7. CENNI DI GEOMETRIA DELLE AREE

Momenti statici e baricentro

Si consideri una figura geometrica piana riferita ad assi cartesiani non necessariamente baricentrici, come in fig.1, e siano A l’area totale della figura e G il suo baricentro di coordinate x_G, y_G. Si definiscono *momenti statici* della figura rispetto agli assi x ed y, rispettivamente, i seguenti integrali

$$S_x = \int_A y\, dA \qquad S_y = \int_A x\, dA\,. \tag{7.1a,b}$$

I momenti statici possono essere espressi in funzione delle coordinate del baricentro della figura come segue

$$S_x = y_G A \qquad S_y = x_G A \tag{7.2a,b}$$

In base alle (1-2) si osserva che i momenti statici possono assumere valori positivi o negativi in dipendenza dell’orientamento degli assi.

Le coordinate del baricentro G di una figura possono essere ricavate invertendo semplicemente le (2):

$$x_G = S_y/A \qquad y_G = S_x/A \tag{7.3a,b}$$

Momenti di inerzia assiali e polare

Si definiscono *momenti di inerzia assiali* della figura rispetto agli asse x ed y rispettivamente, i seguenti integrali

$$I_x = \int_A y^2 dA\,; \qquad I_y = \int_A x^2 dA \tag{7.4a,b}$$

Si definisce *momento centrifugo* (o biassiale) della figura rispetto agli assi x e y il seguente integrale:

$$I_{xy} = \int_A x\, y\, dA \tag{7.5}$$

Si definisce *momento polare* della figura rispetto ad un punto (polo) P il seguente integrale

$$I_P = \int_A r^2 dA \tag{7.6}$$

essendo r la distanza dal polo. Se il polo P coincide con l’origine degli assi, risulta evidente la seguente relazione tra momento polare e momenti assiali:

$$I_P = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = I_x + I_y \tag{7.7}$$

I momenti d’inerzia assiali e quello polare sono sempre positivi e maggiori di 0, mentre quello centrifugo può assumere valori positivi, negativi o risultare nullo.

Si definiscono *raggi di inerzia* o *giratori di inerzia* (assiali e polare) le seguenti quantità:

$$\rho_x = \sqrt{I_x/A} \qquad \rho_y = \sqrt{I_y/A} \qquad \rho_{xy} = \sqrt{I_{xy}/A} \qquad \rho_P = \sqrt{I_P/A} \tag{7.8a-d}$$

Momenti di figure composte

I momenti d’inerzia di figure composte da più elementi possono essere ottenuti come somma o differenza dei momenti delle singole figure. Ad esempio, i momenti della sezione A) di fig.2 rispetto a ciascun asse, possono essere ottenuti come somma dei momenti dei tre rettangoli rispetto all’asse stesso, mentre i momenti relativi all’ellisse cava di fig.2 B) possono essere ottenuti come differenza tra i momenti relativi all’ellisse esterna e quelli relativi all’ellisse interna.

Traslazione e rotazione d’assi

I momenti d’inerzia di una figura rispetto ad assi $x'y'$ paralleli ad assi *xy baricentrici* (fig.3), possono essere espressi mediante le seguenti equazioni:

$$I_{x'} = I_x + y_0^2 A \qquad I_{y'} = I_y + x_0^2 A \qquad I_{x'y'} = I_{xy} + x_0 y_0 A \qquad I_{P'} = I_P + r_0^2 A \tag{7.9-12}$$

nelle quali x_0 ed y_0 sono gli *spostamenti* (positivi o negativi) *da assegnare agli assi xy* per ottenere la posizione degli assi $x'y'$ o viceversa. Ai fini della valutazione del momento centrifugo è importante che il segno del *prodotto* x_0y_0 sia corretto.

Le relazioni (9,10) mostrano che, tra i momenti d’inerzia valutati rispetto ad assi paralleli, quello relativo all’asse baricentrico è il minimo, risultando nullo il secondo termine. In base alla (11) si osserva che il momento centrifugo

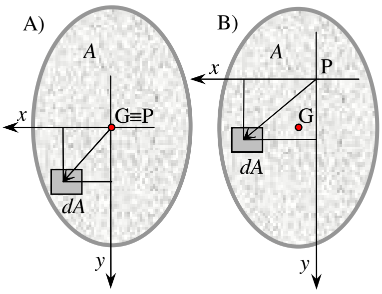

Fig.7.1 – Momenti statici; assi di riferimento: A) baricentrici, B) non baricentrici.

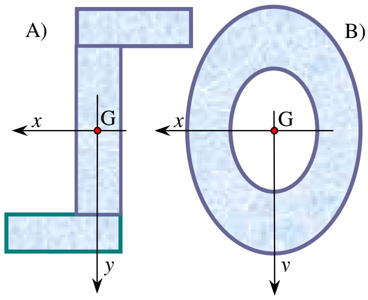

Fig.7.2 – Figure composte.

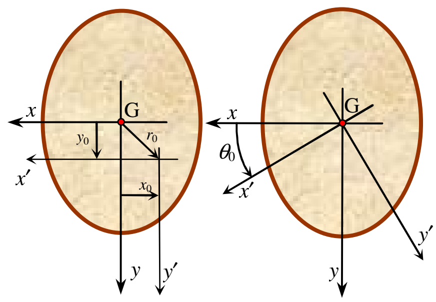

Fig.7.3 – Traslazione e rotazione di assi.

valutato rispetto ad una coppia d’assi di cui uno è baricentrico, annullandosi il prodotto x_0y_0, risulta indipendente dalla posizione dell’altro asse.

I momenti d’inerzia di una figura valutati rispetto ad assi $x'y'$ ruotati di un angolo θ_0 (positivo se antiorario) rispetto ad assi di riferimento generici xy, possono essere espressi in funzione dei momenti rispetto agli assi xy mediante le seguenti relazioni:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta_0 - I_{xy}\sin 2\theta_0 \qquad I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta_0 + I_{xy}\sin 2\theta_0 \qquad (7.13,14)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta_0 + I_{xy}\cos 2\theta_0 \qquad (7.15)$$

<u>Assi principali e centrali</u>

Si definiscono *assi principali d’inerzia* 1 e 2 le coppie di assi ortogonali per i quali risulta nullo il momento centrifugo (5). I momenti d’inerzia rispetto a tali assi si definiscono *momenti principali d’inerzia*. Gli assi principali *baricentrici* vengono definiti *assi centrali d’inerzia*.

I valori dei momenti principali d’inerzia I_1 e I_2 possono essere ottenuti dai momenti rispetto ad assi non principali xy mediante la seguente relazione:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[I_x + I_y \pm \sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \right] \qquad (7.16)$$

L’orientamento degli assi principali può essere determinato valutando l’angolo ϕ (positivo se antiorario) formato tra l’asse principale 1 e l’asse x mediante la seguente relazione ottenibile dalla (15) ponendo $I_{x'y'}=I_{12}=0$:

$$\phi = -\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{I_{xy}}{\left(I_x - I_y\right)/2} \qquad (7.17)$$

È importante notare che per valutare correttamente l’angolo ϕ mediante la (17) è necessario tenere in considerazione i segni del numeratore (proporzionale a sinϕ) e del denominatore (proporzionale a cosϕ) dell’argomento dell’arcotangente (ad esempio utilizzando la funzione *atan2* per il calcolo dell’arcotangente disponibile in alcuni linguaggi di programmazione).

Assi generici e principali

Le formule di traslazione e rotazione possono essere utilizzate per valutare i momenti d’inerzia di una figura rispetto ad assi generici xy, a partire dalla conoscenza dei momenti centrali I_1 ed I_2. In questo caso le (13-15) possono essere riscritte nel modo seguente

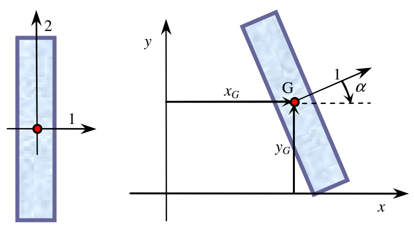

Fig.7.4 – Utilizzazione delle formule di trasformazione d’assi nel caso di figura traslata e ruotata rispetto agli assi centrali.

$$I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\alpha + y_G^2\, A \qquad (7.18)$$

$$I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\alpha + x_G^2\, A \qquad (7.19)$$

$$I_{xy} = \frac{I_1 - I_2}{2}\sin 2\alpha + x_G y_G\, A \qquad (7.20)$$

nelle quali x_G ed y_G sono le coordinate del baricentro della figura e α è l’angolo formato tra l’asse 1 e l’asse x, misurato in senso positivo se antiorario. Ad esempio, in fig.4 è mostrata una figura rettangolare in assi centrali 12 e in assi generici xy. Nella figura sono evidenziati i parametri della traslazione e della rotazione da inserire nelle (18-20). In particolare, nel caso mostrato, l’angolo α è negativo.