

36. LASTRE E PIASTRE

Geometria e carichi agenti

Le lastre sono elementi aventi la geometria descritta nel caso del problema piano in elasticità, cioè, con riferimento alla fig.1, possiedono forma cilindrica con la sezione trasversale (di area A e contorno C) disposta parallelamente al piano xy , hanno spessore h costante e piccolo rispetto alle altre dimensioni (cioè inferiore di un ordine di grandezza come minimo). L'origine del sistema di riferimento cartesiano viene posto in un punto del piano medio della lastra in modo che i bordi superiore ed inferiore abbiano ascissa $\pm h/2$.

Le lastre possono essere soggette a 2 sistemi di carico, i carichi nel piano e quelli fuori dal piano (fig.2) descritti da funzioni variabili con x e y :

- i carichi nel piano sono costituiti da forze distribuite ad unità di superficie f_x ed f_y che agiscono parallelamente al piano xy , costanti lungo la direzione z ;
- i carichi fuori dal piano sono costituiti da forze distribuite ad unità di superficie f_z che agiscono ortogonalmente al piano xy e, nel caso più generale, da momenti distribuiti ad unità di superficie di tipo flettente m_x ed m_y .

Le lastre soggette a carichi fuori dal piano risultano sollecitate a flessione e taglio nella direzione z e vengono spesso definite *piastre*, le lastre soggette a carichi nel piano sono sollecitate da sforzi normali e taglio nel piano xy . Da quanto scritto si deduce che quello delle lastre caricate nel piano è un classico *problema piano* della teoria dell'elasticità e come tale può essere affrontato, mentre il problema delle piastre se ne differenzia per la tipologia dei carichi agenti e delle reazioni vincolari. Nel secondo caso la soluzione viene ricercata mediante una formulazione agli spostamenti per cui i vari passaggi hanno l'obiettivo di ottenere un sistema di equazioni le cui incognite sono costituite da funzioni che descrivono gli spostamenti.

I gusci possiedono caratteristiche geometriche simili a quelle di piastre e lastre, ma sono caratterizzati dalla presenza di curvature nei piani xz e yz anche se scaricati da forze.

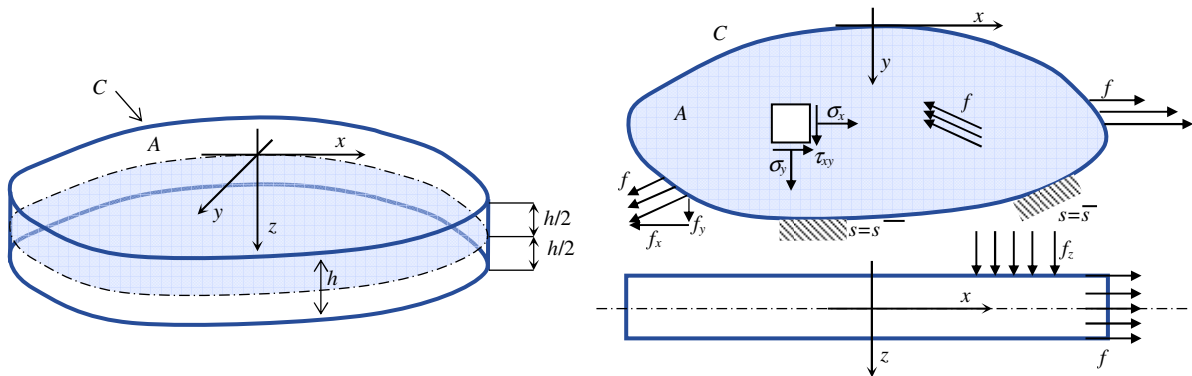


Fig.36.1 - Le geometria delle lastre e il sistema di riferimento utilizzato.

Determinazione diretta delle equazioni di compatibilità

Le equazioni di compatibilità per lastre e piastre possono essere dedotte direttamente assumendo alcune ipotesi semplificative sul loro comportamento a deformazione. Una teoria semplificata, adatta al caso di piccoli spostamenti, è quella di *Kirchoff*. In base alla teoria di Kirchoff, definendo *normali* i segmenti disposti ortogonalmente al piano medio della piastra ed estesi dal bordo superiore al bordo inferiore della piastra stessa, si ammette che:

- 1) le normali rimangono rettilinee, cioè non si inflettono,
- 2) le normali rimangono indeformate, cioè lo spessore della lastra rimane costante,
- 3) le normali rimangono ortogonali al piano medio.

Una ulteriore ipotesi semplificativa è quella dei *piccoli spostamenti*, che consente, tra l'altro, di approssimare la tangente dell'angolo di rotazione di una normale con l'angolo stesso.

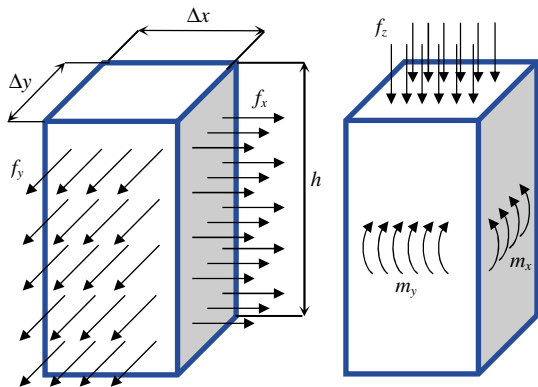


Fig.36.2 - Carichi agenti su un elementino di lastra: a sinistra nel piano, a destra fuori dal piano.

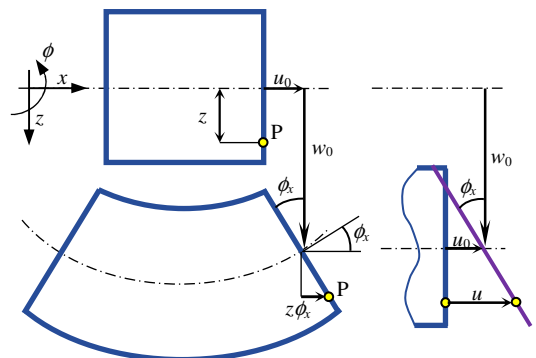


Fig.36.3 - Componenti dello spostamento in direzione x del punto P di coordinate x, y, z appartenente ad una lastra.

Naturalmente l'ipotesi 2) non può essere vera in generale in presenza di tensioni σ_x e σ_y per via dell'effetto Poisson: si tratta di una semplificazione che permette di risolvere in modo più agevole il problema; una stima della deformazione in direzione z può essere effettuata dopo avere calcolato le tensioni utilizzando l'apposita equazione costitutiva (3.39).

In base a queste assunzioni, gli spostamenti in direzione verticale w risultano funzione delle sole variabili x e y e possono essere considerati come coincidenti con quelli del piano medio della lastra di coordinata $z=0$, cioè

$$w = w_0(x, y) \tag{36.1}$$

mentre gli spostamenti nelle direzioni x e y possono essere ottenuti dalla somma dello spostamento del *baricentro* della normale (il punto avente coordinata $z=0$), dato dalle funzioni $u_0(x,y)$ e $v_0(x,y)$, più una componente dovuta alle rotazioni ϕ_x e ϕ_y della normale stessa, direttamente proporzionale alla distanza z da tale baricentro. Le rotazioni ϕ_x e ϕ_y delle normali sono considerate positive se antiorarie e gli indici x e y sono riferiti alla direzione dello spostamento che ne consegue e non alla direzione del vettore che le rappresenta. In definitiva gli spostamenti u e v del generico punto della lastra sono dati da

$$u = u_0 + z \phi_x \qquad v = v_0 + z \phi_y \tag{36.2}$$

in queste relazioni la dipendenza da x e y delle componenti di spostamento è presente nelle funzioni u_0 , v_0 , ϕ_x e ϕ_y e la dipendenza da z è lineare.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti e in base alle ipotesi di Kirchoff, le rotazioni delle normali possono essere poste in relazione con gli abbassamenti w mediante le seguenti equazioni

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{36.3a,b}$$

Il segno meno nelle (3) è dovuto all'orientamento dell'asse z e alla convenzione dei segni assunta per le rotazioni. Gli spostamenti nelle direzioni x e y possono essere ottenuti come:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \qquad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{36.4a,b}$$

In fig.3 è rappresentata la deformazione di un elemento di lastra: in particolare è possibile osservare la relazione tra gli abbassamenti w e la rotazione ϕ_x e i componenti dello spostamento in direzione x di un punto P dati dalla (4a).

Dalla seconda e dalla terza ipotesi di Kirchoff discende rispettivamente che $\epsilon_z=0$ e $\gamma_x=\gamma_z=0$, quindi, in base alle definizioni (3.6), le deformazioni possono essere scritte come

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_{x_0} + z k_x \qquad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_{y_0} + z k_y \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy_0} + z k_{xy} \tag{36.5a-c}$$

essendo ϵ_{x_0} , ϵ_{y_0} e γ_{xy_0} le deformazioni nei punti del piano medio della lastra:

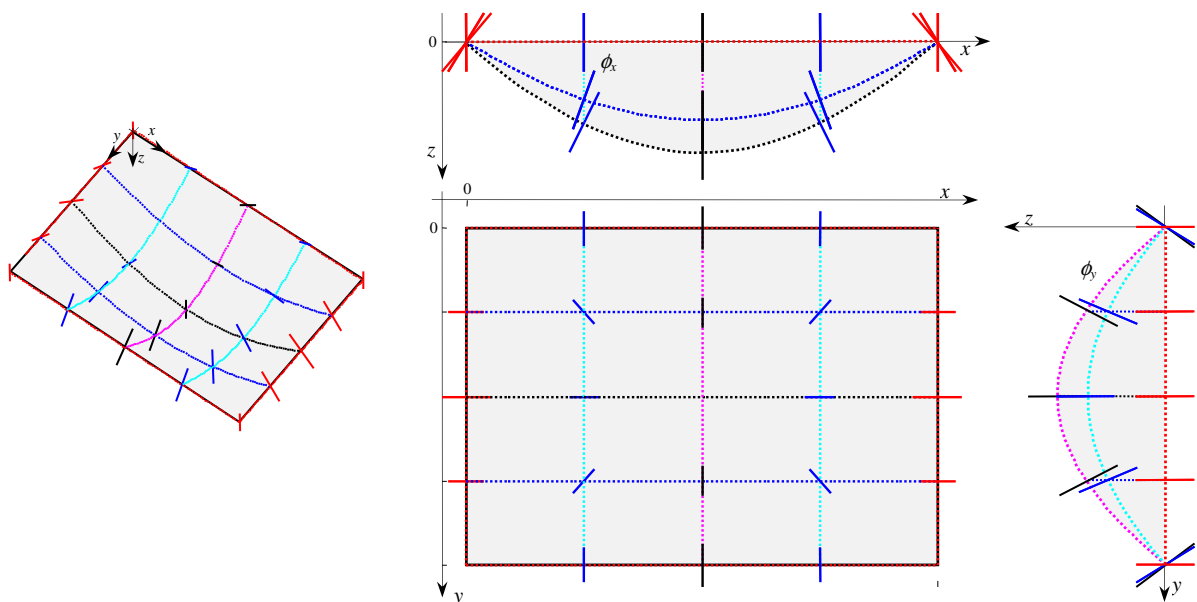


Fig.36.4 - Configurazione assunta dalle normali di una lastra rettangolare appoggiata sui 4 lati soggetta ad un carico f_z uniforme. A sinistra visualizzazione in prospettiva, a destra proiezioni ortogonali.

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \gamma_{xy_0} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad (36.6a-c)$$

e k_x , k_y e k_{xy} le *curvature* flessionali e torsionale del piano medio della lastra nei piani xz e yz :

$$k_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad k_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial \phi_x}{\partial y} = 2 \frac{\partial \phi_y}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (36.7a-c)$$

In fig.4 è mostrata la configurazione assunta dalle normali di una lastra rettangolare appoggiata sui 4 lati soggetta ad un carico f_z uniforme. Nella proiezione sul piano xz è possibile osservare come le normali disposte lungo la direzione y abbiano rotazioni ϕ_x variabili sia rispetto all'ascissa x , dando luogo a curvature flessionali (7a), sia rispetto all'ascissa y , dando luogo a curvature torsionali (7c) (ad eccezione di quelle appartenenti al piano di simmetria); analoga osservazione può essere fatta nel piano yz relativamente alla variazione delle rotazioni ϕ_y lungo le direzioni y e x .

Le deformazioni possono essere quindi riassunte nella seguente relazione

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (36.8)$$

Osservando la (8) si nota che le deformazioni della lastra risultano dipendere soltanto dalle deformazioni nel piano medio e dalla funzione w . Le (1), (4) e (6), a loro volta, mostrano che le funzioni u , v e w relative alle lastre sono più semplici rispetto al caso generico, poiché w non è funzione di z e u e v vi dipendono in modo lineare e legato alle derivate della funzione w stessa.

Equazioni costitutive

In base alle ipotesi semplificative, le tensioni agenti nel piano xy possono essere analizzate separatamente da quelle fuori dal piano. Per la piccolezza dello spessore, le equazioni costitutive (3.23-24) possono essere scritte come nel caso di stato di tensione piano (3.40) ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (36.9,10a,b)$$

Come già detto, se utile, per effettuare una stima approssimata delle deformazioni ε_z trascurate nell'impostazione del problema, alle (15) può essere affiancata l'equazione (3.39) relativa alle deformazioni di Poisson, qui riscritta:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.39)$$

Utilizzando le equazioni costitutive (9) e le equazioni di compatibilità (8) è possibile descrivere le tensioni in funzione degli spostamenti, ai fini della riscrittura delle equazioni di equilibrio in funzione degli spostamenti:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \right) \quad (36.11)$$

Le (11), scritte per esteso, forniscono

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - 2z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (36.11b)$$

Il fattore $1/(1+\nu)$ presente nell'espressione di τ_{xy} è ricavato in base alla relazione $1/(1+\nu)=(1-\nu)/(1-\nu^2)$. In assenza di spostamenti u_0, v_0 le (11b) si riducono nel modo seguente

$$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \tau_{xy} = -\frac{zE}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (36.11c)$$

Risultanti nelle direzioni cartesiane

Nel caso delle lastre, analogamente al caso ben noto delle travi, è conveniente operare con sollecitazioni *risultanti*, invece che con le tensioni. In particolare tali risultanti sono le forze e i momenti *ad unità di lunghezza* agenti sulle normali (fig.5) e si ottengono integrando rispetto allo spessore h della lastra, rispettivamente, le tensioni e i prodotti delle tensioni per le distanze dal baricentro della normale.

Adottando una convenzione dei segni analoga a quella delle travi (fig.5), integrando le tensioni agenti nel piano xy si ottengono le seguenti forze normali e di taglio ad unità di lunghezza agenti nel piano xy stesso:

$$N_x = \int_z \sigma_x dz \quad N_y = \int_z \sigma_y dz \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_z \tau_{xy} dz = \int_z \tau_{yx} dz \quad (36.12a-c)$$

Integrando le tensioni tangenziali agenti in direzione z si ottengono le forze di taglio a unità di lunghezza in direzione z :

$$T_x = \int_z \tau_{xz} dz \quad T_y = \int_z \tau_{yz} dz \quad (36.13a,b)$$

Integrando le tensioni agenti nel piano xy moltiplicate per la distanza z dal baricentro della normale si ottengono i momenti flettenti ad unità di lunghezza aventi assi paralleli al piano xy :

$$M_x = \int_z z \sigma_x dz \quad M_y = \int_z z \sigma_y dz \quad (36.14a,b)$$

Integrando le tensioni tangenziali agenti nel piano xy moltiplicate per la distanza z dal baricentro della normale si ottengono i momenti torcenti aventi assi paralleli al piano xy

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_z z \tau_{xy} dz = \int_z z \tau_{yx} dz \quad (36.15)$$

In base alle definizioni (12-15) e alla convenzione sui segni delle tensioni, i versi positivi dei risultanti sono quelli mostrati nelle fig.5 e 6, essendo opposti sulle facce opposte. In particolare, i momenti M_{xy} sono positivi sono *entranti* e i momenti M_{yx} *se uscenti*. È opportuno notare che l'indice dei momenti si riferisce alla direzione della normale della sezione nella quale agiscono (o alla direzione della tensione dalla quale sono ottenuti) e non alla direzione del vettore che li rappresenta. Com'è ovvio, i risultanti sono indipendenti dalla variabile z .

È opportuno, inoltre, sottolineare alcuni aspetti che differenziano il comportamento meccanico delle piastre da quello delle travi. Come detto, le sollecitazioni (12-15) sono forze e momenti risultanti ad unità di lunghezza, agenti su ciascuna normale e non i risultanti agenti sull'intera sezione della lastra, come accade per le travi. Se si divide la lastra in 2 parti mediante una sezione, ad esempio, di normale x , avente ascissa x generica, i risultanti $N_x, N_{xy}, T_x, M_x, M_{xy}$, in generale, sono variabili lungo la direzione y . Mentre nelle travi la determinazione dei risultanti agenti sull'intera sezione permette poi di determinare le tensioni agenti in ciascun punto, nel caso delle lastre ciò non è possibile, proprio perché i risultanti (12-15) sono funzioni della posizione lungo la sezione.

Un'altra differenza tra lastre e travi riguarda la presenza del momento torcente M_{xy} , che si riscontra anche in assenza di momenti torcenti applicati. Ciò è dovuto al fatto che, in generale, come visto in fig.4, a seguito della deformazione, sezioni della lastra parallele tra loro si trovano ad avere curvature differenti nei piani contenenti l'asse z , trasmettendosi delle tensioni tangenziali con distribuzioni del tipo di quelle mostrate in fig.5e e in fig.7 relativamente al contorno.

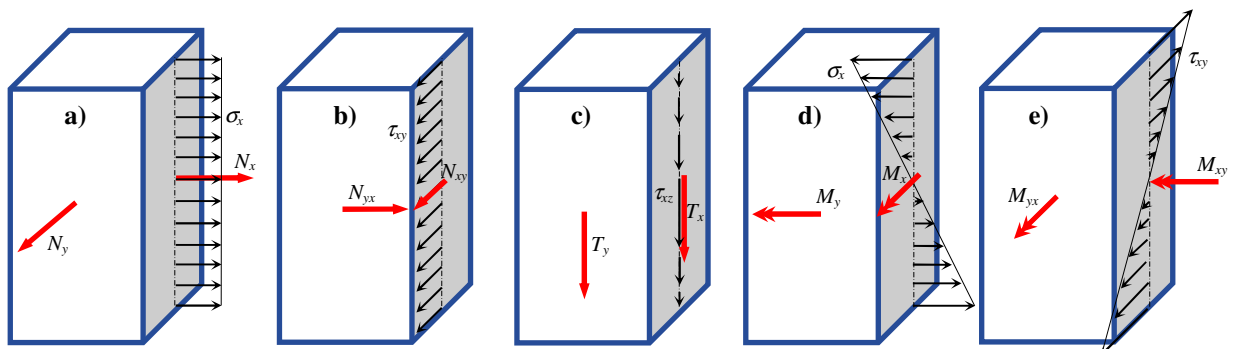


Fig.36.5 – Risultanti agenti su un elemento di lastra di dimensioni $h, \Delta x, \Delta y$; nel piano: a) N_x-N_y , b) $N_{xy}-N_{yx}$; fuori dal piano: c) T_x-T_y d) M_x-M_y , e) $M_{xy}-M_{yx}$. I versi positivi sulle facce opposte sono opposti in base alle (12-15).

Equazioni di equilibrio

Le equazioni di equilibrio indefinite della lastra possono essere scritte in funzione dei risultanti, considerando l'equilibrio di un elemento di dimensioni infinitesime dx e dy e altezza finita h (fig.6). In particolare possono essere scritti 2 sistemi di equazioni di equilibrio che risultano *indipendenti* tra loro e che descrivono rispettivamente il comportamento della lastra per le sollecitazioni agenti *nel piano* e *fuori dal piano*: nelle prime sono presenti le sole forze esterne f_x ed f_y , agenti parallelamente al piano xy , nelle seconde tutte le forze in direzione verticale f_z e i momenti m_x ed m_y .

Per ottenere le forze agenti sull'elemento di lastra, i risultanti devono essere moltiplicati per la larghezza della sezione sulla quale agiscono (dx o dy), mentre le azioni esterne devono essere moltiplicate per la superficie $dx dy$.

Sommando tutte le forze agenti parallelamente al piano xy sull'elemento e dividendo per il prodotto $dx dy$ (vedi Appendice A1), le equazioni di equilibrio alle traslazioni orizzontali nelle direzioni x e y risultano rispettivamente:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (36.16a,b)$$

Poiché queste equazioni contengono esclusivamente le forze esterne f_x ed f_y agenti parallelamente al piano xy , si deduce che i risultanti N_x , N_y , N_{xy} dipendono solo dai carichi nel piano.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione rispetto agli assi y e x , sono rispettivamente:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + f_z = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + m_x - T_x = 0 \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + m_y - T_y = 0 \quad (36.17a-c)$$

In queste equazioni appaiono esclusivamente le sollecitazioni agenti fuori dal piano, cioè f_z , m_x ed m_y da cui si deduce che i risultanti M_x , M_y , M_{xy} , T_x , T_y dipendono soltanto da tali carichi. I momenti distribuiti m_x ed m_y presenti nelle (17b,c) sono ovviamente sollecitazioni molto meno frequenti delle forze distribuite f . In assenza di tali momenti, le (17b,c) possono essere riscritte come segue

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y = 0 \quad (36.18a,b)$$

dando luogo alle seguenti relazioni tra sforzi di taglio e momenti flettenti:

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (36.19a,b)$$

Sostituendo le funzioni T_x e T_y presenti nella (17a) con i momenti M_x ed M_y mediante le (19), si ottiene un'ulteriore equazione contenente solo i momenti:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + f_z = 0 \quad (36.20)$$

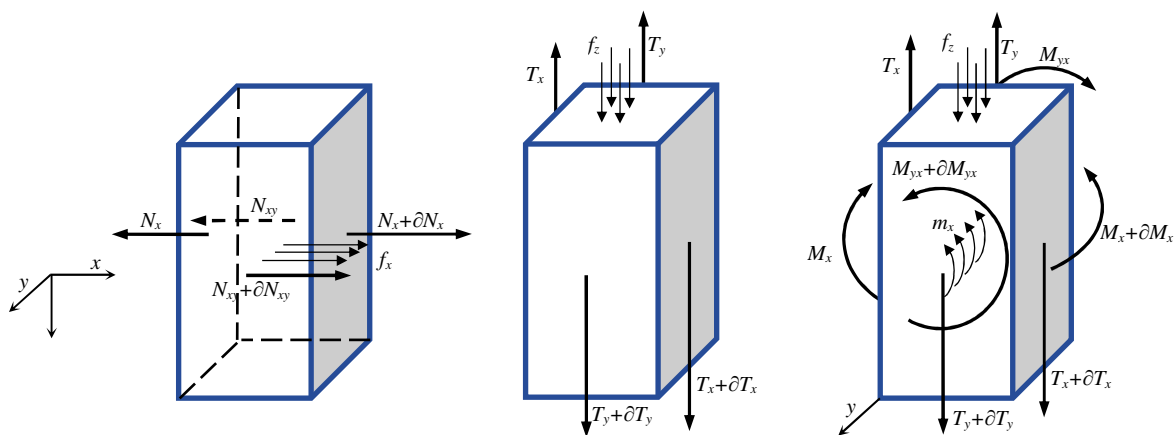


Fig.36.6 – Carichi e risultanti in equilibrio: a sinistra equilibrio alla traslazione in direzione x , al centro equilibrio alla traslazione verticale, a destra equilibrio alla rotazione attorno ad un asse parallelo all'asse y (come mostrato in figura).

Relazioni tra risultanti e spostamenti

Poiché, come detto in precedenza, nella soluzione del problema delle lastre è opportuno utilizzare come incognite di sforzo i risultanti (12-15) piuttosto che le tensioni, le equazioni costitutive (11) possono essere utilizzate per mettere in relazione i risultanti con gli spostamenti. In particolare, introducendo le tensioni in funzione degli spostamenti tramite le (11) nelle espressioni dei risultanti (12-15) e integrando rispetto a z (vedi appendice A2), è possibile ottenere le seguenti relazioni relative ai risultanti agenti *nel piano* N_x, N_y, N_{xy} :

$$N_x = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \quad N_y = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad N_{xy} = \frac{1}{2} \frac{hE}{1+\nu} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (36.21a-c)$$

e le seguenti relazioni relative ai momenti M_x, M_y, M_{xy} :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (36.22a-c)$$

In base alle (19) e alle (22a-c), inoltre, è possibile ottenere le seguenti relazioni relative ai risultanti agenti *fuori dal piano* T_x, T_y :

$$T_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad T_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (36.22d-e)$$

A sua volta, D è la *rigidezza flessionale* della lastra definita come

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \quad (36.23)$$

Osservando che nella (23) il termine $h^3/12$ è il momento di inerzia *ad unità di lunghezza* della sezione, è facile notare l'analogia tra D e il prodotto EI della teoria delle travi, essendo I il momento di inerzia della sezione della trave rispetto all'asse della flessione. La presenza del termine $(1-\nu^2)$ a denominatore mostra che, a parità di condizioni di carico e vincolo, le lastre hanno una rigidezza flessionale maggiore rispetto alle travi, per effetto della deformazione trasversale che si genera (vedi appendice 5).

Le (21) mostrano le funzioni u_0, v_0 sono legate esclusivamente ai risultanti N_x, N_y, N_{xy} , i quali, a loro volta, dipendono esclusivamente dai carichi nel piano f_x ed f_y in base alle (16). Le (22) mostrano che la funzione w è legata ai risultanti $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$, i quali, dipendono dalle sole azioni fuori dal piano rappresentate dalla funzioni f_z, m_x ed m_y , in base alle (17). Queste osservazioni mostrano come sia possibile separare l'analisi relativa ai carichi agenti nel piano (f_x, f_y) da quella relativa problemi ai carichi agenti fuori dal piano (f_z, m_x, m_y).

Relazioni tra tensioni e risultanti

Le relazioni tra tensioni e risultanti (fig.5) possono essere ottenute sostituendo nelle relazioni tra le tensioni e gli spostamenti (11), le espressioni delle derivate di u_0, v_0 e w in funzione dei risultanti stessi, ricavate dalle (21) e (22) (vedi Appendice A3). Trascurando le sollecitazioni dovute ad N_{xy} , per i 2 casi di sollecitazioni nel piano e fuori dal piano, si ottengono rispettivamente le seguenti relazioni:

$$\sigma_x = N_x/h \quad \sigma_y = N_y/h \quad (36.24a,b)$$

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z \quad (36.25a-c)$$

Le tensioni tangenziale massime lungo h dovute a T_x e T_y , agenti in corrispondenza del baricentro della sezione, possono essere ottenute mediante la formula di Jourawsky in modo analogo al caso delle travi:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{T_x}{h} \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{h} \quad (36.26d,e)$$

Soluzione del problema fuori dal piano

Le equazioni disponibili per la soluzione del problema fuori dal piano sono adesso le equazioni di equilibrio (17-20) e le relazioni tra risultanti e spostamenti (22). Osservando che le equazioni (22) mettono in relazione tutti risultanti con la sola funzione w , l'obiettivo diviene quello di ottenere un'equazione nella quale compaia come unica incognita tale funzione. Introducendo, le espressioni dei momenti in funzione degli spostamenti (22a-c) nella (20) si ottiene la seguente equazione differenziale nell'unica incognita costituita dalla funzione degli spostamenti verticali $w(x,y)$:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{f_z}{D} \quad (36.27)$$

che, ricordando la (3.54), può essere riscritta come

$$\nabla^4 w = \frac{f_z}{D} \quad (36.28)$$

L'eq.(28), similmente alla (3.53), è detta *equazione biarmonica*.

Le condizioni al contorno

La soluzione completa del problema elastico rappresentato dalle (27,28) richiede che la funzione w rispetti le condizioni cinematiche e meccaniche al contorno della lastra. Per studiare il comportamento al contorno della lastra è necessario, per prima cosa, introdurre in ogni punto del contorno stesso un sistema di coordinate i cui assi sono orientati nelle direzioni normale e tangente al contorno, n e t , e nella direzione verticale z , come mostrato in fig.7. In particolare, una direzione di normale n generica, formante un angolo α con l'asse x , e la direzione t ad essa ortogonale possono essere identificate mediante due versori \mathbf{n} e \mathbf{t} definiti come

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36.29a-b)$$

Ovviamente nei casi particolari di contorni rettilinei disposti parallelamente agli assi x e y , gli assi n e t risultano ovunque coincidenti con gli assi x e y .

Rotazioni e curvature in direzione generica n e al contorno

È opportuno ricordare le seguenti relazioni tra le rotazioni delle normali $\phi_x = -\partial w / \partial x$ e $\phi_y = -\partial w / \partial y$ secondo assi cartesiani e le rotazioni ϕ_n e ϕ_t , secondo assi n e t inclinati di un angolo α rispetto all'asse x (fig.7)

$$\phi_n = -\frac{\partial w}{\partial n} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) \quad \phi_t = -\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} n_y - \frac{\partial w}{\partial y} n_x \quad (36.30a-b)$$

che derivano dalle relazioni esistenti in generale tra le derivate parziali di una funzione in un punto e le derivate in direzioni assegnate e dalle relazioni tra le componenti dei versori \mathbf{n} e \mathbf{t} (29).

Applicando la stessa regola di derivazione alle (30) si ottengono le relazioni tra le curvature della lastra nelle direzioni cartesiane e quelle nelle direzioni n e t :

$$k_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial n} = -\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) \quad (36.31a)$$

$$k_{nt} = \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (n_y^2 - n_x^2) \quad (36.31b)$$

essendo $k_{tn} = d\phi_t/dn = k_{nt}$.

Per quanto concerne l'aspetto cinematico, la presenza di vincoli permette di imporre condizioni sugli spostamenti e/o sulle rotazioni delle normali, cioè sui valori assunti al contorno dalla funzione w e/o dalle sue derivate prime secondo le relazioni (3), se i contorni hanno normali coincidenti con le direzioni x e y , e (30) nel caso generale.

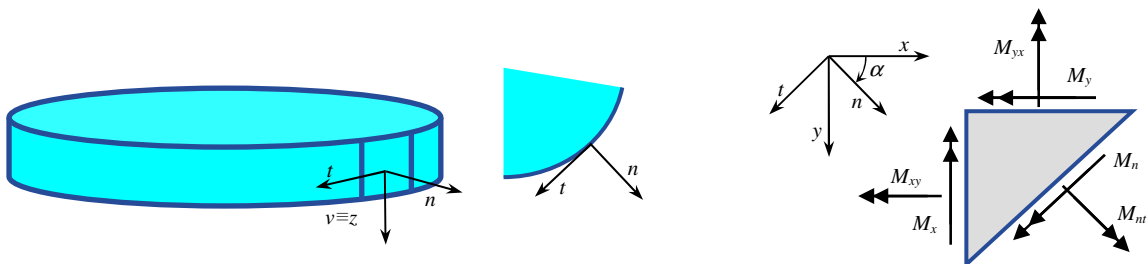


Fig.36.7 –Sistema di assi al contorno e risultanti agenti su sezione di normale generica n .

Risultanti in direzioni generica n e al contorno

Le reazioni vincolari al contorno sono costituite da sforzi di taglio, momenti flettenti e momenti torcenti agenti in direzione parallela e ortogonale al contorno stesso. Nel caso di contorni paralleli agli assi x o y , le reazioni vincolari hanno moduli coincidenti con quelli dei risultanti ottenibili mediante le (13-15), mentre i segni devono essere attribuiti in modo opportuno; in particolare il segno coincide con quello dei risultanti se i versi degli assi xyz sono concordi con quelli relativi alle reazioni vincolari e viceversa. Sempre nel tal caso di contorni paralleli agli assi x o y , le condizioni al contorno di tipo meccanico riguardano i valori assunti dalle derivate parziali di secondo e terzo ordine della funzione w in base alle relazioni (22).

Azioni interne simili a quelle descritte dalle (12-15) relativamente a sezioni di normale parallela agli assi di riferimento x e y vengono scambiate, come è ovvio, lungo sezioni aventi qualsiasi direzione (fig.7). Considerando sezioni di normale n generica, formante un angolo α con l'asse x , i risultanti sono legati alle tensioni agenti in tali direzioni mediante relazioni analoghe alle (12-15). Per le sollecitazioni fuori dal piano, si ha

$$M_n = \int_z z \sigma_n dz \quad M_{nt} = \int_z z \tau_{nt} dz \quad T_n = \int_z \tau_{nz} dz \quad (36.32a-c)$$

essendo t la direzione ortogonale ad n come in fig.7. Considerando le relazioni esistenti tra le tensioni cartesiane e le tensioni agenti in direzione n generica, ad esempio le (1.45-1.47), se in un punto sono noti i risultanti agenti su sezioni di normale parallela agli assi coordinati, i risultanti agenti nelle direzioni $n-t$ possono essere ottenuti come:

$$T_n = T_x n_x + T_y n_y \quad (36.33)$$

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \quad (36.34)$$

$$M_{nt} = (M_y - M_x) n_x n_y - M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \quad (36.35)$$

Queste relazioni sono utili per la determinazione delle reazioni ai contorni, nel qual caso le direzioni n e t vanno interpretate come direzioni normale e tangente al contorno stesso.

Le relazioni tra le funzioni M_n, M_{nt} e T_n e le derivate della funzione w , analoghe delle (22), in base alle (33-35) e alle (31), sono date nella seguente forma (vedi appendice A4):

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad M_{nt} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (36.36a-b)$$

$$T_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right) \quad (36.37a-b)$$

In base alla (32b), le sollecitazioni torcenti al contorno M_{nt} sono i momenti risultanti di distribuzioni di tensioni tangenziali τ_{nt} , come si vede nell'esempio di fig.8a. In generale non è detto che i vincoli al contorno siano in grado di esplicitare distribuzioni di tensione di questo tipo, come nel caso dell'esempio di fig.8b. In tal caso le reazioni vincolari sono costituite da coppie di forze di taglio agenti in direzione verticale come le T' mostrate in fig.8a. Al fine di semplificare l'analisi al contorno, facendo appello al principio di equivalenza di Saint-Venant, in generale i momenti M_{nt} possono essere sostituiti da coppie di forze tangenziali di tale tipo. Le forze di tali coppie si sommano dando luogo a forze T'_{nz} , dette *forze di sostituzione* o *tagli di Kirchoff*, poste in direzione in direzione verticale, che possono essere legate alla derivata della funzione M_{nt} stessa in un modo simile alla relazione tra taglio e momento flettente nelle travi (vedi ad esempio l'eq.18a, nel caso $n=x$ e $\partial M_x / \partial x=0$):

$$T'_n = \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (36.38)$$

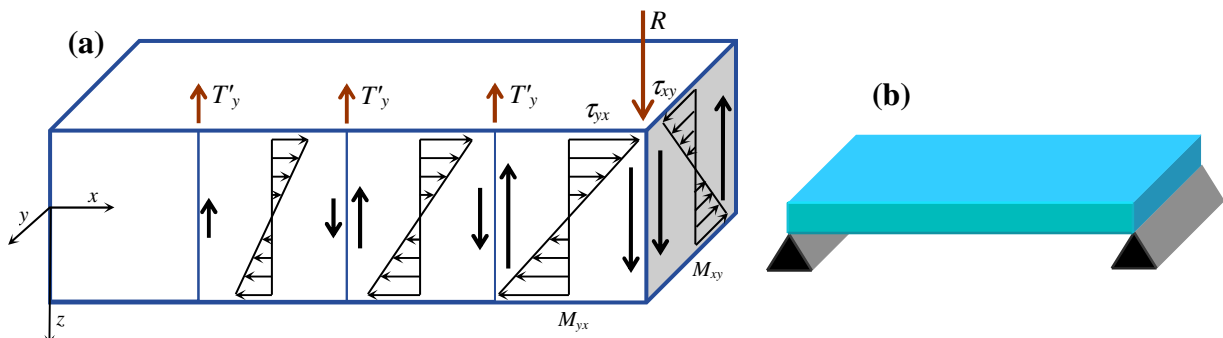


Fig.36.8 - Problematiche relative alle distribuzioni di tensioni tangenziali e alle forze di sostituzione e al contorno.

In conseguenza di ciò, la reazione vincolare ad unità di lunghezza agente in direzione verticale risulta data dalla seguente somma di due componenti

$$R_n = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \quad (36.39)$$

e le azioni sul contorno possono essere valutate mediante le sole componenti M_n (36a) ed R_n (39).

In presenza di variazioni brusche del momento M_{nt} lungo la direzione t , la distribuzione delle forze di taglio presenta un salto costituito da una *forza concentrata* data dalla differenza tra i momenti agenti prima e dopo la sezione. In particolare, salti del valore del momento si verificano in corrispondenza di eventuali spigoli ai contorni. Se M_{nt2} ed M_{nt1} sono momenti agenti su due contorni che formano tra loro un certo angolo, in corrispondenza dell'angolo stesso, si ha

$$R = M_{nt2} - M_{nt1} \quad (36.40)$$

È importante notare che il segno da attribuire ai momenti nella (40) deve essere determinato in base alla direzione dell'azione della forza di sostituzione che viene generata e non dalla convenzione dei segni dei risultanti. In particolare, se gli spigoli formano un angolo retto (fig.8) si deve considerare $M_{nt2} = -M_{nt1}$ e la (36) si riduce a

$$R = 2M_{nt} \quad (36.41)$$

In fig.8a è mostrato il caso di 2 contorni paralleli agli assi x e y , formanti un angolo retto. In questo caso per i 2 contorni si ha rispettivamente $n \equiv x$, $t \equiv y$ e $n \equiv y$, $t \equiv x$. Nell'esempio riportato in figura i momenti M_{xy} ed M_{yx} in corrispondenza dello spigolo hanno verso negativo (vedi fig.5) e contribuiscono alla generazione di una reazione vincolare concentrata R diretta verso il basso, di modulo pari alla somma dei 2 momenti. Nel caso di carichi diretti verso il basso queste reazioni tendono ad impedire che lo spigolo si sollevi, e viceversa. Ovviamente tali reazioni si possono generare se il vincolo è in grado di reagire con tale forza, come nell'esempio mostrato in fig.8. Sempre nell'esempio riportato, la funzione che descrive i momenti M_{yx} lungo il lato di normale y varia linearmente in direzione x e la funzione T'_y risulta costante.

Le relazioni tra le reazioni vincolari (39,41) e le derivate della funzione w , analoghe delle (36-37), in base alle (16-18) e alle (32a) e (37), sono date nella seguente forma (vedi appendice A4):

$$R_n = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} \right] \quad R = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (36.42a-b)$$

Si ricorda che le grandezze descritte dalle (36a), (42a,b) sono i *risultanti agenti sulla lastra in corrispondenza dei vincoli* per cui coincidono con le reazioni vincolari in modulo, ma *hanno segni dipendenti dalla direzione della normale della sezione su cui agiscono*, in base a quanto mostrato in fig.5; i segni delle reazioni vincolari devono essere attribuiti in relazione al sistema di riferimento generale mostrato in fig.1.

Le condizioni cinematiche e meccaniche in corrispondenza dei contorni dipendono dalla natura dei vincoli esistenti, in particolare

- contorni *incastri*: risultano nulle sia la funzione w che le sue derivate nelle direzioni n e t ,
- contorni *appoggiati*: risultano nulle la funzione w , la sua derivata nella direzione t e il momento M_n ,
- contorni *liberi*: risultano nulli la reazione R_n e i momenti M_n ed M_{nt} .

In particolare si ha:

Incastro	$w = 0$	$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	$\phi_t = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$	$R_n = \bar{R}_n$	$M_n = \bar{M}_n$	$M_{nt} = \bar{M}_{nt}$	
Appoggio	$w = 0$	$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} \neq 0$	$\phi_t = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$	$R_n = \bar{R}_n$	$M_n = 0$	$M_{nt} = \bar{M}_{nt}$	(36.43a-c)
Libero	$w \neq 0$	$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} \neq 0$	$\phi_t = \frac{\partial w}{\partial t} \neq 0$	$R_n = 0$	$M_n = 0$	$M_{nt} = 0$	

Si deve notare ancora una volta che le relazioni (36a) e (42a) permettono di esprimere le condizioni relative alle relazioni vincolari (cioè $M_n=0$ e $R_n=0$ nei casi appropriati), sotto forma di condizioni relative alle derivate della funzione w .

Piastra rettangolare appoggiata

In questo paragrafo si considera il caso della piastra rettangolare con i lati disposti parallelamente agli assi x e y , rispettivamente di lunghezza a e b , vincolata sui 4 lati mediante appoggi (fig.9). Assumendo assi x e y coincidenti con 2 lati della piastra, le condizioni al contorno, sono espresse dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} w = 0 \quad M_x = 0 \quad x=0, x=a \\ w = 0 \quad M_y = 0 \quad y=0, y=b \end{aligned} \quad (36.44)$$

Poiché lo spostamento w risulta nullo lungo ciascun contorno, anche le derivate nella direzione parallela al contorno stesso risultano nulle (fig.9), per cui si ha

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad x=0, x=a \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad y=0, y=b \quad (36.45a,b)$$

Dal fatto che i momenti (22a,b) risultano nulli si ottiene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad x=0, x=a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad y=0, y=b \quad (36.46a,b)$$

In definitiva, in base alle (44-46), le condizioni al contorno della funzione w sono

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad x=0, x=a, y=0, y=b \quad (36.47)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad x=0, x=a \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad y=0, y=b \quad (36.48a,b)$$

Ai contorni agiscono le reazioni (38b) e (40), che, in questo caso, possono essere riscritte come

$$R_x = (\pm) - D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad R_y = (\pm) - D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (36.49a,b)$$

$$R = (\pm) - 2D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = (\pm) - 2M_{xy} \quad [x=0, y=0], [x=0, y=b], [x=a, y=0], [x=a, y=b] \quad (36.50)$$

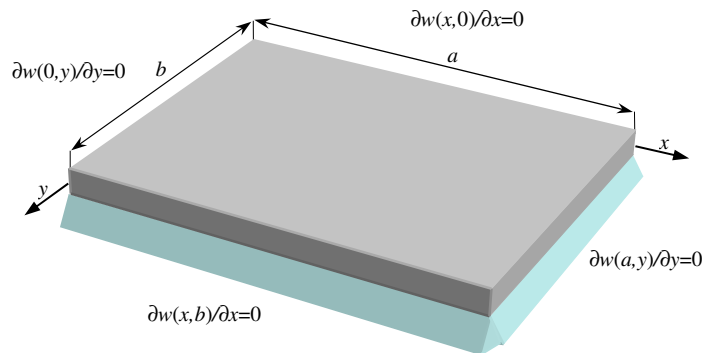


Fig.36.9 - La lastra rettangolare appoggiata.

Carico sinusoidale

Una soluzione dell'eq.(27,28) importante nel caso di piastre *rettangolari appoggiate* è quella relativa al carico trasversale descritto da una funzione *sinusoidale* nelle variabili x e y . Il carico trasversale sinusoidale è descritto da un'equazione di questo tipo

$$f_z = F_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (36.51)$$

nella quale n ed m sono due numeri interi. In fig.10 è mostrato l'andamento della funzione (51) per $f_0=1$, $a=b=10$, nei 4 casi di $n=m=1$, $n=1$ ed $m=2$, $n=2$ ed $m=1$, ed $n=m=2$.

In questo caso la soluzione della (28) è data nella seguente forma:

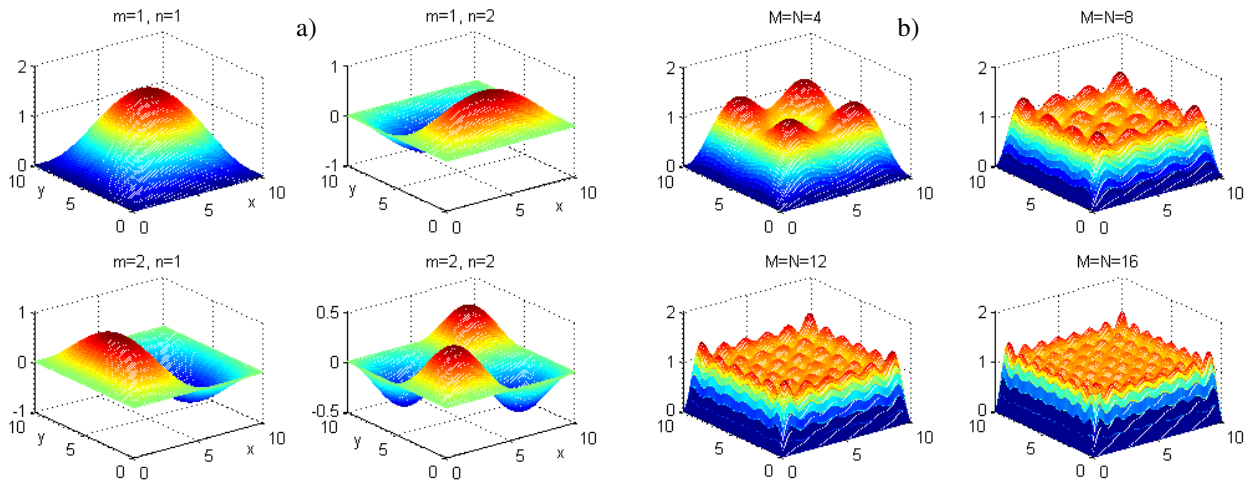


Fig.36.10 – Caso di lastra di dimensioni $a=10, b=10$: a) esempi di funzioni sinusoidali bidimensionali del tipo espresso mediante l'eq.(51); b) carico uniformemente distribuito approssimato rispettivamente mediante $N=M=4,8,12,16$ termini della serie di Fourier.

$$w = C f_z = \frac{f_z}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} = \frac{F_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)}{\pi^4 D [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad (36.52)$$

È facile verificare che la (52) rispetta le condizioni ai contorni (47-48).

Come si vedrà nei paragrafi successivi, sebbene un carico del tipo descritto dall'eq.(51) non rappresenti in se casi di particolare utilità pratica, poiché è possibile approssimare bene distribuzioni di carico di forma qualsiasi mediante una serie di tali funzioni (la serie doppia di Fourier), la soluzione di tutti questi casi è ottenibile sfruttando la soluzione (52) e il principio di sovrapposizione degli effetti.

Introducendo la costante $K_{m,n}$ e la funzione $s_{m,n}$ definite come

$$K_{m,n} = \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad s_{m,n} = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (36.53,54)$$

le (51) e (52) possono essere riscritte più semplicemente come

$$f_z = F_0 s_{m,n} \quad w = \frac{1}{\pi^4 D} K_{m,n} F_0 s_{m,n} \quad (36.55,56)$$

Derivando opportunamente la (56) rispetto alle coordinate x e y è possibile ottenere le espressioni dei risultanti, delle tensioni e delle deformazioni mediante le relazioni descritte nei paragrafi precedenti.

Carico generico

Come anticipato, una qualsiasi funzione delle coordinate x,y definita su un campo rettangolare di lati a e b e che rispetta le condizioni al contorno descritte dalle (47-48), può essere espressa mediante la serie doppia di Fourier così definita

$$f_z^F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{m,n} s_{m,n} \approx f_z \quad (36.57)$$

nella quale i coefficienti $F_{m,n}$ possono essere ottenuti mediante la seguente relazione

$$F_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_z s_{m,n} dy dx \quad (36.58)$$

Naturalmente il carico può essere rappresentato in modo perfetto mediante la (57) utilizzando un numero infinito di termini, cioè per $N=M \rightarrow \infty$, ma buone approssimazioni possono essere ottenute con un numero ragionevolmente limitato di termini, come mostrato nelle fig.10-11 per vari casi di funzioni f_z .

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione della (30,31), in base alle (52-57) diventa

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N K_{m,n} F_{m,n} s_{m,n} \quad (36.59)$$

Nel seguito vengono mostrati tre casi di particolare interesse: il caso di carico uniformemente distribuito, il caso di carico uniformemente distribuito su un'area limitata e il caso di carico concentrato.

Carico uniformemente distribuito

Nel caso di carico distribuito uniformemente su tutta la superficie, di ampiezza pari a F_0 (fig.10b), i coefficienti della serie doppia di Fourier, ottenuti mediante la (58), possono essere espressi come

$$F_{m,n} = \frac{16F_0}{\pi^2} \frac{1}{mn} \quad m=n=1,3,5... \quad (36.60)$$

essendo i coefficienti con indice n e/o m pari nulli. Il carico f_z , in base alle (57) e (58), assume la forma:

$$f_z^F = \frac{16F_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \frac{16F_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{mn} s_{m,n} \quad m=n=1,3,5... \quad (36.61)$$

In fig.10b è mostrata l'approssimazione ottenibile utilizzando un numero limitato di termini della serie, in particolare nei casi di $N=M=4,8,12,16$.

In base alle (59) e (60) la funzione w diventa:

$$w = \frac{16}{\pi^6} \frac{F_0}{D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{mn} K_{m,n} s_{m,n} \quad m=n=1,3,5... \quad (36.62)$$

Carico uniformemente distribuito su area rettangolare limitata

Un altro caso di interesse è quello di carico distribuito uniformemente su un'area rettangolare limitata, definita nel campo $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, di ampiezza f_0 (fig.11a). I coefficienti della serie doppia di Fourier, ottenuti mediante la (58), possono essere espressi come

$$F_{m,n} = \frac{4F_0}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{a}x_2\right) \right] \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b}y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{b}y_2\right) \right] \frac{1}{mn} \quad (36.63)$$

e la funzione w può essere riscritta come:

$$w = \frac{4F_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{a}x_2\right) \right] \left[\cos\left(\frac{n\pi}{b}y_1\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{b}y_2\right) \right] \frac{1}{mn} K_{m,n} s_{m,n} \quad (36.64)$$

Carico concentrato

Nel caso di carico concentrato F_z , agente nel punto P di coordinate $x=x_P$, $y=y_P$, i coefficienti della serie doppia di Fourier, ottenuti mediante la (58), possono essere espressi come

$$F_{m,n} = \frac{4F_z}{ab} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_P\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y_P\right) \quad (36.65)$$

e la funzione w diventa:

$$w = \frac{4}{ab\pi^4} \frac{F_z}{D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_P\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y_P\right) K_{m,n} s_{m,n} \quad (36.66)$$

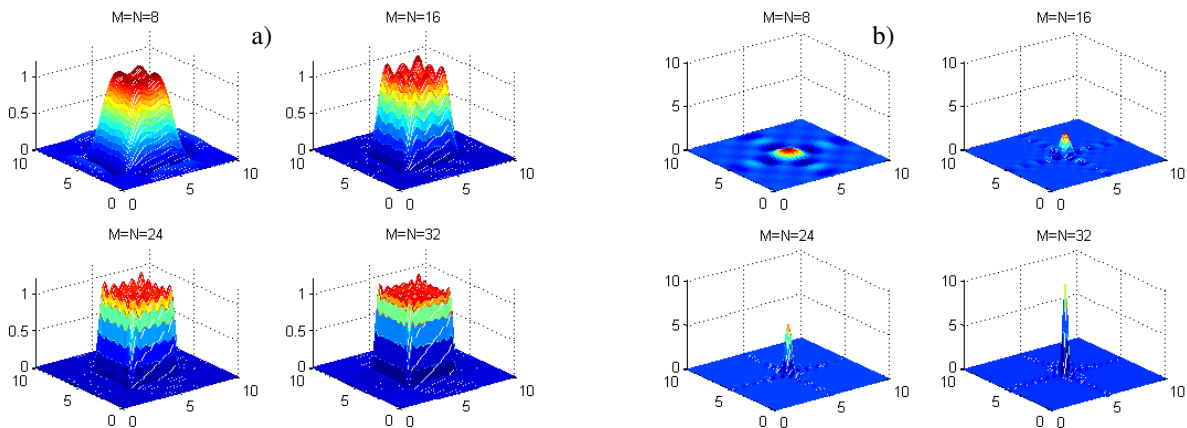


Fig.36.11 – Carichi su lastra di dimensioni $a=10$, $b=10$ approssimati mediante $N=M=8,16,32$, 65 termini della serie di Fourier: a) carico uniformemente distribuito sul rettangolo $3 \leq x \leq 7$, $3 \leq y \leq 7$ di ampiezza unitaria; b) carico unitario concentrato in mezzeria ($x_P=5$, $y_P=5$).

Espressioni generali e determinazione delle sollecitazioni

In questo paragrafo le relazioni generali per la determinazione della funzione w e dei risultanti per lastra appoggiata rettangolare soggetta a carico generico approssimabile in serie doppia di Fourier sono riscritte in forma adatta ad un'implementazione di calcolo numerico. È utile notare che le costanti (dipendenti dai numeri interi m ed n) sono indicate con lettera maiuscola, mentre le funzioni (dipendenti dalle coordinate x e y , oltre che dai numeri interi m ed n) sono indicate con lettera minuscola.

Le prime equazioni utili per l'analisi numerica sono le espressioni dei coefficienti $K_{m,n}$, delle funzioni $s_{m,n}$, dei coefficienti $F_{m,n}$ e del carico espresso in serie di Fourier f_z^F , qui riscritte:

$$K_{m,n} = \frac{1}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2} \quad s_{m,n} = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (36.53,54)$$

$$F_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_z s_{m,n} dy dx \quad f_z^F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{m,n} s_{m,n} \quad (36.58,57)$$

Nell'analisi della lastra, la (57) è utile solo per verificare la correttezza dell'approssimazione della funzione f_z , in quanto nella determinazione della funzione w e delle sue derivate sono necessari i soli coefficienti $F_{m,n}$ (58). Naturalmente i coefficienti $F_{m,n}$ possono essere calcolati con la (58) nel caso generale e con le (60), (63) e (65) nei casi particolari di carico uniformemente distribuito, uniformemente distribuito su area limitata e concentrato.

Introducendo i coefficienti $G_{m,n}$ definiti come

$$G_{m,n} = K_{m,n} F_{m,n} \quad (36.67)$$

la funzione w (59) può essere riscritta come:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N G_{m,n} s_{m,n} \quad (36.68)$$

Le derivate della funzione w

Come detto, la determinazione dei risultanti (22) e (49-50) richiede il calcolo delle derivate parziali di ordine 2 e 3 della funzione w rispetto alle ascisse x e y che, in base alla (68), possono essere espresse nel modo seguente

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N G_{m,n} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} s_{m,n} \quad (36.69)$$

A loro volta, le derivate di ordine da 2 a 3 di $s_{m,n}$, possono essere ottenute mediante le seguenti espressioni:

$$\frac{\partial^2 s_{m,n}}{\partial x^2} = -A_m^2 s_{m,n} \quad \frac{\partial^2 s_{m,n}}{\partial y^2} = -B_n^2 s_{m,n} \quad \frac{\partial^2 s_{m,n}}{\partial x \partial y} = A_m B_n c_m c_n \quad (36.70a-c)$$

$$\frac{\partial^3 s_{m,n}}{\partial x^3} = -A_m^3 c_m s_n \quad \frac{\partial^3 s_{m,n}}{\partial x \partial y^2} = -A_m B_n^2 c_m s_n \quad (36.70d-e)$$

$$\frac{\partial^3 s_{m,n}}{\partial y^3} = -B_n^3 s_m c_n \quad \frac{\partial^3 s_{m,n}}{\partial x^2 \partial y} = -A_m^2 B_n s_m c_n \quad (36.70f-g)$$

nelle quali i coefficienti A_m e B_n sono dati rispettivamente da

$$A_m = \pi m/a \quad B_n = \pi n/b \quad (36.71a-b)$$

e le funzioni s e c sono definite come

$$s_m = \sin(A_m x) \quad s_n = \sin(B_n y) \quad c_m = \cos(A_m x) \quad c_n = \cos(B_n y) \quad (36.72a-d)$$

La (54) può essere convenientemente riscritta come

$$s_{m,n} = s_m s_n \quad (36.73)$$

I risultanti

Tenendo conto delle espressioni delle derivate della funzione w ottenibili mediante le (70-73), utilizzando le espressioni dei risultanti in funzione di tali derivate (22) e (49-50), possono essere ottenute le seguenti espressioni

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^2 + \nu B_n^2) G_{m,n} s_{m,n} & M_y &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (B_n^2 + \nu A_m^2) G_{m,n} s_{m,n} \\
 M_{xy} &= -\frac{1-\nu}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_m B_n G_{m,n} c_m c_n & & (36.74a-h) \\
 T_x &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^3 + A_m B_n^2) G_{m,n} c_m s_n & T_y &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^2 B_n + B_n^3) G_{m,n} s_m c_n \\
 R_x &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [A_m^3 + (2-\nu) A_m B_n^2] G_{m,n} c_m s_n & R_y &= \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [B_n^3 + (2-\nu) A_m^2 B_n] G_{m,n} s_m c_n \\
 & \quad x=0,a & & \quad y=0,b \\
 R &= -2 \frac{1-\nu}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_m B_n G_{m,n} c_m c_n \\
 & \quad x=0,a \quad y=0,b
 \end{aligned}$$

nelle quali:

- i coefficienti A_m, B_n sono definiti nelle (71a,b),
- le funzioni s_m, s_n, c_m e c_n sono definite nelle (72a-d),
- le funzioni $s_{m,n}$ sono definite nella (73),
- i coefficienti $G_{m,n}$ sono definiti nella (67),
- i coefficienti $K_{m,n}$, presenti nella (67), sono definiti nella (53),
- i coefficienti $F_{m,n}$, presenti nella (67), sono definiti nella (58) nel caso generale, e nelle (60), (63), (65) per i 3 casi descritti nei paragrafi precedenti.

Naturalmente i valori di R_x ed R_y nelle (74f,g) hanno significato esclusivamente in corrispondenza dei 4 lati: i due lati corrispondenti alle coordinate $x=0$ e $x=a$ per R_x e i due lati corrispondenti alle coordinate $y=0$ e $y=b$ per R_y .

A loro volta i valori di R nella (74h) hanno significato esclusivamente in corrispondenza dei 4 spigoli di coordinate $[x=0, y=0]$, $[x=0, y=b]$, $[x=a, y=0]$ e $[x=a, y=b]$.

È importante ricordare che le reazioni ottenute con le (74) hanno i segni delle caratteristiche di sollecitazione, che hanno verso opposto sui bordi della lastra opposti. In particolare, le R_x calcolate con le (74f) risultano positive se rivolte verso l'alto sul contorno in $x=0$ e se rivolte verso il basso sul contorno in $x=a$; le R_y hanno un comportamento analogo (fig.5c). A loro volta, le R risultano positive verso l'alto negli spigoli di coordinate $x=0, y=0$ e $x=a, y=b$, e verso il basso negli spigoli di coordinate $x=a, y=0$ e $x=0, y=b$. Ricordando che i segni delle reazioni vincolari devono rispettare il verso dell'asse z (fig.1), per ottenere il risultato corretto, è necessario *invertire il segno* di R_x in $x=0$, quello di R_y in $y=0$, quello delle R nei punti $[x=0, y=0]$ e $[x=a, y=b]$.

Da notare che, in base alle (41) e (50), è possibile determinare le reazioni R *direttamente dai momenti* M_{xy} *senza effettuare la sommatoria* (74h), ma con le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{x=0,y=0} &= -2M_{xy} & R_{x=a,y=b} &= -2M_{xy} & R_{x=0,y=b} &= 2M_{xy} & R_{x=a,y=0} &= 2M_{xy}
 \end{aligned} \quad (36.74i)$$

Le tensioni più significative possono essere poi ottenute mediante le (25,26).

Il carico totale agente sulla lastra è dato ovviamente dall'integrale del carico a unità di superficie esteso alla superficie della lastra. La valutazione può essere effettuata sia sul carico effettivo che su quello approssimato in serie di Fourier come

$$F_{tot} = \int_0^a \int_0^b f_z dy dx \quad F_{tot}^f = \int_0^a \int_0^b f_z^f dy dx \quad (36.75,76)$$

Il carico totale deve essere in equilibrio con la forza risultante delle reazioni vincolari ai contorni e sugli spigoli esprimibile come

$$R_{tot} = \int_0^b R_x dy + \int_0^b R_x dy + \int_0^a R_y dx + \int_0^a R_y dx + \sum_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} R \quad (36.77)$$

Nelle fig.12-14 sono mostrati i risultati ottenuti con le relazioni (57, 58, 68, 74) per una lastra rettangolare appoggiata di dimensioni $a=2000$ mm, $b=1000$ mm, $h=10$ mm, in acciaio, soggetta a: carico costante ($f_z=0.01$ N/mm²), carico crescente in modo lineare lungo la direzione x ($f_z=0.00001x$ N/mm²), carico concentrato ($F_z=20000$ N in $x_p=1500$ mm, $y_p=750$ mm); la forza risultante agente sulla lastra nei tre casi è sempre pari a 20000 N.

Nelle tabelle 1 e 2 sono riportate rispettivamente tutte le equazioni utili alla determinazione di spostamenti e risultanti in ordine di impiego e le equazioni utili alla sola determinazione delle costanti della serie doppia di Fourier $F_{m,n}$.

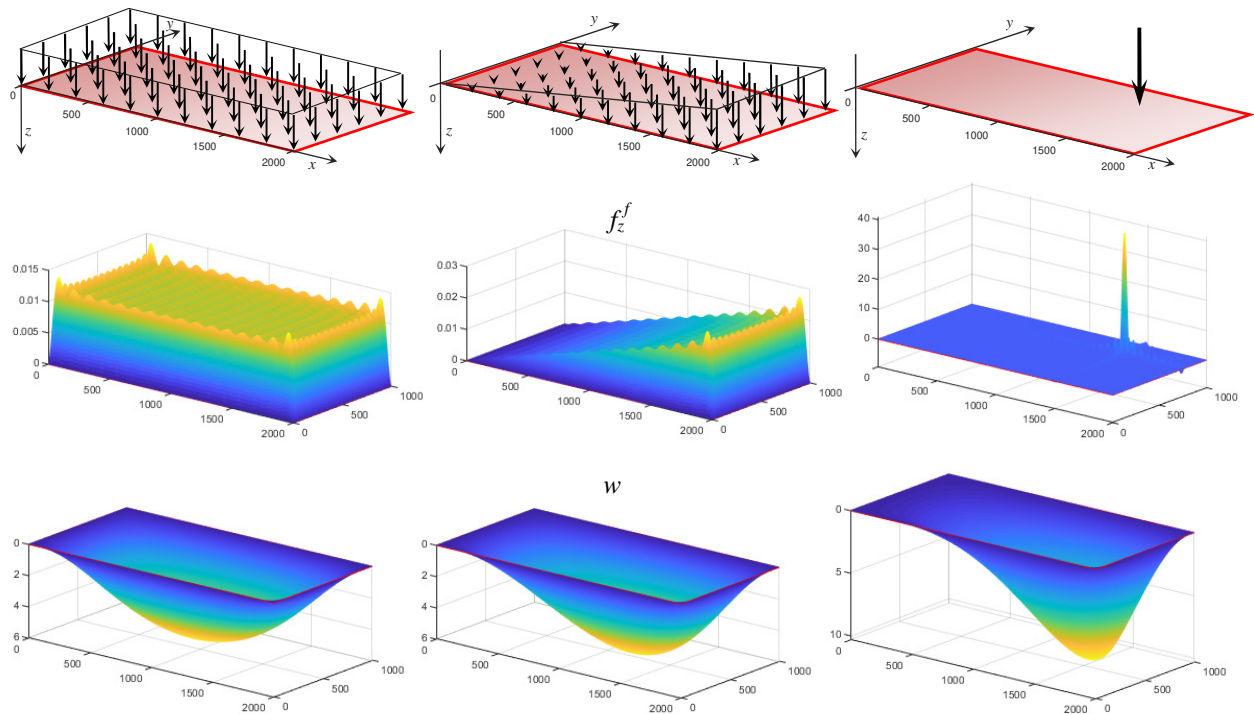


Fig.36.12 –Lastra di dimensioni $a=2000$ mm, $b=1000$ mm, $h=10$ mm in acciaio soggetta a carico costante (sinistra), carico crescente in modo lineare lungo la direzione x (centro), carico concentrato in $x_p=1500$ mm, $y_p=750$ mm (destra); in tutti i casi la forza risultante è pari a 20000 N. In alto il carico, al centro il carico riprodotto in serie di Fourier f_z^f , in basso la funzione degli spostamenti w .

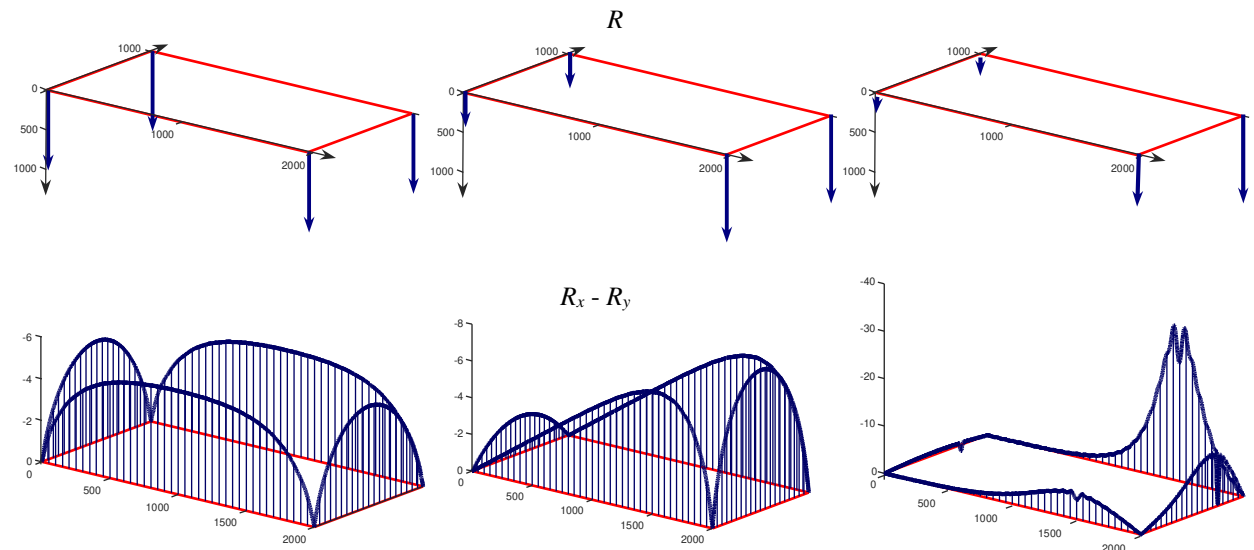


Fig.36.13 – Reazioni vincolari per i 3 casi di carico agenti sulla lastra di fig.12: in alto reazioni R ai 4 spigoli, in basso reazioni R_x ed R_y ai bordi.

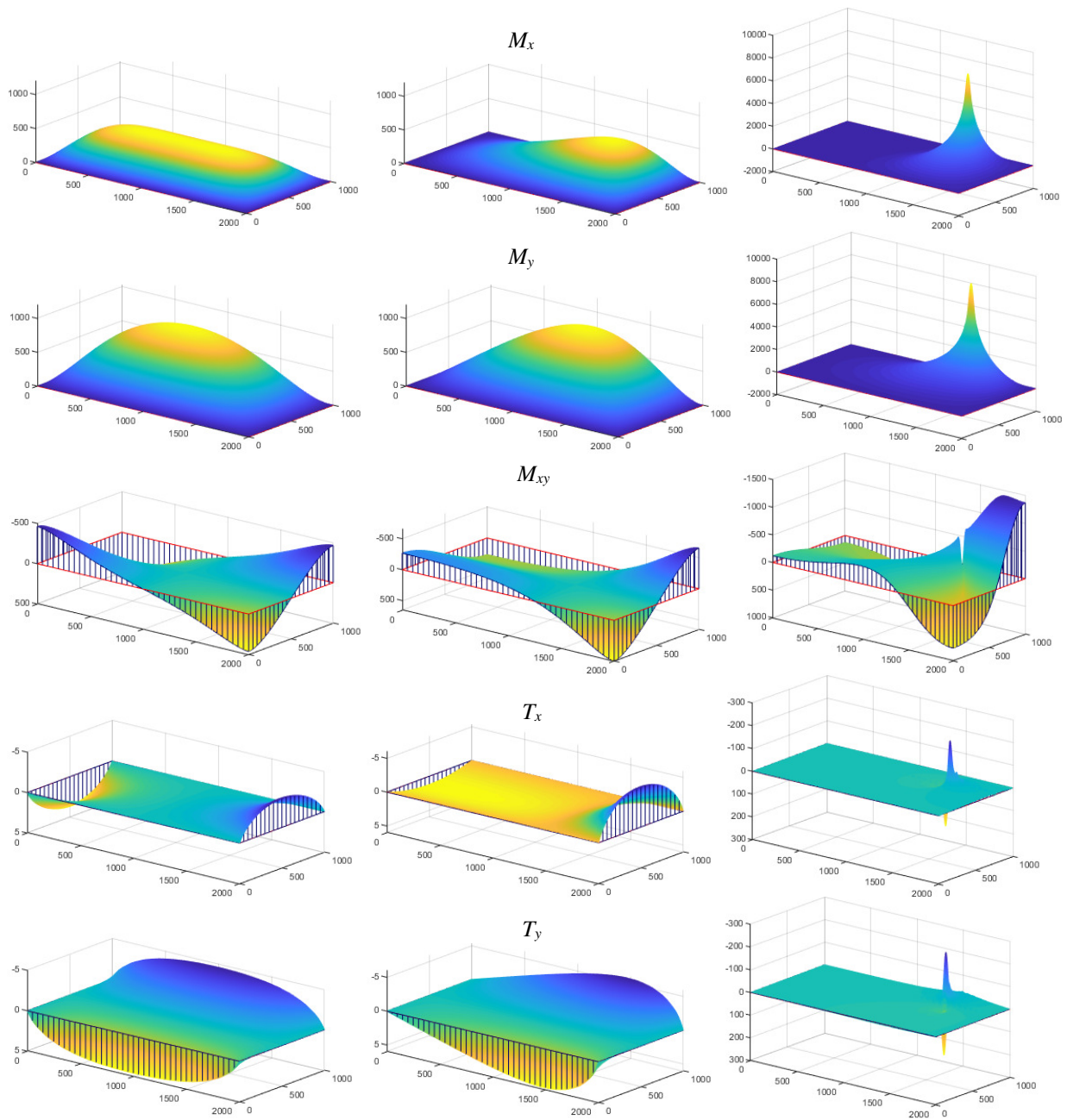


Fig.36.14 – Caratteristiche di sollecitazione per i 3 casi di carico agenti sulla lastra di fig.12; dall'alto in basso: momenti flettenti M_x , momenti flettenti M_y , momenti torcenti M_{xy} , sforzi di taglio T_x , sforzi di taglio T_y .

$A_m = m \pi/a$	$s_m = \sin(A_m x)$	$c_m = \cos(A_m x)$		
$B_n = n \pi/b$	$s_n = \sin(B_n y)$	$c_n = \cos(B_n y)$		
$D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$	$s_{m,n} = s_m s_n$			
$K_{m,n} = 1/\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2$	$F_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_z s_{m,n} dy dx$	$G_{m,n} = F_{m,n} K_{m,n}$		
$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N G_{m,n} s_{m,n}$		$f_z^F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{m,n} s_{m,n}$		
$M_x = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^2 + \nu B_n^2) G_{m,n} s_{m,n}$	$M_y = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (B_n^2 + \nu A_m^2) G_{m,n} s_{m,n}$			
$M_{xy} = -\frac{1-\nu}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_m B_n G_{m,n} c_m c_n$				
$T_x = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^3 + A_m B_n^2) G_{m,n} c_m s_n$	$T_y = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_m^2 B_n + B_n^3) G_{m,n} s_m c_n$			
$R_x = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[A_m^3 + (2-\nu) A_m B_n^2 \right] G_{m,n} c_m s_n$ <small style="text-align: center;">$x=0, a$</small>	$R_y = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[B_n^3 + (2-\nu) A_m^2 B_n \right] G_{m,n} s_m c_n$ <small style="text-align: center;">$y=0, b$</small>			
$R = -2 \frac{1-\nu}{\pi^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_m B_n G_{m,n} c_m c_n$	$R = -2M_{xy}$ <small style="text-align: center;">$x=0, y=0$</small>	$R = -2M_{xy}$ <small style="text-align: center;">$x=a, y=b$</small>		
	$R = 2M_{xy}$ <small style="text-align: center;">$x=0, y=b$</small>	$R = 2M_{xy}$ <small style="text-align: center;">$x=a, y=0$</small>		
$\sigma_x = \frac{6M_x}{h^2}$	$\sigma_y = \frac{6M_y}{h^2}$	$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{h^2}$	$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{T_x}{h}$	$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{h}$

Tab.36.1 – Tutte le costanti e le funzioni del problema relativo alle lastre rettangolari appoggiate.

$f_z^F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{m,n} s_{m,n}$	
Generico	$F_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_z s_{m,n} dy dx$
Uniforme	$F_{m,n} = \frac{16f_0}{\pi^2} \frac{1}{mn}$ $m=n=1,3,5\dots$
Distribuito su rettangolo	$F_{m,n} = \frac{4f_0}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{n\pi y_1}{b}\right) - \cos\left(\frac{n\pi y_2}{b}\right) \right] \frac{1}{mn}$
Concentrato	$F_{m,n} = \frac{4F_z}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_p}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_p}{b}\right)$

Tab.36.2 – Funzioni per la determinazione del carico approssimato in serie di Fourier e delle costanti della serie di Fourier.

APPENDICE

A1. Determinazione delle equazioni di equilibrio

Considerando la fig.6 (sotto riportata), i risultanti di tutte le forze ad unità di lunghezza agenti su un elementino di lastra di dimensioni dx , dy e h , nelle direzioni x , z e il momento risultante agente rispetto ad un asse parallelo all'asse y , passante per lo spigolo di coordinata x , sono dati rispettivamente da:

$$\sum F_x = \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - N_x dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - N_{xy} dx + f_x dx dy = 0 \quad (A1.1)$$

$$\sum F_z = \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy - T_x dy + \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx - T_y dx + f_z dx dy = 0 \quad (A1.2)$$

$$\begin{aligned} \sum M = & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - M_{yx} dx + m_x dx dy - \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \right) dy dx + \\ & - \left(T_y + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + T_y dx \frac{dx}{2} - f_z dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (A1.3)$$

Effettuando la somma dei vari termini, dividendo per il prodotto $dx dy$ per i tre casi e considerando che per la terza equazione possono essere trascurati i seguenti infinitesimi di ordine superiore

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy dx = \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx \frac{dx}{2} = f_z dx dy \frac{dx}{2} \Rightarrow 0 \quad (A1.4)$$

si ottengono le (20-21).

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + f_z = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + m_x - T_x = 0 \quad (20a,21a,b)$$

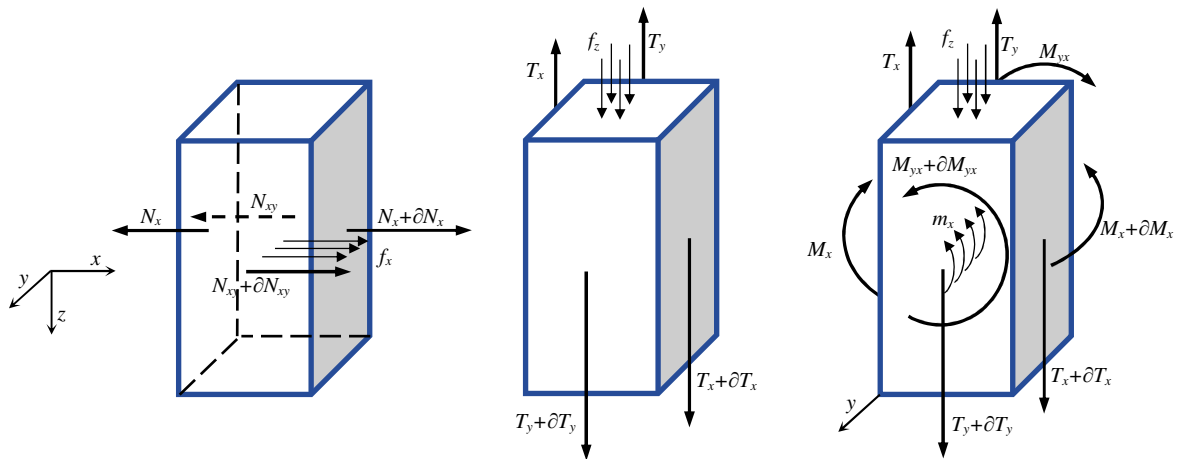


Fig.A.1 – Carichi e risultanti in equilibrio: a sinistra equilibrio alla traslazione in direzione x , al centro equilibrio alla traslazione verticale, a destra equilibrio alla rotazione attorno ad un asse parallelo all'asse y (come mostrato in figura).

A2. Relazioni tra risultanti e spostamenti

La tensione σ_x in funzione di w è data dalla prima delle (11):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (A2.1)$$

le espressioni dei risultanti legati alla σ_x , a loro volta, sono le (12a) e (14a):

$$N_x = \int_z \sigma_x dz \quad M_x = \int_z z \sigma_x dz \quad (A2.2-3)$$

Sostituendo la (1) nelle (2) e (3) si ottiene rispettivamente

$$N_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} dz - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \right] \quad (\text{A2.4})$$

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \right] \quad (\text{A2.5})$$

Tenuto conto del fatto che gli integrali presenti nelle (4-5) forniscono

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz = h \quad \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = h^3/12 \quad (\text{A2.6})$$

si ottengono le (21-22).

A3. Relazioni tra tensioni e risultanti

Le relazioni tra tensioni e risultanti possono essere ricavate esprimendo le derivate della funzione w in funzione dei risultanti mediante le (21) e (22) e sostituendole nelle (11). Ad esempio, utilizzando le (21a) e (22a)

$$N_x = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A3.1a,b})$$

si ottiene

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{hE} N_x \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D} \quad (\text{A3.2a,b})$$

sostituendo le espressioni ottenute nella (11a) si ottiene

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1-\nu^2}{hE} N_x + z \frac{M_x}{D} \right] \quad (\text{A3.3})$$

infine, ricordando che

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \quad (\text{A3.4})$$

si ottengono le (24a) e (25a) sintetizzate nella seguente equazione

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z \quad (\text{A3.5})$$

A4. Relazioni tra momenti e funzione spostamento al contorno

La relazione tra momenti agenti secondo assi cartesiani e momento agente su una sezione di normale n al contorno è espressa tramite l'eq.(34):

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \quad (\text{A4.1})$$

A loro volta, le relazioni tra i momenti M_x , M_y ed M_{xy} e la funzione w sono espresse tramite le eq.(22):

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad M_{xy} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A4.2})$$

Sostituendo le (2) nella (1) si ottiene

$$M_n = -D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) n_x^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) n_y^2 + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right] \quad (\text{A4.3})$$

da cui

$$M_n = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_y^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_x^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y \right) \right] \quad (\text{A4.4})$$

Ricordando la definizione della curvatura in direzione generica n (31a)

$$k_n = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad (\text{A4.5})$$

scrivendo l'analogia relazione della curvatura nella direzione ortogonale t (31b), tenuto conto che il versore della direzione t è espresso come $\mathbf{t} = [-\sin\alpha \cos\alpha 0]^T = [-n_y n_x 0]^T$ (21b),

$$k_t = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_y^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A4.6})$$

e sostituendo i termini a destra della (5) e della (6) nella (4) si ottengono le (36-37).

A.5 Confronto tra le equazioni costitutive delle lastre e delle travi

Le relazioni tra le *curvature* del piano medio della lastra misurate rispettivamente nel piano xz e yz e la funzione abbassamento w sono date dalle (7a,b)

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (\text{36.7a,b})$$

Nel caso di piccoli spostamenti, la relazione tra la curvatura k_x in una sezione di una trave e il momento flettente applicato M_x è la ben nota $k_x = M_x / EI$, che, nel caso di trave a sezione rettangolare di altezza h e larghezza b , diventa

$$k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{b} \frac{1}{h^3/12} \frac{M_x}{E} \quad (\text{A5.1})$$

Nel caso di trave con sezione di larghezza $b=1$ si ottiene

$$k_x = \frac{1}{h^3/12} \frac{M_x}{E} \quad (\text{A5.2})$$

Nel caso della lastra, la relazione analoga (esplicitata rispetto al momento) è la (22.a)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \quad (\text{A5.3})$$

dalla quale si ricava

$$k_x + \nu k_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{1-\nu^2}{h^3/12} \frac{M_x}{E} \quad (\text{A5.4})$$

e infine

$$k_x = \frac{1-\nu^2}{h^3/12} \frac{M_x}{E} - \nu k_y \quad (\text{A5.5})$$

Questa relazione mostra come, a parità di momento flettente applicato M_x , modulo di Young e altezza h , la curvatura nel piano xz risulta minore di quella di una trave di larghezza $b=1$, per via dell'effetto Poisson. In pratica un momento M_x positivo crea delle tensioni σ_x di compressione sulla superficie superiore e di trazione in quella inferiore, per l'effetto Poisson in direzione y si generano delle deformazioni di segno opposto $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$ sulle due superfici che determinano una curvatura k_y di segno opposto rispetto alla k_x (fig.2).

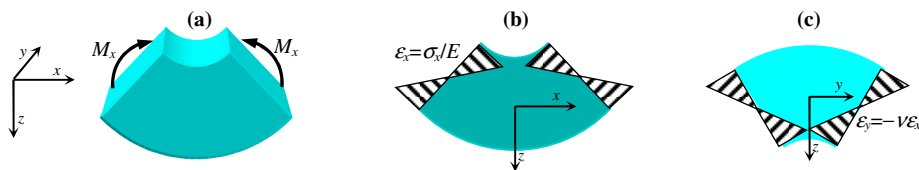


Fig.A.2 – Effetto Poisson sulla curvatura della lastra: (a) momento flettente M_x positivo, (b) deformazioni ε_x nel piano xz dovute al momento, (c) deformazioni ε_y nel piano yz dovute all'effetto Poisson.

LASTRE			
Rotazioni ϕ e curvature k nelle direzioni x, y ed n, t			
$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$	$\phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$	$\phi_n = -\frac{\partial w}{\partial n} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y\right)$	$\phi_t = -\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y} n_x - \frac{\partial w}{\partial x} n_y$
$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$	$k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$	$k_n = -\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y\right)$	
$k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial \phi_x}{\partial y} = 2\frac{\partial \phi_y}{\partial x}$		$k_{nt} = -\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2)$	
Spostamenti u, v, w			
$u = u_0 + z\phi_x = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}$	$v = v_0 + z\phi_y = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}$	$w = w_0(x, y)$	
Deformazioni			
$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	
$\epsilon_x = \epsilon_{x0} + zk_x$	$\epsilon_y = \epsilon_{y0} + zk_y$	$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + zk_{xy}$	
CARICHI FUORI DAL PIANO			
Tensioni-spostamenti	Risultanti-tensioni-spostamenti	Tensioni-risultanti	Coeff. rigidezza
$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$	$M_x = \int_z z \sigma_x dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$	$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z$	$D = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$
$\sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	$M_y = \int_z z \sigma_y dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$	$\sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z$	
$\tau_{xy} = -\frac{zE}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	$M_{xy} = \int_z z \tau_{xy} dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z$	
$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$	$T_x = \int_z \tau_{xz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$	$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{T_x}{h}$	
$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$	$T_y = \int_z \tau_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)$	$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{h}$	
Equazioni indefinite di equilibrio			
$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + m_x - T_x = 0$	$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + m_y - T_y = 0$	$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + f_z = 0$	
Equazioni risolutive			
$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + f_z = 0$	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{f_z}{D}$	$\nabla^4 w = \frac{f_z}{D}$	
Momenti e taglio su sezioni di normale n - Reazioni vincolari su sezioni di normale n e x, y			
$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$	$M_{nt} = (M_y - M_x) n_x n_y - M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$	$T_n = T_x n_x + T_y n_y$	
$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$	$M_{nt} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$	$T_n = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2}\right)$	
$R_n = T_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2}\right)$		$R = 2M_{nt} = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$	
$R_x = \pm D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$ <small>$x=0, x=a$</small>	$R_y = \pm D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)$ <small>$y=0, y=b$</small>	$R_{x,y} = \pm 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ <small>$[x=0, y=0], [x=0, y=b], [x=a, y=0], [x=a, y=b]$</small>	

CARICHI NEL PIANO		
$\varepsilon_{x_0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$	$\varepsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}$	$\gamma_{xy_0} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}$
tensioni-spostamenti	risultanti-spostamenti	tensioni-risultanti
$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$	$N_x = \int_z \sigma_x dz = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$	$\sigma_x = \frac{N_x}{h}$
$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)$	$N_y = \int_z \sigma_y dz = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)$	$\sigma_y = \frac{N_y}{h}$
$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)$	$N_{xy} = \int_z \tau_{xy} dz = \frac{hE}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)$	$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}$
Equazioni indefinite di equilibrio		
$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$	$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$	