

18. RESISTENZA A FATICA PER TENSIONI MULTIASSIALI

Nel caso della fatica monoassiale lo stato tensionale variabile nel tempo viene descritto dalla sola funzione $\sigma_1(t)$; ad esempio, nel caso della flessione rotante, la funzione temporale della tensione è $\sigma_1(t)=A \sin(\omega t)$, essendo A una costante dipendente dal modulo di resistenza a flessione del componente e dal momento flettente applicato e ω la velocità di rotazione. Nel caso monoassiale, i dati sperimentali della resistenza a fatica ottenuti mediante prove monoassiali sono sufficienti per la caratterizzazione dei materiali e i parametri della sollecitazione di interesse sono limitati alle ampiezze e valori medi dei cicli (σ_a e σ_m), determinati considerando la sola successione degli estremi (picchi e valli) estratti dalla funzione $\sigma_1(t)$. In molti casi i punti più sollecitati di una struttura meccanica sono soggetti a stati tensionali multiassiali nei quali diverse componenti cartesiane di tensione sono variabili nel tempo. Alcuni esempi sono:

- tubi di grosso spessore soggetti a pressione ciclica: i punti al diametro interno sono soggetti a una tensione radiale e una circonferenziale che variano in fase con la pressione;
- gli alberi di trasmissione: i punti al diametro esterno sono soggetti ad una tensione normale alternata dovuta ai carichi di flessione e ad una tensione tangenziale costante dovuta al momento torcente, tali tensioni danno luogo a uno stato tensionale biassiale variabile nel tempo;
- le molle a barra di torsione con manovella: la forza variabile applicata sulla manovella provoca simultaneamente torsione e flessione nella barra, con conseguenti tensioni normali e tangenziali che agiscono in fase.

Il passaggio dal caso di tensione monoassiale a quello pluriassiale nell'analisi a fatica implica due ordini di problemi.

Il primo problema è simile a quello del caso statico, nel quale il cedimento del materiale dipende dal tipo di stato tensionale agente e sono stati sviluppati dei *criteri* che consentono di confrontare gli *stati tensionali pluriassiali* con i dati sperimentali relativi alla resistenza del materiale ottenuti con la semplice *prova monoassiale*. Analogamente, nel caso della fatica, le *velocità di nucleazione e propagazione* della frattura dipendono dalle caratteristiche dello stato tensionale. Poiché è impossibile disporre di dati sperimentali relativi a tutti i possibili stati tensionali pluriassiali, i criteri per l'analisi di resistenza indicano quali combinazioni delle sollecitazioni di fatica agenti lungo direzioni differenti devono essere confrontate con i dati sperimentali di resistenza del materiale, relativi a casi di sollecitazione semplice (tipicamente sollecitazioni monoassiali o in stato di tensione puramente tangenziale).

Il secondo problema è relativo al fatto che l'analisi di fatica richiede la determinazione delle *medie* e delle *ampiezze dei cicli* di tensione, che, nel caso monoassiale, sono facilmente desumibili dalla storia temporale dell'unica componente di tensione agente. Nel caso pluriassiale tale determinazione è estremamente più complessa, poiché, in generale, le singole componenti di tensione non agiscono in modo *sincrono*, cioè gli estremi delle rispettive storie temporali avvengono in istanti differenti, e le direzioni principali nei punti del componente possono cambiare orientazione nel corso del tempo. Nel prossimo paragrafo viene affrontato in modo esteso questa ultima problematica.

Lo stato tensionale variabile nel tempo

Nel caso più generale di fatica multiassiale tutte le componenti del tensore cartesiano degli sforzi variano nel tempo con leggi differenti; esse sono 6 nel caso triassiale e 3 in quello biassiale:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{yx}(t) & \tau_{zx}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) & \tau_{zy}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{yx}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) \end{bmatrix} \quad (18.1a,b)$$

Nella fig.1a dall'alto in basso sono mostrate 3 sollecitazioni biassiali costituite rispettivamente da:

- (1) tensioni σ_x e τ_{xy} variabili in modo sinusoidale con differenza di fase pari a $\pi/2$,
- (2) tensioni σ_x e τ_{xy} variabili in modo sinusoidale con differente frequenza,
- (3) il classico caso di tensione σ_x variabile in modo sinusoidale e τ_{xy} costante, cioè il caso già citato degli alberi di trasmissione.

È facile osservare che gli estremi della storia temporale di ciascuna componente si verificano in *istanti differenti*. Ovviamente anche le intensità degli estremi possono essere differenti come si vede nel caso (5) di fig.2a. Quanto detto comporta che, anche se è possibile identificare i cicli relativi a ciascuna componente di tensione e valutarne ampiezza e valor medio (in generale variabili), è difficile estrapolare parametri quantitativi che caratterizzino *insieme* delle sollecitazioni dal punto di vista della fatica, come accade nel caso monoassiale. In particolare, in molti casi, non è sufficiente considerare soltanto la successione degli estremi delle tensioni cartesiane e deve essere analizzato il loro andamento nel tempo istante per istante.

È importante notare che in molti casi nei quali sono presenti tensioni *cartesiane tangenziali*, sia variabili che costanti, è possibile che la terna delle direzioni principali *cambi la sua orientazione nel tempo*. Nel caso di sollecitazioni triassiali l'orientazione delle direzioni principali può essere identificata mediante 3 angoli deducibili dai versori delle tensioni principali $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, ottenibili risolvendo il problema agli autovalori (1.26), mentre nel caso biassiale è sufficiente considerare l'angolo α formato tra l'asse x e la tensione σ_1 . Ad esempio, in fig.1b sono

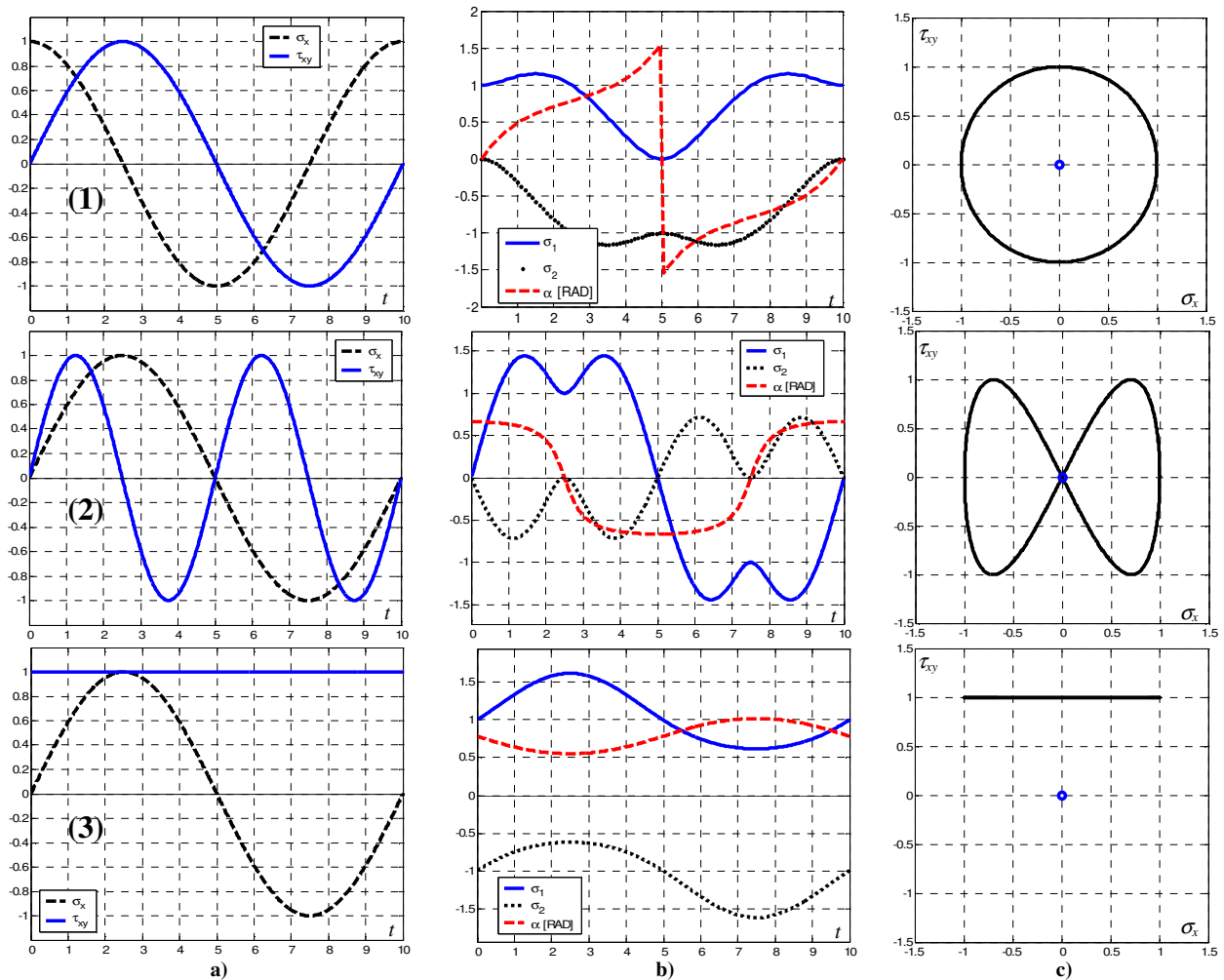


Fig.18.1 – Sollecitazioni costituite da una tensione σ_x di tipo alternato simmetrico accoppiata a (1) τ_{xy} alternata simmetrica sfasata, (2) τ_{xy} alternata simmetrica con differente frequenza, (3) τ_{xy} costante. a) tensioni cartesiane, b) tensioni principali e angolo α , c) percorso di carico $\tau_{xy} - \sigma_x$.

mostrati gli andamenti delle tensioni principali e l'angolo $\alpha(t)$ in funzione del tempo, relativi ai casi delle sollecitazioni cartesiane biassiali mostrate in fig.1a. Quanto detto implica che l'eventuale riferimento delle tensioni agli assi principali non permette particolari semplificazioni del problema, sia perché il numero totale di variabili rimane lo stesso, sia perché è difficile valutare l'effetto della variazione dell'orientazione delle tensioni principali sulla vita a fatica.

In fig.2 sono mostrati 3 casi interessanti di sollecitazioni biassiali che aiutano a comprendere la complessità del problema. I casi (4) e (5) sono caratterizzati dallo stesso andamento nel tempo dei *moduli* delle tensioni principali, tuttavia nel caso (4) le direzioni rimangono fisse mentre nel caso (5) *ruotano in funzione del tempo*; prove sperimentali mostrano che nel secondo caso la vita a fatica risulta minore. Nel caso (6) le direzioni principali ruotano esattamente come nel caso (5), ma i moduli delle tensioni principali si mantengono *costanti*: ciò dimostra che non è possibile utilizzare come parametri di fatica semplicemente le ampiezze (e i valori medi) dei cicli estratti dall'andamento nel tempo delle tensioni principali che, in questo caso, risulterebbero nulle.

È opportuno notare che, nel caso della fatica multiassiale, l'attribuzione degli indici 1, 2 e 3 alle tensioni in senso decrescente, come è usuale nell'analisi statica, può creare delle *ambiguità*, poiché accade normalmente che una tensione principale risulti maggiore o minore delle altre (fig.1b) solo *temporaneamente*.

Concentrando l'attenzione su ciò che accade nei piani di normale \mathbf{n} generica passanti per il punto considerato (fig.3), le cui direzioni possono essere identificate mediante coordinate polari ϕ_n, θ_n , con $-\pi/2 \leq \phi_n < \pi/2, 0 \leq \theta_n < \pi$, si osserva che, nel caso di fatica multiassiale, il vettore tensione \mathbf{p}_n agente sul piano ha sia modulo che direzione variabili nel tempo, e può essere scomposto in:

- un componente normale σ_n , avente modulo variabile nel tempo e direzione parallela ad \mathbf{n} fissa,
- un componente tangenziale τ_n avente modulo variabile nel tempo e direzione variabile nel tempo (ovviamente sempre perpendicolare ad \mathbf{n} e parallelo al piano).

È bene sottolineare che il fatto che il vettore τ_n , pur rimanendo parallelo al piano di normale \mathbf{n} , in generale, cambi direzione rende *impossibile legare l'ampiezza dei cicli di fatica* dovuti a τ_n alla sola variazione del modulo, così come visto per il caso delle tensioni principali in presenza di direzioni principali variabili. Questo problema sarà approfondito nel seguito.

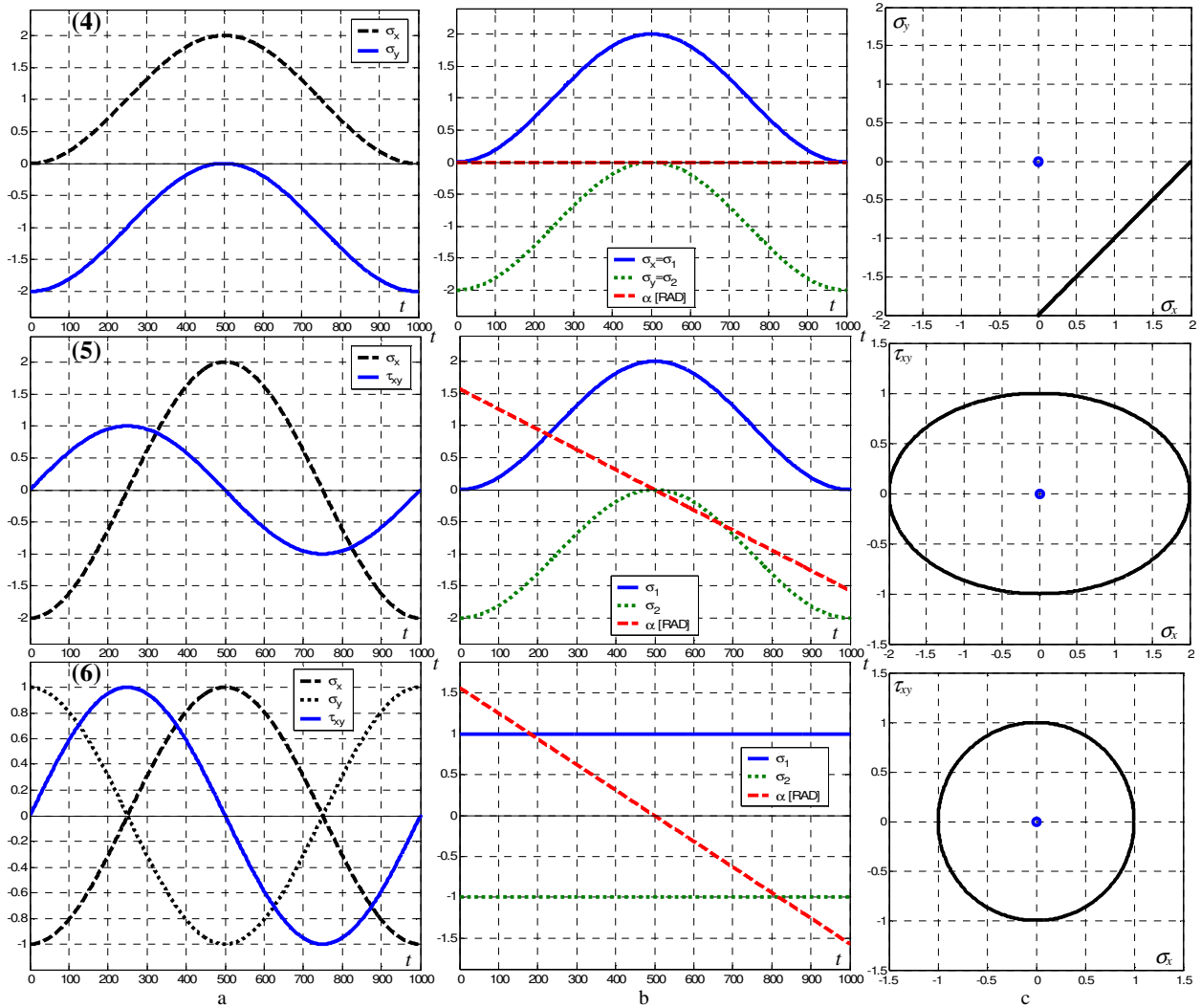


Fig.18.2 – Casi interessanti di sollecitazioni non proporzionali: i casi (4) e (5) hanno lo stesso andamento nel tempo dei moduli delle tensioni principali, ma le direzioni rimangono fisse nel caso (4) e ruotano nel tempo nel caso (5). Nel caso (6) le direzioni principali ruotano esattamente come nel caso (5), ma i moduli delle tensioni principali si mantengono costanti.

Confronto tra i diversi sistemi di riferimento

Al variare del sistema di riferimento in cui sono determinate le tensioni cambiano i parametri che ne caratterizzano l'effetto ai fini della vita a fatica.

Nel caso delle tensioni cartesiane:

- le componenti della sollecitazione sono un massimo di 6 nel caso triassiale e 3 in quello biassiale,
- le componenti della sollecitazione hanno orientazione fissa.

Risulta semplice determinare i cicli delle componenti, mentre è molto difficile estrapolare parametri complessivi nel caso di sollecitazione non in fase.

Nel caso delle tensioni principali:

- le componenti della sollecitazione sono 3 nel caso triassiale e 2 in quello biassiale,
- le componenti della sollecitazione hanno orientazione variabile.

Risulta semplice determinare i cicli delle componenti in termini di ampiezza, mentre è difficile valutare l'effetto della variazione di direzione ed estrapolare parametri complessivi nei casi di sollecitazione non in fase e/o rotazione delle direzioni.

Nel caso del vettore tensione \mathbf{p}_n :

- le componenti della sollecitazione sono 2,
- una componente di sollecitazione ha direzione fissa e l'altra variabile.

È semplice determinare parametri caratteristici della σ_n , mentre è difficile definire i cicli della τ_n e valutare l'effetto della sua variazione di direzione.

In tab.1 è mostrato un confronto riassuntivo dell'uso dei diversi sistemi di riferimento nella fatica multiassiale.

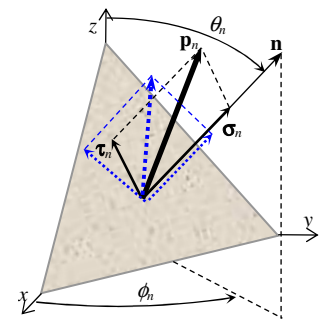


Fig.18.3 – Componenti del vettore \mathbf{p}_n in 2 differenti istanti.

Sollecitazioni periodiche

Nel caso più generale di sollecitazione di fatica multiassiale ciascuna componente cartesiana varia nel tempo in modo aleatorio. Una prima semplificazione riguarda il caso delle sollecitazioni *periodiche*: in questo caso ciascuna componente cartesiana di tensione è periodica ed è possibile determinare il *periodo T* dell'insieme delle sollecitazioni come minimo comune multiplo dei periodi delle singole componenti.

Nel caso di sollecitazioni periodiche, le caratteristiche di interesse per ciascuna componente cartesiana sono:

- il *tipo* di funzione temporale,
- il *periodo T* o la *frequenza circolare* $\omega=2\pi/T$,
- la *fase* φ ,

Se una componente di tensione è di tipo sinusoidale può essere descritta da una relazione del tipo

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t + \varphi) \tag{18.2}$$

Le sollecitazioni mostrate nelle fig.1-2 e nelle successive fig.4-5 sono di tipo sinusoidale; le loro caratteristiche sono riassunte nella tab.2.

Percorsi di carico

Come ormai dovrebbe essere chiaro, nel caso della fatica multiassiale è necessario avere una descrizione di come varia ciascuna componente della sollecitazione rispetto alle altre. Una rappresentazione utile a tal fine è quella costituita dai cosiddetti *percorsi di carico*. Un percorso di carico è la rappresentazione di una componente cartesiana di tensione rispetto ad un'altra al variare del tempo, ad esempio $\sigma_x(t)$ rispetto a $\sigma_y(t)$ (naturalmente la rappresentazione di σ_y rispetto a σ_x non fornisce ulteriori informazioni). Nel caso tridimensionale è possibile individuare un massimo di 15 combinazioni di tensione e corrispondenti percorsi di carico, mentre nel caso bidimensionale 5, ma, ovviamente, in generale i percorsi significativi sono molti di meno. Nel caso di sollecitazioni periodiche i percorsi di carico sono sempre *linee chiuse*. Nelle fig.1c e 2c sono riportati i percorsi di carico più significativi delle sollecitazioni mostrate nelle fig.1a e 2a.

Sollecitazioni proporzionali

Notevoli semplificazioni nell'analisi di fatica multiassiale sono possibili nel caso delle *sollecitazioni proporzionali*, nel quale tutte le componenti cartesiane di tensione variano nel tempo mantenendo costanti i loro rapporti (es. $\sigma_x(t)/\sigma_y(t)=c_1$, $\sigma_x(t)/\tau_{xy}(t)=c_2$, ecc..). In tal caso le tensioni cartesiane sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

- hanno la stessa legge temporale, a parte, eventualmente, il fattore moltiplicativo che determina l'ampiezza della sollecitazione;
- hanno uguale periodo;
- hanno valori medi nulli;
- sono *sincrone*, cioè agiscono *in fase* ($\Delta\varphi=0$) o in *controfase* ($\Delta\varphi=\pm\pi$) tra loro; nel primo caso tutti i massimi e i minimi delle componenti di tensioni si verificano negli stessi istanti, nel secondo caso, essendo $\sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$, i massimi di una si verificano negli stessi istanti dei minimi dell'altra e viceversa.

Nel caso delle sollecitazioni proporzionali i percorsi di carico significativi degenerano sempre in *segmenti di retta passanti per l'origine degli assi*. Un'altra caratteristica importante delle sollecitazioni proporzionali è costituita dal fatto che le direzioni principali mantengono *orientazione fissa*.

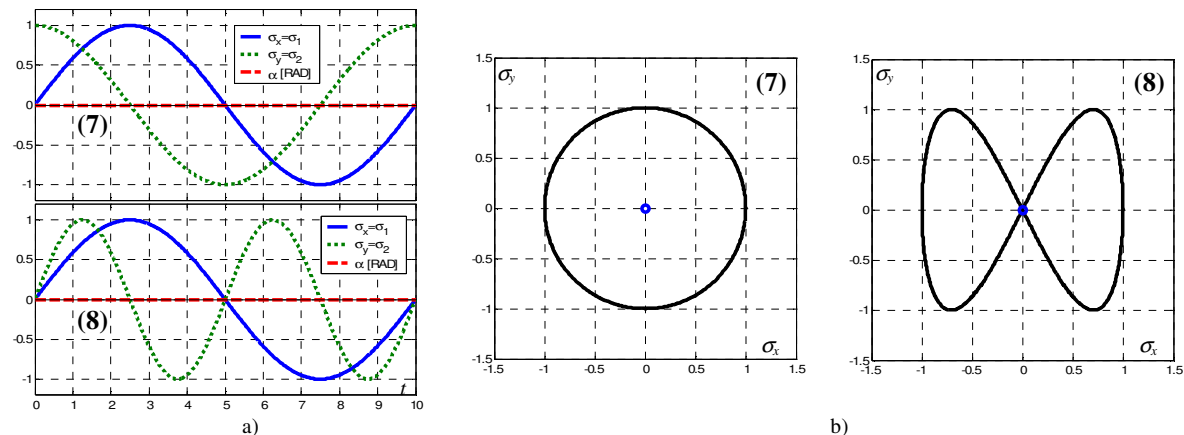


Fig.18.4 – Sollecitazioni costituite da una tensione σ_x di tipo alternato simmetrico accoppiate a: (7) σ_y alternata simmetrica sfasata, (8) σ_y alternata simmetrica con differente frequenza. a) tensioni principali coincidenti con le cartesiane e angolo α , b) percorsi di carico $\sigma_y - \sigma_x$.

	N. Comp.	Dir. Comp.	Variabili	Criticità
Assi xyz	6/3	Fissa	6/3 moduli	estrapolazione 6 parametri
Assi 123	3/2	Variabile	3/2 moduli 3/1 angoli	estrapolazione 3 parametri effetto rotazione assi
Assi n t	2	σ_n fissa τ_n variabile	2 moduli 1/0 angoli	definizione parametri di τ_n effetto rotazione τ_n determinazione piano critico

Tab.18.1 – Confronto tra i sistemi di riferimento nei casi di sollecitazione triassiale /biassiale.

- il *valor medio* σ_m ,
- l'*ampiezza* σ_a .

Nelle fig.1,2 e 4 sono mostrate delle sollecitazioni di tipo *non* proporzionale. Le sollecitazioni della fig.4, sono costituite da tensioni normali $\sigma_x \equiv \sigma_1$ e $\sigma_y \equiv \sigma_2$ variabili in modo sinusoidale con il tempo, rispettivamente

- (7) con differenza di fase pari a $\pi/2$,
- (8) con frequenze differenti,

e si differenziano dalle sollecitazioni delle fig.1,2 per il fatto che le direzioni principali *mantengono orientazione fissa*, come si vede dal fatto che l'angolo α si mantiene costante. Ciò conferma che il fatto di mantenere direzione delle tensioni principali fisse è una *condizione necessaria*, ma *non sufficiente* affinché una sollecitazione di fatica multiassiale sia di tipo *proporzionale*.

Nella fig.5, invece, sono mostrati tre esempi di sollecitazioni *proporzionali*, costituite rispettivamente da

- (9) tensioni normali $\sigma_x \equiv \sigma_1$ e $\sigma_y \equiv \sigma_2$ di tipo sinusoidale agenti in fase;
- (10) tensioni σ_x e τ_{xy} di tipo sinusoidale agenti in fase;
- (11) tensioni normali $\sigma_x \equiv \sigma_1$ e $\sigma_y \equiv \sigma_2$ di tipo sinusoidale agenti in controfase (se i moduli sono uguali questo caso coincide con quello di una sola tensione tangenziale τ_{xy} sinusoidale, cioè la sollecitazione puramente tangenziale, essendo in ogni istante $\sigma_x = -\sigma_y$ e, di conseguenza, $\sigma_1 = -\sigma_2$).

Osservando la fig.5 è possibile notare che l'orientazione degli assi si mantiene fissa, essendo $\alpha(t)$ costante, e che i percorsi di carico degenerano in segmenti passanti per l'origine degli assi.

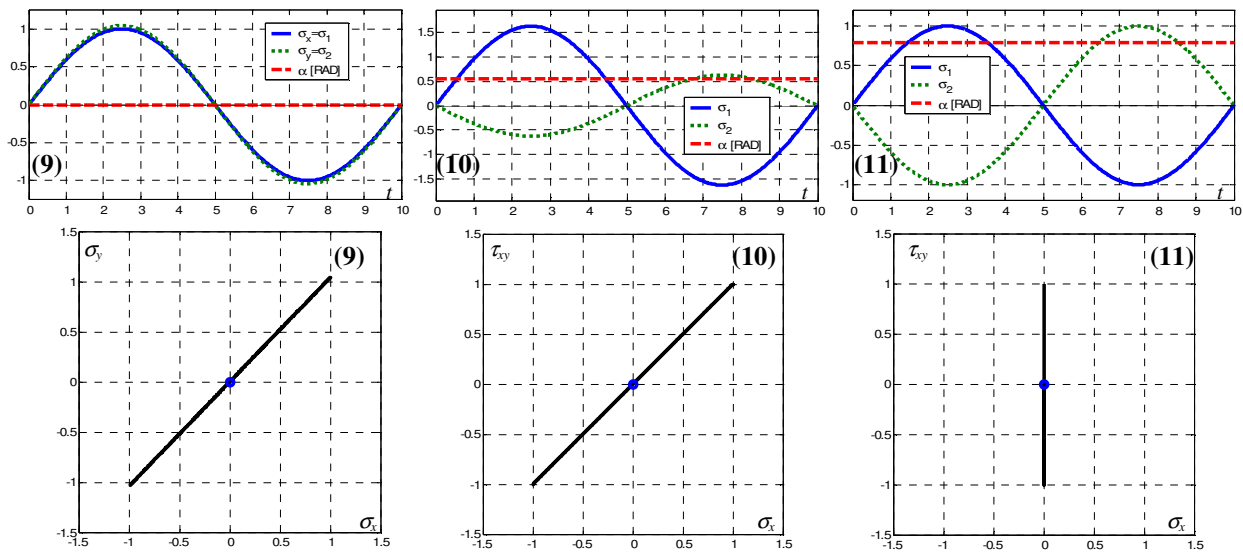


Fig.18.5 – Sollecitazioni proporzionali. In alto tensioni principali e angolo α ; in basso percorsi di carico più significativi per 3 casi: (9) tensione σ_x e σ_y di tipo alternato simmetrico in fase, (10) tensione σ_x e τ_{xy} di tipo alternato simmetrico in fase, (11) tensione σ_x e σ_y di tipo alternato simmetrico in controfase, coincidente con il caso di tensione tangenziale τ_{xy} di tipo alternato simmetrico.

Sollecitazioni con componenti alternate proporzionali

Un caso intermedio tra quello più generale e quello di sollecitazioni proporzionali è quello di sollecitazioni le cui componenti alternate sono proporzionali, ma sono presenti delle componenti medie. In questo caso, le componenti di tensione cartesiane possono essere espresse in questa forma

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij_m} + \sigma_{ij_a} \sin(\omega t + \varphi \pm \pi) = \sigma_{ij_m} \pm \sigma_{ij_a} \sin(\omega t + \varphi) = \sigma_{ij_m} + \bar{\sigma}_{ij_a} f(t) \tag{18.3}$$

e il tensore a sua volta può essere scritto come

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m} & \tau_{yx_m} & \tau_{zx_m} \\ \tau_{xy_m} & \sigma_{y_m} & \tau_{zy_m} \\ \tau_{xz_m} & \tau_{yz_m} & \sigma_{z_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{x_a} & \bar{\tau}_{yx_a} & \bar{\tau}_{zx_a} \\ \bar{\tau}_{xy_a} & \bar{\sigma}_{y_a} & \bar{\tau}_{zy_a} \\ \bar{\tau}_{xz_a} & \bar{\tau}_{yz_a} & \bar{\sigma}_{z_a} \end{bmatrix} f(t) \tag{18.4}$$

Le sollecitazioni (3) di fig.1 e (4) di fig.2 hanno questa caratteristica: è possibile notare come i percorsi di carico siano ancora delle rette, ma non passanti per l'origine. Le direzioni principali possono risultare variabili, come nel caso (3) relativo a torsione costante e flessione variabile, anche se le direzioni principali delle *sole componenti alternate* sono fisse.

Considerazioni riassuntive

L'analisi della variazione nel tempo del tensore cartesiano $\sigma(t)$ consente semplicemente di definire le caratteristiche della sollecitazione di fatica nel punto, cioè di stabilire se la sollecitazione è

- di tipo monoassiale o multiassiale,
- di tipo periodico o aleatorio,
- con direzioni principali fisse, o con direzioni principali fisse relativamente alle sole componenti alternate, o con direzioni principali variabili,
- di tipo proporzionale o non proporzionale.

Come vedremo nel seguito, diverse teorie per la previsione della vita di componenti soggetti a sollecitazioni di fatica multiassiali considerano le tensioni σ_n e τ_n agenti su tutti i piani di normale \mathbf{n} generica passanti per il punto analizzato, determinando le componenti medie e alternate; in alcune teorie viene poi ricercata e analizzata la giacitura *più sollecitata* definita *piano critico*, mentre in altre si valuta una media delle sollecitazioni agenti su tutte le giaciture.

Altre teorie analizzano l'orientazione e l'entità delle tensioni principali variabili nel tempo, determinando delle giaciture *principali medie*. L'analisi di fatica viene poi effettuata considerando le tensioni agenti su tali giaciture.

(..)	Fig.n	Tensore cartesiano $\sigma(t)$	Caratteristiche di a, m, ω e φ	Tensioni principali
(1)	1	$\begin{matrix} \sin(\omega t) & \sin(\omega t + \pi/2) \\ \sin(\omega t + \pi/2) & 0 \end{matrix}$	σ_x e τ_{xy} alt. simm., sfasate $\pi/2$	ampiezze variabili direzioni variabili
(2)		$\begin{matrix} \sin(\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & 0 \end{matrix}$	σ_x e τ_{xy} alt. simm., ω diverse	ampiezze variabili direzioni variabili
(3)		$\begin{matrix} \sin(\omega t) & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	σ_x alt. simm., τ_{xy} costante	ampiezze variabili direzioni variabili
(4)	2	$\begin{matrix} \sin(\omega t - \pi/2) + 1 & 0 \\ 0 & \sin(\omega t - \pi/2) - 1 \end{matrix}$	σ_x e σ_y alt. simm., in fase, valori medi opposti	ampiezze coincidenti con σ_x e σ_y direzioni fisse
(5)		$\begin{matrix} 2 \sin(\omega t) & \sin(\omega t - \pi/2) \\ \sin(\omega t - \pi/2) & 0 \end{matrix}$	σ_x e τ_{xy} alt. simm., sfasate $\pi/2$, ampiezza σ_x doppia della τ_{xy}	ampiezze uguali al caso (4) direzioni variabili
(6)		$\begin{matrix} \sin(\omega t - \pi/2) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \sin(\omega t + \pi/2) \end{matrix}$	σ_x, σ_y e τ_{xy} alt. simm., σ_x e σ_y in contro-fase, τ_{xy} sfasata di $\pi/2$	ampiezze costanti direzioni uguali al caso (5)
(7)	4	$\begin{matrix} \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\omega t + \pi/2) \end{matrix}$	σ_x e σ_y alt. simm., sfasate $\pi/2$	ampiezze coincidenti con σ_x e σ_y direzioni fisse
(8)		$\begin{matrix} \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin(2\omega t) \end{matrix}$	σ_x e σ_y alt. simm., ω diverse	ampiezze coincidenti con σ_x e σ_y direzioni fisse
(9)	5	$\begin{matrix} \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\omega t) \end{matrix}$	σ_x e σ_y alt. simm., in fase	ampiezze coincidenti con σ_x e σ_y direzioni fisse
(10)		$\begin{matrix} \sin(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & 0 \end{matrix}$	σ_x e τ_{xy} alt. simm., in fase	ampiezze in controfase direzioni fisse
(11)		$\begin{matrix} \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & -\sin(\omega t) \end{matrix}$	σ_x e σ_y alt. simm., in contro-fase	ampiezze coincidenti con σ_x e σ_y direzioni fisse
		$\begin{matrix} 0 & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & 0 \end{matrix}$	τ_{xy} alt. simm.	ampiezze in controfase, come (10) direzioni fisse

Tab.18.2 – Caratteristiche delle sollecitazioni biassiali mostrate nelle fig.1, 2, 4, 5.

Tensioni variabili nella generica giacitura, componenti medie e alternate di τ_n

Come detto, la tensione agente su un piano di giacitura \mathbf{n} , di coordinate sferiche ϕ_n e θ_n , è costituita da un vettore \mathbf{p}_n avente modulo e direzione variabili nel tempo (fig.3), che può essere determinato mediante la relazione (1.15)

$$\mathbf{p}_n(\phi_n, \theta_n, t) = \sigma(t) \mathbf{n}(\phi_n, \theta_n) \tag{18.5}$$

e può essere scomposto in un componente normale σ_n , avente modulo variabile nel tempo e direzione fissa, e un componente tangenziale τ_n avente modulo e direzione variabili nel tempo.

Come visto nel primo capitolo, la posizione del vettore τ_n nel piano di normale \mathbf{n} può essere determinata utilizzando sistema di coordinate cartesiane nuv avente un asse coincidente con la direzione \mathbf{n} stessa e assi u e v ortogonali ad \mathbf{n} , opportunamente orientati nel piano (fig.6). In tale sistema d'assi il vettore \mathbf{p}_n viene scomposto nella componente normale σ_n e nelle componenti tangenziali τ_u e τ_v :

$$\mathbf{p}_{nuv}(\phi_n, \theta_n, t) = [\sigma_n(\phi_n, \theta_n, t) \quad \tau_u(\phi_n, \theta_n, t) \quad \tau_v(\phi_n, \theta_n, t)]^T \tag{18.6}$$

Nel caso di sollecitazioni periodiche, il vertice del vettore τ_n agente su ciascuna giacitura di normale generica \mathbf{n} descrive una curva chiusa Ψ sul piano (fig.7a) la cui forma dipende dall'andamento nel tempo delle componenti τ_u e τ_v . Nel semplice caso di sollecitazione tangenziale alternata simmetrica (es. il caso della semplice torsione alternata), nella quale il vettore τ_n ha direzione costante e modulo variabile ciclicamente tra un valore positivo e lo stesso valore negativo, la curva Ψ degenera in un segmento di retta passante per l'origine degli assi, con orientazione definita dall'angolo β costante (fig.7b). In presenza di una componente media, il segmento risulta traslato parallelamente a sé stesso di una quantità pari alla tensione media stessa. In generale, nei casi di *sollecitazioni di tipo proporzionale* le curve Ψ degenerano in rette.

In fig.7c è mostrato un esempio in cui agiscono sollecitazioni τ_{xz} e τ_{yz} variabili in modo sinusoidale con uguale frequenza angolare e differenza di fase pari a $\pi/2$. Sul piano di normale \mathbf{n} parallela alla direzione z , agisce la tensione tangenziale $\tau_n \equiv \tau_z$: assumendo assi uv coincidenti con gli assi xy , le componenti di τ_z risultano essere le tensioni cartesiane $\tau_{zx} \equiv \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} \equiv \tau_{yz}$ che, variando nel modo descritto, generano un vettore di *modulo costante* il cui vertice, ruotando nel piano di normale z , descrive una circonferenza.

Come detto, la determinazione delle componenti medie e alternate della tensione tangenziale τ_n , cioè $\tau_{n,m}$ e $\tau_{n,a}$, è un problema rilevante nei metodi di previsione della vita a fatica basati sull'analisi delle sollecitazioni τ_n e σ_n e in letteratura esistono diverse definizioni di tali componenti.

La definizione ad oggi più utilizzata considera la più piccola circonferenza che include tutta la curva delle τ , cioè la *minima circonferenza circoscritta* (MCC) alla curva Ψ (fig.8a): il modulo del vettore congiungente l'origine degli assi $u-v$ (ovvero il punto P del solido che si sta analizzando) con il centro della circonferenza è pari alla componente media della sollecitazione $\tau_{n,m}$, mentre il *raggio* della circonferenza è pari alla componente alternata $\tau_{n,a}$. Nel semplice caso di sollecitazione tangenziale alternata simmetrica (fig.7b), la circonferenza risulta centrata nell'origine con il segmento descritto dal vettore τ_n come diametro. Nel caso di fig.7c il cerchio circoscritto coincide con la curva τ stessa. In generale, la curva descritta dal vertice del vettore tensione è nota per punti di coordinate $\tau_u(t_i)$, $\tau_v(t_i)$, con $i=1,2,\dots,N_i$, e la determinazione della circonferenza circoscritta richiede l'applicazione di algoritmi di calcolo appositamente sviluppati.

Altre definizioni di $\tau_{n,m}$ e $\tau_{n,a}$ considerano rispettivamente: 1) la *semi-lunghezza della corda più lunga* (LC) della curva (fig.8b), 2) la *semi-lunghezza della più lunga proiezione* (LP) della curva lungo le rette passanti per l'origine degli assi $u-v$ al variare dell'angolo delle rette (fig.8c), 3) la *semi-diagonale del massimo rettangolo circoscritto* (MRC) alla curva (fig.8d).

I metodi LC ed LP forniscono lo stesso valore di $\tau_{n,a}$ e non riescono a differenziare le sollecitazioni di tipo proporzionale e non proporzionale, ma anche il metodo MCC risulta molto poco efficace in tal senso. Al contrario il metodo MRC fornisce valori di $\tau_{n,a}$ nettamente superiori per sollecitazioni di tipo non proporzionale rispetto a quelle di tipo proporzionale. Le definizioni LC, LP ed MRC portano ad ambiguità nella determinazione del valor medio del vettore τ_n , in quanto alcune curve possono presentare più segmenti aventi la proprietà di essere la corda o la proiezione più lunga, o avere più rettangoli circoscritti aventi diagonale pari alla massima.

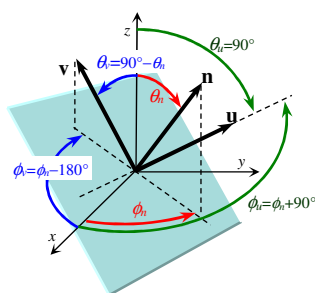


Fig.18.6 – Sistema di assi nuv e coordinate sferiche dei versori.

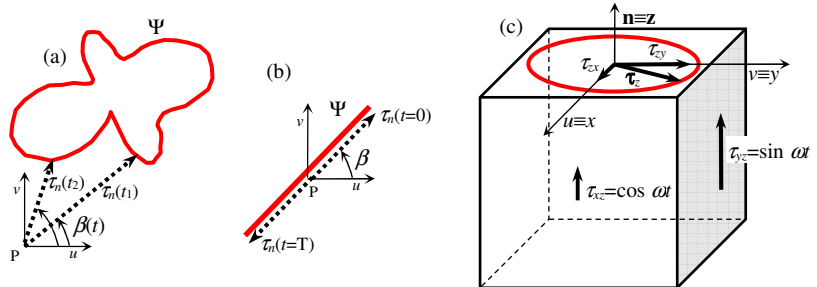


Fig.18.7 – Curva Ψ descritta dal vettore τ_n sul piano $u-v$; a) caso generico, b) sollecitazione di tipo proporzionale, c) curva Ψ di forma circolare.

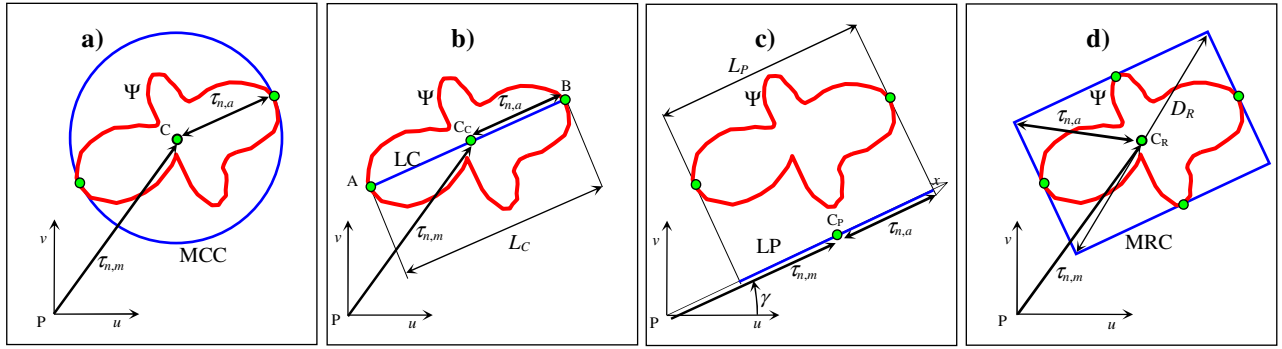


Fig.18.8 - Metodi per la determinazione di $\tau_{n,a}$ e $\tau_{n,m}$: a) metodo del minimo cerchio circoscritto MCC, b) metodo della corda più lunga LC, c) metodo della proiezione più lunga LP, d) metodo del massimo rettangolo circoscritto MRC.

Le componenti del vettore \mathbf{p}_{nuv} (6) possono essere valutate effettuando il prodotto scalare tra il vettore \mathbf{p}_n (5) e i versori delle direzioni nuv (cioè \mathbf{n} , \mathbf{u} , \mathbf{v}) mediante le relazioni (1.91) nelle quali il soprassetto significa *trasposto*:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_n(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{n}}(\phi_n, \theta_n) \mathbf{p}_n(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n \\ \tau_u &= \tau_u(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\phi_n, \theta_n) \mathbf{p}_n(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{p}_n \\ \tau_v &= \tau_v(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\phi_n, \theta_n) \mathbf{p}_n(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{p}_n\end{aligned}\quad (1.91a-c)$$

qui riscritte esplicitando la dipendenza dalla giacitura, tramite le coordinate ϕ_n e θ_n , e dal tempo t , nelle quali le componenti cartesiane dei versori \mathbf{n} , \mathbf{u} , \mathbf{v} possono essere ottenute mediante le (1.89):

$$\mathbf{n}(\phi_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} \cos \phi_n \sin \theta_n \\ \sin \phi_n \sin \theta_n \\ \cos \theta_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(\phi_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \\ \cos \phi_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}(\phi_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} -\cos \phi_n \cos \theta_n \\ -\sin \phi_n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{bmatrix} \quad (1.89a-c)$$

In alternativa, le componenti di \mathbf{p}_{nuv} possono essere ottenute mediante le (1.98)

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_n(\phi_n, \theta_n, t) = \mathbf{n}_n(\phi_n, \theta_n) \mathbf{s}(t) = \mathbf{n}_n \mathbf{s} \\ \tau_u &= \tau_u(\phi_n, \theta_n, t) = \mathbf{u}_n(\phi_n, \theta_n) \mathbf{s}(t) = \mathbf{u}_n \mathbf{s} \\ \tau_v &= \tau_v(\phi_n, \theta_n, t) = \mathbf{v}_n(\phi_n, \theta_n) \mathbf{s}(t) = \mathbf{v}_n \mathbf{s}\end{aligned}\quad (1.98a-c)$$

nelle quali $\mathbf{s} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_x \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]^T$ (1.96) e i vettori \mathbf{n}_n , \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n possono essere determinati mediante le (1.97)

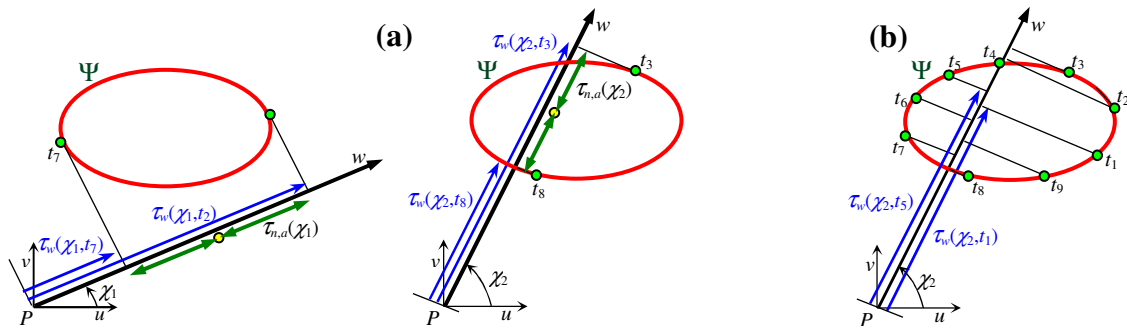
$$\begin{aligned}\mathbf{n}_n(\phi_n, \theta_n) &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & n_z^2 & 2n_x n_y & 2n_x n_z & 2n_y n_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_n(\phi_n, \theta_n) &= \begin{bmatrix} u_x n_x & u_y n_y & u_z n_z & u_x n_y + u_y n_x & u_x n_z + u_z n_x & u_y n_z + u_z n_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_n(\phi_n, \theta_n) &= \begin{bmatrix} v_x n_x & v_y n_y & v_z n_z & v_x n_y + v_y n_x & v_x n_z + v_z n_x & v_y n_z + v_z n_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.97a-c)$$

L'ampiezza di tensione tangenziale generalizzata

Nell'efficace definizione di $\tau_{n,a}$ di Papadopoulos, per prima cosa si determinano le semi-lunghezze delle proiezioni della curva Ψ su un asse w giacente nel piano di normale \mathbf{n} , che viene fatto ruotare di un angolo χ rispetto all'asse u nel campo $0 \leq \chi \leq \pi$ (fig.9), definite $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$; il valore $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$ calcolato per ciascuna orientazione dell'asse w (cioè per assegnato valore dell'angolo χ) corrisponde all'ampiezza del ciclo di tensione tangenziale lungo la direzione dell'asse w stesso. La tensione tangenziale alternata viene poi valutata mediante il seguente integrale:

$$\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi) d\chi} = \sqrt{2} \sqrt{E \left\{ \tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi) \right\}} \quad (18.13)$$

che fornisce la radice quadrata del valor medio del quadrato della funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$ nel campo $0 \leq \chi \leq \pi$, moltiplicata per $2^{0.5}$. Il valore di $\tau_{n,a}$ così calcolato viene anche definito *ampiezza di tensione tangenziale generalizzata*.



I valori della funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$ per i diversi valori dell'angolo χ , definiti *ampiezza della tensione tangenziale risolta*, possono essere determinati mediante la seguente relazione

$$\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi) = \frac{1}{2} \left[\max_{i=1, \dots, N_i} \tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t_i) - \min_{i=1, \dots, N_i} \tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t_i) \right] \quad (18.14)$$

nella quale $\tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t)$ sono le proiezioni sull'asse w degli N_i punti della curva Ψ discretizzata, di coordinate $\tau_u(t_i)$, $\tau_v(t_i)$, (fig.9b), definite *tensioni tangenziali risolte*. I valori $\tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t)$ possono essere ottenuti mediante le relazioni (1.93) o (1.99):

$$\tau_w = \tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t) = \tilde{\mathbf{w}}(\phi_n, \theta_n, \chi) \mathbf{p}_n(\phi_n, \theta_n, t) = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{p}_n \quad (1.93)$$

$$\tau_w = \tau_w(\phi_n, \theta_n, \chi, t) = \mathbf{w}_n(\phi_n, \theta_n, \chi) \mathbf{s}(t) = \mathbf{w}_n \mathbf{s} \quad (1.98)$$

nelle quali i vettori \mathbf{w} e \mathbf{w}_n possono essere ottenuti rispettivamente come:

$$\mathbf{w}(\phi_n, \theta_n, \chi) = \mathbf{u}(\phi_n, \theta_n) \cos \chi + \mathbf{v}(\phi_n, \theta_n) \sin \chi = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \cos \chi - \cos \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \cos \phi_n \cos \chi - \sin \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \sin \theta_n \sin \chi \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$$\mathbf{w}_n(\phi_n, \theta_n, \chi) = \begin{bmatrix} w_x n_x & w_y n_y & w_z n_z & w_x n_y + w_y n_x & w_x n_z + w_z n_x & w_y n_z + w_z n_y \end{bmatrix} \quad (1.97d)$$

In fig.10a sono mostrate 3 curve Ψ significative per il confronto tra le sollecitazioni proporzionali e non proporzionali dal punto di vista della tensione tangenziale alternata, cioè le curve costituite da un *segmento di retta*, una *circonferenza* e un *quadrato*, aventi rispettivamente semi-lunghezza, raggio e semi-diagonale di valore unitario. In fig.10b sono mostrati gli andamenti delle corrispondenti funzioni $\tau_{n,a}(\chi)$ (14) al variare dell'angolo χ . Le tre curve hanno uguale valore massimo di $\tau_{n,a}(\chi)$, cioè $\tau_{n,a}(\chi)=1$, che corrisponde alla semi-lunghezza della massima proiezione di ciascuna curva sull'asse w al variare di χ .

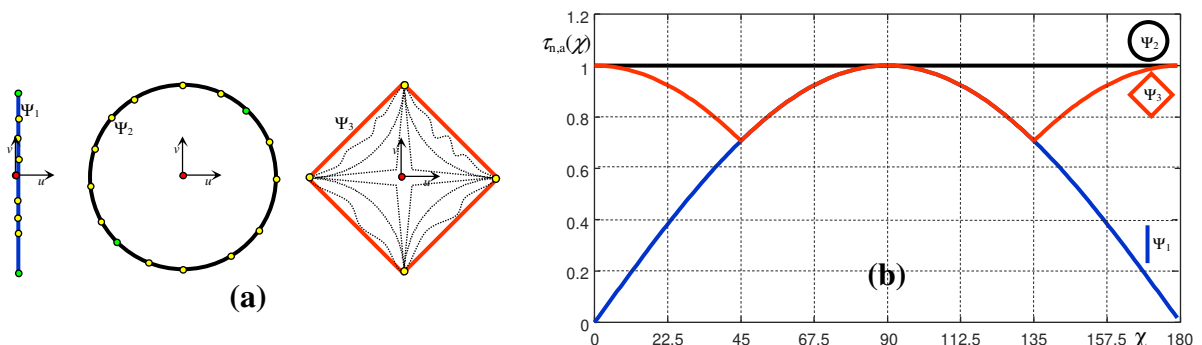


Fig.18.10 - Relazione tra la forma della curva Ψ e l'andamento della funzione $\tau_{n,a}(\chi)$: a) tre esempi di curve Ψ aventi la stessa ampiezza della massima proiezione (segmento, circonferenza, quadrato), b) andamento della funzione $\tau_{n,a}(\chi)$ per le tre curve, al variare dell'angolo χ .

Il segmento di retta è la curva Ψ corrispondente alla sollecitazione proporzionale e dalla fig.10b si può osservare come l'ampiezza massima del ciclo di tensione tangenziale lungo le direzioni assunte dall'asse w si verifichi per un solo valore dell'angolo χ , cioè quello per cui l'asse w è parallelo alla retta (nella configurazione considerata $\chi=90^\circ$).

La circonferenza è la curva Ψ che, a parità di massima proiezione, si differenzia maggiormente dalla sollecitazione proporzionale, in quanto l'ampiezza del ciclo di tensione tangenziale lungo tutte le direzioni assunte

dall'asse w è pari al valore massimo.

Il rettangolo è un caso intermedio in quanto l'ampiezza massima del ciclo di tensione tangenziale si verifica lungo due direzioni ortogonali, cioè quelle per le quali l'asse w è parallelo alle diagonali del rettangolo stesso. Da notare che per tutte le curve *contenute nel quadrato e aventi 4 punti coincidenti con i suoi 4 spigoli*, come quelle rappresentate in fig.10a con linea punteggiata, i metodi descritti forniscono *lo stesso valore di tensione tangenziale alternata ottenuto per il quadrato*.

Le tre curve hanno uguale massima corda, massima proiezione e massimo cerchio circoscritto, per cui i metodi corrispondenti forniscono $\tau_{n,a}=1$ per i tre casi; ricordando che $2^{0.5} \approx 1.4142$, si può osservare che il metodo MRC fornisce rispettivamente $\tau_{n,a}=1$, $\tau_{n,a}=1.4142$, $\tau_{n,a}=1.4142$ e il metodo della tensione tangenziale generalizzata $\tau_{n,a}=1$, $\tau_{n,a}=1.4142$, $\tau_{n,a}=1.2793$. In pratica il metodo della tensione tangenziale generalizzata appare *il più efficace nel differenziare le sollecitazioni non proporzionali*.

Da notare che anche i valori della tensione tangenziale alternata ottenuti con i metodi della LC/LP e del MRC possono essere messi in relazione con la funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$. In particolare, il valore di $\tau_{n,a}$ relativo ai metodi LC/LP si può ottenere come *massimo* della funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$:

$$\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n) = \max_{0 \leq \chi < \pi} \{ \tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi) \} \quad (18.15)$$

Nel caso del metodo MRC, le semi-lunghezze dei due lati dei vari rettangoli circoscritti alla curva sono i valori della funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$ per coppie di rette w ortogonali (cioè per coppie di angoli χ e $\chi+\pi/2$), per cui la semi-lunghezza della diagonale del MRC può essere ottenuta come:

$$\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n) = \max_{0 \leq \chi < \pi/2} \left\{ \sqrt{\tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi) + \tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi + \pi/2)} \right\} \quad (18.16)$$

I metodi MRC e della tensione tangenziale generalizzata possono essere posti a confronto tenendo presente che la (13) può essere riscritta utilizzando i valori della funzione $\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n, \chi)$ per angoli χ e $\chi+\pi/2$ come segue:

$$\tau_{n,a}(\phi, \theta) = \sqrt{\max_{0 \leq \chi \leq \pi/2} \left\{ \tau_a(\phi_n, \theta_n, \chi)^2 + \tau_a(\phi_n, \theta_n, \chi + \pi/2)^2 \right\}} \quad (18.13b)$$

mentre la (16) relativa al metodo MRC può essere riscritta invertendo le operazioni di media e radice quadrata:

$$\tau_{n,a}(\phi_n, \theta_n) = \sqrt{\max_{0 \leq \chi < \pi/2} \left\{ \tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi) + \tau_{n,a}^2(\phi_n, \theta_n, \chi + \pi/2) \right\}} \quad (18.16b)$$

In pratica, nel metodo della tensione tangenziale generalizzata e nel metodo MRC si determina rispettivamente:

- la radice quadrata *del valor medio* delle semi-diagonali dei rettangoli circoscritti elevate al quadrato,
- la radice quadrata *del valore massimo* delle semi-diagonali dei rettangoli circoscritti elevate al quadrato.

Variabili e discretizzazione

Volendo descrivere l'andamento nel tempo delle tensioni agenti su ciascun piano, le grandezze di interesse, matriciali, vettoriali e scalari, risultano funzione delle variabili t e/o ϕ , θ e χ . In particolare, i campi di esistenza delle variabili sono $0 \leq t < T$, $-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \chi < \pi$.

Al fine della determinazione numerica delle ampiezze di tensione tangenziale alternata, le diverse variabili devono essere opportunamente discretizzate. In tab.3 sono riportate tutte le grandezze con le rispettive dimensioni, le variabili dalle quali dipendono e le dimensioni complessive, essendo N_t , N_ϕ , N_θ ed N_χ i numeri di elementi nei quali vengono discretizzati i campi di esistenza delle variabili cui si riferiscono.

	Dim.	Variabili	Dim. comples.
σ	3x3	$0 \leq t < T$	$\sigma(3,3,N_t)$
s	6		$s(6,N_t)$
σ_n	1	$0 \leq t < T$	$\sigma_n(N_\phi, N_\theta, N_t)$
τ_u		$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$	$\tau_u(N_\phi, N_\theta, N_t)$
τ_v			$\tau_v(N_\phi, N_\theta, N_t)$
τ_n		$0 \leq \theta < \pi$	$\tau_n(N_\phi, N_\theta, N_t)$
β			$\beta(N_\phi, N_\theta, N_t)$
τ_w	1	$0 \leq t < T$ $-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$ $0 \leq \chi < \pi$	$\tau_w(N_\phi, N_\theta, N_\chi, N_t)$
$\tau_{n,a}$	1	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$	$\tau_{n,a}(N_\phi, N_\theta)$
$\tau_{n,m}$			$\tau_{n,m}(N_\phi, N_\theta)$

Tab.18.3a – Dimensioni e variabili: tensioni.

	Dim.	Variabili	Dim. comples.
n	3	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$	$n(3, N_\phi, N_\theta)$
u			$u(3, N_\phi, N_\theta)$
v			$v(3, N_\phi, N_\theta)$
n_n	6	$0 \leq \theta < \pi$	$n_n(N_\phi, N_\theta, 6)$
u_n			$u_n(N_\phi, N_\theta, 6)$
v_n			$v_n(N_\phi, N_\theta, 6)$
w	3	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$	$w(3, N_\phi, N_\theta, N_\chi)$
w_n	6	$0 \leq \theta < \pi$ $0 \leq \chi < \pi$	$w_n(N_\phi, N_\theta, 6, N_\chi)$

Tab.18.3b – Dimensioni e variabili: versori.

Direzioni principali variabili nel tempo

Come visto, nel caso generale, le direzioni principali della sollecitazione in ciascun punto di un componente soggetto a tensioni variabili nel tempo hanno orientazione variabile. Nel caso triassiale i moduli delle tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e i relativi versori $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ possono essere ottenuti determinando le matrici contenenti gli autovalori e gli autovettori della matrice $\boldsymbol{\sigma}$. In particolare, la matrice degli autovettori \mathbf{N} ha la seguente forma:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_3] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{2x} & n_{3x} \\ n_{1y} & n_{2y} & n_{3y} \\ n_{1z} & n_{2z} & n_{3z} \end{bmatrix} \quad (18.17)$$

Come mostrato ad esempio in fig.10 relativamente alla direzione 1, gli elementi della matrice \mathbf{N} possono essere espressi in funzione delle coordinate sferiche ϕ e θ di ciascuna direzione mediante la (1.58):

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cos \phi_1 & \sin \theta_2 \cos \phi_2 & \sin \theta_3 \cos \phi_3 \\ \sin \theta_1 \sin \phi_1 & \sin \theta_2 \sin \phi_2 & \sin \theta_3 \sin \phi_3 \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (18.18)$$

Ovviamente le 9 componenti dei 3 versori (e i 6 angoli θ e ϕ) non sono indipendenti tra loro in quanto le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Per determinare l'orientazione della terna principale rispetto alla terna cartesiana sono sufficienti 3 angoli, in particolare è possibile sovrapporre la terna cartesiana a quella principale imponendo alla prima 3 rotazioni indipendenti. Una possibile scelta è costituita dagli *angoli di Eulero*, ma nel caso in questione è più immediato utilizzare le 2 rotazioni necessarie a sovrapporre l'asse x all'asse 1, determinabili dalle coordinate polari della direzione 1, e la rotazione attorno all'asse 1 necessaria a sovrapporre gli assi y e z agli assi 2 e 3 (fig.11). Le rotazioni devono essere considerate positive se *antiorarie*.

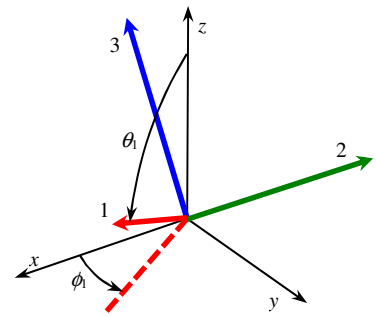


Fig.18.10 – Coordinate sferiche della direzione 1.

Le coordinate sferiche di una direzione possono essere determinate a partire dalle componenti del versore che la identifica mediante la (1.59) che, applicata alla direzione 1 (fig.10), fornisce:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(n_{1y}/n_{1x}) \\ \cos^{-1}(n_{1z}) \end{bmatrix} \quad (18.19)$$

Gli angoli di rotazione da imporre alla terna cartesiana affinché l'asse x si sovrapponga all'asse 1 sono quindi $\phi' = \phi_1$ attorno all'asse z (fig.11a) (*imbardata*) e $\theta' = \theta_1 - \pi/2$ attorno alla posizione assunta dall'asse y dopo la prima rotazione, definita y' (fig.11b) (*beccheggio*). Assegnate tali rotazioni, in seguito alle quali l'asse x si è sovrapposto all'asse 1, gli assi y e z risultano rispettivamente nelle posizioni y' e z' (fig.11b), per ottenere la sovrapposizione della terna è necessario ruotare gli assi y' e z' attorno all'asse 1 del terzo angolo ω' (fig.11c) (*rollio*). Quest'ultimo è ottenibile come l'angolo esistente tra la direzione 2 e la direzione dell'asse y' . Il versore della direzione dell'asse y' è

$$\mathbf{n}_{y'}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \pi/2) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.20)$$

e l'angolo ω' è ottenibile utilizzando l'espressione che fornisce l'angolo formato tra 2 vettori:

$$\omega' = \pm \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{y'}}{|\mathbf{n}_2| |\mathbf{n}_{y'}|} \right) = \pm \cos^{-1} (-n_{2x} \sin \phi + n_{2y} \cos \phi) \quad (18.21)$$

Poiché la (21) fornisce un valore positivo, per stabilire il segno da assegnare alla rotazione è necessario determinare anche l'angolo ω'' formato tra l'asse y' e la direzione 3 con espressione analoga alla (21):

$$\omega'' = \pm \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{y'}}{|\mathbf{n}_3| |\mathbf{n}_{y'}|} \right) = \pm \cos^{-1} (-n_{3x} \sin \phi + n_{3y} \cos \phi) \quad (18.22)$$

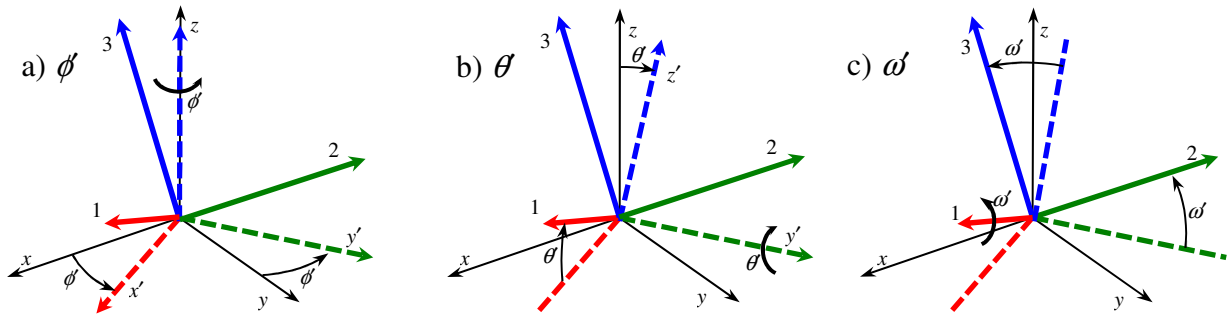


Fig.18.11 – Gli angoli di rotazione per la determinazione delle direzioni principali: ϕ attorno all'asse z , θ attorno all'asse y' , ω attorno all'asse x .

se uno dei 2 angoli risulta maggiore di $\pi/2$, come in fig.10c, l'asse y' è *esterno* agli assi 2 e 3, per cui deve essere assegnato il segno positivo all'angolo ω ; se entrambi gli angoli ω e ω' sono minori di $\pi/2$ l'asse y' è *interno* agli assi 2 e 3 e deve essere assegnato il segno negativo ad ω .

In definitiva, tenuto conto del fatto che $\theta = \theta_1 - \pi/2$ corrisponde a $\theta = -\sin^{-1}n_{1z}$ (vedi 19), i 3 angoli necessari alla sovrapposizione della terna cartesiana a quella principale sono riassumibili nel seguente vettore:

$$\begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(n_{1y}/n_{1x}) \\ -\sin^{-1}(n_{1z}) \\ \pm \cos^{-1}(-n_{2x} \sin \phi + n_{2y} \cos \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1}(n_{1y}/n_{1x}) \\ -\sin^{-1}(n_{1z}) \\ \tan^{-1}(n_{2z}/n_{3z}) \end{bmatrix} \quad (18.23)$$

È importante fare alcune precisazioni riguardanti la determinazione della matrice \mathbf{N} contenente i versori delle direzioni principali ai fini dell'applicazione delle eq.(21-23). In generale una direzione può essere identificata sia con un versore \mathbf{n} che con il suo opposto $-\mathbf{n}$; ad esempio la direzione dell'asse x può essere identificata indifferentemente con i versori $\mathbf{n}=[1 \ 0 \ 0]^T$ e $\mathbf{n}'=[-1 \ 0 \ 0]^T$. Utilizzando le coordinate sferiche, la stessa direzione può essere identificata mediante le coppie di angoli $[\phi, \theta]$ e $[\phi''=\phi+\pi, \theta''=\pi-\theta]$. Questa ambiguità deriva dal fatto che ciascuna componente dei versori può assumere indifferentemente valori positivi e negativi e che l'angolo ϕ risulta definito nel campo $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Nel caso statico l'ambiguità è abbastanza ininfluenza, ma può creare dei problemi nel caso di direzioni principali variabili nel tempo e deve essere eliminata procedendo opportunamente.

Osservando che una terna cartesiana suddivide lo spazio tridimensionale in 8 quadranti e ciascun asse costituisce il confine di 4 quadranti dal lato positivo e degli altri 4 da quello negativo, per eliminare l'ambiguità nella determinazione delle direzioni si può operare in modo che il versore \mathbf{n}_1 si estenda esclusivamente in uno dei 4 quadranti relativi al lato positivo dell'asse x (cioè si verifichi $n_{1x} \geq 0$) e il versore \mathbf{n}_2 si estenda esclusivamente in uno dei 4 quadranti relativo al lato positivo dell'asse y (cioè si verifichi $n_{2y} \geq 0$). L'asse 3 può poi essere ottenuto semplicemente mediante il prodotto vettoriale degli altri 2.

A tal fine, definendo \mathbf{N}' la matrice delle direzioni principali ottenuta direttamente risolvendo il problema agli autovalori

$$\mathbf{N}' = [\mathbf{n}'_1 \quad \mathbf{n}'_2 \quad \mathbf{n}'_3] = \begin{bmatrix} n'_{1x} & n'_{2x} & n'_{3x} \\ n'_{1y} & n'_{2y} & n'_{3y} \\ n'_{1z} & n'_{2z} & n'_{3z} \end{bmatrix} \quad (18.24)$$

i 3 versori costituenti la matrice \mathbf{N} (17) con le proprietà sopra descritte possono essere ottenuti con le seguenti relazioni

$$\mathbf{n}_1 = \text{sign}(n'_{1x}) \mathbf{n}'_1 \quad \mathbf{n}_2 = \text{sign}(n'_{2y}) \mathbf{n}'_2 \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad (18.25a-c)$$

nelle quali $\text{sign}()$ è la funzione che restituisce il segno dell'argomento. In base alle (25a,b), nel caso in cui le componenti n'_{1x} ed n'_{2y} risultano negative, tutte le componenti del rispettivo versore vengono cambiate di segno.

Infine, la matrice \mathbf{N} può essere espressa in funzione degli angoli (23) mediante la seguente espressione:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \cos \theta' & \cos \phi' \sin \theta' \sin \omega' - \sin \phi' \cos \omega' & \cos \phi' \sin \theta' \cos \omega' + \sin \phi' \sin \omega' \\ \sin \phi' \cos \theta' & \sin \phi' \sin \theta' \sin \omega' + \cos \phi' \cos \omega' & \sin \phi' \sin \theta' \cos \omega' - \cos \phi' \sin \omega' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \sin \omega' & \cos \theta' \cos \omega' \end{bmatrix} \quad (18.26)$$

In letteratura sono stati presentati metodi di valutazione della vita a fatica multiassiale che considerano le tensioni agenti su giaciture principali *medie*, ottenute effettuando la media temporale sul periodo T degli angoli (23), utilizzando opportune funzioni peso che attribuiscono maggiore rilevanza alle giaciture più sollecitate.

I metodi di analisi di fatica multiassiale

Come detto, i criteri di resistenza a fatica multiassiale forniscono la *combinazione* delle sollecitazioni multiassiali agenti nel punto che deve essere confrontata con i dati sperimentali di resistenza a fatica, relativi a casi di sollecitazione semplice, per determinare la durata del componente o verificarne il coefficiente di sicurezza.

Il meccanismo del cedimento per fatica può essere suddiviso in 4 fasi:

1. nucleazione della frattura di fatica,
2. accrescimento della frattura lungo un *piano di elevata tensione tangenziale (stadio I della propagazione)*, secondo il Modo II descritto da Irwin, detto anche meccanismo di *tipo A*, predominante nei materiali *duttili*;
3. propagazione della frattura in *direzione normale alla tensione di trazione (stadio II della propagazione)*, secondo il Modo I descritto da Irwin, detto anche meccanismo di *tipo B*, predominante nei materiali *fragili*;
4. rottura dell'elemento.

Tale suddivisione è importante nella determinazione dell'effetto della multiassialità dello stato tensionale variabile nel tempo sulla nucleazione e la propagazione della frattura che determinano il cedimento del materiale. Nella previsione della durata del componente sussistono 2 principali problemi:

- la *velocità di accrescimento* della frattura in ciascuna fase dipende da una *differente combinazione delle tensioni* nominali agenti,
- non è facile quantificare *l'incidenza temporale* di ciascuna delle prime 3 fasi sulla durata complessiva del fenomeno, che dipende dalle *caratteristiche del materiale*.

Riguardo al primo problema:

- la 2° fase è fortemente influenzata dalla tensione tangenziale alternata agente sul piano nel quale si è sviluppata la frattura, soprattutto per i materiali duttili;
- la tensione normale agente in direzione ortogonale al piano di sviluppo della frattura ha spesso un effetto non trascurabile, che diventa preponderante nella 3° fase.

Vista la differente incidenza della 2° e 3° fase sulla durata di materiali fragili e duttili, alcuni criteri tengono conto di tale caratteristica del materiale.

I criteri di previsione della vita a fatica di componenti soggetti a sollecitazioni multiassiali possono essere classificati in vario modo. Secondo una classificazione molto generale essi possono essere distinti in criteri basati sulle *tensioni*, sulle *deformazioni* e sull'*energia di deformazione*.

Un'altra classificazione li suddivide nelle seguenti 4 categorie:

1. metodi basati su *formule empiriche*,
2. metodi derivati da *criteri di resistenza di tipo statico* e/o basati sugli *invarianti delle tensioni* o delle *deformazioni*,
3. metodi basati sulla *Determinazione di un Piano Critico (DPC)*,
4. metodi che utilizzano *Medie Spaziali delle Tensioni* (o delle deformazioni) (MST).

I metodi basati su formule empiriche sono adatti a prevedere la vita di componenti soggetti ad un particolare tipo di sollecitazione, ad esempio flessione e torsione in fase (cioè combinazione di tensione normale e tangenziale in fase), del quale sono noti dati sperimentali specifici.

I metodi derivati da criteri di resistenza di tipo statico, in particolare quelli di Tresca e della tensione ottaedrica/Von Mises sono adatti a sollecitazioni di tipo proporzionale, in quanto le direzioni principali rimangono fisse e le componenti medie e alternate, facilmente identificabili per ciascuna componente, agiscono in fase e possono essere combinate nelle tensioni equivalenti definite dal criterio. Dal criterio della tensione ottaedrica sono stati derivati altri criteri che utilizzano anch'essi gli invarianti delle tensioni nella loro formulazione.

I metodi DPC ed MST considerano le tensioni agenti sui piani di normale \mathbf{n} generica, in particolare considerano opportune combinazioni delle componenti media e alternata del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ (sempre quella alternata e in alcuni casi quella media) con quelle di $\boldsymbol{\sigma}_n$ ed effettuano un confronto di tale combinazione con opportuni dati sperimentali relativi alla resistenza a fatica del materiale. I metodi DPC considerano la combinazione di $\boldsymbol{\tau}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_n$ più pericolosa tra tutte quelle agenti in tutte le giaciture, identificando la giacitura più sollecitata, definita *piano critico*, mentre i metodi MST considerano la media spaziale delle combinazioni di $\boldsymbol{\tau}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_n$ agenti su tutte le giaciture.

Le informazioni sperimentali

Per la caratterizzazione sperimentale della resistenza dei materiali soggetti a sollecitazioni multiassiali di fatica sono necessarie informazioni sul comportamento sotto sollecitazioni di tensione normale e tangenziale, sia alternate simmetriche che in presenza di tensioni medie. Concentrandosi sul caso di vita infinita, le grandezze più significative sono:

- σ_f il limite di fatica a tensioni normali alternate simmetriche,
- τ_f il limite di fatica a tensioni tangenziali alternate simmetriche,
- σ_p il limite di fatica a tensione normale pulsante;

In tab.4 sono riportate le caratteristiche delle sollecitazioni relative ai 3 limiti sopra riportati per quanto concerne l'intervallo della tensione applicata, la relazione tra le tensioni alternata e media e la tensione massima, le tensioni ottaedriche.

Sperimentalmente si è osservato che per i materiali duttili la tensione tangenziale media risulta ininfluenza fino a valori che raggiungono oltre l'80% della tensione tangenziale di snervamento (cioè $\tau_m \approx 0.8 \tau_s$) nel caso di elementi cilindrici senza intagli. Nel caso di elementi intagliati, invece, la tensione tangenziale media riduce l'ampiezza della componente alternata che garantisce la vita infinita in modo analogo a quanto accade per la tensione normale.

A fini pratici risulta utile introdurre il rapporto tra i limiti di fatica per tensioni alternate tangenziali e normali

$$r_{\tau/\sigma} = \tau_f / \sigma_f \tag{18.27}$$

Per i materiali duttili si ha $0.48 < r_{\tau/\sigma} < 0.60$, cioè praticamente $r_{\tau/\sigma} \approx 0.577 = (1/3)^{0.5}$, lo stesso rapporto previsto per le tensioni tangenziali e normali di snervamento dal criterio di Von Mises. Per i materiali fragili $0.8 < r_{\tau/\sigma} < 0.9$, praticamente un valore vicino all'unità, simile al rapporto esistente per le analoghe grandezze statiche.

Sempre a fini pratici risulta utile introdurre il rapporto tra il limite di fatica a tensione normale alternata simmetrica e quello a tensione pulsante:

$$r_{\sigma/\sigma_p} = \sigma_f / \sigma_{fp} \tag{18.28}$$

Ovviamente si ha $r_{\sigma/\sigma_p} \geq 1$ e, in assenza di informazioni sperimentali su σ_{fp} , questo rapporto può essere stimato utilizzando il criterio di Goodman (16.4) qui riscritto

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = 1 \tag{16.4}$$

Nel caso in questione, essendo $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_{fp}$ (fig.11), si ottiene:

$$\sigma_{fp} = \frac{\sigma_f}{1 + \sigma_f / \sigma_r} \tag{18.29}$$

da cui

$$r_{\sigma/\sigma_p} = 1 + \sigma_f / \sigma_r \tag{18.30}$$

Valori tipici del rapporto r_{σ/σ_p} sono nel campo $1.2 < r_{\sigma/\sigma_p} < 1.6$.

Lim.	Estremi	Alternata	Media	σ_h Media	τ_h Alternata
σ	$-\sigma_{\max} \leq \sigma_i \leq \sigma_{\max}$	$\sigma_a = \sigma_{\max}$	$\sigma_m = 0$	$\sigma_{h,m} = 0$	$\tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_a$
τ	$-\tau_{\max} \leq \tau_i \leq \tau_{\max}$	$\tau_a = \tau_{\max}$	$\tau_m = 0$	$\sigma_{h,m} = 0$	$\tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \tau_a$
σ_p	$0 \leq \sigma_i \leq \sigma_{\max}$	$\sigma_a = \sigma_{\max}/2$	$\sigma_m = \sigma_{\max}/2 = \sigma_a$	$\sigma_{h,m} = \sigma_m/3$	$\tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_a$

Tab.18.4 - Caratteristiche delle sollecitazioni di fatica per la caratterizzazione dei materiali.

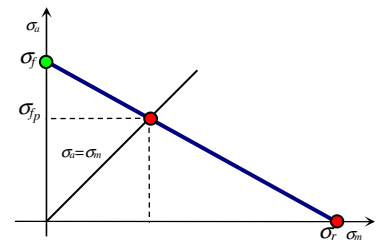


Fig.18.11 - Limite di fatica per tensione pulsante dal diagramma di Haigh.

Sollecitazioni proporzionali o con componenti alternate proporzionali
Criterio della tensione ottaedrica/Von Mises

Il modo più immediato per effettuare l'analisi di fatica nel caso di sollecitazioni proporzionali o con componenti alternate proporzionali e direzioni principali fisse è quello di determinare tensioni alternate equivalenti mediante criteri come quello di Tresca o della tensione ottaedrica/Von Mises, in quanto i risultati sperimentali confermano la loro efficacia.

Applicando il criterio della tensione ottaedrica/Von Mises e introducendo nell'espressione della tensione equivalente le componenti alternate delle tensioni principali (σ_{ia} con $i=1,2,3$), si ottiene la seguente espressione della tensione equivalente alternata:

$$\sigma_{ae} = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2 - (\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{1a}\sigma_{3a})} \tag{18.31}$$

che può essere confrontata con le tensioni ottenibili dalla curva di Wöhler.

Se sono presenti tensioni medie positive e le direzioni principali si mantengono costanti, possono essere valutate delle tensioni medie equivalenti da utilizzare insieme alle alternate sul diagramma di Haigh o per determinare delle tensioni equivalenti di Goodman. Utilizzando ancora il criterio di Von Mises si ottiene:

$$\sigma_{me} = \sqrt{\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 + \sigma_{3m}^2 - (\sigma_{1m}\sigma_{2m} + \sigma_{2m}\sigma_{3m} + \sigma_{1m}\sigma_{3m})} \tag{18.32}$$

Nell'applicazione di queste formule è importante identificare con esattezza le componenti di tensione medie e alternate; in particolare si deve notare che le forze che agiscono staticamente (non solo come intensità, ma anche direzione, a differenza, ad esempio, del caso della flessione rotante) producono solo tensioni medie, mentre le forze variabili, se agiscono tra valori che non sono alternati simmetrici, producono sia tensioni alternate che medie.

Poiché la (32) fornisce valori delle tensioni medie equivalenti positive anche nel caso di tensioni agenti negative, generalmente la tensione media equivalente può essere valutata con questa espressione:

$$\sigma_{me} = \sigma_{1m} + \sigma_{2m} + \sigma_{3m} = I_1 = 3\sigma_{h,m} \quad (18.33)$$

che risulta pari all'invariante primo delle tensioni I_1 (1.29a) e proporzionale alla tensione normale media agente sui piani ottaedrici (1.68). Questo modo di valutare la tensione media rende questo criterio molto simile al criterio di Sines descritto nel paragrafo successivo. A sua volta, anche la componente alternata (31) può essere espressa in funzione della tensione tangenziale ottaedrica (1.69,70) e dell'invariante J_2 (1.85):

$$\sigma_{ae} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{h,a} = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (18.34)$$

Introducendo le componenti media e alternata (31) e (33) nella relazione di Goodman si ottiene

$$\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{me}}{\sigma_r} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{h,a}}{\sigma_f} + \frac{3\sigma_{h,m}}{\sigma_r} = 1 \quad (18.35)$$

Effettuando un ulteriore passaggio si ottiene la più utile tra le possibili espressioni finali del criterio di Von Mises per le sollecitazioni di fatica multiassiale:

$$\tau_{h,a} + \sqrt{2} \frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_{h,m} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f = \tau_{h,f} \quad (18.36)$$

essendo $\tau_{h,f}$ la tensione ottaedrica alternata corrispondente alla tensione alternata $\sigma_a = \sigma_f$ (Tab4).

Nel caso di componenti di tensione riferite ad assi non principali, le (32-34) possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \tau_{h,a} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \sigma_{y,a}^2 + \sigma_{z,a}^2 - (\sigma_{x,a}\sigma_{y,a} + \sigma_{y,a}\sigma_{z,a} + \sigma_{z,a}\sigma_{x,a}) + 3(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2)} \\ \sigma_{me} &= \sqrt{\sigma_{x,m}^2 + \sigma_{y,m}^2 + \sigma_{z,m}^2 - (\sigma_{x,m}\sigma_{y,m} + \sigma_{y,m}\sigma_{z,m} + \sigma_{z,m}\sigma_{x,m}) + 3(\tau_{xy,m}^2 + \tau_{yz,m}^2 + \tau_{zx,m}^2)} \quad (18.37-39) \\ \sigma_{me} &= 3\sigma_{h,m} = \sigma_{x,m} + \sigma_{y,m} + \sigma_{z,m} \end{aligned}$$

Le componenti di tensione inserite nelle tensioni equivalenti devono essere amplificate per i relativi fattori di concentrazione delle tensioni (per flessione, sforzo normale, torsione); nel caso di materiali duttili la moltiplicazione va eseguita solo sulle componenti alternate (31,37). Shigley suggerisce di moltiplicare le componenti *assiali alternate* per il fattore $1/K_{c,ax}=1/0.923=1.0823$.

Le (33) e (34) mostrano che il criterio della tensione ottaedrica/Von Mises può essere annoverato anche tra i criteri basati sull'uso degli invarianti delle tensioni.

La (36) può essere interpretata nel senso che la combinazione di sollecitazioni più pericolosa tra quelle agenti su tutte le giaciture è quella costituita dalle tensioni agenti sul piano ottaedrico. In base ad essa si può affermare che *il piano critico* della sollecitazione è costituito proprio da uno dei piani ottaedrici.

Un'ulteriore interpretazione delle (33) e (34) è basata sul fatto che la tensione normale ottaedrica è pari alla media delle tensioni normali agenti nel punto e che tensione tangenziale ottaedrica è anche pari alla radice quadrata del valor quadratico medio delle tensioni tangenziali agenti su tutte le giaciture uscenti dal punto in base all'equazione (1.74). In conseguenza di ciò si può affermare che il criterio della tensione ottaedrica appartiene alla categoria dei criteri basati su medie spaziali delle tensioni.

Naturalmente tutte le interpretazioni risultano effettive solo nel caso di sollecitazioni proporzionali, cui corrispondono direzioni principali e piani ottaedrici con giacitura invariabile nel tempo.

Criterio di Sines

Il criterio di Sines considera le tensioni agenti sul piano ottaedrico ed è adatto a sollecitazioni nelle quali almeno le componenti alternate sono di tipo proporzionale, anche se il campo di applicazione ideale è quello di tensioni proporzionali con componenti medie nulle.

La tensione *tangenziale* ottaedrica *alternata* e la tensione *normale* ottaedrica *media* sono esprimibili come segue:

$$\tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 + \sigma_{3a}^2 - (\sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}\sigma_{3a} + \sigma_{1a}\sigma_{3a})} \quad \sigma_{h,m} = \frac{1}{3} (\sigma_{1m} + \sigma_{2m} + \sigma_{3m}) \quad (18.40,41)$$

Da notare che i segni da attribuire alle tensioni nella (40) sono uguali per sollecitazioni in fase e opposti per quelli in contro-fase.

Il criterio di Sines afferma che il cedimento del materiale si verifica quando la somma della tensione tangenziale alternata e della componente media moltiplicata per un fattore costante raggiunge un valore critico, cioè

$$\tau_{h,a} + k \sigma_{h,m} = f \quad (18.42)$$

nella quale k ed f sono delle costanti che caratterizzano la resistenza del materiale e possono essere ottenute particolarizzando la (42) per 2 opportuni casi di sollecitazione semplice, in particolare quello della trazione alternata, nel quale la componente media della sollecitazione risulta nulla, e quello della trazione pulsante, nel quale la componente media della sollecitazione risulta *uguale* alla componente alternata.

Nel caso della trazione alternata l'unica componente di tensione diversa da 0 è la σ_{1a} per a cui, in base alle (40,41), si ottiene

$$\sigma_{h,m} = 0 \quad \tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{1a} \quad (18.43a,b)$$

Introducendo le (43a,b) nella (42) ed esplicitando si ottiene

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{1a} = f \quad (18.44)$$

Ovviamente la condizione critica si verifica quando $\sigma_{1a} = \sigma_f$ e la (44) conduce a

$$f = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f = 0.4714 \sigma_f = \tau_{h,f} \quad (18.45)$$

Nel caso della trazione pulsante si ha $\sigma_{1m} = \sigma_{1a}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, quindi, in base alle (40,41) si può scrivere:

$$\sigma_{h,m} = \frac{1}{3} \sigma_{1m} = \frac{1}{3} \sigma_{1a} \quad \tau_{h,a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{1a} \quad (18.46a,b)$$

Introducendo le (46) nella (42) si ottiene

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{1a} + k \frac{1}{3} \sigma_{1a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad (18.47)$$

In questo caso la condizione critica si verifica se $\sigma_{1a} = \sigma_{fp}$, da cui, in base alle (47) e alla (28) si ottiene

$$k = \sqrt{2} \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{fp}} - 1 \right) = \sqrt{2} (r_{\sigma/\sigma_p} - 1) \quad (18.48)$$

In definitiva le espressioni delle costanti f e k risultano:

$$f = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad k = \sqrt{2} (r_{\sigma/\sigma_p} - 1) \quad (18.49a,b)$$

Come visto, in mancanza di dati sperimentali, il limite di fatica a flessione pulsante può essere valutato in modo approssimato utilizzando il criterio di Goodman, per il quale il rapporto r_{σ/σ_p} è dato dalla (30) e per k si ottiene

$$k = \sqrt{2} \sigma_f / \sigma_r \quad (18.50)$$

In definitiva, il criterio di Sines può essere espresso nei due modi seguenti:

$$\tau_{h,a} + \sqrt{2} (r_{\sigma/\sigma_p} - 1) \sigma_{h,m} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad \tau_{h,a} + \sqrt{2} \frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_{h,m} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f \quad (18.51,52)$$

La relazione (52) coincide con la (36). Le (51) e (52) possono essere interpretate nel senso che la combinazione di sollecitazioni più pericolosa tra quelle agenti su tutte le giaciture è quella costituita dalle tensioni agenti sul piano ottaedrico. In base a questa osservazione si può affermare che, secondo il criterio di Sines, analogamente al criterio di Von Mises, il *piano critico* della sollecitazione è costituito proprio da uno dei piani ottaedrici.

Criterio di Gough e Pollard

Quello di Gough e Pollard è un criterio di tipo empirico, basato su una serie di esperimenti condotti assoggettando provini cilindrici a sollecitazioni di flessione e torsione agenti in fase (come nel caso della molla a barra di torsione con manovella del cap.31). In questo caso, assunta la direzione assiale come direzione x , il punto più sollecitato del provino è soggetto a sollecitazioni di tensione normale σ_x e tangenziale τ_{xy} agenti in fase agenti nella giacitura di normale \mathbf{n}_x

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_a \sin(\omega t) & \tau_a \sin(\omega t) & 0 \\ \tau_a \sin(\omega t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18.53)$$

Il caso (10) della tabella 2 costituisce un esempio di tale tipo di sollecitazione, nel quale le componenti alternate normale e tangenziale hanno valore unitario. Le caratteristiche, relativamente alle tensioni principali e al percorso di carico σ_x - τ_{xy} , sono mostrate in fig.5. La sollecitazione risulta di tipo proporzionale, con direzioni principali fisse nel tempo.

Effettuando prove con diversi rapporti relativi tra la σ_a e la τ_a , le coppie di valori che danno luogo alla stessa durata (pari a quella del limite di fatica) si dispongono su un'ellisse di equazione

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_f}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_f}\right)^2 = 1 \quad (18.54)$$

Introducendo il rapporto $r_{\tau\sigma}$ (27), la (54) può essere riscritta nella seguente forma, utile per un successivo confronto con le relazioni ottenibili con il metodo DPC:

$$\tau_a^2 + r_{\tau/\sigma}^2 \sigma_a^2 = \tau_f^2 \quad (18.55)$$

La presenza di componenti medie sulle tensioni riduce i raggi delle ellissi (54). In questo caso, utilizzando il criterio di Goodman, introducendo le tensioni di rottura normale e tangenziale σ_r e τ_r , la (54) può essere trasformata come segue:

$$\left(\frac{\tau_m + \tau_a}{\tau_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m + \sigma_a}{\sigma_r}\right)^2 = 1 \quad (18.56)$$

Una generalizzazione del criterio di Gough e Pollard per la presenza di sollecitazioni medie può essere ottenuta anche introducendo le tensioni equivalenti di Goodman direttamente nella (55) al posto di τ_a e σ_a , ottenendo la seguente relazione:

$$\left(\frac{\tau_a}{1 - \tau_m/\tau_r}\right)^2 + r_{\tau/\sigma}^2 \left(\frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m/\sigma_r}\right)^2 = \tau_f^2 \quad (18.57)$$

Questa relazione, che fornisce risultati leggermente diversi dalla (56), cade in difetto se una delle componenti alternate è nulla.

Criteri basati sulla determinazione di un piano critico

I criteri basati sulla determinazione di un piano critico:

- considerando tutte le giaciture centrate nel punto analizzato, individuano come *piano critico* quello nel quale la sollecitazione responsabile della propagazione della frattura *assume il valore massimo*;
- stabiliscono quale *combinazione* delle *tensioni tangenziali agenti sul piano critico* $\tau_{n,a}$ e delle *tensioni normali agenti nel punto* σ_n deve essere confrontata con i parametri di resistenza del materiale per effettuare la verifica;
- identificano i *parametri di resistenza del materiale* necessari alla definizione delle combinazioni delle tensioni e all'effettuazione della verifica;
- in alcuni casi stabiliscono una definizione della componente alternata della tensione tangenziale τ_n , cioè $\tau_{n,a}$.

La giacitura del piano critico viene tipicamente identificata mediante le coordinate sferiche relative al versore della normale \mathbf{n}_c , cioè mediante gli angoli ϕ_c e θ_c . La combinazione delle tensioni agenti su di essa stabilita dai vari criteri proposti può essere scritta mediante un'espressione generale di questo tipo

$$\tau_{c,a} + k \Sigma \leq f \quad (18.58)$$

nella quale

- $\tau_{c,a} = \tau_{n,a}(\phi_c, \theta_c)$ è la *componente alternata della tensione tangenziale* agente sul piano critico, determinata utilizzando una delle definizioni di $\tau_{n,a}$ introdotte nei paragrafi precedenti;
- $\Sigma = f(\sigma_n)$ è un valore dipendente *dalle tensioni normali* σ_n agenti nel punto, spesso coincidente con la tensione massima o la tensione alternata agente sul piano critico;
- f è una costante legata ai limiti di fatica del materiale;
- k è una costante legata alla differente risposta del materiale alle tensioni normali e tangenziali dal punto di vista della propagazione della frattura.

Come detto, il piano critico è quello nel quale la sollecitazione responsabile della propagazione della frattura *assume il valore massimo*. Per molti criteri tale sollecitazione è la semplice tensione tangenziale alternata, cioè:

$$(\phi_c, \theta_c) \rightarrow \tau_{c,a}(\phi_c, \theta_c) = \max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) \} \quad (18.59)$$

Per altri criteri è una combinazione della tensione tangenziale alternata e dalla tensione normale simile alla (58)

stessa, cioè

$$(\phi_c, \theta_c) \rightarrow \tau_{c,a}(\phi_c, \theta_c) + k \Sigma(\phi_c, \theta_c) = \max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) + k \Sigma(\phi, \theta) \} \quad (18.60)$$

In definitiva, ciascun criterio propone una differente forma della funzione $\Sigma(\phi, \theta)$ e delle costanti k, f che in molti casi possono essere determinate applicando il criterio a casi particolari di sollecitazione di fatica, in modo analogo a quanto fatto per il criterio di Sines.

Criterio di Findley

Secondo il criterio di Findley il termine Σ è costituito dalla tensione normale *massima* nell'intervallo T agente sul piano critico, cioè:

$$\Sigma = \sigma_{n,\max}(\phi_c, \theta_c) = \sigma_{c,\max} \quad (18.61)$$

Per i valori di f e k sono state determinate le seguenti espressioni:

$$f = \tau_f \sqrt{1+k^2} = \frac{1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \tau_f \quad k = \frac{2r_{\tau/\sigma} - 1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \quad (18.62a,b)$$

per cui l'espressione generale (58) assume la seguente forma:

$$\tau_{c,a} + \frac{2r_{\tau/\sigma} - 1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \sigma_{c,\max} \leq \frac{1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \tau_f \quad (18.63)$$

Il piano critico è quello nel quale la combinazione di tensioni a sinistra nella (63) raggiunge il valore massimo, per cui la (60) diventa:

$$(\phi_c, \theta_c) \rightarrow \max_{\phi, \theta} \left\{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) + \frac{2r_{\tau/\sigma} - 1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \sigma_{n,\max}(\phi, \theta) \right\} \quad (18.64)$$

Secondo questo criterio il piano critico è sempre influenzato da τ_n per cui non coincide mai con quello di massima tensione normale, neppure per tensioni monoassiale e materiali fragili. Il valore di k risulta piccolo per i materiali duttili per i quali la propagazione del danno è poco influenzata dalla tensione normale.

Criterio di Mataka

Secondo il criterio di Mataka il piano critico è quello nel quale la sola componente alternata della tensione tangenziale raggiunge il valore massimo, secondo l'espressione (59).

Il termine Σ è costituito dalla tensione normale *alternata* agente sul piano critico, cioè:

$$\Sigma = \sigma_{n,a}(\phi_c, \theta_c) = \sigma_{c,a} \quad (18.65)$$

I valori di f e k possono essere ottenuti imponendo che il criterio sia soddisfatto rispettivamente nei casi limite di tensione tangenziale alternata simmetrica (con limite τ_s , nel quale $\tau_{c,a} = \tau_a = \tau_s$ e $\sigma_{c,a} = 0$) da cui si ottiene la (66a), e tensione normale alternata simmetrica (nel quale $\tau_{c,a} = \sigma_{c,a} = \sigma_a/2 = \sigma_f/2$) e risultano:

$$f = \tau_f \quad k = 2r_{\tau/\sigma} - 1 \quad (18.66a,b)$$

per cui l'espressione del criterio assume la seguente forma:

$$\tau_{c,a} + (2r_{\tau/\sigma} - 1) \sigma_{c,a} \leq \tau_f \quad (18.67)$$

Criterio di Susmel et al

Nel criterio di Susmel et al, il piano critico è ancora quello nel quale la sola componente alternata della tensione tangenziale raggiunge il valore massimo, secondo l'espressione (59).

Il termine Σ è costituito dal *rapporto* tra la tensione normale *massima* nell'intervallo T agente sul piano critico e la tensione tangenziale alternata agente sul piano critico, cioè:

$$\Sigma = \frac{\sigma_{\max}(\phi_c, \theta_c)}{\tau_a(\phi_c, \theta_c)} = \frac{\sigma_{c,\max}}{\tau_{c,a}} \quad (18.68)$$

I valori di k ed f possono essere ottenuti imponendo che il criterio sia soddisfatto nei casi di tensione normale alternata simmetrica (con limite σ_f) e tensione tangenziale alternata simmetrica (con limite τ_f) e risultano:

$$k = \tau_f - \frac{\sigma_f}{2} = \frac{\sigma_f}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \quad f = \tau_f \quad (18.69a,b)$$

per cui l'espressione del criterio assume la seguente forma:

$$\tau_{c,a} + \frac{\sigma_f}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \frac{\sigma_{c,\max}}{\tau_{c,a}} \leq \tau_f \quad (18.70)$$

Criterio di Papadopoulos

Nel criterio di Papadopoulos il piano critico è quello nel quale la sola componente alternata della tensione tangenziale raggiunge il valore massimo, secondo l'espressione (59).

Diversamente dai criteri precedenti, nella definizione del termine Σ il criterio di Papadopoulos non fa riferimento ad un valore di tensione normale agente sul piano critico, bensì al *massimo valore* assunto dalla *tensione ottaedrica* agente nel punto durante il periodo della sollecitazione T :

$$\Sigma = \sigma_{h,\max} = \max_T [\sigma_h(t)] = \max_T \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \sigma_i(t) \right] \quad (18.71)$$

I valori di f e k possono essere ottenuti imponendo che il criterio sia soddisfatto nei casi tensione tangenziale alternata simmetrica, come per il criterio di Mataké, e di tensione normale alternata simmetrica (nel quale $\tau_{c,a} = \sigma_a/2$ e $\sigma_h = \sigma_a/3$) e risultano

$$f = \tau_f \quad k = \frac{3}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \quad (18.72a,b)$$

per cui l'espressione del criterio assume la seguente forma:

$$\tau_{c,a} + \frac{3}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \sigma_{h,\max} \leq \tau_f \quad (18.73)$$

I valori di f e k possono essere ottenuti anche imponendo che il criterio sia soddisfatto nei casi tensione normale pulsante (con limite σ_{fp}) e di tensione normale alternata simmetrica (con limite σ_f) e ottenendo:

$$f = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{fp}}{2 - r_{\sigma/\sigma_p}} \quad k = \frac{3}{2} \frac{1 - r_{\sigma/\sigma_p}}{2r_{\sigma/\sigma_p} - 1} \quad (18.74a,b)$$

Come componente alternata della tensione tangenziale Papadopoulos ha introdotto la definizione (13).

Criterio di McDiarmid

Nel criterio di McDiarmid il piano critico è quello nel quale la sola componente alternata della tensione tangenziale raggiunge il valore massimo, secondo l'eq.(59).

Analogamente al criterio di Findley, il termine Σ è costituito dalla tensione normale *massima* nell'intervallo T agente sul piano critico, cioè:

$$\Sigma = \sigma_{n,\max}(\phi_c, \theta_c) = \sigma_{c,\max} \quad (18.75)$$

I valori di f e k per questo criterio sono:

$$f = \tau_{f_{A,B}} \quad k = \frac{\tau_{f_{A,B}}}{2\sigma_r} \quad (18.76a,b)$$

nelle quali τ_{f_A} e τ_{f_B} sono i limiti di fatica per propagazione di tipo A (o modo I secondo Irwin) e di tipo B (o modo II secondo Irwin) per cui l'espressione del criterio assume la seguente forma:

$$\tau_{c,a} + \frac{\tau_{f_{A,B}}}{2\sigma_r} \sigma_{c,\max} \leq \tau_{f_{A,B}} \quad (18.77)$$

Il limite di fatica da introdurre nella (77) dipende dalla giacitura del piano critico. In casi di sollecitazione di torsione, τ_{f_A} coincide con il limite di fatica a torsione alternata. Il limite di fatica τ_{f_B} non è facilmente disponibile in letteratura.

Criterio di Dietmann

Questo criterio è una generalizzazione del criterio della tensione ottaedrica nel quale viene presa in considerazione la variazione delle direzioni principali. A seguito di tale variazione, ovviamente, si verifica una uguale variazione della giacitura dei piani ottaedrici; il criterio di Dietmann identifica come piano critico il piano (ottaedrico) nel quale viene raggiunta la massima tensione ottaedrica nel periodo della sollecitazione, cioè:

$$(\phi_c, \theta_c) : \max_{\phi_h, \theta_h} \{ \tau_h(t, \phi_h(t), \theta_h(t)) \} \tag{18.78}$$

Identificata la giacitura del piano critico, la componente alternata della tensione tangenziale è la componente alternata della tensione ottaedrica da confrontare con il limite di fatica a sollecitazione tangenziale, per cui

$$f = \tau_f \tag{18.79}$$

e l'espressione del criterio risulta semplicemente:

$$\tau_{c,a} = \tau_f \tag{18.80}$$

Tabelle riassuntive e tensioni equivalenti

Nella tab.5 sono riassunte le espressioni finali dei criteri di fatica multiassiale presentati. Inoltre sono riportati i criteri per l'individuazione del piano critico per i criteri DPC e il piano nel quale viene valutata la sollecitazione per i criteri della tensione ottaedrica e di Sines.

Le espressioni dei criteri permettono di ricavare delle *tensioni alternate equivalenti* (di torsione o di trazione-compressione) che possono essere confrontate con il corrispondente parametro di resistenza del materiale. Per ottenere le tensioni equivalenti è sufficiente scegliere il parametro di resistenza del materiale di confronto, tipicamente τ_f o σ_f , ed *esplicitare l'espressione del criterio rispetto ad esso*. La combinazione ottenuta può essere considerata l'espressione della tensione alternata equivalente. In Tab.6 sono riportate le espressioni delle tensioni equivalenti dei vari criteri e il parametro del materiale con cui la tensione equivalente può essere confrontata.

Da notare che, nel caso di $r_{\tau/\sigma}=0.5$, l'effetto del termine Σ si annulla per i primi 4 criteri.

Criterio	$\tau_{c,a}$	+	k	Σ	\leq	f	(ϕ_c, θ_c)
Findley	$\tau_{c,a}$	+	$\frac{2r_{\tau/\sigma} - 1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}}$	$\sigma_{c,max}$	\leq	$\frac{1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \tau_f$	$\max_{\phi, \theta} \left\{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) + \frac{2r_{\tau/\sigma} - 1}{2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2}} \sigma_{n,max}(\phi, \theta) \right\}$
Matake		+	$(2r_{\tau/\sigma} - 1)$	$\sigma_{c,a}$	\leq	τ_f	$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) \}$
Susmel et al		+	$\frac{\sigma_f}{2}(2r_{\tau/\sigma} - 1)$	$\frac{\sigma_{c,max}}{\tau_{c,a}}$	\leq	τ_f	$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) \}$
Papadopoulos		+	$\frac{3}{2}(2r_{\tau/\sigma} - 1)$	$\sigma_{h,max}$	\leq	τ_f	$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) \}$
McDiarmid		+	$\tau_{fA,B} / 2\sigma_r$	$\sigma_{c,max}$	\leq	$\tau_{fA,B}$	$\max_{\phi, \theta} \{ \tau_{n,a}(\phi, \theta) \}$
Dietmann		+	-	-	\leq	τ_f	$\max_{\phi_h, \theta_h} \{ \tau_h(t, \phi_h(t), \theta_h(t)) \}$
Sines	$\tau_{h,a}$	+	$\sqrt{2}(r_{\sigma/\sigma_p} - 1)$	$\sigma_{h,m}$	\leq	$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f = \tau_{h,f}$	(ϕ_h, θ_h)
Tensioni ottaedriche	$\tau_{h,a}$	+	$\sqrt{2} \frac{\sigma_f}{\sigma_r}$	$\sigma_{h,m}$	\leq	$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_f = \tau_{h,f}$	(ϕ_h, θ_h)
Gough Pollard	τ_a^2	+	$r_{\tau/\sigma}^2$	σ_a^2	\leq	τ_f^2	

Tab.18.5 –Criteri di fatica multiassiale basati sul concetto di piano critico e per sollecitazioni con componenti alternate proporzionali: espressioni finali e definizione del piano critico.

Critero	Tensione alternata equivalente	≤	
Findley	$\tau_e = 2\sqrt{r_{\tau/\sigma} - r_{\tau/\sigma}^2} \tau_{c,a} + (2r_{\tau/\sigma} - 1) \sigma_{c,\max}$	≤	τ_f
Matake	$\tau_e = \tau_{c,a} + (2r_{\tau/\sigma} - 1) \sigma_{c,a}$	≤	τ_f
Susmel et al	$\tau_e = \tau_{c,a} + \frac{\sigma_f}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \frac{\sigma_{c,\max}}{\tau_{c,a}}$	≤	τ_f
Papadopoulos	$\tau_e = \tau_{c,a} + \frac{3}{2} (2r_{\tau/\sigma} - 1) \sigma_{h,\max}$	≤	τ_f
McDiarmid	$\tau_e = \tau_{c,a} + \frac{\tau_{f_{A,B}}}{2\sigma_r} \sigma_{c,\max}$	≤	$\tau_{f_{A,B}}$
Dietmann	$\tau_e = \tau_{c,a}$	≤	τ_f
Sines	$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{h,a} + 3(r_{\sigma/\sigma_p} - 1) \sigma_{h,m}$	≤	σ_f
Tensioni ottaedriche	$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{h,a} + 3 \frac{\sigma_f}{\sigma_r} \sigma_{h,m}$	≤	σ_f
Gough Pollard	$\tau_e = \sqrt{\tau_a^2 + r_{\tau/\sigma}^2 \sigma_a^2}$ $\sigma_e = \sqrt{\sigma_a^2 + r_{\tau/\sigma}^{-2} \tau_a^2}$	≤	τ_f σ_f

Tab.18.6 – Espressione delle tensioni equivalenti dei vari criteri di fatica multiassiale e tensione di resistenza a fatica del materiale di confronto.

Sollecitazioni aleatorie a banda stretta di tipo biassiale e proporzionale

La durata a fatica di un componente soggetto a tensioni di fatica monoassiali di tipo aleatorio può essere valutata applicando le relazioni (17.94a,b) nelle quali A^μ è il *valor medio della tensione equivalente di Miner elevato a μ* , a sua volta ottenibile mediante la relazione (17.92a). Nel caso di processi a banda stretta i cicli di fatica hanno valor medio nullo e la distribuzione di probabilità dell'ampiezza dei cicli può essere espressa mediante la funzione di Rayleigh (17.95), dando luogo alla relazione (17.96) qui riscritta:

$$A^\mu = \int_0^{a_{\max}} a^\mu P(a) da = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{a_{\max}} a^{\mu+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) da \quad (17.96)$$

nella quale λ_0 è il momento spettrale di ordine zero della PSD del processo di tensione e μ è l'esponente della curva di Wöhler del materiale. Nel caso particolare di processi di sollecitazioni multiassiali con tensioni agenti in fase, tutte le tensioni sono proporzionali e hanno distribuzioni delle ampiezze di cicli con la stessa forma. In particolare, se i processi sono a banda stretta, la relazione (17.96) può essere utilizzata sostituendo al posto dell'ampiezza della sollecitazione monoassiale a un'ampiezza di sollecitazione equivalente.

Nel caso di *tensioni principali agenti in fase*, la relazione limite di cedimento può essere espressa mediante il criterio di Sines (52). Facendo riferimento al caso di sollecitazioni biassiali, se le tensioni agiscono in fase mantengono un rapporto di proporzionalità costante $k = \sigma_{2a}/\sigma_{1a}$ e, conseguentemente, le tensioni tangenziali ottaedriche (40) possono essere espresse in funzione della sola σ_{1a} come segue:

$$\tau_{ha} = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{1a}^2 + (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + \sigma_{2a}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{1+k^2 - k} \sigma_{1a} \quad (18.81)$$

In base alla (81) e considerando che nel caso di processi a banda stretta si ha $\sigma_{h,m}=0$ poiché, come detto, i cicli di sollecitazione risultano a media nulla, la (52) può essere riscritta in funzione della sola σ_{1a} come

$$\sqrt{1+k^2 - k} \sigma_{1a} = \sigma_f \quad (18.82)$$

Il lato sinistro della (82) è la combinazione di sollecitazioni multiassiali che può essere confrontata con il solo limite di fatica monoassiale σ_f , cioè la *tensione equivalente*. Esplicitando la (82) rispetto a σ_f e scrivendo direttamente σ_e in luogo di σ_f , si ottiene un'espressione della *tensione equivalente del criterio di Sines* per il caso di tensioni *biassiali*:

$$\sigma_e = \sqrt{1+k^2 - k} \sigma_{1a} \quad (18.83)$$

La (83) mostra che l'ampiezza di sollecitazione equivalente per tensioni principali agenti in fase coincide con

l'ampiezza della tensione σ_1 moltiplicata per una costante, per cui la sua distribuzione di probabilità coincide con quella della σ_1 che, per processi a banda stretta, coincide con la funzione di Rayleigh. Utilizzando il simbolo a in luogo di σ_{1a} per definire l'ampiezza dei cicli di tensione nella (83), sostituendo l'espressione ottenuta nel secondo termine della (17.96) e introducendo la distribuzione di Rayleigh, si ottiene l'espressione di A^μ per il caso di sollecitazione di fatica biassiale con tensioni principali agenti in fase:

$$A^\mu = \frac{(1+k^2-k)^{\mu/2}}{\lambda_0} \int_0^\infty a^{\mu+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) da \quad (18.84)$$

nella quale λ_0 è il momento spettrale di ordine zero della PSD del processo di tensione σ_1 . Da notare come la (84) possa essere ottenuta direttamente moltiplicando la (17.96) per un fattore dipendente soltanto dal rapporto $k=\sigma_{2a}/\sigma_{1a}$ tra le ampiezze delle tensioni agenti e dall'esponente μ della curva di Wöhler del materiale.

Nel caso in cui ad agire in fase siano una *tensione normale e una tangenziale* le cui ampiezze dei cicli siano espresse come σ_a e τ_a , la relazione limite può essere ottenuta mediante il criterio empirico di Gough e Pollard (54). Introducendo il rapporto di proporzionalità tra le tensioni agenti $k=\tau_a/\sigma_a$ e il rapporto tra i limiti di fatica a tangenziale e normale del materiale $r_{\tau\sigma}$ (27), la (54) può essere riscritta come

$$\sigma_a^2 + k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2} \sigma_a^2 = \sigma_f^2 \quad (18.85)$$

Operando in modo analogo al caso precedente, la tensione equivalente può essere ottenuta come

$$\sigma_e = \sqrt{1+k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2}} \sigma_a \quad (18.86)$$

Anche in questo caso l'espressione di A^μ può essere ottenuta introducendo la (86) nella (17.96) (sempre utilizzando il simbolo a in luogo di σ_a per definire l'ampiezza dei cicli di tensione) insieme alla funzione di Rayleigh:

$$A^\mu = \frac{(1+k^2 r_{\tau/\sigma}^{-2})^{\mu/2}}{\lambda_0} \int_0^{a_{\max}} a^{\mu+1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda_0}\right) dr \quad (18.87)$$

Anche in questo caso la (87) può essere ottenuta moltiplicando la (17.96) per un apposito fattore, che risulta dipendente soltanto dal rapporto $k=\tau_a/\sigma_a$ tra le tensioni agenti e da due parametri del materiale costituiti dall'esponente μ della curva di Wöhler e dal rapporto tra i limiti di fatica a tensione normale e torsione $r_{\tau\sigma}$.

APPENDICE

A1. Discretizzazione delle variabili ϕ - θ per la determinazione del piano critico

Come detto, le componenti di tensione σ_n , τ_u e τ_v devono essere determinate per ciascun istante del periodo di analisi $0 \leq t < T$ e per i diversi valori degli angoli $-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ e $0 \leq \theta < \pi$ che individuano le giaciture (*layers*), utilizzando le relazioni (1.89). Naturalmente operando in modo numerico l'analisi può essere effettuata per *valori discreti* delle 3 variabili.

La discretizzazione ottimale degli angoli ϕ e θ richiede alcuni accorgimenti. Al variare degli angoli ϕ e θ la punta del versore \mathbf{n} descrive una *semisfera* ed effettuando una discretizzazione, ogni coppia di valori ϕ_k e θ_k ne identifica un punto come mostrato in fig.A.1. Affinché la discretizzazione risulti *uniforme* è opportuno operare in modo che i suddetti punti risultino *equispaziati*.

Se si suddivide l'angolo θ in N_θ incrementi, l'ampiezza dell'incremento $\Delta\theta$ e i corrispondenti angoli θ_k risultano

$$\Delta\theta = \pi/N_\theta \quad \theta_k = (k-1)\Delta\theta \quad 1 \leq k \leq N_\theta \quad (A.1.2)$$

In questo modo i *meridiani* della semisfera risultano suddivisi in N_θ archi di lunghezza esprimibile come

$$\Delta C_\theta = R \Delta\theta = R \pi/N_\theta \quad (A.1.3)$$

Per ciascun angolo θ_k è possibile individuare una semicirconferenza che costituisce un *parallelo* della semisfera (fig.A2), la cui lunghezza è data dalla seguente espressione

$$C_k = R \sin \theta_k \pi \quad (A.1.4)$$

Per uniformare la discretizzazione è necessario operare in modo che ogni parallelo risulti diviso in archi di lunghezza uguale e pari a quella degli archi dei meridiani (A.3). La lunghezza degli archi del k -esimo parallelo può essere ottenuta come dividendo ciascuna lunghezza C_k per il numero di suddivisioni N_{ϕ_k}

$$\Delta C_k = C_k/N_{\phi_k} = R \sin \theta_k \pi/N_{\phi_k} \quad (A.1.5)$$

Ponendo $\Delta C_k = \Delta C_\theta$, eliminando i termini comuni π ed R ed esplicitando rispetto ad N_{ϕ_k} si ottiene

$$N_{\phi_k} = N_\theta \sin \theta_k \quad (A.1.6)$$

La (A.6) mostra che, al fine di ottenere archi di lunghezza ΔC_k costante, il numero di suddivisioni dei paralleli N_{ϕ_k} deve essere variabile al variare dell'angolo θ_k . Determinato il valore di N_{ϕ_k} in base alla (A.6) i valori degli incrementi $\Delta\phi_k$ e degli angoli $\phi_{k,j}$ corrispondenti ad ogni angolo θ_k possono essere ottenuti semplicemente come

$$\Delta\phi_k = \pi/N_{\phi_k} \quad \phi_{k,j} = (j-1)\Delta\phi_k - \pi/2 \quad 1 \leq j \leq N_{\phi_k} \quad (A.1.7,8)$$

In Tab.A.1 è mostrato il caso di in cui l'angolo θ è diviso in $N_\theta=10$ intervalli, in particolare sono visualizzati i 10 angoli θ_k e i 10 corrispondenti numeri N_{ϕ_k} di suddivisioni dei paralleli. In fig.A.1 sono mostrati i punti corrispondenti. Da notare che, analizzando le giaciture di angoli $\phi_{k,j}=0$ e $\theta_k=0$, non devono essere considerate quelle relative agli angoli $\phi_{k,j}=\pi$ e $\theta_k=\pi$, in quanto si riferiscono alla stessa direzione.

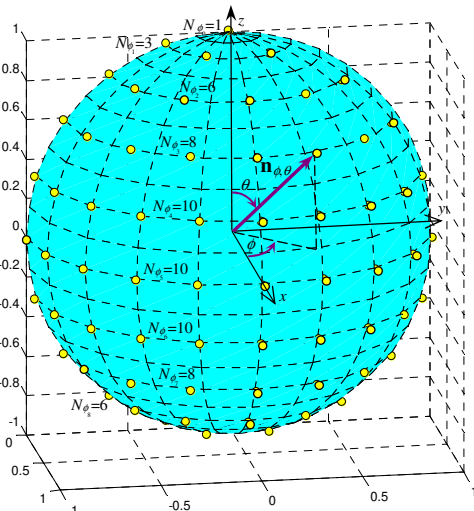


Fig.A.1.1 - Discretizzazione dello spazio ϕ - θ (caso di $N_\theta=10$).

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_k	0	18	36	54	72	90	108	126	144	162
N_{ϕ_k}	1	3	6	8	10	10	10	8	6	3

Tab.A.1.1 - Caso $N_\theta=10$: angoli θ_k e corrispondenti valori N_{ϕ_k} .

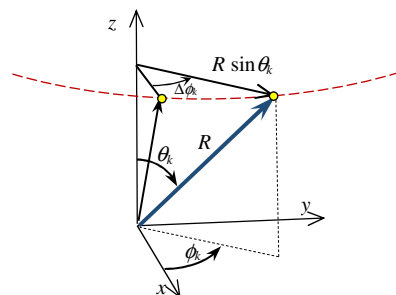


Fig.A.1.2 - Discretizzazione del *parallelo* θ_k .

Il numero totale di giaciture N_l può essere ottenuto sommando i numeri di suddivisioni dei singoli paralleli N_{ϕ_k}

$$N_l = \sum_{k=1}^{N_\theta} N_{\phi_k} \quad (\text{A1.9})$$

Poiché il numero di giaciture non è ottenuto da un'uguale suddivisione degli angoli ϕ e θ , è opportuno che la memorizzazione dei rispettivi valori venga effettuata mediante due vettori di dimensione N_l e non mediante due matrici, come sarebbe ovvio fare nel caso in cui i numeri di suddivisioni siano uguali.

Ovviamente l'errore nella determinazione di $\tau_{c,a}$ con i vari metodi diminuisce al crescere del numero di intervalli dell'angolo θ utilizzato; in particolare, con $12 \leq N_\theta \leq 36$ si ottengono errori massimi nel campo $4.1\% > e > 0.5\%$.

A2. La procedura di applicazione dei criteri di piano critico

In questo paragrafo sono riassunti tutti i passi da effettuare nell'analisi di fatica multiassiale mediante l'applicazione di un criterio di piano critico e le relative equazioni.

L'analisi di fatica multiassiale mediante l'applicazione di un criterio di piano critico opportunamente scelto prevede per prima cosa la determinazione delle componenti del tensore $\sigma(t)$ al variare del tempo nei punti di interesse della struttura, che deve essere effettuata in un numero discreto N_t di istanti t_i , con $i=1, \dots, N_t$, nel periodo di sollecitazione T . Si può prefissare l'intervallo Δt e determinare N_t o viceversa

$$N_t = T/\Delta t \quad \Delta t = T/N_t \quad (\text{A2.1,2})$$

ottenendo gli istanti t_i come

$$t_i = (i-1)\Delta t \quad i=1, \dots, N_t \quad (\text{A2.3})$$

I valori assunti dal tensore degli sforzi nei vari istanti, esprimibili come

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} & \tau_{yx_i} & \tau_{zx_i} \\ \tau_{xy_i} & \sigma_{y_i} & \tau_{zy_i} \\ \tau_{xz_i} & \tau_{yz_i} & \sigma_{z_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x(t_i) & \tau_{yx}(t_i) & \tau_{zx}(t_i) \\ \tau_{xy}(t_i) & \sigma_y(t_i) & \tau_{zy}(t_i) \\ \tau_{xz}(t_i) & \tau_{yz}(t_i) & \sigma_z(t_i) \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, N_t \quad (\text{A2.4})$$

devono essere determinati in base alle caratteristiche del carico e della struttura con i metodi teorici o numerici della scienza delle costruzioni o della dinamica delle strutture.

In alternativa possono essere determinati i valori dei vettori s_i definiti come

$$s_i = \begin{bmatrix} \sigma_{x_i} \\ \sigma_{y_i} \\ \sigma_{z_i} \\ \tau_{xy_i} \\ \tau_{xz_i} \\ \tau_{yz_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x(t_i) \\ \sigma_y(t_i) \\ \sigma_z(t_i) \\ \tau_{xy}(t_i) \\ \tau_{xz}(t_i) \\ \tau_{yz}(t_i) \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, N_t \quad (\text{A2.5})$$

Una volta determinato il tensore degli sforzi al variare del tempo ed essendo stato selezionato il criterio, l'analisi di fatica multiassiale prevede l'effettuazione dei seguenti passi:

- 1 discretizzazione del campo delle possibili giaciture:
 - a) determinazione delle coordinate sferiche $\phi_n-\theta_n$;
 - b) determinazione dei versori \mathbf{n} , \mathbf{u} , \mathbf{v} di ciascuna giacitura, in base alle coordinate sferiche delle direzioni n , u e v , cioè $\phi_n-\theta_n$, $\phi_u-\theta_u$ e $\phi_v-\theta_v$; eventuale determinazione dei vettori \mathbf{n}_n , \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n oppure \mathbf{w} e \mathbf{w}_n ;
- 2 determinazione della tensione tangenziale alternata τ_a agente in ogni giacitura:
 - a) determinazione dell'andamento delle tensioni normali e tangenziali σ_n , τ_u e τ_v oppure σ_n e τ_w negli istanti t_i in ogni giacitura;
 - b) determinazione della tensione tangenziale alternata τ_a applicando un criterio opportuno (minimo cerchio circoscritto, massimo rettangolo circoscritto ecc..) alle coordinate τ_u e τ_v della curva descritta dal vettore τ_n al variare del tempo, oppure utilizzando la definizione di Papadopoulos;
- 3 determinazione delle sollecitazioni nel piano critico:
 - a) determinazione del piano critico in base al criterio di fatica scelto (se richiesto dal criterio deve essere preventivamente effettuata la determinazione del valore della funzione Σ in tutte le giaciture utilizzando i valori di σ_n al variare del tempo);
 - b) determinazione del valore della funzione Σ nel piano critico, utilizzando i valori di σ_n o di σ_h al variare del tempo;
- 4) verifica a fatica nel piano critico applicando il criterio scelto.

È opportuno sottolineare il fatto che, nell'analisi di strutture, i passi 2-4 devono essere ripetuti per ciascun punto della struttura del quale è stato determinato il tensore degli sforzi al variare del tempo, mentre il passo 1 deve essere effettuato una sola volta.

Passo 1a

Il passo 1a) può essere effettuato assegnando il numero N_θ di suddivisioni dell'angolo θ , determinando l'intervallo corrispondente (A1.1) e gli angoli (A1.2)

$$\Delta\theta = \pi/N_\theta \quad \theta_{n_k} = (k-1)\Delta\theta \quad k=1, \dots, N_\theta \quad (\text{A2.6,7})$$

determinando, per ogni valore dell'angolo θ_{n_k} , il numero di suddivisioni dell'angolo ϕ (eq.A1.6)

$$N_{\phi_k} = N_\theta \sin \theta_{n_k} \quad (\text{A2.8})$$

e infine, per ciascun valore di θ_{n_k} , il corrispondente angolo $\Delta\phi_k$ e gli angoli $\phi_{n_{k,j}}$ (eq.A1.7,A1.8)

$$\Delta\phi_k = \pi/N_{\phi_k} \quad \phi_{n_{k,j}} = (j-1)\Delta\phi_k - \pi/2 \quad j=1, \dots, N_{\phi_k} \quad (\text{A2.9,10})$$

Il numero totale di giaciture N_l può essere valutato mediante l'eq.A1.9:

$$N_l = \sum_{k=1}^{N_\theta} N_{\phi_k} \quad (\text{A2.11})$$

Per semplificare l'analisi è opportuno che gli angoli relativi alle N_l giaciture vengano memorizzati in 2 vettori θ e ϕ di N_l componenti costituite dai valori θ_{n_l} e ϕ_{n_l} , con $l=1, \dots, N_l$. In particolare il vettore θ deve contenere ciascun valore θ_k ripetuto N_{ϕ_k} volte, mentre il vettore ϕ deve contenere i corrispondenti angoli $\phi_{n_{k,j}}$, con $j=1, \dots, N_{\phi_k}$.

Passo 1b

Il passo 1b) consiste, per prima cosa, nella determinazione degli N_l versori \mathbf{n}_l , \mathbf{u}_l , \mathbf{v}_l corrispondenti alle coordinate sferiche delle direzioni n (θ_{n_l} e ϕ_{n_l}), u e v .

Le coordinate sferiche delle suddette direzioni sono legate a θ_{n_l} e ϕ_{n_l} mediante le semplici relazioni (1.87,88) e i corrispondenti versori possono essere ottenuti mediante la relazione (1.58) applicata alle 3 coppie di angoli

$$\begin{bmatrix} \phi_{u_l} \\ \theta_{u_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n_l} + \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_{v_l} \\ \theta_{v_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n_l} - \pi \\ \pi/2 - \theta_{n_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.12,13})$$

$$\mathbf{n}_l = \begin{bmatrix} \cos \phi_{n_l} \sin \theta_{n_l} \\ \sin \phi_{n_l} \sin \theta_{n_l} \\ \cos \theta_{n_l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} \cos \phi_{u_l} \sin \theta_{u_l} \\ \sin \phi_{u_l} \sin \theta_{u_l} \\ \cos \theta_{u_l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} \cos \phi_{v_l} \sin \theta_{v_l} \\ \sin \phi_{v_l} \sin \theta_{v_l} \\ \cos \theta_{v_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.14,15a,16a})$$

In alternativa, i versori nelle direzioni u e v possono essere posti in relazione con le sole coordinate sferiche θ_{n_l} e ϕ_{n_l} come (1.89b-c):

$$\mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} -\sin \phi_{n_l} \\ \cos \phi_{n_l} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} -\cos \phi_{n_l} \cos \theta_{n_l} \\ -\sin \phi_{n_l} \cos \theta_{n_l} \\ \sin \theta_{n_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.15b,16b})$$

Se si vogliono utilizzare le eq.(1.98), dopo i versori \mathbf{n}_l , \mathbf{u}_l , \mathbf{v}_l , devono essere determinati i vettori $\mathbf{n}_{n,l}$, $\mathbf{u}_{n,l}$, $\mathbf{v}_{n,l}$ (1.97a-c):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{n,l} &= \begin{bmatrix} n_{x_l}^2 & n_{y_l}^2 & n_{z_l}^2 & 2n_{x_l}n_{y_l} & 2n_{x_l}n_{z_l} & 2n_{y_l}n_{z_l} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_{n,l} &= \begin{bmatrix} u_{x_l}n_{x_l} & u_{y_l}n_{y_l} & u_{z_l}n_{z_l} & u_{x_l}n_{y_l} + u_{y_l}n_{x_l} & u_{x_l}n_{z_l} + u_{z_l}n_{x_l} & u_{y_l}n_{z_l} + u_{z_l}n_{y_l} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_{n,l} &= \begin{bmatrix} v_{x_l}n_{x_l} & v_{y_l}n_{y_l} & v_{z_l}n_{z_l} & v_{x_l}n_{y_l} + v_{y_l}n_{x_l} & v_{x_l}n_{z_l} + v_{z_l}n_{x_l} & v_{y_l}n_{z_l} + v_{z_l}n_{y_l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.16a-c})$$

Nel caso in cui si voglia utilizzare la definizione di τ_a di Papadopoulos, ma anche quelle della LC/LP o del MRC in base alle eq.(18.15,16), dopo la determinazione dei versori \mathbf{n}_l , \mathbf{u}_l , \mathbf{v}_l , si devono determinare i vettori \mathbf{w}_l con la

relazione (1.94). I valori da assegnare all'angolo χ possono essere ottenuti semplicemente dividendo il campo $0-\pi$ in un numero N_k di valori, determinando l'incremento $\Delta\chi_k$ e i valori χ_k con le seguenti espressioni:

$$\Delta\chi = \pi/N_k \quad \chi_k = (k-1)\Delta\chi \quad k=1,\dots,N_k \quad (\text{A2.18,19})$$

I vettori $\mathbf{w}_{l,k}$ relativi a ciascuna giacitura e a ciascun valore χ_k possono essere determinati con la (1.94) come:

$$\mathbf{w}_{l,k} = \mathbf{u}_l \cos \chi_k + \mathbf{v}_l \sin \chi_k \quad (\text{A2.20})$$

Anche in questo caso, se si vuole utilizzare l'eq.(1.99), si devono determinare i vettori \mathbf{w}_n (1.99d)

$$\mathbf{w}_{\mathbf{n}_{l,k}} = \left[\begin{array}{cccccc} w_{x_{l,k}} n_{x_l} & w_{y_{l,k}} n_{y_l} & w_{z_{l,k}} n_{z_l} & w_{x_{l,k}} n_{y_l} + w_{y_{l,k}} n_{x_l} & w_{x_{l,k}} n_{z_l} + w_{z_{l,k}} n_{x_l} & w_{y_{l,k}} n_{z_l} + w_{z_{l,k}} n_{y_l} \end{array} \right] \quad (\text{A2.21})$$

Da notare che con $N_k \geq 4$ l'errore massimo nella determinazione di τ_a nel piano utilizzando i metodi LC/LP, MRC e di Papadopoulos risulta inferiore al 2%.

Passo 2a

Il passo 2a) può essere effettuato determinando per prima cosa il vettore tensione agente su ciascuna giacitura \mathbf{p} per ciascun istante t_i mediante la relazione (1.15)

$$\mathbf{p}_{i,l} = \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}_l \quad (\text{A2.22})$$

e determinando le componenti normale σ_n e tangenziali τ_u e τ_v mediante la proiezione di \mathbf{p} lungo le direzioni n , u e v (eq.1.91)

$$\sigma_{n_{i,l}} = \tilde{\mathbf{n}}_l \mathbf{p}_{i,l} \quad \tau_{u_{i,l}} = \tilde{\mathbf{u}}_l \mathbf{p}_{i,l} \quad \tau_{v_{i,l}} = \tilde{\mathbf{v}}_l \mathbf{p}_{i,l} \quad (\text{A2.23-25})$$

È bene ricordare che l'indice i è riferito agli N_t istanti temporali ($i=1,\dots,N_t$), mentre l'indice l è riferito alle N_l giaciture ($l=1,\dots,N_l$).

In alternativa si possono utilizzare le eq.(1.98) come:

$$\sigma_{n_{i,l}} = \mathbf{n}_l \mathbf{s}_i \quad \tau_{u_{i,l}} = \mathbf{u}_l \mathbf{s}_i \quad \tau_{v_{i,l}} = \mathbf{v}_l \mathbf{s}_i \quad (\text{A2.26a-c})$$

Nel caso in cui si voglia utilizzare la definizione di τ_a di Papadopoulos, si devono valutare le proiezioni degli N_l punti della curva Ψ lungo l'asse w per ciascun valore χ_k utilizzando una delle seguenti relazioni (1.95 o 1.99):

$$\tau_{w_{l,k,i}} = \tilde{\mathbf{w}}_{l,k} \mathbf{p}_{i,l} \quad \tau_{w_{l,k,i}} = \mathbf{w}_{\mathbf{n}_{l,k}} \mathbf{s}_i \quad (\text{A2.27,28})$$

Passo 2b

Il passo 2b), che consiste nella determinazione della tensione tangenziale alternata in ogni giacitura τ_{a_l} , deve essere effettuato applicando appositi algoritmi ai valori di τ_u e τ_v in funzione del tempo agenti su ogni giacitura, cioè assegnando l'indice l per fissare la giacitura e analizzando la curva descritta dagli N_t valori delle due variabili.

Nel caso in cui si voglia utilizzare la definizione di τ_a di Papadopoulos, utilizzando i valori τ_w valutati in ciascuna giacitura, si determinano i valori $\tau_{a,l}(\chi)$ mediante la (15) come

$$\tau_{a_{l,k}} = \frac{1}{2} \left[\max_{i=1,\dots,N_t} \tau_{w_{l,k,i}} - \min_{i=1,\dots,N_t} \tau_{w_{l,k,i}} \right] \quad (\text{A2.29})$$

e si determina il valore della tensione tangenziale alternata in ciascuna giacitura come media dei valori ottenuti con la (14) moltiplicati per $2^{0.5}$ mediante la (13).

$$\tau_{a_l} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\int_0^\pi \tau_{a_{l,k}}^2 d\chi} \quad (\text{A2.30})$$

Passo 3a

Il passo 3a) prevede la determinazione della giacitura critica nel punto.

Nel caso dei criteri che identificano il piano critico come quello sul quale agisce la massima tensione τ_{a_l} si può scrivere

$$\tau_{c,a} = \tau_{a_{lc}} = \max_{l=1,\dots,N_l} \{ \tau_{a_l} \} \quad (\text{A2.31})$$

Nel caso dei criteri che considerano come piano critico quello sul quale agisce la massima combinazione della tensione τ_{a_l} con la funzione Σ , il passo 3a) prevede che per prima cosa sia determinata la funzione Σ_i in ciascuna giacitura, ad esempio per il criterio di Findley:

$$\Sigma_l = \sigma_{\max_l} = \max_{i=1, \dots, N_l} \{ \sigma_{n_{i,j}} \} \tag{A2.32}$$

quindi il piano critico e la tensione può essere determinato utilizzando la seguente relazione

$$\tau_{c,a} = \tau_{a_{lc}} = \max_{l=1, \dots, N_l} \{ \tau_{a_l} + k \Sigma_l \} = \max_{l=1, \dots, N_l} \{ \tau_{a_l} + k \sigma_{\max_l} \} \tag{A2.33}$$

e il passo 3b non deve essere effettuato.

Passo 3b

Nel caso dei criteri che identificano il piano critico come quello sul quale agisce la massima tensione τ_{a_l} il passo 3b) deve essere effettuato determinando il valore della funzione Σ nel solo piano critico mediante una delle seguenti espressioni:

$$\Sigma = \sigma_{\max_{lc}} = \max_{i=1, \dots, N_l} \{ \sigma_{n_{i,jc}} \} \qquad \Sigma = \sigma_{a_{lc}} = \frac{\max_{i=1, \dots, N_l} \{ \sigma_{n_{i,jc}} \} - \min_{i=1, \dots, N_l} \{ \sigma_{n_{i,jc}} \}}{2}$$

$$\Sigma = \sigma_{h,\max} = \frac{1}{3} \max_{i=1, \dots, N_l} \{ \sigma_{x,i} + \sigma_{y,i} + \sigma_{z,i} \} \tag{A2.34-36}$$

Passo 4

Il passo 4 consiste nel confrontare la tensione equivalente agente nel piano critico, determinata utilizzando una delle relazioni riportate in tabella 6, con il limite di fatica a torsione.

Tabelle

Nelle tabelle 1 e 2 sono riassunte le grandezze di interesse (tensioni e versori), le variabili da cui dipendono con i campi di esistenza, e le dimensioni di vettori e matrici da utilizzare nel calcolo.

	Dim.	Variabili	Dim. comples.
σ	3x3	$0 \leq t < T$	$\sigma(3,3,N_l)$
s	6		$s(6,N_l)$
σ_n	1	$0 \leq t < T$	$\sigma_n(N_l, N_l)$
τ_u		$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$	$\tau_u(N_l, N_l)$
τ_v			$\tau_v(N_l, N_l)$
τ_n β		$0 \leq \theta < \pi$	$\tau_n(N_l, N_l)$ $\beta(N_l, N_l)$
τ_χ	1	$0 \leq t < T$ $-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$ $0 \leq \chi < \pi$	$\tau_\chi(N_l, N_\chi, N_l)$
$\tau_{n,a}$ $\tau_{n,m}$	1	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$	$\tau_{n,a}(N_l)$ $\tau_{n,m}(N_l)$

Tab.A.2.1 – Dimensioni e variabili: tensioni.

	Dim.	Variabili	Dim. comp.
n u v	3	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$	$n(3, N_l)$ $u(3, N_l)$ $v(3, N_l)$
n_n u_n v_n	6		$n_n(N_l, 6)$ $u_n(N_l, 6)$ $v_n(N_l, 6)$
w	3	$-\pi/2 \leq \phi < \pi/2$ $0 \leq \theta < \pi$	$w(3, N_l, N_\chi)$
w_n	6		$w_n(N_l, 6, N_\chi)$

Tab.A.2.2 – Dimensioni e variabili: versori.