale in cui agiscono più blocchi di cicli con ampiezza differente, utilizzando l'esponente  $r$  al posto di  $\alpha$  ed esplicitando le durate  $N$  rispetto alle ampiezze dei cicli  $a$  mediante la relazione di Wöhler, nel generico passaggio da cicli con durata  $N_{k-1}$  a cicli con durata  $N_k$  le (29) diventano:

$$D_k = \left( D_{k-1}^{1/r_k} + \frac{n_k}{N_k} \right)^{r_k} = \left( D_{k-1}^{1/r_k} + n_k \frac{a_k^\mu}{K} \right)^{r_k} \quad (17.33a)$$

$$D_k = \left[ \left( \frac{n_{k-1}}{N_{k-1}} \right)^{\frac{r_{k-1}}{r_k}} + \frac{n_k}{N_k} \right]^{r_k} = \left[ \left( \frac{n_{k-1}}{N_{k-1}} \right)^{\left( \frac{N_{k-1}}{N_k} \right)^{0.4}} + \frac{n_k}{N_k} \right]^{\left( \frac{N_k}{N_{ref}} \right)^{0.4}} \quad (17.33b)$$

essendo

$$r_k = \left( N_k / N_{ref} \right)^{0.4} = \left( a_{ref} / a_k \right)^{0.4\mu} \quad r_{k-1} / r_k = \left( N_{k-1} / N_k \right)^{0.4} = \left( a_k / a_{k-1} \right)^{0.4\mu} \quad (17.34,35)$$

Nel caso (frequente) in cui al componente vengono applicati *singoli* cicli con differente ampiezza, la (33a) può essere riscritta ponendo semplicemente  $n_k=1$ :

$$D_k = \left( D_{k-1}^{1/r_k} + \frac{1}{N_k} \right)^{r_k} = \left( D_{k-1}^{1/r_k} + \frac{a_k^\mu}{K} \right)^{r_k} \quad (17.36)$$

La (36) è la relazione più importante per la determinazione del danneggiamento con il metodo di Manson-Halford; in pratica, in base alle (33,36) il danneggiamento deve essere valutato in modo iterativo, combinando in modo opportuno il contributo del  $k$ -esimo ciclo (o blocco di cicli) al danneggiamento accumulato dai cicli precedenti.

A loro volta, le (25) e (27) possono essere riscritte nel caso generale come segue:

$$\frac{n_{k,eq}}{N_k} = D_k^{1/r_k} \qquad \frac{n_{k,eq}}{N_k} = \left( \frac{n_{k-1}}{N_{k-1}} \right)^{r_{k-1}} = \left( \frac{n_{k-1}}{N_{k-1}} \right)^{\left( \frac{N_{k-1}}{N_k} \right)^{0.4}} \qquad (17.37,38)$$

**Metodi di conteggio per storie di carico irregolari**

Ai fini dell'analisi di fatica una storia di carico  $\sigma(t)$  può essere ridotta alla sola sequenza degli estremi  $e_k$ , cioè dei massimi e minimi relativi (fig.7). I massimi vengono chiamati picchi ( $p$ ) e i minimi valli ( $v$ ). Un'altra grandezza di interesse è la differenza in modulo tra due estremi consecutivi definita semiciclo ( $r$  dall'inglese range).

In particolare, una sequenza di  $n_e$  estremi origina  $n_e-1$  semicicli, definiti come  $r_k=|e_k-e_{k+1}|$  (in pratica  $r=p-v$  o  $r=|v-p|$ ). In una storia di carico un ciclo di fatica è immediatamente identificato quando, partendo, ad esempio, da un picco, il picco successivo ha all'incirca lo stesso valore del precedente. Nel caso di storie di carico irregolari questo fatto spesso non si verifica (vedi fig.7) e l'identificazione del ciclo di fatica richiede l'applicazione di procedure che prendono il nome di *metodi di conteggio*.

Quando un ciclo viene identificato esso viene classificato in base alla sua ampiezza  $a$  e al valor medio  $m$  per la successiva utilizzazione mediante il criterio di danneggiamento scelto (ad es. PM).

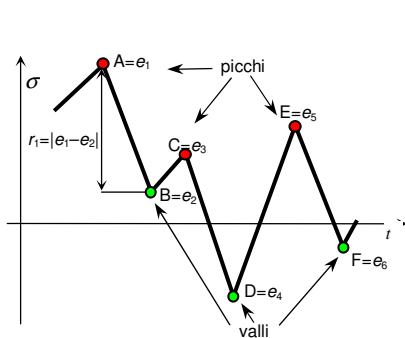


Fig.17.7 - Storia di carico con andamento irregolare. I picchi (valli) consecutivi non hanno uguale valore.

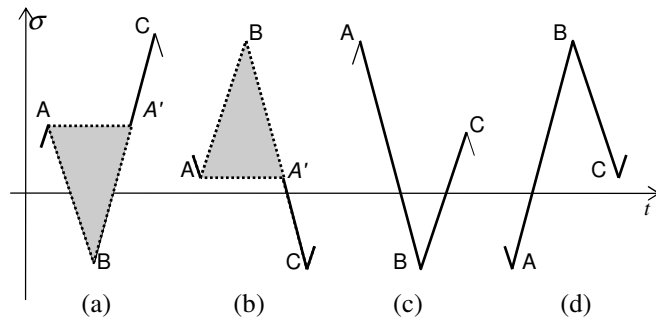


Fig.17.8 - Condizione per il conteggio di un ciclo nel metodo rainflow. La condizione è verificata nei casi (a) e (b).

**Il metodo range mean/rainflow**

Nel metodo *range mean* - che fornisce gli stessi risultati del metodo *rainflow* ad esso antecedente (T. Endo, 1971) - la condizione affinché un ciclo venga identificato è data dal fatto che, in una combinazione picco-valle-picco o valle-picco-valle (costituita, quindi, da 2 semicicli), il secondo semiciclo abbia ampiezza maggiore o uguale a quella del primo. Questa circostanza è mostrata in fig.8: il ciclo di fatica (ABA') viene identificato solo nei casi (a) e (b) essendo  $|A-B| < |B-C|$ .

In generale la condizione per l'identificazione di un ciclo non si verifica tra estremi consecutivi (fig.9a), di conseguenza tra un picco (o valle) e il successivo picco (o valle) di ampiezza maggiore (minore) o uguale si viene a trovare una successione di valli e picchi che a sua volta richiede la determinazione dei cicli corrispondenti. Il metodo *range mean* viene applicato in modo sequenziale, confrontando l'ampiezza di ciascun semiciclo  $r_k$  con quella del semiciclo successivo  $r_{k+1}$ , partendo dal primo semiciclo. Ogni volta che un semiciclo verifica la condizione del *range mean*, cioè si verifica  $r_k < r_{k+1}$ , (ovvero  $|e_k - e_{k+1}| < |e_{k+1} - e_{k+2}|$ ), esso viene conteggiato come *ciclo completo* (ad es. fig.9b,c), memorizzandone l'ampiezza  $a_i = |r_k|/2 = |e_k - e_{k+1}|/2$  e il valor medio  $m_i = (e_k + e_{k+1})/2$ , essendo  $i$  l'indice di conteggio dei cicli che deve essere incrementato ogni volta che ne viene identificato uno. Oltre ad  $a_i$  ed  $m_i$  deve essere memorizzato l'indice  $k$  del semiciclo, poiché, al termine delle operazioni di confronto, i due estremi appartenenti a ciascun ciclo identificato *devono essere eliminati dalla sequenza*, dando luogo ad una *sequenza residua* (ad es. fig.9d). È importante notare che se la condizione  $r_k < r_{k+1}$  risulta verificata e il  $k$ -esimo ciclo viene memorizzato, l'analisi della sequenza deve proseguire considerando il ciclo di indice  $k+2$ , cioè saltando il semiciclo di indice  $k+1$ , in quanto facente parte del ciclo appena conteggiato.

L'insieme delle operazioni di confronto, memorizzazione e successiva eliminazione degli estremi descritta costituisce una *iterazione* dell'elaborazione. Tale iterazione deve essere ripetuta su ciascuna sequenza residua fino a quando, al termine di un'esecuzione, non viene più identificato alcun nuovo ciclo o il numero di estremi della sequenza residua è  $n_e < 3$ . Generalmente non vengono più identificati nuovi cicli quando la sequenza residua risulta costituita da semicicli di ampiezza *decescente*, per i quali la condizione del *range mean* non può essere verificata.



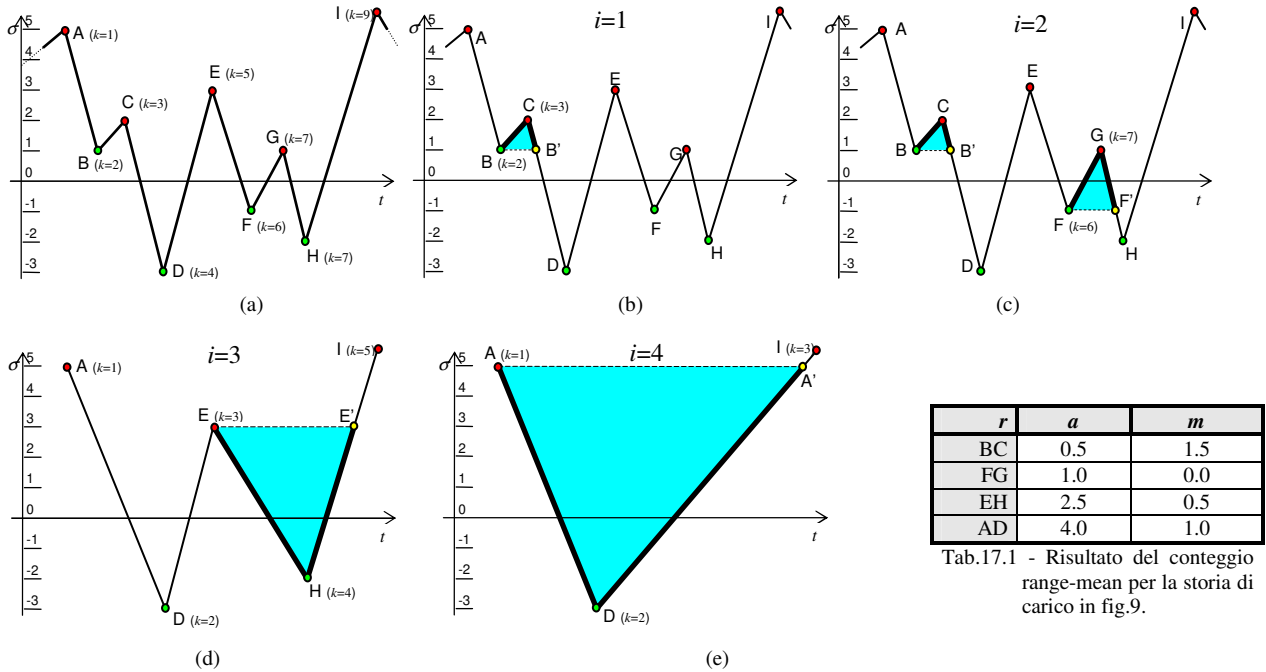


Fig.17.9 - Esempio di applicazione del metodo rainflow.

Un esempio dell'intera procedura è descritto nel seguito facendo riferimento alla fig.9.

- In fig.9a è mostrata la sequenza di estremi ABCDEFGHI. Gli estremi sono  $n_e=9$  e i semicicli  $n_r=8$ , in particolare  $r_1=AB, r_2=BC, r_3=CD, r_4=DE, r_5=EF, r_6=FG, r_7=GH, r_8=HI$ .
- La prima iterazione inizia dal primo picco della sequenza, cioè A (fig.9b). Come si osserva in fig.9b, viene identificato il ciclo BCB', essendo  $BC < CD$ , cioè  $r_2 < r_3$ . Il contatore  $i$  viene posto ad 1 e l'indice  $k=2$  viene memorizzato per la successiva eliminazione dalla sequenza dei picchi B e C, in modo che il percorso AD diventi un semiciclo (fig.9b).
- L'iterazione continua dal picco D (fig.9c) di indice  $k=4$ . Viene identificato il ciclo FGF', essendo  $FG < GH$ , cioè  $r_6 < r_7$ . Il contatore  $i$  viene incrementato a 2 e l'indice  $k=6$  viene memorizzato per la successiva eliminazione dalla sequenza dei picchi F e G, in modo che il percorso EH diventi un semiciclo. Le operazioni di confronto hanno termine, essendo HI l'ultimo semiciclo della sequenza. I picchi B, C, F e G, di indici 2,  $3=2+1$ , 6 e  $7=6+1$ , vengono eliminati, completando la prima iterazione.
- La prima iterazione ha generato la sequenza residua ADEHI (fig.9d); i picchi sono  $n_e=5$  e i semicicli  $n_r=4$ , in particolare  $r_1=AD, r_2=DE, r_3=EH, r_4=HI$ . La seconda iterazione inizia ancora dal picco A. Viene identificato il ciclo EHE', essendo  $EH < HI$ , cioè  $r_3 < r_4$ . Il contatore  $i$  viene incrementato a 3 e l'indice  $k=3$  viene memorizzato. I picchi E ed H, di indici 3 e  $4=3+1$ , vengono eliminati, completando la seconda iterazione.
- La seconda iterazione ha generato la sequenza residua ADI (fig.9e); i picchi sono  $n_e=3$  e i semicicli  $n_r=2$ , in particolare  $r_1=AD, r_2=DI$ . La terza iterazione inizia ancora una volta dal picco A. Viene identificato il ciclo ADA', essendo  $AD < AI$ , cioè  $r_1 < r_2$ . Il contatore  $i$  viene incrementato a 4 e l'indice  $k=1$  viene memorizzato. I picchi A e D, di indici 1 e  $2=1+1$ , vengono eliminati lasciando, in questo caso, l'unico estremo residuo I e la terza iterazione ha termine.

L'intera operazione di conteggio ha termine, essendo  $n_e=1 < 3$ , e il risultato del processo di conteggio è riassunto in tabella 1.

Il metodo rainflow, che potrebbe essere reso in italiano con *caduta della goccia*, prende tale nome perché l'identificazione dei cicli può essere effettuata immaginando di fare cadere delle gocce d'acqua lungo il percorso costituito dalla storia di carico posto in verticale (fig.10). I punti d'interruzione della caduta delle gocce, stabiliti da una serie di regole alquanto macchinose che, per brevità, non vengono riportate, permettono di identificare i cicli.

**Il metodo range-pair**

Il metodo *range-pair* è concettualmente molto semplice: un ciclo viene determinato accoppiando due semicicli aventi pendenza opposta ed estremi circa eguali. I due semicicli possono avere una distanza temporale qualsiasi. La fig.11 descrive la sua applicazione.

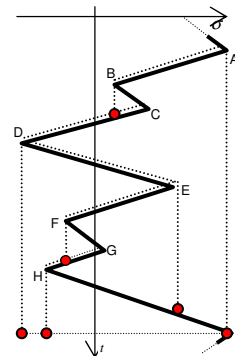


Fig.17.10 - Percorsi e interruzioni della goccia che cade.



**Confronto tra i metodi di conteggio**

Verifiche sperimentali hanno mostrato che, dal punto di vista della fatica, l'effetto di una storia di carico del tipo di quella mostrata in fig.11 è quello di un ciclo di ampiezza elevata (ADG) più due cicli di ampiezza minore. In generale si può ritenere che i semicicli più piccoli siano delle mere *interruzioni* dei cicli di ampiezza maggiore. La fig.12 mostra che il metodo rainflow (a) rispetta questa considerazione, mentre il range-pair determina l'identificazione di due cicli di ampiezza intermedia. In generale il metodo rainflow tipicamente identifica un maggiore numero di cicli di ampiezza elevata e bassa, mentre il range-pair identifica cicli di ampiezza intermedia. Poiché il danneggiamento è causato principalmente dai cicli di maggiore ampiezza, il rainflow risulta più conservativo e più aderente alla realtà sperimentale.

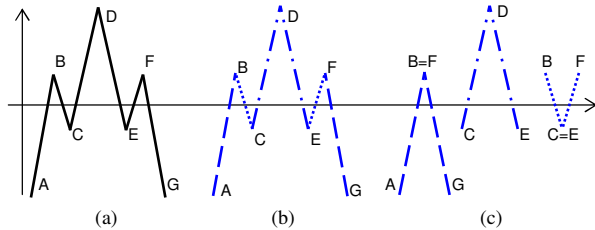


Fig.17.11 - Metodo range-pair: (a) storia di carico, (b) identificazione semicicli accoppiabili, (c) cicli ottenuti.

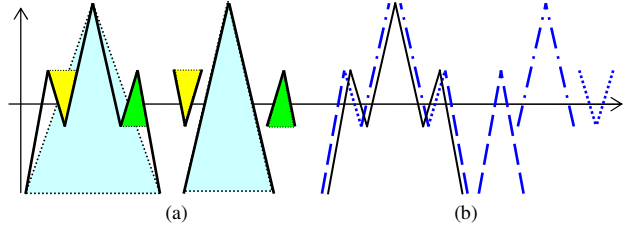


Fig.17.12- Confronto dei metodi di conteggio: (a) rainflow, (b) range-pair.

**Classificazione dei cicli di fatica**

Nel caso di grandi numeri di cicli, la loro classificazione per ampiezza e valor medio deve essere effettuata in modo discreto. In particolare il risultato del conteggio può essere riassunto in una matrice  $n_{a,m}$  (Tab.2), ciascun elemento  $n_{i,j}$  della quale contiene il numero di cicli (o *frequenza*) aventi ampiezza e valor medio compresi in opportuni intervalli  $\Delta a_i = a_i - a_{i-1}$  e  $\Delta m_j = m_j - m_{j-1}$ .

In generale tali intervalli possono essere determinati con la seguente procedura:

- si identificano i valori massimo e minimo nella storia di carico  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ : il campo di riferimento per i valori medi sarà  $\sigma_{min} \leq m \leq \sigma_{max}$  e quello delle ampiezze  $0 < a \leq (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ ;
- si seleziona il numero  $N_\Delta$  di intervalli in cui verrà divisa la semi-ampiezza del campo pari a  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$  e si determina l'ampiezza degli intervalli come  $\Delta\sigma = \Delta a = \Delta m = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2/N_\Delta$ ;
- utilizzando questo valore si determinano i livelli di riferimento  $a_i = (i-1)\Delta\sigma$ , con  $i=1, \dots, N+1$ , e  $m_j = (j-1)\Delta\sigma + \sigma_{min}$ , con  $j=1, \dots, 2N_\Delta+1$ .

Per ogni ciclo identificato, avente ampiezza  $a$  e valor medio  $m$ , viene incrementato l'elemento della matrice  $n_{a,m}$  i cui indici sono dati dalle seguenti espressioni:

$$i = \text{int}[a/\Delta\sigma] + 1 \qquad j = \text{int}[(m - \sigma_{min})/\Delta\sigma] + 1 \qquad (17.39,40)$$

nelle quali  $\text{int}[]$  è l'operatore che restituisce la parte intera di un numero.

Con riferimento all'esempio di Tab.2, in cui  $\sigma_{max}=2$ ,  $\sigma_{min}=-2$ ,  $N_\Delta=4$  (da cui  $\Delta\sigma=0.5$ ), per un ciclo di ampiezza  $a=1.8$  e valor medio  $m=-0.7$  verrà incrementato l'elemento  $n(4,3)$  essendo  $i = \text{int}[1.8/0.5] + 1 = 3 + 1 = 4$ ,  $j = \text{int}[(-0.7 + 2)/0.5] + 1 = 2 + 1 = 3$ .

La matrice  $n_{a,m}$  costituisce l'*istogramma* della sequenza di cicli considerata (fig.13). Dividendo i valori dell'istogramma per il numero totale dei cicli  $n$  e per il campo  $\Delta\sigma^2$  si ottiene una stima della *funzione di densità di probabilità* delle ampiezze e valori medi della sequenza di cicli, tanto più precisa quanto maggiore è il numero dei campioni e il numero  $N$  di intervalli, ovvero minore la loro ampiezza  $\Delta\sigma$  rispetto all'ampiezza complessiva  $(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ .

Nel caso in cui la storia temporale della tensione è a *media nulla* è opportuno determinare il valore massimo tra  $\sigma_{max}$  e  $|\sigma_{min}|$ , cioè  $\sigma_{ref} = \max\{\sigma_{max}, |\sigma_{min}|\}$ , ed utilizzare  $\sigma_{max} = \sigma_{ref}$  e  $\sigma_{min} = -\sigma_{ref}$  nella determinazione di  $a_i$  ed  $m_j$ , come nel caso di fig.13.

		$m$							
		-2.0 ÷ -1.5	-1.5 ÷ -1.0	-1.0 ÷ -0.5	-0.5 ÷ 0.0	0.0 ÷ 0.5	0.5 ÷ 1.0	1.0 ÷ 1.5	1.5 ÷ 2.0
$a$	$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0 ÷ 0.5	1	$n(1,1)$	$n(1,2)$	$n(1,3)$	$n(1,4)$	$n(1,5)$	$n(1,6)$	$n(1,7)$	$n(1,8)$
0.5 ÷ 1.0	2	$n(2,1)$	$n(2,2)$	$n(2,3)$	$n(2,4)$	$n(2,5)$	$n(2,6)$	$n(2,7)$	$n(2,8)$
1.0 ÷ 1.5	3	$n(3,1)$	$n(3,2)$	$n(3,3)$	$n(3,4)$	$n(3,5)$	$n(3,6)$	$n(3,7)$	$n(3,8)$
1.5 ÷ 2.0	4	$n(4,1)$	$n(4,2)$	$n(4,3)$	$n(4,4)$	$n(4,5)$	$n(4,6)$	$n(4,7)$	$n(4,8)$

Tab.17.2 - Esempio di matrice  $n_{a,m}$  per la classificazione. Caso di  $\sigma_{max}=2$ ,  $\sigma_{min}=-2$ ,  $N=8$  ( $\Delta\sigma=0.5$ ).

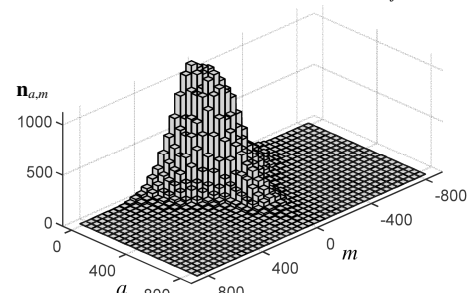


Fig.17.13 - Iistogramma rappresentativo di una matrice di conteggio  $n_{a,m}$ ;  $\sigma_{ref}=800$ ,  $\Delta\sigma=40$ .

Un altro tipo di classificazione dei dati relativi ai cicli di fatica è quello costituito dalle *matrici di transizione* **f**, di dimensioni  $N \times N$ , nelle quali è riportato il numero di passaggi da picco a valle e da valle a picco che si verifica nella storia di carico (Tab.3). Ciascun elemento  $f_{i,j}$  della matrice contiene il numero di volte nelle quali si verifica il passaggio dal livello  $i$  al livello  $j$ , per cui, quando  $i > j$ , l'elemento rappresenta il numero di passaggi da picco a valle e viceversa.

In fase di conteggio, per prima cosa si trasforma la successione di  $n$  picchi  $e_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) in successione di indici  $k_i$ . In particolare, si assegna al minimo livello di valle  $v_{\min}$  l'indice 1 e al massimo livello di picco  $p_{\max}$  l'indice massimo  $N$  e si determinano gli incrementi di livello tra un indice e il successivo come  $\Delta e = (p_{\max} - v_{\min}) / (N - 1)$ . Ad ogni estremo  $e_i$  (picco o valle) viene assegnato un indice  $k$  mediante la relazione  $k_i = \text{int}[(e_i - v_{\min} + 0.5) / \Delta e] + 1$ . Se si verifica la condizione  $k_i = k_{i-1}$  entrambi gli elementi vengono eliminati.

Successivamente il conteggio viene effettuato scorrendo la successione di indici  $k_i$ , per  $i=2, \dots, n$ , e incrementando di volte in volta l'elemento  $f(k_{i-1}, k_i)$  della matrice di transizione. In fig.14 è mostrato un esempio di storia di carico e gli indici determinati nel caso di  $v_{\min} = -10$ ,  $p_{\max} = 10$ ,  $N = 6$ .

È evidente che questo tipo di matrice deve essere utilizzato per simulare *sequenze di carico* mediante opportuni algoritmi informatici (vedi appendice). Per determinare il livello degli estremi (picchi o valli) a partire dagli indici della matrice è possibile utilizzare l'espressione  $e = (k - 1)\Delta e + v_{\min}$ , introducendo opportunamente  $i$  e  $j$  al posto di  $k$  e considerando valori  $v_{\min}$  e  $p_{\max}$  realistici per il componente analizzato. Sulle sequenze ottenute, aventi distribuzioni dei semicicli simili a quelle delle storie di carico mediante le quali le matrici stesse sono state determinate, viene poi applicato un metodo di conteggio per determinare le ampiezze e i valori medi dei cicli di fatica. Queste matrici sono utilizzate tipicamente in campo aeronautico e vengono realizzate effettuando diverse missioni tipiche per la categoria di aeromobili cui si riferiscono, misurando le sollecitazioni che si verificano, conteggiando i passaggi tra gli estremi ed effettuando una media tra i conteggi. In Tab.4 sono riassunte le formule per l'utilizzazione delle matrici **n** ed **f**.

Un'altra modalità di classificazione dei cicli di fatica è quella del cosiddetto *spettro di carico*. Esso è costituito dall'insieme dei cicli *ordinati per ampiezza decrescente*, rappresentati con le ampiezze in ordinate e l'ordine in ascisse. Le ampiezze possono essere normalizzate rispetto al valore massimo e l'ordine può essere rappresentato in coordinate logaritmiche. Questo tipo di classificazione può essere utilizzata nel caso in cui i cicli hanno valor medio nullo o trascurabile, oppure nel caso in cui si considerano le ampiezze equivalenti di Goodman. In fig.15 è mostrato un esempio di spettro di carico con ampiezze normalizzate ed ordine in coordinate logaritmiche.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	11	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5	2	2	1	1	2	1	0	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	11	36	26	37	17	11	19	28	14	17	13	14	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	121	198	116	53	63	48	39	56	22	16	11	3	5	4	2	11	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	913	504	200	131	92	78	51	56	35	10	11	15	7	4	4	3	0	2	0	1	0	0	
11	0	0	0	0	0	1	23	0	0	0	0	598	267	134	118	80	69	41	35	35	12	18	5	12	5	2	1	2	0	1	0	0	
12	0	1	0	0	1	0	12	119	0	0	0	143	86	76	54	60	28	25	37	7	19	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	0	0	0	0	1	2	32	209	908	0	0	0	0	0	98	72	54	37	20	29	13	8	1	3	1	10	3	0	0	0	0	0	
14	0	0	0	0	11	0	2	36	102	503	596	0	0	0	0	51	43	43	14	17	25	23	5	12	3	0	0	0	0	0	0	0	
15	0	0	0	2	0	1	4	25	59	173	283	158	0	0	0	0	51	26	15	19	15	6	0	7	12	1	0	0	0	0	0	0	
16	1	0	0	3	2	10	2	29	47	105	110	91	131	0	0	0	0	24	39	14	13	9	19	2	1	1	1	0	0	0	0	0	
17	0	0	1	0	0	0	2	18	49	81	99	68	72	90	0	0	0	0	28	19	7	1	3	3	5	0	2	0	0	0	0	0	
18	0	1	0	0	0	1	0	16	41	61	76	54	65	51	55	0	0	0	0	0	19	8	4	3	0	3	2	2	3	0	0	0	
19	0	0	0	0	0	0	0	20	46	58	64	53	34	30	33	58	0	0	0	0	9	5	3	1	0	1	0	2	0	0	0	0	
20	0	0	0	0	0	0	1	3	21	50	47	27	19	25	17	33	35	0	0	0	0	11	2	2	0	3	0	0	0	0	0	0	
21	0	0	0	0	0	1	2	3	20	47	34	16	34	23	21	9	21	18	0	0	0	0	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	0	0	0	0	0	0	2	11	11	46	50	31	7	1	20	3	8	14	10	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	
23	0	0	0	0	1	0	0	7	11	30	14	15	5	10	3	2	3	5	4	11	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	
24	0	0	0	0	0	0	1	12	20	24	11	2	3	3	2	11	1	7	2	4	3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	
25	1	0	0	0	0	0	0	10	10	11	5	4	0	1	0	4	0	3	1	3	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
26	0	0	0	0	0	1	1	2	7	6	20	4	0	0	1	0	0	1	2	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27	0	0	0	0	0	0	2	2	5	18	0	1	1	0	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28	0	0	0	0	0	0	1	0	6	13	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
29	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
32	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tab.17.3 - Matrice di conteggio **f** relativa ad una sequenza di carico standard in campo aeronautico. Cicli della sollecitazione agente sulla superficie inferiore dell'ala all'attacco con la fusoliera in aerei tattici soggetti a manovre severe.

	$N_{\Delta} - N$	Incrementi	$a, m/e \rightarrow$ indici	indici $\rightarrow a, m/e$
Matrici $n_{a,m}$ media-ampiezza	numero intervalli	$\Delta \sigma = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / N_{\Delta}$	$i = \text{int}[a / \Delta \sigma] + 1$ $j = \text{int}[(m - \sigma_{\min}) / \Delta \sigma] + 1$	$a = i \Delta \sigma$ $m = j \Delta \sigma + \sigma_{\min}$
Matrici <b>f</b> picco-valle	indice massimo	$\Delta e = (p_{\max} - v_{\min}) / (N - 1)$	$k = \text{int}[(e - v_{\min} + 0.5) / \Delta e] + 1$	$e = (k - 1) \Delta e + v_{\min}$

Tab.17.4 - Formule per la determinazione degli indici delle matrici di conteggio a partire dalle storie di carico e formule inverse per l'utilizzazione delle matrici.

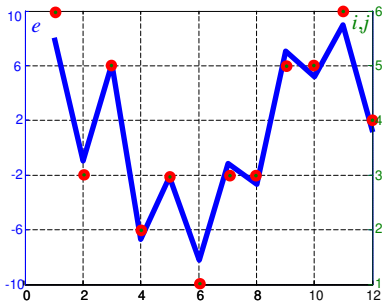


Fig.17.14 – Storia di carico e indici corrispondenti agli estremi per  $v_{\min}=-10, p_{\max}=10, N=6$  (da cui  $\Delta e=4$ ).

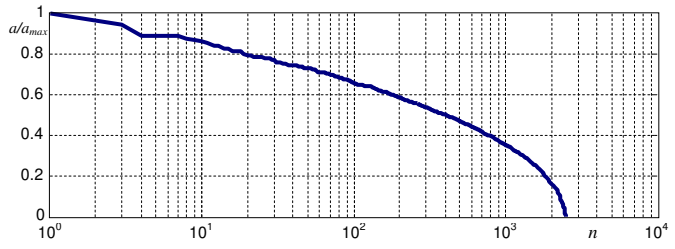


Fig.17.15 – Esempio di spettro di carico.

**Classificazione dei cicli mediante la funzione densità di probabilità**

In alcuni casi, in particolare nel caso di storie di carico schematizzabili come processi aleatori o random, la classificazione dei cicli può essere espressa sotto forma analitica mediante la funzione di *densità di probabilità* invece che mediante una matrice **n**, che pure ne può costituire un'approssimazione (in pratica ne rappresenta una *discretizzazione*).

Ad esempio, nel caso di *processi random stazionari gaussiani a banda stretta con valor medio nullo* si dimostra che la distribuzione di probabilità delle ampiezze dei cicli è data dalla funzione di *Rayleigh* nella seguente forma

$$p(a) = \frac{a}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma_x^2}\right) \tag{17.41}$$

nella quale  $\sigma_x^2$  è il valor quadratico medio del processo di tensione (coincidente con la *varianza* per processi a media nulla). Un grafico della distribuzione di Rayleigh per valori di  $\sigma_x=100, 150, 200$  è riportato nella fig.16 a sinistra, nella quale è possibile osservare che la probabilità tende a 0 per  $a > 4\sigma_x$ .

Ovviamente il numero  $n_i$  di cicli aventi ampiezza compresa in un intervallo  $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$  può essere ottenuto integrando la funzione densità di probabilità nell'intervallo stesso e moltiplicando il risultato per il numero totale di cicli  $n$ , cioè:

$$n_i = n \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(a) da \approx n p(a_i) \Delta a \tag{17.42}$$

In base alla (42), l'espressione del danneggiamento di fatica per cicli a valor medio nullo (5) può essere modificata per il caso in cui la distribuzione di cicli di fatica è nota tramite una funzione di densità di probabilità  $p(a)$  nel seguente modo:

$$D = \frac{n}{K} \int_a a^\mu p(a) da \tag{17.43}$$

nella (43)  $n$  è il numero totale dei cicli e  $K$  ed  $\mu$  sono le costanti della curva di Wöhler relative al materiale.

Estendendo il concetto di tensione equivalente di Miner (13,14) - pari al *valor medio della tensione equivalente di Goodman elevata all'esponente  $\mu$  elevato ad  $1/\mu$*  - al caso di conteggio dei cicli sotto forma di funzione densità di probabilità, si ottiene:

$$A = \left[ \int_a a^\mu p(a) da \right]^{1/\mu} \tag{17.44}$$

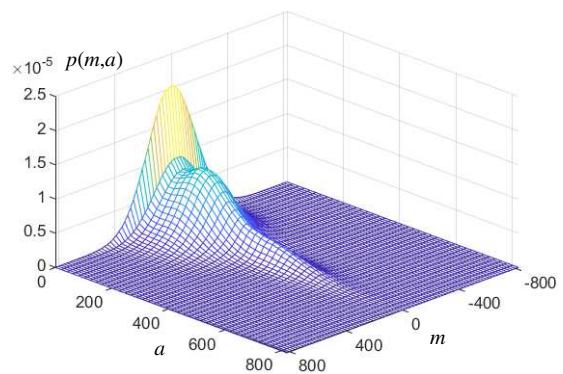
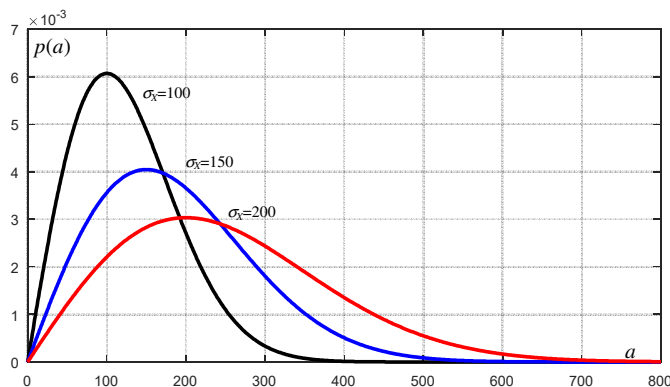


Fig.17.16 - A sinistra funzione densità di probabilità  $p(a)$  di Rayleigh per  $\sigma_x=100, 150, 200$ ; a destra esempio di funzione densità di probabilità dei cicli di fatica per media ed ampiezza  $p(m,a)$  con  $800 \leq m \leq 800, 0 \leq a \leq 800$ .

Anche l'espressione del danneggiamento per cicli con valor medio positivo (8) può essere modificata per il caso in cui la distribuzione di cicli di fatica è espressa da una funzione densità di probabilità  $p(m,a)$  (fig.16 a destra):

$$D = \frac{n}{K} \iint_{m,a} \left( \frac{a}{1-m/\sigma_r} \right)^\mu p(m,a) dm da \quad (17.45)$$

essendo  $n_{i,j}$  il numero di cicli aventi componenti alternata e media compresi in intervalli  $\Delta a_i$  e  $\Delta m_j$  esprimibile come

$$n_{i,j} = n \int_{m_j}^{m_{j+1}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(m,a) dm da \approx n p(m_j, a_i) \Delta m \Delta a \quad (17.46)$$

La tensione equivalente di Miner in questo caso diventa:

$$A = \left[ \iint_{m,a} \left( \frac{a}{1-m/\sigma_r} \right)^\mu p(m,a) dm da \right]^{1/\mu} \quad (17.47)$$

Introducendo la tensione equivalente di Goodman  $a_G$  (17.8), la (45) e la (47) possono essere riscritte come

$$D = \frac{n}{K} \int_{a_G} a_G^\mu p(a_G) da_G \quad (17.45b)$$

$$A = \left[ \int_{a_G} a_G^\mu p(a_G) da_G \right]^{1/\mu} \quad (17.47b)$$

### Processi aleatori

In molti casi le *forzanti* agenti sui sistemi meccanici e le conseguenti sollecitazioni sulle strutture sono note in forma di registrazioni temporali, ognuna differente dall'altra a causa della natura *aleatoria* del fenomeno da cui derivano e non possono essere descritte mediante funzioni deterministiche del tempo. Tipici casi di forzanti aleatorie sulle strutture sono la turbolenza, le onde marine, il terremoto, l'irregolarità del manto stradale, ecc...

In molti casi una descrizione significativa della risposta strutturale può essere ottenuta solo in senso statistico, modellando la storia di carico come un *processo aleatorio* o *random*. In generale un processo aleatorio è costituito da una *variabile aleatoria funzione di un parametro deterministico*: nel caso dell'analisi a fatica la variabile aleatoria è la tensione agente nel punto d'interesse della struttura e il parametro deterministico è il tempo  $t$ .

Per descrivere statisticamente un processo aleatorio  $X(t)$  è necessario un numero  $N_c$  di registrazioni  $x_c(t)$   $c=1, \dots, N_c$ , sufficientemente elevato del fenomeno, ciascuna estesa in un intervallo  $T$ , anch'esso sufficientemente ampio. Ogni registrazione viene chiamata *campione* e l'insieme dei campioni costituisce il processo.

Una prima descrizione statistica del processo viene effettuata considerando i valori assunti da tutti campioni in ciascun istante  $t$  e determinandone la funzione *densità di probabilità*  $p_X(x,t)$ . Ad esempio, in fig.17 sono mostrati 5 campioni estratti da 2 diversi processi aleatori e le funzioni di densità di probabilità dei valori assunti dai campioni negli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  evidenziati in fig.16, nel caso particolare di distribuzione *gaussiana*. In fig.17 si può notare come il primo processo abbia una distribuzione statistica costante nel tempo, mentre nel secondo la *varianza* del processo è funzione del tempo.

Ai fini della valutazione del danno di fatica prodotto da un processo aleatorio di tensione ciò che interessa è la *sequenza degli estremi* di ciascun campione. In particolare, l'*ampiezza* dei cicli di fatica è legata alla distanza tra picchi e valli lungo l'asse delle ordinate  $x$ , mentre il *numero* dei cicli rispetto all'intervallo di tempo analizzato è legato alla distanza tra i picchi misurata lungo l'asse temporale  $t$ . Com'è ovvio, la prima caratteristica è legata alle caratteristiche di ampiezza del processo, mentre la seconda è legata al suo *contenuto in frequenza*.

Grandezze utili alla caratterizzazione statistica dell'ampiezza del processo in ogni singolo istante sono il *valor medio*, il *valor quadratico medio* e la *varianza* del processo definiti rispettivamente come:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x,t) dx = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} x_c(t) \\ q_X(t) &= E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x,t) dx = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} x_c^2(t) \\ \sigma_X^2(t) &= E\left[\left[X(t) - m_X(t)\right]^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_X(t)\right]^2 p_X(x,t) dx = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} \left[x_c(t) - m_X(t)\right]^2 \end{aligned} \quad (17.48-50)$$

nelle quali  $E[\ ]$  è l'operatore di *media stocastica*.

Tali grandezze, in generale, sono funzioni del tempo. È facile osservare che esse possono essere ottenute dalla conoscenza della funzione densità di probabilità del processo, oppure considerando un numero di campioni sufficientemente ampio.

Per la varianza, inoltre, vale la nota relazione

$$\sigma_X^2(t) = q_X(t) - m_X^2(t) \quad (17.51)$$

in base alla quale essa può essere ottenuta come differenza tra il valor quadratico medio e il quadrato della media.

La media e la varianza sono dette anche *momenti* rispettivamente *del primo* e *del secondo ordine* della variabile aleatoria. Inoltre, com'è noto, la radice quadrata della varianza, cioè  $\sigma_X(t)$ , è definita *scarto quadratico medio* o *deviazione standard*. In fig.18 sono mostrati 4 campioni di processi dei quali il primo ha i parametri statistici costanti nel tempo e gli altri valor medio e/o deviazione standard variabili col tempo.

### Processi gaussiani

Se in ogni istante la distribuzione di probabilità del processo  $p_X(x,t)$  è di tipo gaussiano, cioè è descritta dalla seguente equazione

$$p_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{x - m_X(t)}{\sigma_X(t)}\right]^2\right\} \quad (17.52)$$

il processo si definisce *gaussiano*. Tipicamente, affinché un processo di tensione risulti gaussiano, la sollecitazione in ingresso alla struttura deve essere a sua volta di tipo gaussiano e il sistema meccanico deve essere di tipo lineare (cioè le equazioni che legano le tensioni agenti ai carichi applicati devono essere di tipo lineare). Esempi di funzioni di distribuzione di probabilità di tipo gaussiano sono mostrate in fig.17.

Il valore della funzione di distribuzione di probabilità gaussiana diminuisce a mano a mano che la variabile si allontana dal valor medio; in particolare, nel caso dei processi a media nulla, la probabilità che si verifichi  $|x(t)| > 3\sigma_X$ , oppure  $|x(t)| > 4\sigma_X$ , oppure  $|x(t)| > 5\sigma_X$  è, rispettivamente, di circa lo 0.27%, lo 0.006334% e lo 0.0000573%.

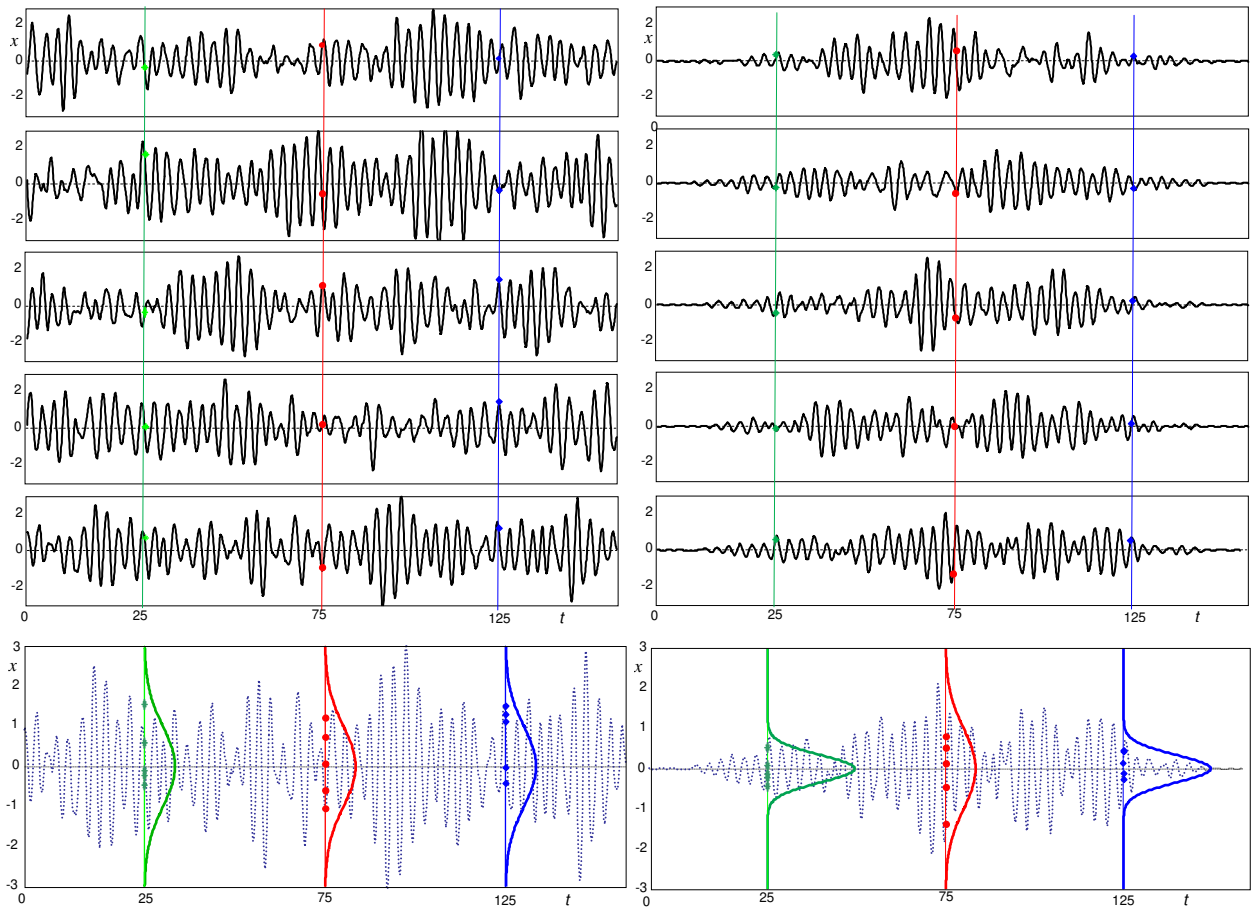


Fig.17.17 - In alto: campioni  $x_c(t)$  di processi aleatori: a sinistra con parametri statistici costanti nel tempo, a destra con valor quadratico medio variabile; in basso: distribuzioni di probabilità (di tipo Gaussiano) dei processi relative a tre diversi istanti.

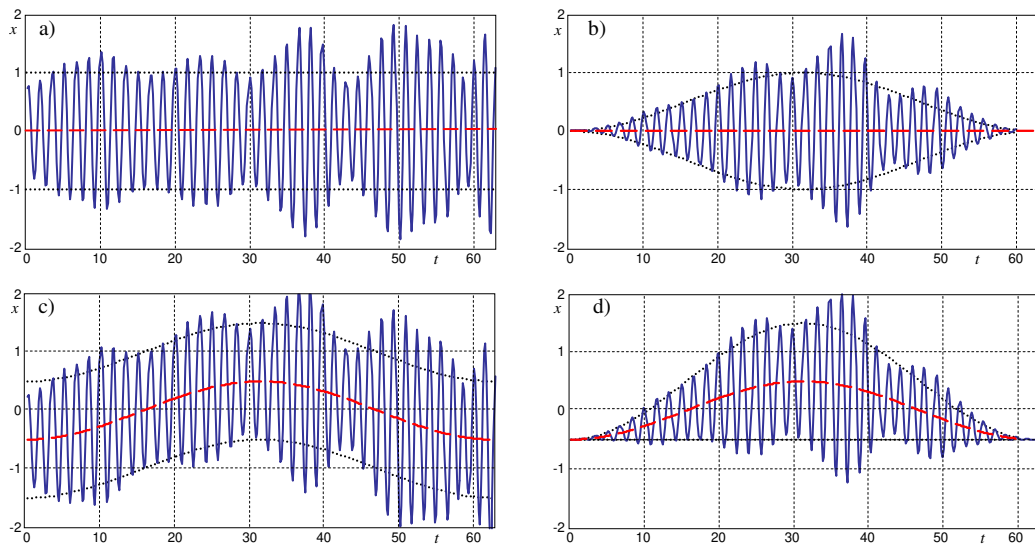


Fig.17.18 - Campioni di processi aleatori: a) processo con media e varianza costanti, b) processo con media costante e varianza variabile, c) processo con media variabile e varianza costante, d) processo con media e varianza variabili.

### La correlazione

Le funzioni introdotte descrivono caratteristiche statistiche relative a singoli istanti del processo particolarizzando il valore di  $t$ . Tali funzioni sono utili ad analizzare il contenuto in ampiezza del processo, ma per avere informazioni riguardanti il contenuto in frequenza è necessario introdurre delle funzioni che mettano in relazione tra loro valori assunti dal processo in *istanti differenti*.

Le *medie a tempi multipli* forniscono una misura della relazione statistica esistente tra variabili aleatorie estratte da un processo in istanti differenti e permettono di effettuare una stima della variabilità del processo rispetto al tempo. Se  $t_i$  e  $t_j$  sono due istanti del periodo  $T$ , la cui distanza temporale è data da  $\tau_{ij}=t_i-t_j$ , la media a tempi multipli del *secondo ordine*, definita *funzione di autocorrelazione*, è data dalla seguente relazione:

$$R_X(t_i, t_j) = E[X(t_i)X(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p_{X_i, X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} x_c(t_i) x_c(t_j) \quad (17.53)$$

nella quale  $p_{X_i X_j}(x_i, x_j)$  è la funzione densità di probabilità congiunta delle variabili  $X_i=X(t_i)$  ed  $X_j=X(t_j)$  che, in generale, assume forma differente per ciascuna coppia di istanti selezionata. Coinvolgendo nel prodotto  $n$  variabili  $X_i$  relative a  $n$  istanti  $t_i$  si possono ottenere le medie a tempi multipli di ordine  $n$ . In linea teorica la caratterizzazione completa di un processo aleatorio richiede la conoscenza delle medie di qualsiasi ordine, per qualsiasi insieme d'istanti.

La funzione  $R$  viene più significativamente scritta in funzione di un istante generico  $t$  ed esprimendo l'altro istante mediante la distanza temporale  $\tau$  che li separa, dando luogo alla seguente espressione:

$$R_X(t, \tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \quad (17.54)$$

In base alla definizione (53), ponendo  $t_i=t$ ,  $t_{i+1}=t+\tau$ , la (54) può essere scritta anche come:

$$R_X(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_{i+1} p_{X(t_i)X(t_{i+1})}(x_i, x_{i+1}) dx_i dx_{i+1} = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} [x_c(t) x_c(t+\tau)] \quad (17.55)$$

In pratica per ottenere il valore di  $R_X(t, \tau)$ , relativo a 2 istanti del processo  $t$  e  $t+\tau$ , si valuta il prodotto dei valori assunti da ciascun campione negli istanti considerati e se ne calcola la media estesa a tutti i campioni.

Nelle fig.19,20 sono mostrati i campioni di 4 processi e le funzioni di autocorrelazione dei processi cui appartengono. Nel caso particolare i processi hanno proprietà statistiche costanti nel tempo e le funzioni di autocorrelazione sono mostrate al variare di  $\tau$  per fissato istante  $t$ .

È facile comprendere che il valore di  $R_X(t, \tau)$ , tipicamente, diminuisce al crescere di  $\tau$  e diminuisce quanto più velocemente i campioni del processo variano di intensità in funzione del tempo. Infatti (fig.19,20):

- $R_X(t, \tau)$  assume il valore massimo per  $\tau=0$ ; se  $\tau=0$ , infatti, si ha  $x_c(t)x_c(t+\tau)=x_c^2(t)$  e la funzione  $R_X(t, \tau)=R_X(t, 0)$  risulta coincidente con il valor quadratico medio del processo all'istante  $t$ : in questo caso tutti i termini della sommatoria estesa ai campioni risultano positivi e contribuiscono ad aumentare il risultato, mentre se  $\tau > 0$  o  $\tau < 0$  il prodotto  $x_c(t)x_c(t+\tau)$  potrà risultare positivo in alcuni casi e negativo in altri, dando luogo a valori più bassi rispetto al caso di  $\tau=0$ , (fig.19,20);
- $R_X(t, \tau)$  è una funzione pari, infatti se si invertono tra loro i punti considerati, il prodotto  $x_c(t)x_c(t+\tau)=x_c(t+\tau)x_c(t)$  non cambia, (fig.19,20);
- se il processo tende ad essere molto variabile con il tempo, la funzione  $R_X(t, \tau)$  tende a decrescere molto rapidamente al crescere di  $\tau$ , vedi fig.20, caso (4);
- se il processo ha delle caratteristiche di periodicità, la funzione  $R_X(t, \tau)$  può tornare a crescere per un certo intervallo di  $\tau$ , come si nota nelle fig.19,20 per i processi (1), (2) e (3), diversamente dal processo (4).

In ogni caso  $R_X(t, \tau) \rightarrow 0$  per  $\tau \rightarrow \infty$  e assume il valore massimo per  $\tau=0$ .

Per la caratterizzazione dei processi aleatori si usa anche la *funzione di autocovarianza* così definita

$$\sigma_{X_i X_j}(t_i, t_j) = E[(X(t_i) - m_X(t_i))(X(t_j) - m_X(t_j))] = R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)m_X(t_j) \quad (17.56)$$

Se la funzione densità di probabilità  $p_{X_i X_j}(x_i, x_j)$  nelle (53) e (55) è di tipo Gaussiano assume la seguente forma

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \sqrt{1 - \rho_{X_1 X_2}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{X_1 X_2}^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - m_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - m_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right)^2 - \frac{2\rho_{X_1 X_2}(x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \right] \right\} \quad (17.57)$$



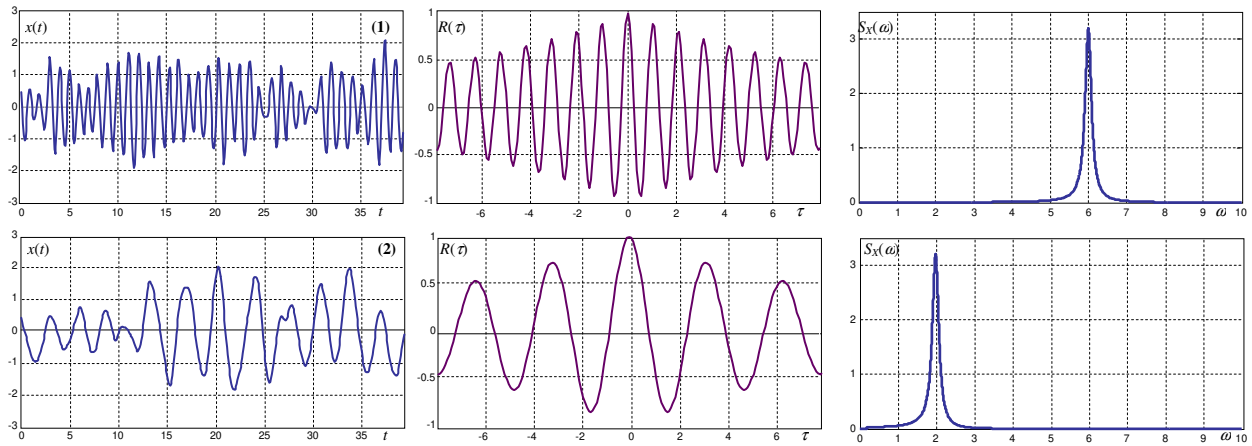


Fig.17.19 – Processi stazionari, gaussiani, a banda stretta, media nulla. Da sinistra a destra, campione del processo, funzione di autocorrelazione, densità spettrale di potenza. (1): processo a banda stretta, (2): processo simile al (1) con velocità angolare media meno elevata.

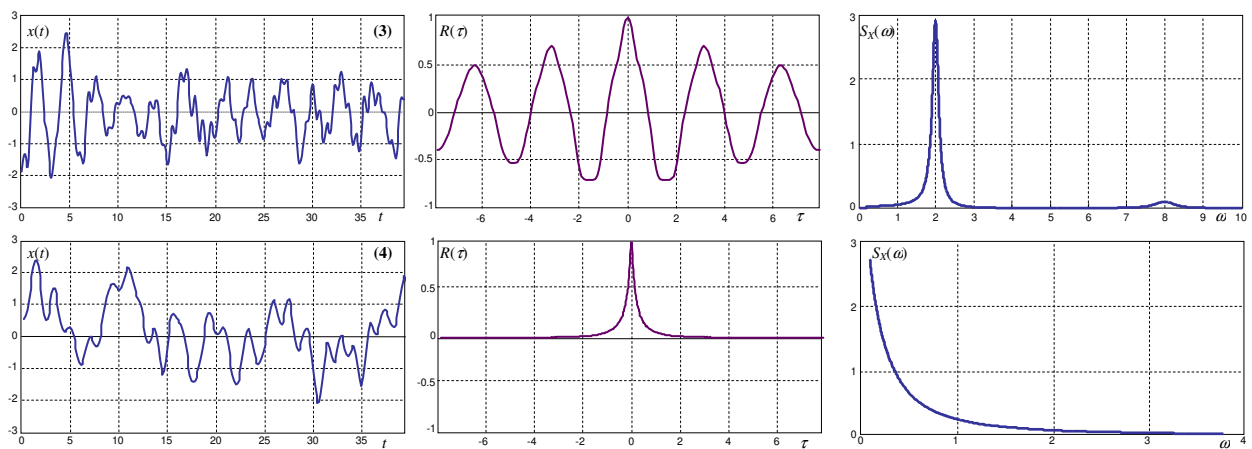


Fig.17.20 - Processi stazionari, gaussiani, a banda larga, media nulla. Da sinistra a destra, campione del processo, funzione di autocorrelazione, densità spettrale di potenza. (3): processo di tipo bimodale, (4): processo di tipo esponenziale decrescente.

nella quale

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (17.58)$$

essendo

$$\sigma_{X_1 X_2} = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] = q_{X_1 X_2} - m_{X_1} m_{X_2} \quad (17.59)$$

Nel caso in questione  $X_1 \equiv X(t)$ ,  $X_2 \equiv X(t + \tau)$  e, in base alla (53),  $q_{X_1 X_2} \equiv R_X(t, \tau)$ .

I 4 processi mostrati nelle fig.19,20 hanno tutti la stessa distribuzione gaussiana con gli stessi parametri costanti nel tempo (media nulla e varianza unitaria), ma posseggono caratteristiche differenti in termini di *variabilità* lungo l'asse temporale, evidenziate dalle differenti caratteristiche delle rispettive funzioni di autocorrelazione.

### Stazionarietà ed ergodicità

Un processo  $X(t)$  le cui proprietà statistiche variano rispetto al tempo è detto *non stazionario*. Se la distribuzione di probabilità della variabile  $X(t_i)$  estratta dal processo risulta indipendente dall'istante  $t_i$  scelto e la distribuzione di probabilità congiunta di coppie di variabili  $X(t)$  e  $X(t + \tau)$  risulta indipendente dall'istante  $t$ , il processo si definisce *debolmente stazionario* fino al secondo ordine. Dei quattro campioni di processi gaussiani mostrati in fig.18 il primo appartiene ad un processo stazionario, mentre gli altri appartengono a rispettivamente a processi non stazionari per media, per scarto quadratico medio o per entrambi.

In un processo debolmente stazionario fino al 2° ordine, la media e la varianza sono costanti e la funzione di correlazione dipende solo dalla distanza temporale  $\tau$  tra gli istanti presi in considerazione e non dall'istante  $t$

$$R(\tau) = E[X(t) X(t + \tau)] \quad (17.60)$$

Un processo si definisce *fortemente stazionario* (o, semplicemente, *stazionario*) se le funzioni di densità di probabilità congiunta di qualsiasi ordine risultano indipendenti dagli istanti selezionati. È possibile dimostrare che

un processo gaussiano debolmente stazionario è anche fortemente stazionario.

I processi dei quali sono mostrati un campione e la funzione di autocorrelazione nelle fig.19,20 sono tutti stazionari e gaussiani.

Un processo stazionario si definisce *ergodico* rispetto alla media e alla varianza se tali grandezze valutate *rispetto al tempo su un singolo campione* risultano uguali alle analoghe grandezze valutate sull'insieme dei campioni ad un istante arbitrario  $t_i$ . In particolare, la media e il valor quadratico medio di un campione *rispetto al tempo* sono definite come segue:

$$\bar{x}_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \quad \overline{x_i^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i^2(t) dt \quad (17.61,62)$$

e il processo è ergodico se si verifica

$$\bar{x}_i = m_x \quad \overline{x_i^2} = q_x \quad (17.63a,b)$$

Naturalmente affinché un processo sia ergodico, deve essere anche stazionario, ma non è detto il viceversa (ovvero, la stazionarietà è una condizione necessaria, ma non sufficiente per l'ergodicità). Questa proprietà permette di stimare proprietà statistiche del processo utilizzando un solo campione, purché di durata sufficiente. Per molti processi stazionari di interesse ingegneristico l'ipotesi di ergodicità può essere considerata ammissibile.

### La densità spettrale di potenza

Un processo stazionario e gaussiano  $X(t)$  può essere univocamente caratterizzato nel dominio della frequenza mediante la funzione *Densità Spettrale di Potenza* (*Power Spectral Density* - PSD)  $S_X(\omega)$ , che può essere ottenuta applicando la *Trasformata di Fourier* (TF) alla funzione di autocorrelazione  $R_X(\tau)$  e moltiplicando per il fattore  $1/2\pi$ :

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (17.64)$$

La relazione che lega la funzione  $R_X(\tau)$  alla funzione  $S_X(\omega)$ , si ottiene applicando la *trasformata inversa* (o *antitrasformata*) di Fourier (vedi Appendice 1):

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (17.65)$$

Le (64) e (65) prendono il nome di relazioni di Wiener-Kintchine e sono fondamentali in quanto mettono in relazione il dominio del tempo con quello della frequenza. Si noti che la variabile  $\omega$  presente nelle (64,65) è la cosiddetta *frequenza circolare* (o *velocità angolare*) espressa in radianti al secondo, legata alla *frequenza*  $f$  dalla ovvia relazione  $\omega=2\pi f$ . Da notare che in alcuni testi il fattore  $1/2\pi$  è inserito nella (65) invece che nella (64).

La PSD è una funzione reale, pari e positiva, la cui area sottesa è uguale al valor quadratico medio del processo, come è possibile verificare ponendo  $\tau=0$  nella (60) e ricordando che  $R(0)=E[x(t)^2]$  in base alla definizione (55):

$$R_X(0) = E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (17.66)$$

Nel caso di processi *a media nulla*, cui si farà riferimento nel seguito, l'area sottesa dalla PSD e la funzione di correlazione per  $\tau=0$  coincidono con la varianza del processo.

La definizione di *densità di potenza* nasce dalla considerazione che l'*energia* associata a un segnale variabile nel tempo è proporzionale al suo quadrato e al tempo nel quale agisce (Appendice 2). Ad esempio, se il segnale è una forza che agisce su una molla, l'energia è proporzionale al prodotto della forza per lo spostamento e questo ultimo è proporzionale alla forza stessa tramite la costante elastica del sistema su cui agisce. Se si divide per il tempo si passa dall'energia all'energia *ad unità di tempo*, cioè alla *potenza*, per cui si può affermare che la varianza è proporzionale alla *potenza media* espressa dal segnale. Poiché l'*integrale* della PSD rispetto a  $\omega$  è proprio pari alla varianza del processo, la PSD stessa rappresenta la *potenza specifica* o *densità* di potenza del segnale rispetto alla frequenza. L'aggettivo *spettrale* viene utilizzato in modo analogo a quanto accade in *ottica* dove la rappresentazione dell'energia posseduta dalla luce al variare della frequenza è definita *spettro di energia*.

Essendo una funzione pari, la PSD è definita anche nel campo  $\omega < 0$ ; spesso, per motivi pratici, la parte relativa al campo negativo  $\omega < 0$  viene posta a 0 e la parte relativa al campo  $\omega > 0$  viene raddoppiata. In questo caso si parla di *PSD unilaterale*.

Nelle fig.19,20 sono mostrate le PSD di 4 processi stazionari, insieme ad un campione del processo e alle funzioni di autocorrelazione. La forma della PSD di un processo è legata alla distribuzione della potenza del processo stesso alle varie frequenze e da essa dipendono le sue caratteristiche dinamiche, in particolare la distribuzione statistica dei picchi e dei cicli di fatica.

La PSD può essere ottenuta direttamente dalle TF dei campioni del processo mediante la seguente relazione:

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X(\omega, T)|^2]}{2\pi T} \quad (17.67)$$

che può essere ottenuta con alcuni passaggi, qui omissi, a partire dalla (64) ricordando la definizione di  $R(\tau)$  nella (54) e le proprietà della TF (Appendice 1):

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x(t+\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \quad (17.68)$$

e introducendo la TF dei campioni del processo definita come

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} X(\omega, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (17.69)$$

La densità spettrale di un processo può essere stimata dalla media delle TF dei campioni del processo  $X_c(\omega)$ , con  $c=1, \dots, N_c$ , effettuata su un tempo  $T$  ragionevolmente esteso, mediante la seguente relazione ottenuta dalla (67):

$$S_X(\omega) \approx S_X(\omega, T, N_c) = \frac{1}{2\pi T} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} |X_c(\omega)|^2 \quad (17.70)$$

La PSD del processo tensione agente in un punto della struttura può essere ottenuta a partire dalle registrazioni della tensione nel dominio del tempo tramite le (69) e (70), oppure a partire dalla PSD del processo forzante che agisce sulla struttura risolvendo le apposite equazioni della dinamica. In letteratura possono essere reperite le PSD relative a sollecitazioni strutturali provocate da diversi fenomeni aleatori, come il profilo del manto stradale, il terremoto, il vento ecc....

Per le note proprietà della trasformata di Fourier di una funzione, la PSD della derivata  $n$ -esima di un processo (che è a sua volta un processo aleatorio) può essere ottenuta moltiplicando la PSD del processo per la funzione  $\omega$  elevata a  $2n$  (Appendice 1), cioè:

$$S_{d^n X/dt^n}(\omega) = \omega^{2n} S_X(\omega) \quad (17.71)$$

In particolare, per la derivata prima si ottiene:

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (17.72)$$

In fig.21 sono riportate a confronto le PSD dei processi (2), (3) e (4), già mostrate nelle fig.19,20, con le PSD delle rispettive derivate.

### Larghezza di banda e parametri spettrali

Se la PSD ha valori significativi in un intervallo di frequenze limitato, come nei casi mostrati in fig.19,20, il processo si definisce *a banda stretta*. Tipicamente un processo a banda stretta risulta caratterizzato da cicli *alternati simmetrici* di ampiezza variabile in modo aleatorio, con frequenza poco variabile nel tempo (fig.19,20). In questo caso la distribuzione statistica dei cicli di fatica si avvicina alla distribuzione statistica dei massimi (o dei minimi) del processo e può essere dedotta per via teorica dalle sue caratteristiche statistiche, come si vedrà nel seguito.

Nel caso in cui la PSD ha valori significativi distribuiti in un ampio intervallo di frequenze, come nei casi mostrati in fig.20, il processo si definisce *a banda larga*. Tipicamente in questi casi i massimi consecutivi hanno livelli differenti, dando luogo a cicli non immediatamente identificabili, che rendono necessaria l'utilizzazione di un metodo di conteggio. Utilizzando il metodo rainflow, poiché nell'identificazione dei cicli di ampiezza maggiore vengono coinvolti picchi *non consecutivi*, la determinazione della distribuzione statistica dei cicli ottenuti a partire dalle caratteristiche statistiche del processo risulta estremamente difficoltosa e, ad oggi, non sono disponibili relazioni analitiche generali.

La forma della PSD, con particolare riferimento alla sua dispersione rispetto all'ascissa  $\omega$ , viene caratterizzata da diversi parametri ottenibili come combinazione dei cosiddetti *momenti spettrali*  $\lambda_i$ , così definiti:

$$\lambda_i = 2 \int_0^{\infty} \omega^i S_X(\omega) d\omega \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad (17.73)$$

In particolare, il *momento spettrale* di ordine 0,  $\lambda_0$ , restituisce l'area sottesa dalla curva PSD e, come detto, coincide con la varianza del processo:

$$\lambda_0 = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \sigma_X^2 \quad (17.74)$$

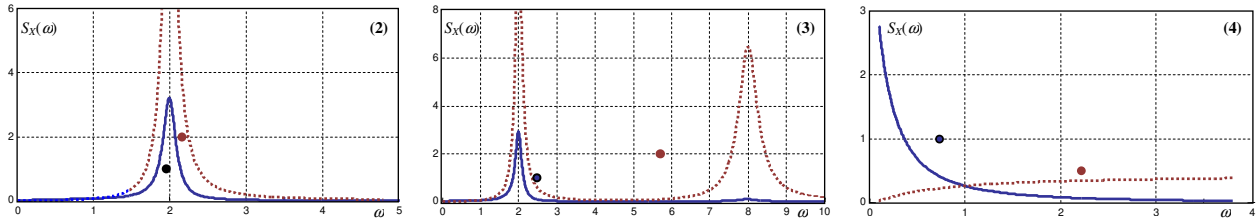


Fig.17.21 – PSD del processo (linea continua) e della derivata (punteggiata) e posizioni dei rispettivi giratori di inerzia, per i processi (2), (3) e (4) delle fig.19,20.

Ricordando la relazione (72) tra la PSD del processo e quella della derivata, è possibile osservare che i momenti di ordine  $2n$  del processo coincidono con i momenti di ordine  $2n-2$  della sua derivata. Ad esempio, per l'ordine 2 si ha:

$$\lambda_2 = 2 \int_0^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \omega^0 S_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \sigma_{\dot{X}}^2 \quad (17.75)$$

dalla quale si osserva che il momento di ordine 2 coincide numericamente con la *varianza della derivata* del processo.

È importante notare che, nel caso di PSD unilaterale, poiché la parte relativa al campo  $\omega > 0$  è raddoppiata, nelle equazioni corrispondenti alle (73-75) *non compare il fattore 2*.

Operando con i criteri della geometria delle masse, utilizzando i momenti spettrali è possibile determinare il baricentro  $\Omega_X$  e il giratore di inerzia  $\rho_X$  della PSD rispetto all'asse delle ordinate (fig.21). In particolare valgono le seguenti relazioni

$$\Omega_X = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = E[\dot{\phi}_X] \quad \rho_X = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} = E\left[|\dot{\phi}_X|\right] \quad (17.76,77)$$

Ad esempio, i valori assunti da  $\rho_X$  per i processi mostrati nelle fig.19,20 sono riportati in Tab.5. In fig.21 sono riportati dei punti le cui *ascisse* hanno il valore dei giratori di inerzia delle PSD dei processi.

Ricordando che un segnale  $x(t)$  può essere interpretato come la proiezione sull'asse reale di un vettore  $z(t)$  che ruota sul piano complesso con velocità angolare variabile  $\dot{\phi}_X$  (Appendice 3), il baricentro e il giratore della PSD coincidono rispettivamente con il valor medio di  $\dot{\phi}_X$  e il valor medio del *modulo* di  $\dot{\phi}_X$  (76-77). Quest'ultima grandezza è legata all'intera fase percorsa dal vettore  $z$  sul piano complesso ruotando in entrambe le direzioni ed è proporzionale al numero di attraversamenti dello 0 effettuati dal segnale nell'unità di tempo (Appendice 3). In particolare il *numero medio di coppie di attraversamenti dello 0 nell'unità di tempo*  $n_Z$  (ovvero il numero di attraversamenti con derivata positiva, ricordando che ad ogni giro completo del vettore  $z(t)$  corrispondono 2 attraversamenti dello zero) può essere ottenuto come:

$$n_Z = \frac{\sqrt{\lambda_2/\lambda_0}}{2\pi} = \frac{\rho_X}{2\pi} \quad (17.78)$$

Il giratore di inerzia *rispetto all'asse baricentrico* fornisce una valutazione della *dispersione* dell'area rispetto al baricentro e può essere ottenuto come

$$\bar{\rho}_X = \sqrt{\rho_X^2 - \Omega_X^2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2} \quad (17.79)$$

In pratica, però, l'effetto della dispersione dell'area attorno al baricentro non può essere valutato in termini assoluti mediante il giratore (75), in quanto, a parità di tale valore, la dispersione risulta più significativa se la velocità angolare media  $\Omega_X$  è più bassa e viceversa. La (75) può essere riscritta come

$$\bar{\rho}_X = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}\right)} = \rho_X q_X \quad (17.80)$$

nella quale il parametro  $q_X$ , è parametro di Vanmarke, definito come

$$q_X = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}} = \frac{\bar{\rho}_X}{\rho_X} \quad (17.81)$$

Tale parametro assume valori tra 0 ed 1 e costituisce un indice della larghezza di banda del processo. È facile vedere che se  $q_X \rightarrow 0$ , la dispersione di  $S(\omega)$  rispetto al suo baricentro si annulla, viceversa se  $q_X \rightarrow 1$ , la dispersione di tende al massimo valore possibile, in quanto il giratore baricentrico tende al valore del giratore. In Tab.5 sono riportati i valori del parametro di Vanmarke per i processi delle fig.19,20. È possibile osservare che i processi (1) e

(2) hanno la stessa forma della PSD, ma differenti valori di  $q_x$ , per via della differente posizione del giratore.

Aumentando di 2 l'ordine dei momenti spettrali presenti nelle (76,77,80) si ottengono le analoghe grandezze relative alla derivata del processo

$$\Omega_{\dot{x}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = E \left[ \dot{\phi}_{\dot{x}} \right] \quad \rho_{\dot{x}} = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} = E \left[ \left| \dot{\phi}_{\dot{x}} \right| \right] \quad \bar{\rho}_{\dot{x}} = \sqrt{\rho_{\dot{x}}^2 - \Omega_{\dot{x}}^2} = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2} - \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2} \quad (17.82-84)$$

In modo analogo a quanto fatto per le PSD dei processi, in fig.21 sono riportati dei punti le cui *ascisse* hanno il valore dei giratori di inerzia delle PSD delle derivate dei processi stessi. Osservando la fig.21 e i dati riportati nella Tab.5 si può notare come, nel caso dei processi a banda larga, il giratore di inerzia della derivata risulti proporzionalmente molto più elevato rispetto a quello del processo.

È importante notare che  $\rho_{\dot{x}}$  (fig.21 e Tab.5) risulta proporzionale al numero medio delle coppie di attraversamenti dello 0 nell'unità di tempo della *derivata* del segnale, che, per elementari considerazioni di analisi matematica, coincide con il *numero medio dei massimi* (o dei *minimi*) nell'unità di tempo del segnale (Appendice 3). In particolare, tale numero è espresso come:

$$n_M = \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} = \frac{\rho_{\dot{x}}}{2\pi} \quad (17.85)$$

Da notare che il numero dei massimi, indipendentemente dal metodo di conteggio utilizzato, è molto prossimo al numero dei cicli di fatica (nel caso di ampiezza costante il numero di cicli di fatica è  $n=n_M-1$ ).

Mediante i momenti spettrali si definisce un altro parametro di larghezza di banda molto importante nell'analisi dei processi stocastici: il *fattore di irregolarità*  $\alpha_x$ . Esso è legato ai momenti spettrali dalla relazione:

$$\alpha_x = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0\lambda_4}} = \frac{\rho_x}{\rho_{\dot{x}}} = \frac{E \left[ \left| \dot{\phi}_x \right| \right]}{E \left[ \left| \dot{\phi}_{\dot{x}} \right| \right]} = \frac{n_Z}{n_M} \quad (17.86)$$

Il fattore di irregolarità  $\alpha_x$  coincide con il rapporto tra i giratori di inerzia della PSD del processo e della sua derivata e con il rapporto tra il numero medio di coppie di attraversamenti dello zero e il numero medio dei massimi per unità di tempo (o, ciò che è lo stesso, con il rapporto tra il numero medio di tutti gli attraversamenti dello 0 e il numero medio degli estremi, sia massimi che minimi). Esso è utilizzato usualmente come indice della larghezza di banda del processo, tendendo ad 1 per processi a banda stretta e a 0 per processi a banda larga (si noti che il parametro  $\alpha$  assume valori opposti a quello di Vanmarke). In genere si possono considerare a banda stretta processi con  $\alpha_x > 0.88$  e a banda larga processi con  $\alpha_x < 0.5$ .

A parte il valor medio, la funzione di distribuzione di probabilità dei *massimi* (o dei *minimi*) dei processi gaussiani dipende esclusivamente dalla varianza del processo, pari a  $\lambda_0$ , e dal parametro  $\alpha_x$ . È possibile dimostrare che, nel caso di processi gaussiani a media nulla, essa assume la seguente forma:

$$P_M(M) = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\pi}} \frac{1}{2\lambda_0} e^{-\frac{1}{1-\alpha^2} \frac{M^2}{2\lambda_0}} + \alpha \frac{M}{2\lambda_0} e^{-\frac{M^2}{2\lambda_0}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{M}{\sqrt{2\lambda_0}} \right) \right] \quad (17.87)$$

nella quale  $\operatorname{erf}(\cdot)$  è la *funzione errore* i cui valori sono tabellati o ottenibili per mezzo di software di calcolo.

Come si vedrà nel seguito, nel caso dei processi a banda stretta, per i quali si possa assumere  $\alpha_x \approx 1$ , tale espressione può essere semplificata diventando la *distribuzione di Rayleigh*, già mostrata nell'eq.(41), che dipende solo da  $\lambda_0$ . Nel caso di processi a banda stretta, per quanto già detto a proposito della regolarità della sequenza dei picchi e delle valli, la distribuzione delle ampiezze dei cicli di fatica può essere approssimata tramite la distribuzione dei massimi stessa.

Nella fig.22 sono mostrate le distribuzioni dei massimi dei 4 processi delle fig.19,20, dipendenti dai valori dei rispettivi parametri  $\alpha_x$  e  $\lambda_0$  ( $\lambda_0=1$  per tutti e 4 i casi); le distribuzioni dei massimi sono poste a confronto con la distribuzione gaussiana dei processi e la distribuzione di Rayleigh, tutte uguali in quanto dipendenti dal solo parametro  $\lambda_0$ . È possibile osservare che la distribuzione di Rayleigh approssima bene la distribuzione dei massimi solo per i 2 processi a banda stretta.

Un'altra caratteristica interessante è che il *valor medio dell'ampiezza dei semicicli r di un processo* (passaggio da picco a valle e viceversa), coincidente con il doppio del valor medio dell'ampiezza dei cicli rainflow, è direttamente legato al parametro  $\alpha_x$  mediante la seguente relazione

$$E[r] = \sqrt{2\pi} \alpha_x \sqrt{\lambda_0} = \sqrt{2\pi} \lambda_2 / \sqrt{\lambda_4} \quad (17.88)$$

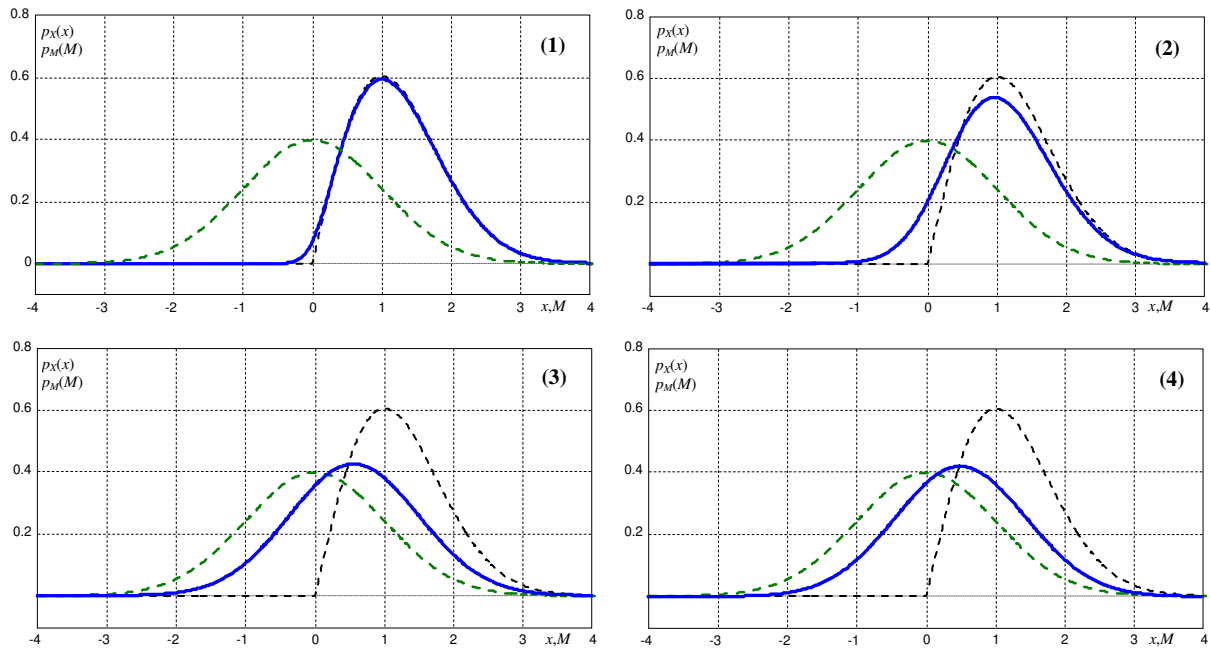


Fig.17.22 – Confronto tra le distribuzioni dei processi delle fig.19,20 e le rispettive distribuzioni dei massimi. In linea tratteggiata verde e nera la distribuzione gaussiana e la distribuzione di Rayleigh (uguali per i 4 processi, dipendendo soltanto da  $\lambda_0$ ), in linea continua blu la distribuzione effettiva dei massimi del processo. Si può osservare come nel caso del processo a banda stretta

È stato osservato che processi a banda larga aventi *uguale valore di  $\alpha_x$* , ma *differenti valori di  $q_x$*  hanno distribuzioni dei cicli rainflow differenti tra loro, quindi la caratterizzazione spettrale dei processi ai fini della fatica richiede che vengano presi in considerazione entrambi. Volendo utilizzare parametri aventi campi di definizione confrontabili, è possibile utilizzare al posto di  $q_x$ , il seguente parametro  $\beta_x$  da esso derivato:

$$\beta_x = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_2}} = \frac{\Omega_x}{\rho_x} = \frac{E \left[ \dot{\phi}_x \right]}{E \left[ \left| \dot{\phi}_x \right| \right]} = \sqrt{1 - q_x^2} \quad (17.89)$$

che varia da 0 per processi a banda larga, ad 1 per processi a banda stretta come  $\alpha_x$ . I principali parametri spettrali relativi ai 4 processi delle fig.19,20 sono riportati in Tab.5.

Un'ultima notazione riguarda le variazioni della PSD rispetto al tempo che si verificano per i processi non stazionari. Nel caso di processi con varianza variabile nel tempo, come i 2 mostrati in fig.18 a destra, l'area della PSD varia nel tempo, ma in modo tale che la sua *forma* e, di conseguenza, i parametri  $\alpha_x$  e  $q_x$ , si mantengono costanti. Nel caso più generale, invece, può variare anche la forma della PSD. Nel primo caso il processo si definisce non stazionario di tipo *separabile*, in quanto ciascun campione può essere pensato come il prodotto tra un segnale aleatorio nel dominio del tempo appartenente ad un processo stazionario e una funzione *involuppo* deterministica. Nel secondo caso non è possibile effettuare un'operazione come quella appena descritta e il processo si definisce non stazionario di tipo *non separabile*.

	$\alpha_x$	$\beta_x$	$q_x$	$\rho_x$ [rad/sec]	$\rho_x^*$ [rad/sec]
(1)	0.98	0.99	0.11	5.96	6.06
(2)	0.87	0.98	0.21	1.99	2.28
(3)	0.47	0.82	0.58	3.04	6.41
(4)	0.44	0.69	0.72	1.06	2.72

Tab.17.5 – Parametri spettrali relativi ai 4 processi mostrati nelle fig.19,20.

**Determinazione della vita a fatica di componenti soggetti sollecitazioni aleatorie**

La valutazione della vita a fatica di un componente soggetto a fatica aleatoria monoassiale ad elevato numero di cicli può essere eseguita a partire dalla determinazione della PSD del processo della tensione che agisce in ciascuno dei punti più sollecitati della struttura. Come detto tale determinazione viene eseguita per via teorica o numerica nel dominio delle frequenze tramite analisi dinamica stocastica o per via sperimentale a utilizzando le registrazioni del processo tensione e l'eq.(70).

Noto il processo di tensione, la valutazione del danneggiamento richiede le seguenti operazioni:

- valutazione della funzione densità di probabilità congiunta  $p(m,a)$  del valor medio  $m$  e dell'ampiezza  $a$  dei cicli di fatica, identificati per mezzo di un opportuno metodo di conteggio. Questa operazione può essere effettuata:
  1. nel dominio della frequenza derivando direttamente la funzione  $p(m,a)$  dalla PSD nei casi in cui è noto il legame teorico tra le due funzioni;
  2. nel dominio del tempo, simulando mediante opportuni algoritmi, a partire dalla PSD, un numero sufficientemente elevato di storie temporali (*campioni*) della tensione ed applicando su di esse l'algoritmo di conteggio (*metodo diretto*);
- valutazione del danno di fatica tramite l'uso di un appropriato criterio di danneggiamento cumulativo (Palmgren-Miner, Manson, eccetera).

Utilizzando per esempio la legge di accumulazione di Miner e il criterio di Goodman per tener conto degli effetti della tensione media, il danneggiamento di fatica  $D$  corrispondente a  $n$  cicli, può essere ragionevolmente stimato mediante le eq.(43) o (45) qui riscritte:

$$D = \frac{n}{K} \int \int \left( \frac{a}{1-m/\sigma_r} \right)^\mu p(m,a) dm da = \frac{n}{K} \int_{a_f} a_G^\mu p(a_G) da_G \quad (17.90)$$

essendo, come già visto,  $K$  e  $\mu$  la costante e l'esponente della curva  $a-N$  del materiale,  $\sigma_r$  la tensione di rottura,  $a_G = a/(1-m/\sigma_r)$  la tensione equivalente di Goodman (17.8).

L'espressione del danneggiamento può essere sintetizzata nel seguente modo:

$$D = n A^\mu / K \quad (17.91)$$

nella quale, in base alla (47),  $A^\mu$  è la *tensione equivalente di Miner elevata a  $\mu$* , che coincide con il *momento di ordine  $\mu$  della funzione densità di probabilità della tensione equivalente di Goodman*:

$$A^\mu = E[a_G^\mu] = \int_{a_e} a_G^\mu p(a_G) da_G = \int \int \left( \frac{a}{1-m/\sigma_r} \right)^\mu p(m,a) dm da \quad (17.92a)$$

Nei casi in cui le ampiezze e i valori medi dei cicli di fatica sono noti sotto forma di successioni  $a_k, m_k$ , è immediato calcolare direttamente il danneggiamento con la (11). In tali casi, se utile, i momenti  $A^\mu$  possono essere ottenuti, in base alle (11) e (13) come

$$A^\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{G_k}^\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{1-m_k/\sigma_r} \right)^\mu \quad (17.92b)$$

Le  $p(m,a)$  sono funzioni di 2 variabili la cui forma dipende dalla forma della PSD, quindi dai parametri spettrali del processo e della sua derivata. Ovviamente sono indipendenti dal materiale del componente. Al contrario, i momenti  $A^\mu$  sono singoli numeri, ma dipendono, oltre che dalla forma della PSD, dalle caratteristiche del materiale  $\mu$  e  $\sigma_r$ . Naturalmente, poiché le ampiezze e i valori medi dei cicli di fatica sono proporzionali alla deviazione standard del processo  $\sigma_x = \lambda_0^{1/2}$ , sia le funzioni  $p(m,a)$  che i momenti  $A^\mu$  dipendono dall'area sottesa della PSD pari al valore del momento spettrale  $\lambda_0$ . In particolare, le funzioni  $p(m,a)$  di PSD con uguale forma (e quindi uguali parametri spettrali) e differenti valori di  $\lambda_0$  risultano coincidenti se rappresentate rispetto ad assi normalizzati  $m/\lambda_0^{1/2}$  ed  $a/\lambda_0^{1/2}$ . I momenti  $A^\mu$  sono direttamente proporzionali al valore  $\lambda_0^{\mu/2}$ .

Da notare inoltre che, a differenza del caso di cicli di fatica ad ampiezza quasi costante, nel quale i cicli di ampiezza inferiore al limite di fatica non contribuiscono al danneggiamento e le loro ampiezze vanno poste a 0, nel caso di ampiezza molto variabile, i cicli di ampiezza inferiore al limite di fatica letto sulla curva di Wöhler contribuiscono al danneggiamento. Operando in modo conservativo si può considerare che tali cicli contribuiscano al danneggiamento allo stesso modo degli altri. Ciò comporta che nella (92a) i campi d'integrazione di  $a$  ed  $m$  siano estesi a fino al valore 0 e che nella (92b) siano introdotti anche i cicli i cui valori della tensione equivalente di Goodman risultano inferiori al limite di fatica.

In generale, nel caso dei processi a banda larga, non esistono relazioni teoriche tra i parametri spettrali e le distribuzioni dei cicli di fatica  $p(m,a)$  o i momenti  $A^\mu$ . In molti casi è possibile/necessario determinare tali funzioni con il metodo diretto, come descritto nell'apposito paragrafo.



La determinazione della funzione  $p(m,a)$  deve essere molto accurata soprattutto nell'intervallo delle ampiezze  $a$  elevate. Essendo infatti solitamente  $3 \leq \mu \leq 17$ , il contributo al danneggiamento dei cicli ad ampiezza elevata risulta predominante e, conseguentemente, ad errori anche piccoli sulla stima di questi corrispondono significativi errori sulla previsione della vita a fatica. Nel caso dei processi stazionari gaussiani a media nulla, le funzioni  $p(m,a)$  sono simmetriche rispetto all'asse delle ampiezze. In fig.23 sono mostrate le funzioni  $p(m,a)$  dei cicli rainflow dei processi le cui PSD sono mostrate nelle fig.19,20. Si può osservare come, nel caso del processo (1), la funzione  $p(m,a)$  tenda alla distribuzione di Rayleigh concentrata sull'asse delle ampiezze  $a$ , essendo praticamente nulli i valori medi dei cicli rainflow. È anche possibile osservare come, al contrario, i processi a banda larga siano caratterizzati dalla presenza di numerosi cicli di ampiezza limitata e valor medio elevato, che spesso danno luogo a danneggiamento molto limitato.

Indicando con

- $D_0$  il valore di danneggiamento che produce il cedimento a fatica del materiale (tipicamente  $D_0=1$ ),
- $N_0$  il numero totale di cicli al cedimento,
- $T_0$  la durata *temporale* a fatica,

ricordando l'espressione del numero di massimi (e quindi di cicli) nell'unità di tempo di un processo (85), in base alla quale  $N_0$  risulta legato a  $T_0$  dalla seguente relazione

$$N_0 = n_M T_0 = \frac{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}}{2\pi} T_0 \quad (17.93)$$

ed esplicitando la (91) rispetto ad  $n$ , la durata a fatica può essere valutata mediante le seguenti espressioni

$$N_0 = D_0 \frac{K}{A^\mu} \cong \frac{K}{A^\mu} \quad (17.94a)$$

$$T_0 = \frac{N_0}{n_M} = \frac{1}{n_M} D_0 \frac{K}{A^\mu} \cong \frac{1}{n_M} \frac{K}{A^\mu} \quad (17.94b)$$

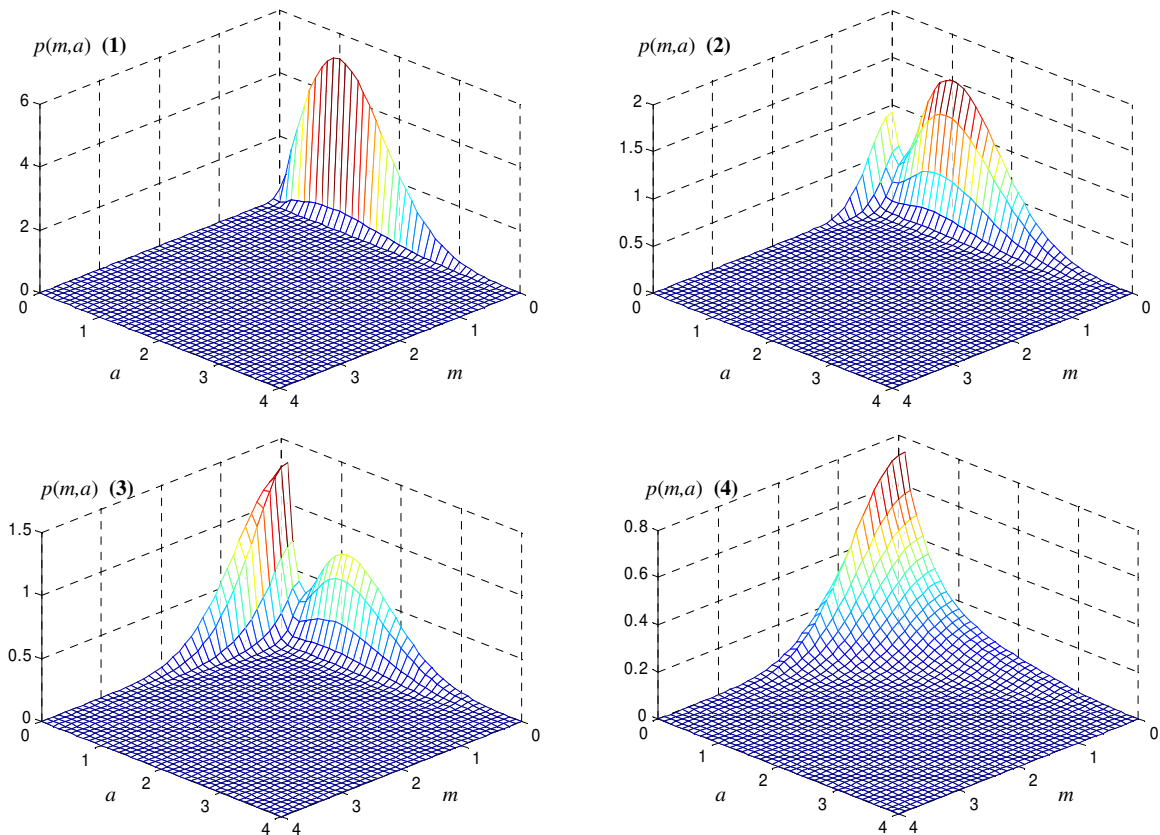


Fig.17.23 – Distribuzioni di probabilità delle ampiezze e valori medi dei cicli rainflow per processi delle fig.19,20. Le funzioni sono simmetriche rispetto all'asse  $a$  e sono rappresentate nel solo campo dei valori medi positivi ( $m \geq 0$ ).

Riassumendo, la durata a fatica dipende dalla PSD del processo, tramite i momenti spettrali  $\lambda_0$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_4$  e la funzione densità di probabilità congiunta  $p(m,a)$  (che, in generale, dipende in modo complesso dalla forma della PSD), e dalle caratteristiche del materiale  $K$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_r$  (ed eventualmente  $D_0$  nel caso in cui sia stato determinato sperimentalmente e non risulti approssimabile ad 1).

È opportuno notare che, nel caso dei processi a banda larga, il numero totale di cicli al cedimento  $N_0$  può risultare molto elevato per la già citata presenza di numerosi cicli di piccola ampiezza, come nel caso dei processi (3) e (4), le cui funzioni  $p(m,a)$  sono mostrate in fig.20.

### Sollecitazioni aleatorie a banda stretta di tipo monoassiale

Nel caso di processi stazionari gaussiani con PSD a banda stretta, considerata la *regolarità* dei campioni nei quali i massimi e minimi appaiono alternarsi in modo simmetrico rispetto all'asse temporale, le ampiezze  $a$  dei cicli di fatica possono essere considerate pari all'ampiezza stessa dei massimi, risultando nulli i valori medi  $m$ . Come già detto, per i processi a banda stretta, la distribuzione statistica dei massimi, e quindi delle ampiezze dei cicli di fatica, risulta essere una funzione di Rayleigh (fig.16), riportata nell'eq.(41) e deducibile dalla (87) ponendo  $\alpha_x=1$ :

$$p(a) = \frac{a}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sigma_x^2}\right) = \frac{a}{\lambda_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) \quad (17.95)$$

I momenti  $A^\mu$  possono essere ottenuti risolvendo numericamente il seguente, semplice, integrale ottenuto introducendo la (95) nella (92a) e considerando  $m=0$ :

$$A^\mu = \int_0^{a_{\max}} a^\mu p(a) da = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{a_{\max}} a^{\mu+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) da \quad (17.96)$$

Poiché la funzione di Rayleigh tende a 0 per  $a \rightarrow 5\lambda_0^{1/2}$ , è possibile limitare i campi di integrazione della (96) fino a tale valore, ponendo  $a_{\max}=5\lambda_0^{1/2}$ .

Come visto, il danneggiamento e la durata del componente possono essere poi ottenuti mediante le (91) e (94).

L'integrale presente nella (90) può anche essere risolto in forma chiusa fornendo:

$$A^\mu = \int_a a^\mu p(a) da = (2\lambda_0)^{\mu/2} \Gamma(1+\mu/2) \quad (17.97)$$

essendo  $\Gamma(\bullet)$  la funzione gamma i cui valori sono tabellati o ottenibili per mezzo di software di calcolo.

Per un processo a banda stretta, per il quale risulta  $(\lambda_4/\lambda_2)^{0.5} \approx (\lambda_2/\lambda_0)^{0.5}$ , la durata a fatica  $T_0$  (94b) può essere ottenuta, oltre che con la (94b), anche con la seguente espressione

$$T_0 = \frac{2^{(1-\mu/2)} \pi}{\sqrt{\lambda_2} \lambda_0^{\mu-1}} \frac{K}{\Gamma(1+\mu/2)} \quad (17.98)$$

dalla quale si osserva che, in questo caso,  $T_0$  è legata semplicemente ai momenti spettrali  $\lambda_0$  (pari alla varianza del processo) e  $\lambda_2$  (pari alla varianza della derivata) della PSD del processo.

Nel caso in cui al processo ottenuto per valor medio nullo si sommi l'effetto di un valor medio costante  $m_0$ , la (96) si modifica come segue

$$A^\mu = \frac{1}{(1-m_0/\sigma_r)^\mu} \int_0^{a_{\max}} a^\mu p(a) da = \frac{1}{(1-m_0/\sigma_r)^\mu} \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{a_{\max}} a^{\mu+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) da \quad (17.96b)$$

La (96b) può essere ottenuta sostituendo l'ampiezza  $a^\mu$  con la tensione equivalente di Goodman elevata a  $\mu$  nella (96); essendo la componente media costante il denominatore può essere posto al di fuori dell'integrale.

### Il metodo diretto: simulazione di campioni di processi aleatori nel dominio del tempo

Come detto, la valutazione della distribuzione dei cicli di fatica e del danneggiamento prodotto da un processo aleatorio di sollecitazione del quale sia nota la PSD, può essere effettuato nel dominio del tempo mediante un'apposita procedura basata su tecniche di simulazione numerica.

Tale procedura prevede l'iterazione della seguente sequenza di 3 operazioni per un adeguato numero di volte:

1. simulazione di un campione della storia temporale della tensione,
2. estrazione della sequenza degli estremi (picchi e valli) dal campione,
3. determinazione dei cicli di fatica mediante l'applicazione dell'algoritmo di conteggio rainflow,
4. memorizzazione delle ampiezze e dei valori medi dei cicli di fatica e/o determinazione del danneggiamento provocato da ciascun campione.

I valori di media ed ampiezza dei cicli ottenuti possono essere utilizzati per effettuare una stima della funzione densità di probabilità  $p(m,a)$  e/o per valutare il danneggiamento medio nell'unità di tempo e/o la durata del componente. Per una valutazione accurata della funzione  $p(m,a)$  è necessario effettuare simulazioni fino ad accumulare almeno  $10^6$  cicli, meglio se  $10^7$ , mentre per stimare la durata del componente è opportuno generare campioni cumulando il danneggiamento prodotto ad ogni iterazione fino al raggiungimento del valore critico, valutando la durata stessa come prodotto della durata dei campioni per il numero di iterazioni effettuate.

Per effettuare stime approssimative, ma più rapide, della durata è possibile effettuare poche iterazioni (anche una sola se il campione ha durata sufficientemente elevata), determinare il valore (approssimato) del momento  $A''$  mediante la (92b) ed introdurlo nella (94).

Questa procedura di simulazione è definita *metodo diretto* e ha il difetto di essere dispendiosa dal punto di vista computazionale.

I campioni del processo possono essere simulati mediante la formula della *Trasformata Discreta Inversa* di Fourier (TDIF), opportunamente particolarizzata in modo da utilizzare *valori discreti* della PSD del processo  $S_X(\omega)$ .

L'espressione della TDIF è la seguente (Appendice 1):

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\left(k\frac{2\pi}{N}\right)j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k| \cos\left(k\frac{2\pi}{N}j + \varphi_k\right) \quad (17.99)$$

nella quale  $x_j$  sono i valori del campione valutati in istanti discreti  $t_j$ , cioè  $x_j=x(t_j)$ , ed  $X_k$  sono i valori complessi della Trasformata Discreta di Fourier (TDF) del campione, che hanno la seguente definizione

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\left(k\frac{2\pi}{N}\right)j} \quad |X_k| = \sqrt{\operatorname{Re}(X_k)^2 + \operatorname{Im}(X_k)^2} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}(X_k)}{\operatorname{Re}(X_k)} \quad (17.100a-c)$$

e che possono essere stimati utilizzando valori discreti della PSD nel modo descritto nel seguito.

Considerando la PSD nel campo  $\omega \geq 0$ , si definiscono:

- $\omega_{\max}$  la massima frequenza circolare considerata per la TDF,
- $\Delta\omega$  la distanza di frequenza circolare tra i punti successivi della PSD e della TDF, coincidente con la frequenza circolare *minima* considerata,
- $N$  il numero di elementi della TDF,
- $T$  l'estensione temporale del campione da simulare,
- $\Delta t$  la distanza temporale tra i punti successivi del campione,
- $\omega_s$  la massima frequenza circolare *significativa* della PSD *nel campo*  $\omega \geq 0$ ,
- $N_s$  il numero di elementi nel quale viene discretizzata la PSD *nel campo*  $\omega \geq 0$ , essendo  $N_s=(N-1)/2$ .

In base alla teoria delle TF e TDF, si possono considerare le seguenti relazioni tra i parametri  $\omega_{\max}$ ,  $\Delta\omega$ ,  $N$ ,  $T$ ,  $\Delta t$ :

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta t} = N\Delta\omega = N\frac{2\pi}{T} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega_{\max}}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (17.101,102)$$

$$N = \frac{\omega_{\max}}{\Delta\omega} = \frac{T}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta\omega \Delta t} \quad (17.103)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = N\Delta t = N\frac{2\pi}{\omega_{\max}} \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} \quad (17.104,105)$$

essendo inoltre:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{2\Delta t} = N_s\Delta\omega = N_s\frac{2\pi}{T} \quad (17.106)$$

In pratica è facile osservare che una volta assegnati valori a 2 dei parametri, gli altri 3 risultano univocamente determinati. È possibile effettuare diverse scelte dei parametri cui assegnare i valori, ad esempio quello descritto nel seguito. In generale l'estensione temporale del campione  $T$  non deve essere troppo limitata e dovrebbe essere posta in relazione con la durata reale delle storie di carico cui il componente analizzato viene sottoposto.

In base a tale considerazione è opportuno fissare la durata  $T$  e ricavare il parametro  $\Delta\omega$  tramite la (102)

$$\Delta\omega = 2\pi/T \quad (17.102b)$$

A sua volta, l'incremento temporale  $\Delta t$  definisce la *risoluzione temporale* del campione, alla quale risulta inversamente proporzionale. Un'elevata risoluzione temporale è necessaria ai fini della precisione con cui vengono determinati gli *estremi* (massimi e minimi) del campione stesso. In base alla (105) si osserva che  $\Delta t$  diminuisce al crescere della frequenza circolare  $\omega_{\max}$  considerata nella discretizzazione della PSD:

$$\Delta t = 2\pi/\omega_{\max} = 2\pi/2\omega_s \quad (17.105b)$$

La (105b) suggerisce di *aumentare opportunamente* il valore di  $\omega_{\max}$  mediante una procedura descritta nel seguito.

Una volta fissati i valori di  $T$  ed  $\omega_{\max}$  e determinati  $\Delta\omega$  e  $\Delta t$ , il valore di  $N$  può essere ottenuto tramite la (103).

Gli istanti  $t_j$  nei quali vengono determinati i valori del campione possono essere ottenuti semplicemente come

$$t_j = j\Delta t \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (17.107)$$

A loro volta, i valori delle frequenze circolari  $\omega_k$  considerate e i corrispondenti valori della PSD utilizzati  $S_{X_k}$  sono dati dalle seguenti relazioni

$$\omega_k = k\Delta\omega \quad S_{X_k} = S_X(\omega_k) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (17.108,109)$$

Utilizzando la definizione di PSD (67) è possibile ricavare il *valor medio del modulo* della TF del processo  $X(\omega)$ :

$$E[|X(\omega)|] = \sqrt{E[|X(\omega)|^2]} = \sqrt{S_X(\omega)2\pi T} \quad (17.110)$$

In generale, tra i valori dei *moduli* della TDF  $X_k$  e della TF  $X(\omega_k)$  e le rispettive medie, sussistono le seguenti relazioni:

$$|X_k| \approx \frac{1}{\Delta t} |X(\omega_k)| \quad E[|X_k|] \approx \frac{1}{\Delta t} E[|X(\omega_k)|] \quad (17.111a,b)$$

per cui, dalle (109,110), dividendo per  $\Delta t$  ed esplicitando  $\Delta t$  in funzione di  $T$  mediante la (105) si ottiene

$$E[|X_k|] \approx \frac{1}{\Delta t} \sqrt{S_{X_k} 2\pi T} = \frac{N}{T} \sqrt{S_{X_k} 2\pi T} = N \sqrt{S_{X_k} \frac{2\pi}{T}} \quad (17.112)$$

Infine, esprimendo  $T$  in funzione di  $\Delta\omega$  mediante la (104), è possibile ottenere l'espressione del *valor medio* del modulo della TDF dei campioni del processo in questa forma:

$$E[|X_k|] = N \sqrt{S_{X_k} \Delta\omega} \quad (17.113)$$

Dalla (99) si evince che per simulare il campione del processo, oltre al modulo della TDF, è necessario introdurre le fasi  $\varphi_k$ . Poiché la PSD non contiene informazioni relative alle fasi dei campioni, esse devono essere *simulate*. In definitiva, nel caso in cui vengano considerati  $N$  valori discreti della frequenza circolare  $\omega_k$ , i valori della TDF di un campione del processo  $X_k$  possono essere ottenuti dal modulo (113) mediante la seguente relazione:

$$\begin{cases} X_k = 2 E[|X_k|] e^{i\varphi_k} = 2N \sqrt{S_{X_k} \Delta\omega} e^{i\varphi_k} & k = 1, \dots, N_S \\ X_k = 0 & k = N_S, \dots, N \end{cases} \quad (17.114a,b)$$

nella (114a)  $\varphi_k$  sono  $N_S$  valori di fase *aleatori* (o random) distribuiti *uniformemente* nel campo  $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$ , che devono essere opportunamente generati per *ciascun* campione. Le relazioni (114a,b) sono determinate dal fatto che per i termini della TDF valgono le relazioni  $\text{Re}[X_{N-k}] = \text{Re}[X_k]$  e  $\text{Im}[X_{N-k}] = -\text{Im}[X_k]$  (cioè  $X_{N-k} = X_k^*$ ), per cui, da un punto di vista pratico, è più semplice considerare *nulli* i termini relativi a  $k > N_S$  e *raddoppiare* i valori ottenuti con la (113) per  $k=1, \dots, N_S$ .

Da notare che:

- se si utilizza la PSD *unilaterale*, i cui valori sono quelli della PSD *raddoppiati*, la (114) deve essere modificata *utilizzando il fattore  $\sqrt{2}$  al posto di 2*;
- se nella definizione della PSD *non è stato utilizzato il fattore  $1/2\pi$* , diversamente dalle (64) e (67), la PSD *deve essere moltiplicata per detto fattore* prima di utilizzare la (113).

Se  $\mathbf{X}$  è il vettore contenente i valori della TDF del processo  $X_k$  (114a,b), il vettore  $\mathbf{x}$  contenente i valori del campione può essere ottenuto applicando opportunamente la TDIF ( $F^{-1}[\cdot]$ ) ad  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x} = F^{-1}[\mathbf{X}] \quad (17.115)$$

Da notare che il campione ottenuto utilizzando i coefficienti definiti nella (114) risulta costituito da numeri complessi, le cui parti reali costituiscono il segnale, mentre quelle immaginarie la sua *trasformata di Hilbert*.

I valori della parte reale del vettore  $\mathbf{x}$  possono essere ottenuti anche scrivendo per esteso la (115), in base alla (100):

$$x_j = 4 \sum_{k=0}^{N_S} \sqrt{S_{X_k} \Delta\omega} \cos\left(k \frac{2\pi}{N} j + \varphi_k\right) \quad j=1, \dots, N \quad (17.116)$$

Da un punto di vista pratico è opportuno:

- Scegliere un valore di  $T$  significativo per le storie di carico che il campione deve rappresentare e determinare il valore di  $\Delta\omega$  mediante la (102b).
- Scegliere un valore  $\omega_{\max}$  maggiore del doppio di  $\omega_s$ , cioè del massimo valore della frequenza circolare al quale la PSD assume valori significativi, tipicamente  $\omega_{\max}=8\omega_s$ , al fine di ottenere un basso valore di  $\Delta t$  e una conseguente elevata definizione del segnale nel dominio del tempo. Naturalmente per valori di  $\omega \gg \omega_s$  si deve porre  $S_X(\omega)=0$ , cosa che, all'atto pratico, consiste nell'aggiungere un opportuno numero di zeri in coda al vettore contenente i valori  $S_{X_k}$ .
- Assegnato il valore di  $\omega_{\max}$ , il numero di elementi  $N$  può essere ottenuto semplicemente mediante la (103), cioè  $N=\omega_{\max}/\Delta\omega$ , ovviamente il valore definitivo di  $\omega_{\max}$  deve essere tale da rendere intero il valore di  $N$ .
- Se si desidera che gli algoritmi per la trasformata inversa di Fourier utilizzino la procedura veloce definita FFT, acronimo di *Fast Fourier Transform*, il valore di  $N$  deve risultare dall'elevazione a potenza del numero 2, cioè deve essere  $N=2^n$ ; il valore dell'esponente  $n$  può essere ottenuto come il primo numero intero che rispetta la disuguaglianza  $n \geq \log_2(\omega_{\max}/\Delta\omega)$ . In questo caso, ovviamente, il valore definitivo di  $\omega_{\max}$  deve essere calcolato dopo avere determinato il valore definitivo di  $N$  mediante la (101), cioè  $\omega_{\max}=N\Delta\omega$ .

Fissato il valore di  $T$  e determinati opportunamente i valori di  $\omega_{\max}$  ed  $N$ , si determinano:

- $\Delta\omega$ ,  $\omega_k$ ,  $S_{X_k}$  con le eq.(102b, 108-109),
- $E[|X_k|]$  con la (113),

Per ogni singolo campione si determinano:

- $\varphi_k$  mediante apposito algoritmo disponibile nei linguaggi di programmazione,
- $X_k$  con le (114a,b),
- $x_j$  effettuando la TDIF (115) mediante apposito algoritmo o con la (116).

Se si vogliono rappresentare i campioni nel dominio del tempo, si devono anche valutare l'intervallo temporale  $\Delta t$  mediante la (105b) e gli istanti  $t_j$  con la (107).

Per stimare il danneggiamento di fatica è necessario estrarre da ciascun campione la sequenza degli estremi  $e(i)$ , costituita da quei valori di  $x_j$  per i quali si verificano le condizioni  $x_j > x_{j-1}$  e  $x_j > x_{j+1}$  (i picchi) oppure  $x_j < x_{j-1}$  e  $x_j < x_{j+1}$  (le valli), e su tale sequenza effettuare il conteggio rainflow. Da notare che i campioni simulati da processi gaussiani possono presentare estremi con deviazioni dal valor medio molto elevate, superiori a 3 volte la deviazione standard ( $|e| > 3\sigma_X$ ) che, in molti casi reali, sono estremamente improbabili. *In questi casi* la valutazione del danneggiamento può essere sovrastimata per cui, prima di effettuare il conteggio rainflow, è opportuno imporre che tali estremi risultino in modulo pari a  $3\sigma_X=3\lambda_0^{1/2}$ .

Per ciascun campione generato, applicando il procedimento rainflow alla sequenza degli estremi, si determinano le ampiezze e valori medi dei cicli  $a_k, m_k$ , con  $k=1, \dots, n_c$ , essendo  $n_c$  il numero di cicli conteggiati del campione. Ai fini della determinazione del danneggiamento i valori medi minori di zero devono essere posti a 0 ( $m_k < 0 \rightarrow m_k = 0$ ).

La tensione di Miner elevata a  $\mu$  e il danneggiamento corrispondente possono essere ottenuti mediante le (92) e (91), qui riscritte relativamente al  $c$ -esimo campione:

$$A_c^\mu = \frac{1}{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \left( \frac{a_k}{1 - m_k / \sigma_r} \right)^\mu \quad D_c = n_c \frac{A_c^\mu}{K} \quad (17.117, 118)$$

La durata  $T_0$  può essere ottenuta generando campioni fino a quando il danneggiamento totale  $D_{\text{TOT},c}$ , ottenuto sommando i danneggiamenti provocati dai singoli campioni (118)

$$D_{\text{TOT},c} = \sum_{j=1}^c D_j \quad (17.119)$$

non raggiunge il valore di cedimento. In pratica i campioni devono essere generati *mentre* è verificata la condizione  $D_{\text{TOT},c} \leq D_0$ . In alcuni casi, è opportuno memorizzare gli *estremi residui* dell'applicazione del metodo rainflow e considerarli come *primi estremi* del campione successivo.

Se  $R_0$  è il numero di campioni generato a rottura (*ripetizioni*), coincidente con l'indice  $c$  precedente a quello per il quale si è verificato  $D_{\text{TOT},c} \geq D_0$ , ricordando la (18),  $T_0$  può essere ottenuto semplicemente come

$$T_0 = R_0 T \quad (17.120)$$

Il numero di cicli al cedimento può essere ottenuto sommando i numeri di cicli  $n_c$  ottenuti col metodo rainflow nelle  $R_0$  iterazioni, cioè come  $N_0 = \sum n_c$ .

Il numero di ripetizioni al cedimento  $R_0$  può essere stimato più velocemente, ma in modo molto meno affidabile, generando *un singolo campione* e utilizzando il danneggiamento ottenuto  $D$  mediante l'eq.(15):

$$R_0 = D_0 / D \approx 1/D = K/nA^\mu \quad (17.121)$$

In questo caso la durata può essere ottenuta utilizzando la (120) oppure mediante la (94b), qui riscritta:

$$T_0 = \frac{N_0}{n_M} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}} D_0 \frac{K}{A^\mu} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_4/\lambda_2}} \frac{K}{A^\mu} \quad (17.94b)$$

nella quale il numero di cicli viene stimato dalle caratteristiche della PSD mediante la (85), invece che direttamente dal conteggio rainflow.

Nel caso in cui si voglia determinare la matrice di conteggio  $\mathbf{n}_{a,m}$ , i campi dei possibili valori di medie ed ampiezze dei cicli,  $m$  ed  $a$ , devono essere messi in relazione con i valori massimi e minimi che possono essere assunti dai campioni del processo. Nel caso dei processi a media nulla, definito  $x_{\max}$  il *valore massimo in valore assoluto* assunto dai campioni del processo, per il quale  $-x_{\max} \leq x(t) \leq x_{\max}$ , si ha

$$0 \leq a \leq x_{\max} \quad -x_{\max} \leq m \leq x_{\max} \quad (17.122,123)$$

In generale  $x_{\max}$  dipende dalla deviazione standard del processo  $\sigma_X = \lambda_0^{1/2}$  e si suole assumere:

$$x_{\max} = \nu \lambda_0^{1/2} \quad (17.124)$$

essendo  $\nu$  un numero tipicamente maggiore o uguale a 3, opportunamente scelto in base ai valori massimi che possono essere raggiunti fisicamente dai campioni del processo. Va ricordato che, in qualsiasi caso, per processi gaussiani a media nulla, la probabilità che si verifichi  $|x(t)| > 3\sigma_X$ , oppure  $|x(t)| > 4\sigma_X$ , oppure  $|x(t)| > 5\sigma_X$  è rispettivamente di circa lo 0.27%, lo 0.006334% e lo 0.0000573%.

Per determinare le suddivisioni dei campi dei valori di medie ed ampiezze (122) e (123) è possibile:

- fissare il numero di suddivisioni del valore  $x_{\max}$ ,  $N_\Delta$ ;
- valutare le ampiezze degli intervalli,  $\Delta a$  e  $\Delta m$ , come

$$\Delta a = \Delta m = \Delta x = x_{\max} / N_\Delta \quad (17.125)$$

- determinare gli estremi degli intervalli come:

$$a_i = (i-1)\Delta x \quad i=1, \dots, N_\Delta+1 \quad (17.126)$$

$$m_j = (j-1)\Delta x - x_{\max} \quad j=1, \dots, 2N_\Delta+1 \quad (17.127)$$

In caso di valor medio non nullo,  $m_0$ , è possibile operare nel modo sopra descritto e sommare il valore  $m_0$  ai valori  $m_j$  ottenuti con la (127).

Gli indici dell'elemento della matrice  $\mathbf{n}_{a,m}$  che deve essere incrementato per ciascuna coppia di valori  $a_k$  ed  $m_k$  sono dati dalle seguenti espressioni analoghe alle (19,20):

$$i = \text{int}[a_k/\Delta x] + 1 \quad j = \text{int}[(m_k + x_{\max})/\Delta x] + 1 \quad (17.128a,b)$$

La matrice di conteggio dei cicli  $\mathbf{n}_{a,m}$  coincide con l'istogramma dei cicli di fatica, dal quale può essere stimata la funzione densità di probabilità congiunta  $p(m,a)$ . Tenendo presente che la somma di tutti i termini della matrice  $\mathbf{n}_{a,m}$  è pari al numero totale di cicli applicati e che l'integrale della funzione  $p(m,a)$  deve dare come risultato il valore unitario della probabilità dell'"evento certo", la funzione  $p(m,a)$  può essere stimata con la seguente relazione:

$$p(m,a) \approx \frac{n_{am}}{\int_m \int_a n_{am} dm da} \approx \frac{n_{am}}{dm da \sum_{m,a} n_{am}} \quad (17.129)$$

### Stima della PSD effettuata utilizzando i campioni del processo

Nel caso in cui si voglia stimare la densità spettrale di potenza di un processo del quale siano noti i valori assunti da  $N_c$  campioni in  $N$  istanti temporali, spaziali di un intervallo temporale  $\Delta t$ , per un periodo totale  $T = N\Delta t$ , cioè i valori  $x_{k,c} = x_c(k\Delta t) = x_c(t_k)$ , con  $c=1, \dots, N_c$  e  $k=0, \dots, N-1$ , è possibile determinare i valori della FFT per ciascun campione,  $X_{k,c}$ , relativi alle frequenze circolari  $\omega_k = k\Delta\omega$  con  $\Delta\omega = 2\pi/T$  e  $k=1, \dots, N/2$  (notare  $N/2$  e non  $N$ ), mediante la (100), e determinare i corrispondenti valori della PSD mediante la seguente espressione:

$$S_X(\omega_k) = S_X(k\Delta\omega) \approx S_{X_k} = \frac{E[|X_k|^2]}{2\Delta\omega N^2} = \frac{1}{2\Delta\omega N^2} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} |X_{k,c}|^2 \quad (17.130)$$

che può essere ottenuta esplicitando la (113) rispetto ad  $S_{X_k}$ . Da notare che la PSD è estesa nel campo  $-\infty < \omega < \infty$  e i valori relativi alle frequenze circolari  $\omega_k = -k\Delta\omega$  con  $k=1, \dots, N/2$ , sono uguali a quelli ottenuti per  $\omega_k = k\Delta\omega$  con  $k=1, \dots, N/2$ . La stessa espressione può essere ottenuta dall'eq.(70), sostituendo  $X(\omega_k)$  e  $\Delta t$  con  $X_k$  e  $\Delta\omega$  mediante le (111) ed (102):

$$S_X(\omega_k) \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{2\pi} \frac{1}{T} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} |X_{k,c}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{2\pi} \frac{1}{N} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} |X_{k,c}|^2 = \frac{1}{2\Delta\omega} \frac{1}{N^2} \frac{1}{N_c} \sum_{c=1}^{N_c} |X_{k,c}|^2 \quad (17.131)$$