

A1. L'analisi di Fourier**Definizioni utili**

Una funzione $x(t)$ si definisce:

- *periodica* di periodo T , se si ha $x(t)=x(t+T)$;
- *pari* o *simmetrica* rispetto all'asse x , se si ha $x(t)=x(-t)$;
- *dispari* o *emisimmetrica* rispetto all'asse x , se si ha $x(t)=-x(-t)$.

Le funzioni periodiche $\cos(t)$ e $\sin(t)$ sono rispettivamente pari e dispari.

Si ricordano le seguenti relazioni concernenti le funzioni seno e coseno:

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2) \quad (\text{A1.1a})$$

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \tan^{-1} b/a) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \tan^{-1} a/b) \quad (\text{A1.1b})$$

$$\sin(\omega t) = -i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2 \quad \cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2 \quad (\text{A1.1c,d})$$

essendo

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad (\text{A1.1e})$$

È facile dimostrare che funzioni del tipo $x=C \cos(\omega t - \phi)$ o $x=C \sin(\omega t + \phi)$, possono essere riprodotte con la (1b) come $x=a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$, ponendo $a=C \sin \phi$, $b=C \cos \phi$.

Relativamente ad una funzione periodica di periodo T , si definiscono rispettivamente *frequenza* f [1/sec] e *frequenza circolare* (o *velocità angolare*) ω [rad/sec] le grandezze ottenute rispettivamente come:

$$f = 1/T \quad \omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (\text{A1.2a,b})$$

La serie di Fourier

La *serie di Fourier* (fig.1) permette di rappresentare un segnale periodico $x(t)$, di periodo T_p , come somma di funzioni seno e coseno aventi ampiezza opportuna e frequenze circolari *discrete*, multiple della frequenza del segnale originale:

$$\omega_p = 2\pi/T_p = 2\pi f_p \quad (\text{A1.3})$$

con la seguente relazione:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_p t) + b_k \sin(k\omega_p t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_p t - \phi_k) \quad (\text{A1.4})$$

Le ampiezze a_k e b_k da assegnare alle funzioni seno e coseno affinché la sommatoria restituisca la funzione originale vengono ottenute mediante gli integrali di Fourier così definiti:

$$a_0 = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt \quad (\text{A1.5})$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \cos(k\omega_p t) dt = \frac{1}{T_p/2} \int_{T_p/2}^{T_p/2} x(t) \cos\left(k \frac{\pi}{T_p/2} t\right) dt \quad k=1, \dots, \infty \quad (\text{A1.6})$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) \sin(k\omega_p t) dt = \frac{1}{T_p/2} \int_{T_p/2}^{T_p/2} x(t) \sin\left(k \frac{\pi}{T_p/2} t\right) dt \quad k=1, \dots, \infty \quad (\text{A1.7})$$

mentre, in base alla (1b), le costanti c_k ed ϕ_k possono essere espresse come

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \phi_k = \tan^{-1} b_k/a_k \quad (\text{A1.8a,b})$$

In fig.2 è mostrata la classica funzione onda quadra, in questo caso con periodo $T_p=24s$, e l'approssimazione ottenibile utilizzando un numero crescente di termini della serie (4). In fig.3 sono mostrate le costanti di Fourier a_k e b_k al variare dell'indice k (per ottenere la frequenza circolare cui si riferiscono è sufficiente moltiplicare l'indice k per ω_p). Utilizzando la terminologia dell'ottica, l'insieme delle costanti di Fourier rappresentate in fig.4 costituisce il cosiddetto *spettro* della funzione dalla quale sono ricavate e ne rappresenta il *contenuto in frequenza*. Da notare che se la funzione $x(t)$ è pari i coefficienti b_k risultano nulli, mentre se $x(t)$ è dispari, come nel caso di fig.2,4, risultano nulli i coefficienti a_k , fig.3.



Fig.A1.1 – Quel Gran Genio del Fourier!

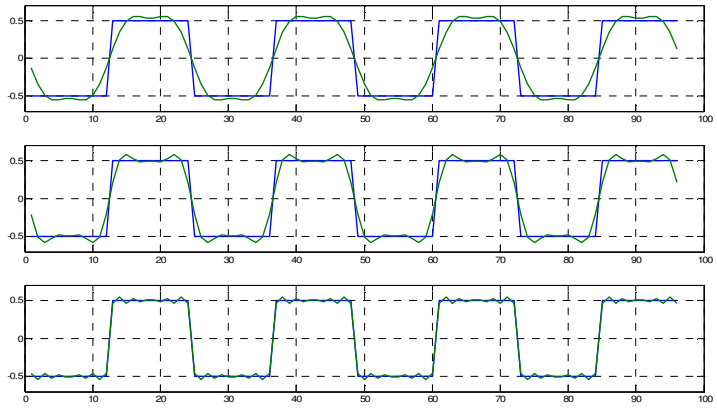


Fig.A1.2 – Approssimazione di una funzione a dente di sega mediante un numero crescente di termini della serie di Fourier.

Utilizzando le relazioni (1c-e), la (4) può essere espressa in *forma complessa* nel modo seguente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k e^{ik\omega_p t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k [\cos(k\omega_p t) + i \sin(k\omega_p t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\chi_k| \cos(k\omega_p t + \varphi_k) \quad (A1.9)$$

nella quale i coefficienti complessi χ_k , in base alle (1c,d), possono essere ottenuti mediante le seguenti relazioni:

$$\chi_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-ik\omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) [\cos(k\omega_p t) - i \sin(k\omega_p t)] dt \quad -\infty < k < \infty \quad (A1.10)$$

Da notare come le sommatorie presenti nella (9) siano estese nel campo $-\infty < k < \infty$.

A loro volta, i moduli $|\chi_k|$ e le fasi φ_k dei coefficienti χ_k sono ottenibili mediante le seguenti relazioni:

$$|\chi_k| = \sqrt{\text{Re}(\chi_k)^2 + \text{Im}(\chi_k)^2} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(\chi_k)}{\text{Re}(\chi_k)} \quad (A1.11a,b)$$

essendo

$$\text{Re}(\chi_k) = a_k/2 \quad \text{Im}(\chi_k) = \pm b_k/2 \quad (A1.11c,d)$$

$$|\chi_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}/2 \quad \varphi_k = \tan^{-1} b_k/a_k \quad (A1.11e,f)$$

Inoltre è possibile verificare che si ha:

$$\begin{cases} \chi_k = (a_k - i b_k)/2 \\ \chi_{-k} = (a_k + i b_k)/2 \end{cases} \quad (A1.12a,b)$$

essendo i coefficienti $\text{Re}[\chi_k]$ e $\text{Im}[\chi_k]$ rispettivamente *pari* e *dispari*.

È opportuno osservare che se il segnale nel dominio del tempo è costituito da una funzione reale, come accade nella maggior parte dei casi d'interesse pratico, i termini della serie di Fourier (10) risultano complessi, ma la trasformata inversa (9) restituisce il segnale reale. Ciò è dovuto alle proprietà descritte dalle (12) e al fatto che gli indici della sommatoria (9) sono estesi nel campo $-\infty < k < \infty$. È possibile verificare che, se si raddoppiano i valori dei coefficienti χ_k (cioè si utilizzano i coefficienti a_k e b_k) e si estendono le sommatorie (9) nel campo $0 < k < \infty$, si ottiene un segnale complesso la cui parte reale coincide comunque con $x(t)$.

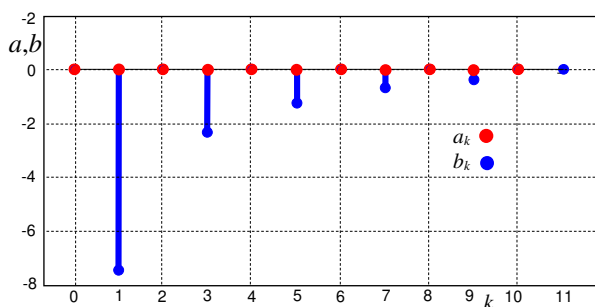


Fig.A1.3 – Valori delle costanti della serie di Fourier del caso di fig.2.

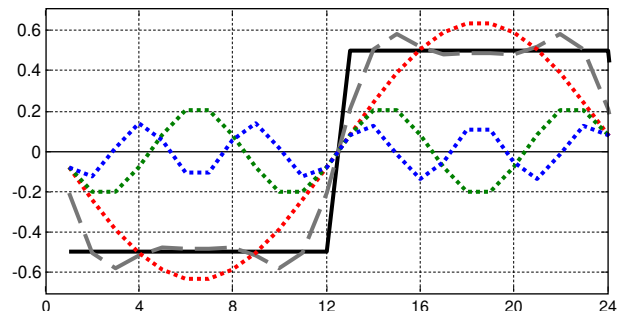


Fig.A1.4 – I termini 1,3,5 della serie di Fourier del dente di sega.

La trasformata di Fourier

A sua volta, la *Trasformata di Fourier* (TF) permette di scomporre mediante funzioni circolari, segnali di tipo *non* periodico, definite nel campo $-\infty < t < \infty$, utilizzando un insieme di funzioni seno e coseno aventi frequenze variabili con *continuità* nell'intervallo $-\infty < \omega < \infty$. In particolare si definisce TF del segnale $x(t)$ la seguente funzione:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \quad (A1.13)$$

$X(\omega)$ è una funzione complessa le cui parti reale e immaginaria, che hanno ruolo analogo alle costanti a_k e b_k della serie, sono rispettivamente *pari* e *dispari* e può essere descritta in termini di modulo e fase mediante le seguenti espressioni (l'asterisco significa *complesso coniugato*):

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \quad (A1.14)$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\text{Re}[X(\omega)]^2 + \text{Im}[X(\omega)]^2} = \sqrt{X(\omega) X^*(\omega)} \quad (A1.15a)$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[X(\omega)]}{\text{Re}[X(\omega)]} \quad (A1.15b)$$

La Trasformata Inversa di Fourier (TIF) permette di ottenere il segnale a partire dalla conoscenza della TF

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (A1.16)$$

Il ruolo della TF si apprezza maggiormente considerando il termine di destra della (16), basato sull'eq.(1b), dal quale si vede che il segnale originale può essere pensato come una somma continua (l'integrale) di componenti co-sinusoidali aventi ampiezza $|X(\omega)|$ e fase opportuna. Anche in questo caso l'estensione della variabile ω nel campo $-\infty < \omega < \infty$ permette di annullare la parte immaginaria della (16) nel caso in cui il segnale $x(t)$ sia reale.

La trasformata discreta di Fourier

Se la funzione $x(t)$ è nota in un intervallo di tempo T , in un insieme discreto di N punti t_j , con $j=0, \dots, N-1$, posti a eguale distanza Δt l'uno dall'altro, essendo

$$\Delta t = T/N \quad t_j = j\Delta t \quad x_j = x(t_j) \quad j=0, \dots, N-1 \quad (A1.17a-c)$$

la trasformata di Fourier può essere effettuata in *modo discreto*.

La Trasformata *Discreta* di Fourier (TDF) ha la seguente definizione:

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\left(k\frac{2\pi}{N}\right)j} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{N}j\right) - i \sin\left(k\frac{2\pi}{N}j\right) \right] \quad k=0, \dots, N-1 \quad (A1.18)$$

A sua volta, la Trasformata *Discreta Inversa* di Fourier (TDIF) è espressa come

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\left(k\frac{2\pi}{N}\right)j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left[\cos\left(k\frac{2\pi}{N}j\right) + i \sin\left(k\frac{2\pi}{N}j\right) \right] \quad j=0, \dots, N-1 \quad (A1.19)$$

I termini della TDF X_k (18) sono relativi ad un insieme discreto di frequenze circolari ω_k , con $k=0, \dots, N-1$, poste a eguale distanza $\Delta\omega$ l'una dall'altra, essendo

$$\Delta\omega = 2\pi/T = 2\pi/N\Delta t \quad \omega_k = k\Delta\omega \quad X_k = X(\omega_k) \quad k=0, \dots, N-1 \quad (A1.20a-c)$$

La *minima frequenza circolare* analizzata è quella relativa al periodo T , corrispondente all'indice $k=1$, essendo $\omega_1 = \omega_{\min} = \Delta\omega = 2\pi/T$. L'intervallo $\Delta\omega = \omega_{\min}$ è equivalente alla frequenza circolare ω_p (3) relativa alla serie di Fourier.

Per quanto concerne la *massima frequenza significativa* della sinusoidale la cui costante X_k può essere determinata con la TDF applicata al segnale, ω_s , ovvero il minimo periodo $T_{\min} = 2\pi/\omega_s$, è opportuno notare che per determinare una funzione sinusoidale è necessario conoscerne *almeno due punti* all'interno del periodo in cui è definita; in base a questa osservazione è facile dedurre che determinare la costante relativa alla sinusoidale di periodo T_{\min} deve essere utilizzato un intervallo Δt tale che $\Delta t \leq T_{\min}/2$, da cui $T_{\min} \geq 2\Delta t$; in base a ciò ω_s può essere espressa come:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_{\min}} \leq \frac{2\pi}{2\Delta t} = \frac{2\pi}{2(T/N)} = \frac{N}{2} \frac{2\pi}{T} = \frac{N}{2} \Delta\omega \quad (A1.21)$$

A conferma di quanto sopra riportato è opportuno sottolineare il fatto che per le parti reali ed immaginarie dei coefficienti X_k valgono le seguenti relazioni

$$\operatorname{Re}(X_k) = \operatorname{Re}(X_{N-k}) \quad \operatorname{Im}(X_k) = -\operatorname{Im}(X_{N-k}) \quad k=1, \dots, N/2 \quad (\text{A1.22a,b})$$

essendo

$$\cos\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) = \cos\left[(N-k+1) \frac{2\pi}{N} j\right] \quad \sin\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) = -\sin\left[(N-k+1) \frac{2\pi}{N} j\right] \quad k=1, \dots, N/2 \quad (\text{A1.23a,b})$$

Le relazioni (22-23) mostrano che le informazioni relative alle frequenze con costanti di indici k ed $N-k$ sono coincidenti, essendo la massima frequenza significativa quella espressa dalla (21), in modo analogo a quanto accade per le frequenze $\omega > 0$ e $\omega < 0$ nel caso della TF.

In pratica, l'intervallo temporale T determina la *minima frequenza* circolare del segnale che può essere analizzata e, conseguentemente, il valore di $\Delta\omega$ in base alla (20a); fissato T , il numero di punti N determina la *risoluzione temporale* Δt in base alla (17a) e la *massima frequenza significativa* che può essere analizzata in base alla (21).

Da notare anche che, in base alla (18), il termine $\operatorname{Re}[X_0]$ della TDF è pari alla *somma* dei valori x_j .

L'espressione della TDF (18) può essere posta a confronto con quella della TF (13) esplicitando quest'ultima rispetto ai valori discreti ω_k , approssimando l'integrale mediante una sommatoria estesa agli N istanti t_j e ricordando che $x(t_j) = x_j$ (17c), ottenendo:

$$X(\omega_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega_k t} dt \approx \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-i\omega_k t_j} \Delta t = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\omega_k t_j} \Delta t \quad (\text{A1.24})$$

esprimendo i valori discreti ω_k come $\omega_k = k\Delta\omega$ (20b), sostituendo gli istanti t_j con $t_j = j\Delta t$ (17b) e ricordando che $\Delta\omega = 2\pi/T = 2\pi/N\Delta t$ (20a), l'esponente ωt nelle (13,24) può essere riscritto come

$$\omega t \Rightarrow \omega_k t_j = (k\Delta\omega)(j\Delta t) = \left(k \frac{2\pi}{N\Delta t}\right)(j\Delta t) = k \frac{2\pi}{N} j \quad (\text{A1.25})$$

infine, utilizzando la (25) e ricordando la definizione di TDF (18), la (24) diventa

$$X(\omega_k) \approx \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i(k\Delta\omega)(j\Delta t)} \Delta t = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\left(k \frac{2\pi}{N}\right)j} \Delta t = X_k \Delta t \quad (\text{A1.26})$$

In definitiva, si osserva che:

$$X_k \approx \frac{X(\omega_k)}{\Delta t} = N \frac{X(\omega_k) \Delta\omega}{2\pi} \quad (\text{A1.27})$$

Il termine di destra della (27) si ottiene ponendo $\Delta t = 2\pi/N\Delta\omega$ mediante la (20a).

In pratica, se si effettua la TF su un segnale continuo $x(t)$ e la TDF sullo stesso segnale campionato in un periodo T , i valori ottenuti sono in relazione secondo la (27). La (27) può anche essere utilizzata per valutare valori x_j nel dominio del tempo mediante la TDIF (19), approssimando i valori X_k mediante valori discreti di una funzione TF $X(\omega)$ nota in forma analitica o numerica.

A sua volta, la TDIF (19) può essere posta in relazione con TIF (16) utilizzando le (17,20), cioè $\omega_k = k\Delta\omega$, $t_j = j\Delta t$, $\Delta\omega = 2\pi/N\Delta t$, in modo analogo a quanto fatto per la TDF:

$$x(t_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t_j} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta\omega) e^{i(k\Delta\omega)(j\Delta t)} \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(\omega_k)}{\Delta t} e^{i\left(k \frac{2\pi}{N}\right)j} \quad (\text{A1.28})$$

da cui, in base alla (27), si ottiene la (19).

In fig.5 sono mostrati due esempi di segnali $x(t)$ aventi periodo $T=24$, cui corrispondono frequenze circolari $\Delta\omega = \omega_b = 2\pi/T = 0.2618$ ed $\omega_{\max} = N\Delta\omega/2 = 3.14$, ottenuti dalla somma di due funzioni sinusoidali aventi differente frequenza; in particolare in fig.5a) il segnale è costituito dalla funzione $x_1(t) = \cos(\omega_b t) + 0.25 \sin(4\omega_b t)$, in fig.5b) il segnale è ottenuto sommando le stesse funzioni, ma sfasate di un angolo assegnato, essendo cioè $x_2(t) = \cos(\omega_b t + 1.97) + 0.25 \sin(4\omega_b t + 1.05)$. Nelle figure le due funzioni sinusoidali la cui somma permette di ottenere $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono riportate in colore rosso. Nelle fig.5c,d sono mostrati gli $N=24$ valori campionati nell'intervallo $T=24$, posti a distanza $\Delta t=1$, per le funzioni $x_1(t)$ ed $x_2(t)$, rispettivamente.

Le costanti della TDF per i due casi sono mostrate nelle fig.6a,b, essendo le parti reali rappresentate in nero e quelle immaginarie in rosso. In pratica, in entrambi i casi, come logico, le costanti diverse da 0 sono quelle relative agli indici $k=1$ e $k=4$, cui corrispondono le frequenze ω_b e $4\omega_b$. In particolare, nel caso della funzione $x_1(t)$, essendo le fasi dei segnali coseno e seno pari a 0, si ha $X_1 = \operatorname{Re}(X_1) = 12$, $X_4 = \operatorname{Im}(X_4) = -3$, mentre nel secondo caso si ha $X_1 = 4.6730 + i11.0527$ e $X_4 = 2.5981 - i1.5$. In fig.6c sono mostrati i moduli delle costanti, cioè i valori $|X_k|$ che risultano *coincidenti* per i due casi, essendo *indipendenti* dalle fasi dei segnali componenti.

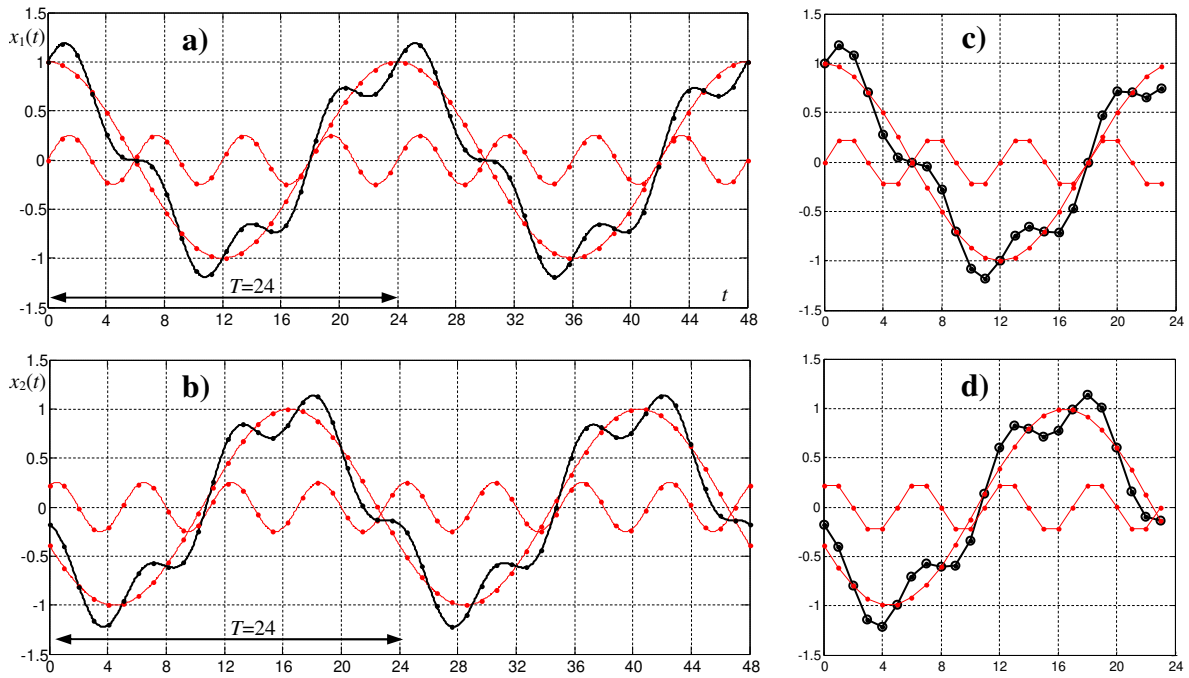


Fig.A1.5 – Funzioni $x_1(t)$, a), ed $x_2(t)$, b) (linea nera), ottenute dalla somma dai due coppie di funzioni sinusoidali (linea rossa); c), d) i due segnali segnali campionati nell'intervallo $T=24$ [sec] in $N=24$ punti.

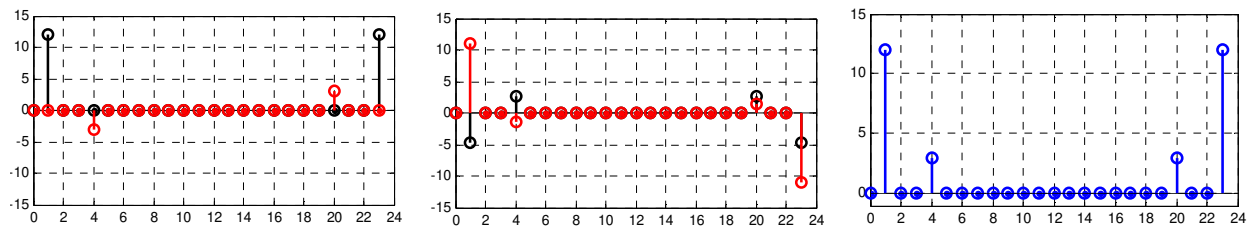


Fig.A1.6 – a), b) Coefficienti X_k delle TDF relative ai segnali mostrati nelle fig.5c,d. In nero le parti reali, in rosso le immaginarie. In fig.6c sono mostrati i moduli dei coefficienti X_k coincidenti per i casi mostrati nelle fig. 5a e 5b.

Trasformata di Fourier		
Serie	$\chi_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-i k \omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) [\cos(k \omega_p t) - i \sin(k \omega_p t)] dt$	$-\infty < k < \infty \quad \omega_p = 2\pi/T \quad \omega_k = k \omega_p$ $0 \leq t \leq T_p$
Trasformata	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i \omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt$	$-\infty < \omega < \infty$ $-\infty < t < \infty$
Trasformata discreta	$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \left(k \frac{2\pi}{N}\right) j} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \left[\cos\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) - i \sin\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) \right]$	$0 \leq k < N \quad \Delta\omega = 2\pi/T \quad \omega_k = k \Delta\omega$ $0 \leq j < N \quad \Delta t = T/N \quad t_j = j \Delta t$
Trasformata inversa di Fourier		
Serie	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k e^{i k \omega_p t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k [\cos(k \omega_p t) + i \sin(k \omega_p t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k \cos(k \omega_p t + \varphi_k)$	
Trasformata	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i \omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$	
Trasformata discreta	$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \left(k \frac{2\pi}{N}\right) j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left[\cos\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) + i \sin\left(k \frac{2\pi}{N} j\right) \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(k \frac{2\pi}{N} j + \varphi_k\right)$	

Tabella A1.1 – Le equazioni dell'analisi di Fourier.

La TDF trova applicazione nel campo dei segnali noti in forma discreta o digitale, come insiemi di N valori.

Se $N=2^n$, essendo n un numero maggiore di 1, è possibile determinare la TDF mediante un algoritmo *veloce* definito *Fast Fourier Transform* (FFT).

In Tabella 1 sono riassunte le equazioni relative alla serie, alla trasformata e alla trasformata discreta di Fourier.

Proprietà della TF

La TF gode di diverse importanti proprietà.

La TF è un operatore lineare, cioè se $X(\omega)$ ed $Y(\omega)$ sono le TF delle funzioni $x(t)$ ed $y(t)$, la TF di una combinazione lineare di tali funzioni è la combinazione lineare delle trasformate, si ha cioè:

$$F[a x(t) + b y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [a x(t) + b y(t)] e^{-i\omega t} dt = a X(\omega) + b Y(\omega) \quad (\text{A1.29})$$

La TF della derivata ennesima di un segnale $x(t)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la TF di $x(t)$ per il prodotto $i\omega^n$, cioè:

$$F\left[\frac{d^n}{dt^n} x(t)\right] = (i\omega)^n F[x(t)] \quad (\text{A1.30})$$

come si deduce facilmente dalla seguente relazione

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^n X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A1.31})$$

Dato un segnale $x(t)$ e la sua TF $X(\omega)$, la TF dello stesso segnale scalato lungo l'asse temporale tramite una costante a , cioè $x(at)$, è data dalla seguente relazione:

$$F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (\text{A1.32})$$

La TF di un segnale sfasato di un intervallo di tempo τ rispetto ad un altro può essere ottenuta dalla trasformata del segnale non sfasato mediante la seguente espressione:

$$F[x(t-\tau)] = X(\omega) e^{-i\omega\tau} = X(\omega)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = |X(\omega)| e^{i[\varphi(\omega)-\omega\tau]} \quad (\text{A1.33})$$

In base alla proprietà appena descritta è possibile dimostrare che la TF della funzione di autocorrelazione di un segnale, così definita

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t-\tau) dt \quad (\text{A1.34})$$

è ottenibile con la seguente espressione:

$$R(\omega) = F[r(\tau)] = 2\pi X^*(\omega) X(\omega) = 2\pi |X(\omega)|^2 \quad (\text{A1.35})$$

La TF del prodotto di convoluzione di due funzioni $x(t)$ ed $y(t)$, definito come

$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t-\tau) d\tau = x(t) * y(t) \quad (\text{A1.36})$$

è ottenibile come prodotto semplice delle trasformate di Fourier delle due funzioni $X(\omega)$ ed $Y(\omega)$:

$$F[c(t)] = X(\omega) Y(\omega) \quad (\text{A1.37})$$

Da notare che la variabile d'integrazione nell'eq.(34) è t , mentre nell'eq.(36) è τ .

Infine sussiste la seguente relazione nota come uguaglianza di Parseval o teorema di Rayleigh:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A1.38})$$

Velocità angolare - frequenza

La trasformata di Fourier è definita anche utilizzando la frequenza $f = \omega/2\pi$ al posto della velocità angolare ω come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (\text{A1.39})$$

I valori ottenuti con la (39) per i diversi valori di f sono uguali a quelli ottenuti con la (13) per $\omega = 2\pi f$, tuttavia è opportuno sottolineare che, essendo $d\omega = 2\pi df$, nell'effettuare la *trasformata inversa*, vale la seguente relazione:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A1.40})$$

A2. Energia e potenza di un segnale

In generale l'energia associata ad un segnale variabile nel tempo è proporzionale al suo quadrato. Ad esempio, se il segnale è una forza che agisce su una molla, l'energia è proporzionale al prodotto della forza per lo spostamento e questo ultimo è proporzionale alla forza stessa tramite la costante elastica del sistema su cui agisce. In conseguenza di ciò, l'energia fornita in un intervallo di tempo può essere espressa mediante una relazione di questo tipo:

$$\mathcal{E}_x(T) = c \int_0^T x^2(t) dt \quad (\text{A2.1})$$

essendo c una costante. Nel caso di segnale periodico esprimibile in serie di Fourier, in base alla (A1.3) e alla (1), l'energia fornita in un periodo può essere ottenuta come:

$$\mathcal{E}_x(T_p) = c T_p \left[\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_{k0}^2}{2} \right] \quad (\text{A2.2})$$

Poiché ciascuna costante a_k è associata a una frequenza angolare, ciascun termine della sommatoria rappresenta l'energia associata a tale frequenza e l'insieme di questi termini costituisce lo *spettro di energia* della funzione periodica.

Nel caso di segnale non periodico la relazione analoga alla (2) diventa:

$$\mathcal{E}_x = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A2.3})$$

nella quale la quantità

$$e_x = \frac{c}{2\pi} |X(\omega)|^2 \quad (\text{A2.4})$$

rappresenta l'*energia specifica* o *densità spettrale di energia* del segnale.

Nel caso dei processi aleatori stazionari la cui varianza è costante nel tempo, l'energia valutata in un intervallo di tempo infinito mediante la (3) risulta infinita e tale espressione perde di utilità. Per questo motivo, piuttosto che all'energia, è preferibile fare riferimento alla *densità spettrale della potenza* che può essere ottenuta dividendo l'energia per l'intervallo di tempo T nel quale essa viene erogata

$$p_x = \frac{c}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T} \quad (\text{A2.5})$$

Nel caso dei processi aleatori stazionari, la densità spettrale di potenza è valutata come media rispetto all'insieme dei campioni, per cui, tralasciando la costante c , la definizione (5) conduce alla seguente espressione:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X(\omega, T)|^2]}{T} \quad (\text{A2.6})$$

Se un segnale ha velocità angolare poco variabile, il modulo di $X(\omega)$ ha valori significativi concentrati nell'intorno del valor medio Ω_c . Nel caso di segnali con velocità angolare molto variabile, al contrario, la TF del segnale fornisce valori significativi in un ampio intervallo attorno al valore Ω_c .

A3. Proprietà dei segnali nel dominio della frequenza

Un segnale sinusoidale del tipo $x(t)=a_z \cos(\omega_z t)$ può essere ottenuto come la parte reale (o la proiezione sull'asse reale) di un vettore $z(t)$ di modulo costante a_z che ruota con velocità angolare (o *frequenza circolare*) ω_z costante nel piano complesso

$$z(t) = a_z [\cos(\omega_z t) + i \sin(\omega_z t)] = a_z [\cos \phi_z(t) + i \sin \phi_z(t)] \quad (\text{A3.1})$$

come mostrato in fig.1. Nella (1) si ha:

$$a_z = \sqrt{\text{Re}[z(t)]^2 + \text{Im}[z(t)]^2} \quad \phi_z(t) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[z(t)]}{\text{Re}[z(t)]} \quad (\text{A3.2,3})$$

La definizione (1) può essere generalizzata per descrivere segnali $x(t)$ variabili ciclicamente in modo più complesso, considerando che il modulo e la velocità angolare possano variare con il tempo (fig.2,3). Ovviamente nel caso del segnale sinusoidale, la posizione angolare $\phi_z(t)$ di $z(t)$ è data dal semplice prodotto di ω_z per il tempo :

$$\phi_z(t) = \omega_z t \quad (\text{A3.4})$$

mentre, per velocità angolare $\omega_z(t)$ variabile, la posizione angolare di $z(t)$ deve essere ottenuta come

$$\phi_z(t) = \int_0^t \omega_z(t) dt \quad (\text{A3.5})$$

Ovviamente la velocità angolare $\omega_z(t)$ coincide con la derivata della funzione $\phi_z(t)$ rispetto al tempo

$$\omega_z(t) = \frac{d\phi_z(t)}{dt} = \dot{\phi}_z(t) \quad (\text{A3.6})$$

(il punto significa derivata rispetto al tempo) e l'espressione generale di $z(t)$ diventa

$$z(t) = a_z(t) \left[\cos \int_0^t \dot{\phi}_z(t) dt + i \sin \int_0^t \dot{\phi}_z(t) dt \right] = x(t) + i \hat{x}(t) \quad (\text{A3.7})$$

Un segnale $z(t)$ del tipo (7) è definito segnale *analitico* ed è caratterizzato dal fatto che la sua parte immaginaria $\hat{x}(t)$ è la *trasformata di Hilbert* di quella reale, della quale costituisce il cosiddetto *segnale in quadratura*.

Nei segnali sinusoidali, essendo a_z e ω_z costanti, i valori massimi e minimi hanno ampiezza costante pari ad a in modulo e distanza temporale costante pari al *periodo*

$$T = 2\pi / \omega_z \quad (\text{A3.8})$$

ovvero si susseguono con *frequenza* costante pari a

$$f = 1/T = \omega_z / 2\pi \quad (\text{A3.9})$$

Ogni volta che il vettore $z(t)$ assume la posizione verticale, ovvero si ha $\phi = \pi/2$ (fig.1) e $\phi = 3/2\pi$, la sua proiezione sull'asse reale si annulla e si verifica un *passaggio dallo zero* del segnale reale. Da notare che durante i passaggi per $\phi = \pi/2$ il segnale reale ha pendenza negativa e viceversa per $\phi = 3/2\pi$. In pratica si verificano 2 passaggi per lo zero per ogni rotazione completa ($\Delta\phi = 2\pi$) del vettore $z(t)$. Il numero di coppie di passaggi per lo 0 (o passaggi con *pendenza positiva/negativa*) nell'unità di tempo può essere valutato semplicemente come

$$N_z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \omega_z dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \omega_z T = \frac{\omega_z}{2\pi} \quad (\text{A3.10})$$

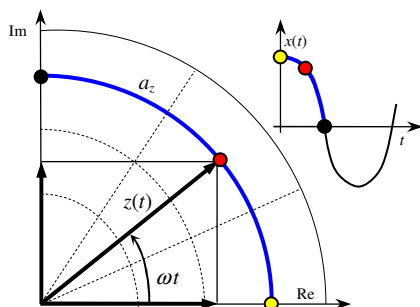


Fig.A3.1 – Segnale sinusoidale sul piano complesso.

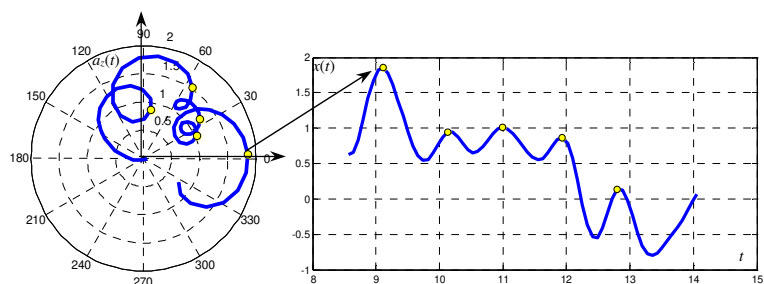


Fig.A3.2 – Segnale generico sul piano complesso e parte reale nel dominio t .

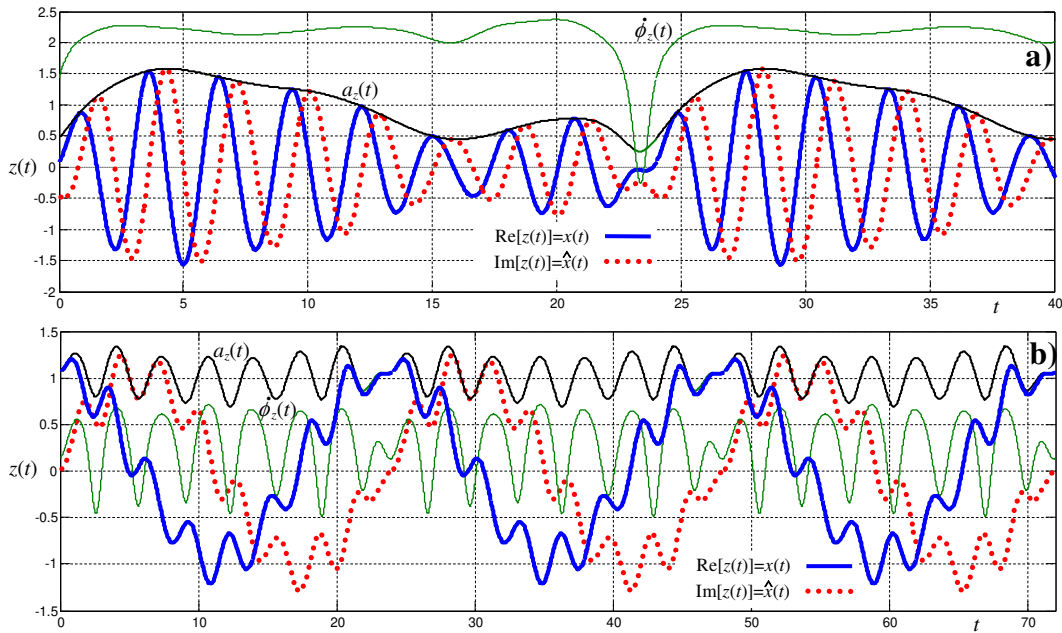


Fig.A3.3 – Esempi di segnali variabili ciclicamente in modo complesso: parte reale $x(t)$ in linea continua blu, parte immaginaria $\hat{x}(t)$ in linea punteggiata rossa, modulo e velocità angolare in linea continua sottile rispettivamente nera e verde. a) segnale con velocità angolare $\dot{\phi}_z(t)$ poco variabile nel tempo, che presenta generalmente un passaggio per 0 per ogni massimo, b) segnale con velocità angolare che assume anche valori negativi, che presenta svariati massimi per ogni passaggio per zero.

Sempre nell'ipotesi di a ed ω costanti, i valori massimi e minimi si verificano in corrispondenza dei passaggi del vettore dalle posizioni $\phi=0$ (fig.1) e $\phi=\pi$. In base a quanto detto, nel caso dei segnali sinusoidali semplici, si verifica, una corrispondenza *uno ad uno* tra estremi (picchi e valli) e passaggi per lo zero.

Nel caso generale la dipendenza dal tempo di $a_z(t)$ comporta, ovviamente, il fatto che i picchi del segnale abbiano ampiezze variabili (fig.3), mentre la dipendenza dal tempo di $\dot{\phi}_z(t)$ comporta due differenze rispetto al caso della sinusoida. La prima differenza consiste nel fatto che, ovviamente, i picchi si susseguono ad intervalli temporali T variabili; la seconda è data dal fatto che, se $\dot{\phi}_z(t)$ è molto variabile, è possibile che assuma valori negativi e, di conseguenza, il vettore $z(t)$ inverte il senso di rotazione: è importante notare che ogni volta che ciò accade, nel segnale reale, cioè la proiezione sull'asse reale di $z(t)$, si verifica un estremo (un massimo o un minimo) come in fig.3b e 4. Naturalmente le inversioni del senso di rotazione possono accadere in qualsiasi posizione angolare del vettore, quindi, in generale, non è detto che diano luogo anche ad un attraversamento dello 0. In conseguenza di ciò, in seguito ad un'inversione di rotazione del vettore $z(t)$ può accadere che si verifichino due estremi consecutivi senza che ci siano attraversamento dello 0 nell'intervallo temporale da essi delimitato, come nel caso di fig.3b e 4.

Poiché può anche accadere che durante la rotazione in verso negativo si verifichi un attraversamento dello 0, il conteggio degli attraversamenti dello 0 richiede che venga considerato *tutto il percorso di fase* di $z(t)$ nel piano complesso e la (10) deve essere riscritta introducendo il modulo di $\dot{\phi}_z(t)$:

$$N_z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \dot{\phi}_z(t) \right| dt \tag{A3.11}$$

Come è ovvio il numero dei picchi di un segnale $x(t)$ è legato al numero di attraversamenti dello 0 della sua derivata, (fig.3). È possibile mostrare che la derivata del vettore $z(t)$ definito dalle (1) o (6) è anch'esso un vettore ruotante nel piano complesso, con modulo $a_{dz/dt}(t)$ e velocità angolare $\omega_{dz/dt}(t) = \dot{\phi}_{dz/dt}(t)$ differenti da quelli di $z(t)$

$$\dot{z}(t) = dz/dt = \dot{x}(t) + i \dot{\hat{x}}(t) = a_{dz/dt}(t) \left[\cos \int_0^t \dot{\phi}_{dz/dt}(t) dt + i \sin \int_0^t \dot{\phi}_{dz/dt}(t) dt \right] \tag{A3.12}$$

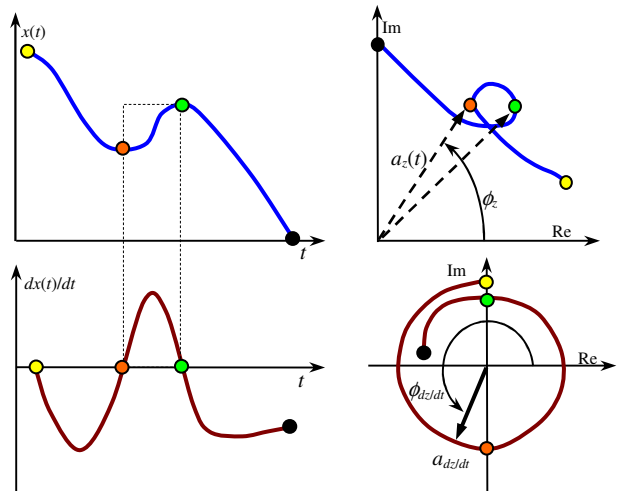


Fig.A3.4 – Segnale e derivata nel dominio del tempo e sul piano complesso. Relazione tra estremi e passaggi per lo zero.

In base a ciò, il numero di picchi di $z(t)$ nell'unità di tempo può essere ottenuto valutando il numero di attraversamenti dello 0 della sua derivata con la seguente relazione

$$N_M = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \dot{\phi}_{dz/dt}(t) \right| dt \quad (\text{A3.13})$$

Nel caso dei processi aleatori, i singoli campioni possono essere espressi nella forma (7) nella quale $a(t)$ e $\omega(t)$ sono a loro volta processi aleatori.

Naturalmente nel caso di $\dot{\phi}_z(t)$ variabile è possibile definire una velocità angolare media del segnale calcolata in un intervallo di tempo T

$$\Omega_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi}_z(t) dt \quad (\text{A3.14})$$

e un valor medio del *modulo* della velocità angolare definito ovviamente come:

$$\rho_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \dot{\phi}_z(t) \right| dt \quad (\text{A3.15})$$

essendo, naturalmente, $\rho_z \geq \Omega_z$. È facile vedere come, in base alla (11) e alla (15) il numero medio di coppie di attraversamenti dello 0 di un segnale nell'unità di tempo può essere posto in relazione con ρ_z essendo, in particolare, $N_z = \rho_z / 2\pi$.

A4. I processi analitici

Come precedentemente affermato un segnale del tipo (A3.7), le cui parti reale ed immaginaria hanno la forma

$$x(t) = a_z(t) \cos \int_0^t \dot{\phi}_z(t) dt \quad \hat{x}(t) = a_z(t) \sin \int_0^t \dot{\phi}_z(t) dt \quad (\text{A4.1,2})$$

viene definito *analitico* e la parte immaginaria costituisce la *Trasformata di Hilbert* (TH) di quella reale. La trasformata di Hilbert di un segnale è definita *segnale in quadratura*, in quanto, se il segnale è *regolare*, come nel caso di fig.3a, la sua TH assume all'incirca il valore nullo in corrispondenza degli estremi (massimi e minimi) del segnale e viceversa. Questa caratteristica viene perduta nel caso dei segnali *irregolari*, come accade nel caso di fig.3b. Ad esempio, è facile vedere che se il segnale reale si riduce alla semplice funzione coseno, la parte immaginaria diventa la funzione seno, che ne rappresenta la trasformata di Hilbert e presenta una differenza di fase pari a $\pi/2$ con il segnale originale.

Se del segnale reale $x(t)$ si conosce la registrazione nel dominio del tempo, ma non si conoscono esplicitamente le funzioni $a_z(t)$ e $\dot{\phi}_z(t)$, la sua trasformata di Hilbert può essere ottenuta mediante l'integrale di convoluzione tra il segnale stesso e la funzione di Hilbert così definita

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (\text{A4.3})$$

cioè mediante la seguente relazione

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (\text{A4.4})$$

In base alle proprietà della TF, la TF del prodotto di convoluzione di due segnali è pari al prodotto semplice delle TF dei due segnali (1.36,37), per cui la TF della TH può essere ottenuta come

$$F[\hat{x}(t)] = F[x(t) * h(t)] = F[x(t)] F[h(t)] \quad (\text{A4.5})$$

Poiché la TF della funzione di Hilbert è data da

$$H(\omega) = F\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -i \text{sign}(\omega) \quad (\text{A4.6})$$

la TF della TH di $x(t)$ diventa:

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega) X(\omega) = -i \text{sign}(\omega) X(\omega) \quad \text{sign}(\omega) \Rightarrow \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A4.7})$$

essendo sign la funzione segno, pari a 1 per valori positivi di ω e a -1 per valori negativi. Per la proprietà di linearità

della TF, la TF del segnale analitico si ottiene come somma delle TF delle parti reale ed immaginaria, da cui

$$Z(\omega) = F[z(t)] = X(\omega) + \text{sign}(\omega) X(\omega) = [1 + \text{sign}(\omega)] X(\omega) \quad (\text{A4.8})$$

Poiché il termine entro parentesi quadra assume il valore 2 per $\omega > 0$ e 0 per $\omega < 0$, la (8) può essere riscritta come

$$Z(\omega) = 2U(\omega) X(\omega) \quad U(\omega) \Rightarrow \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A4.9})$$

essendo $U(\omega)$ la funzione gradino unitario (o unity step function) pari ad 1 per $\omega > 0$ e 0 per $\omega < 0$.

Dalla (9) si osserva che la TF di un segnale analitico si ottiene da quella del segnale reale, raddoppiando semplicemente i valori ottenuti nel campo positivo di ω ed annullando quelli del campo negativo. Questa caratteristica permette anche di determinare la TH del segnale reale moltiplicando per $2U(\omega)$ la sua TF ed effettuando la trasformata inversa: operando in tal modo si ottiene il segnale analitico, cioè il segnale complesso la cui parte immaginaria è la TH di quello reale.

In base a questa osservazione si può anche affermare che la cosiddetta PSD *unilaterale* è la PSD del segnale analitico, piuttosto che quella del segnale reale.

A.5 Procedura per la generazione di storie di carico a partire dalla matrice di transizione f

La procedura di generazione di una storia di carico a partire dalla matrice **f** consiste nella creazione in un vettore che contiene gli indici corrispondenti agli estremi della storia di carico stessa.

Definendo n il contatore degli estremi e k il vettore contenente i livelli degli estremi (gli indici) della storia di carico, i passi della procedura possono essere sintetizzati nei seguenti:

1. si genera un indice k_1 , con $1 < k_1 \leq 32$, per quale esista almeno un elemento $f(k_1, x) \neq 0$, che coincide con il livello del primo estremo;
2. si genera un indice k_2 , con $1 \leq k_2 \leq 32$ e tale che sia $k_2 \neq k_1$ ed $f(k_1, k_2) > 0$, che coincide con il livello del secondo estremo;
3. l'elemento $f(k_1, k_2)$ viene *decrementato* di una unità e si pone il contatore $n=3$;
4. se $k_{n-2} < k_{n-1}$ si era verificato il passaggio da una valle ad un picco, per cui ora si deve verificare il passaggio ad una valle ed è necessario generare un indice k_n *minore* dell'indice k_{n-1} , cioè $1 \leq k_n < k_{n-1}$; viceversa (cioè se $k_{n-2} > k_{n-1}$) si era verificato il passaggio da un picco ad una valle, per cui si deve generare un indice k_n *maggiore* dell'indice k_{n-1} , cioè $k_{n-1} < k_n \leq 32$;
5. se l'elemento della matrice di transizione è diverso da 0, cioè $f(k_{n-1}, k_n) > 0$, l'elemento $f(k_{n-1}, k_n)$ viene decrementato e il contatore n viene incrementato.

I passi 4. e 5. della procedura devono essere iterati fino a quando non vengono azzerati tutti gli elementi della matrice **f**.

In sintesi:

1. $1 \leq k_1 \leq 32$,
2. $1 \leq k_2 \leq 32$,
3. se $k_2 \neq k_1$ ed $f(k_1, k_2) > 0 \rightarrow f(k_1, k_2) = f(k_1, k_2) - 1, n=3$; altrimenti vai a 2.
4. se $k_{n-2} < k_{n-1} \rightarrow 1 \leq k_n \leq (k_{n-1} - 1)$ altrimenti $\rightarrow (k_{n-1} + 1) \leq k_n \leq 32$
5. se $f(k_{n-1}, k_n) > 0 \rightarrow f(k_{n-1}, k_n) = f(k_{n-1}, k_n) - 1, n = n + 1$
6. $\forall \mathbf{f} > 0$ vai a 4.