

14. MECCANICA DELLA FRATTURA

Spesso gli elementi strutturali sono soggetti a rotture improvvise per sollecitazioni statiche inferiori alla tensione di rottura del materiale senza che si verificano deformazioni macroscopiche apprezzabili. In molti casi la rottura inizia da una discontinuità (o difetto) del materiale, anche di piccole dimensioni, avente raggio di curvatura nullo alle estremità (frattura, cricca) che, a certe condizioni, si propaga a velocità elevata. Difetti iniziali possono essere: microporosità, inclusioni di sostanze estranee, profondi graffi superficiali, delaminazioni in materiali a strati.

I fattori da cui dipende il fenomeno sono: la dimensione del difetto, lo stato tensionale, le caratteristiche del materiale, la geometria dell'elemento nelle vicinanze del difetto, la temperatura.

La propagazione dei difetti con raggio di raccordo nullo è oggetto di studio della *meccanica della frattura*, che si basa su un'idealizzazione del materiale considerato come continuo, studiato mediante la teoria dell'elasticità lineare o dell'elasto-plasticità. Il problema è analizzato da un punto di vista macroscopico.

Lo stato tensionale nell'intorno del difetto

Il valore teorico della tensione agente all'estremità di una discontinuità con raggio di raccordo nullo ottenibile con la teoria dell'elasticità può essere determinato utilizzando l'espressione del fattore di concentrazione delle tensioni nel caso di foro ellittico. Si consideri la lastra indefinita caricata uniformemente di fig.13.1. Il fattore di concentrazione delle tensioni è dato dall'equazione (13.5) i cui parametri sono descritti nel capitolo precedente:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (14.1)$$

Per determinare la tensione all'estremità di una cricca trasversale è sufficiente fare tendere ρ a 0: si osserva che k_t tende ad infinito. In teoria questo fenomeno dovrebbe provocare la propagazione immediata a causa della progressiva rottura delle zone dove $\sigma > \sigma_r$. Tuttavia nei materiali reali il valore di tensione infinito non può essere raggiunto e sperimentalmente si osserva che essi possono resistere alla presenza di un difetto purché la tensione σ_0 si mantenga sufficientemente bassa:

- nei materiali duttili la zona sottoposta a tensioni più elevate subisce lo snervamento e le tensioni si mantengono a valori prossimi a σ_r ; si verifica una redistribuzione delle tensioni in base alla quale, nelle zone limitrofe alla cricca, queste ultime risultano maggiori rispetto ai valori teorici;
- nei materiali fragili si può creare una zona con alta densità di piccole fratture nelle vicinanze del difetto.

In qualsiasi caso una relazione di verifica del tipo $k_t \sigma \leq \sigma_{\lim}$ non può essere utilizzata, proprio perché la tensione massima calcolata teoricamente è priva di significato. In particolare perde di significato il fattore di concentrazione delle tensioni k_t .

L'andamento delle tensioni cartesiane in prossimità dell'apice di una frattura è espresso dalle relazioni di Irwin, basate sulla teoria lineare elastica, e scritte in coordinate polari $r-\theta$ secondo lo schema in fig.1:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (14.2a,b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (14.2c)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (14.3)$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \quad (14.4a,b)$$

nelle quali K_I ($I \equiv$ primo) è il *fattore di intensificazione delle tensioni*, un valore costante dipendente dalla geometria componente-difetto e dall'entità dello stato tensionale in assenza della frattura. Le funzioni σ_x e σ_y sono mostrate in fig.2 per il caso di lastra soggetta a carico uniforme con frattura a partire dal bordo esterno.

Nel caso di lastra sottile il materiale all'apice della frattura, soggetto ad ampie deformazioni, è libero di contrarsi per effetto Poisson; in questo caso si ha uno stato di Tensione Piano (TP) con $\sigma_z = 0$. Nel caso di lastra spessa, il materiale nelle vicinanze dell'apice, soggetto a tensioni più basse rispetto a quello in prossimità dell'apice stesso, si oppone alla contrazione di quest'ultimo e tende a generare uno stato di Deformazione Piano (DP) con $\varepsilon_z = 0$ e una tensione σ_z diversa da 0, descritta dall'eq.(4b).

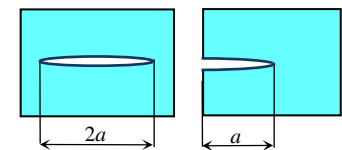
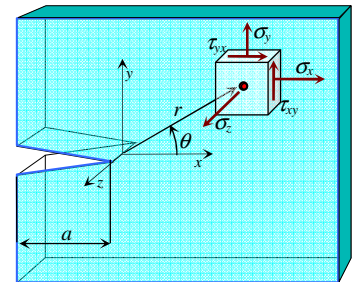


Fig.14.1 - Sistema di coordinate e lunghezza del difetto.

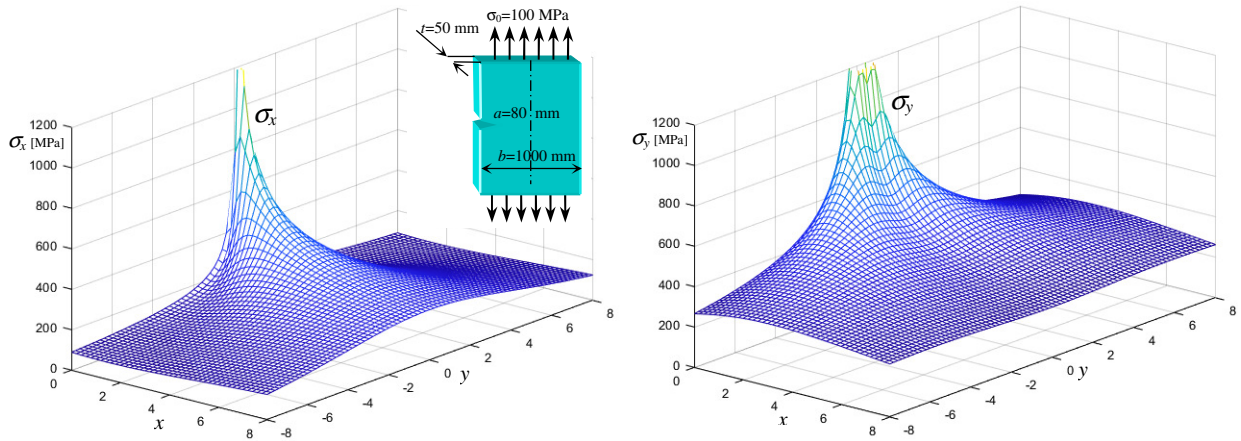


Fig.14.2 - Funzioni σ_x e σ_y nell'intorno della frattura per il caso della lastra soggetta a carico uniforme mostrata in figura.

Le relazioni (2) possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\sigma_i = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_i(\theta) \tag{14.5}$$

Si deve notare che anche nelle relazioni di Irwin le tensioni tendono ad infinito per r tendente a 0. Lungo la direzione orizzontale, per $\theta=0$ (l'asse x), le eq.(2,4) diventano:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \tau_{xy}=0 \tag{14.6a,b}$$

$$\sigma_z=0 \quad \text{oppure} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \tag{14.7a,b}$$

L'andamento della tensione σ_y lungo l'asse x , descritto dall'eq.6a per materiale idealmente elastico, è riportato in fig.3 in linea punteggiata; sempre in fig.3 è mostrato in linea continua l'andamento (approssimato) della tensione per materiale duttile con comportamento elastico-perfettamente plastico.

Secondo l'eq.6a, la tensione normale σ_y tenderebbe a 0 per r tendente ad infinito, cosa non vera perché dovrebbe tendere a σ_0 ; in pratica queste relazioni provengono da una serie di Taylor troncata, i cui termini omessi devono essere particolarizzati a seconda dello stato tensionale effettivamente agente. Tali termini sono trascurabili in vicinanza dell'apice della frattura in quanto l'effetto prevalente sullo stato tensionale è quello della singolarità; le (2-7) risultano valide per $r/a \ll 1$, in particolare lo sono certamente per $r < 0.1a$.

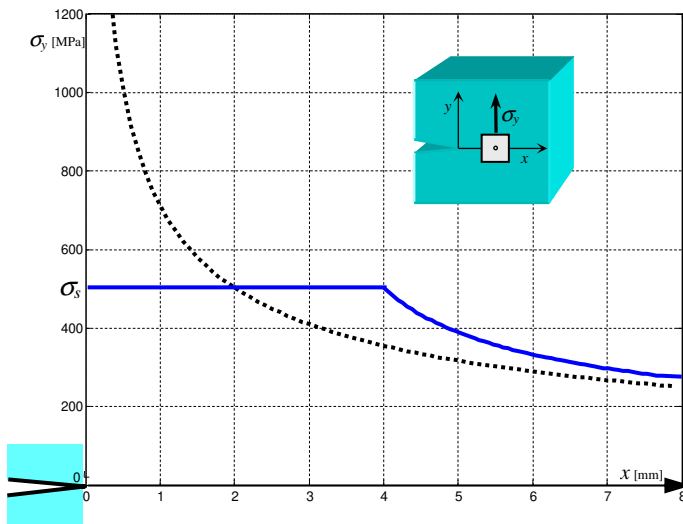


Fig.14.3 - Tensioni σ_y agenti all'apice della frattura lungo l'asse x : (.....) teoriche e (—) reali (approssimate).

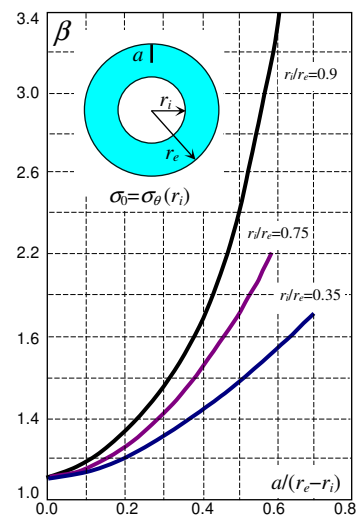


Fig.14.4 - Parametro β per cilindri soggetti a pressione interna con frattura radiale al bordo esterno.

Il fattore di intensificazione delle tensioni K_I

È importante notare che le tensioni espresse dalle eq.(2-7) sono tutte proporzionali al fattore K_I , mentre gli altri termini descrivono solo la variazione rispetto a r e θ .

In particolare, si osserva che:

- l'andamento delle tensioni in prossimità di un difetto è indipendente dallo stato tensionale agente e dalla geometria dell'insieme componente-difetto,
- l'entità delle tensioni vi dipende ed è caratterizzata dal solo fattore moltiplicativo (d'intensificazione) K_I .

K_I è l'indice dell'intensità della tensione nell'intorno del difetto e dipende:

- dallo stato tensionale che sarebbe presente nell'intorno del difetto in assenza del medesimo;
- dalla geometria dell'insieme elemento-difetto: geometria dell'elemento, *posizione* e *orientazione* del difetto;
- dalla dimensione (lunghezza) del difetto.

Si vedrà nel seguito che la verifica di un componente a frattura si effettua confrontando il valore di K_I , che caratterizza il *campo tensionale*, con il corrispondente valore critico relativo al materiale, a differenza del caso classico nel quale si confronta la tensione agente nel punto più sollecitato con la tensione ammissibile del materiale.

Nel caso di difetto di dimensione a piccola rispetto alla dimensione trasversale b della lastra ($\alpha=a/b<0.4$) e in posizione centrale, con tensione in assenza di difetto costante in tutto il campo, il fattore K_I può essere espresso mediante la seguente relazione:

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \tag{14.8}$$

nella quale a è la lunghezza del difetto (fig.1) e σ_0 è la tensione agente nell'elemento in assenza del difetto.

L'espressione generale di K_I , valida per differenti geometrie e stati tensionali non uniformi è la seguente:

$$K_I = \beta \sigma_0 \sqrt{\pi a} \tag{14.9}$$

nella quale a è sempre la dimensione del difetto, come in fig.1, β è un fattore adimensionale che dipende dalla *geometria elemento-difetto* e dallo *stato tensionale in assenza di difetto* e che, in generale, a parità di altre condizioni, varia al variare della lunghezza del difetto, $\beta=\beta(a)$, σ_0 è una *tensione di riferimento*, agente in un *punto opportuno* dell'elemento e *tipica* dello stato tensionale considerato *in assenza del difetto*.

Valori di K_I per vari casi pratici possono essere ottenuti mediante la teoria dell'elasticità, metodi numerici e metodi sperimentali. Nella pratica sono disponibili *diagrammi* e *formule empiriche* del parametro β al variare della dimensione della frattura per varie geometrie dell'elemento, del tipo di sollecitazione e della posizione della frattura, così come accade per il fattore di concentrazione delle tensioni k_t .

La tensione σ_0 nella definizione di K_I , data nelle (8, 9), è identificabile in modo univoco solo in alcuni casi come quello delle lastre soggette a trazione uniforme. In questo caso σ_0 coincide con la tensione che si avrebbe nell'elemento integro in corrispondenza del difetto. Nel caso di stati tensionali non uniformi, l'utilizzazione della tensione all'apice del difetto per il calcolo di K_I non è pratica, in quanto essa dovrebbe essere calcolata per ogni valore della lunghezza della frattura a . Poiché il valore di β varia comunque al variare di a , risulta più semplice utilizzare come σ_0 il valore della tensione *in un punto di riferimento, caratteristico* dello stato tensionale *in assenza di difetto* (es. il valore della tensione massima negli elementi soggetti a flessione, la pressione interna o la tensione circonferenziale al bordo interno nel caso di cilindri in pressione, ecc..) e il valore di β opportuno. I diagrammi e le formule di β fanno quindi riferimento al valore della tensione σ_0 in un punto specificato che, in generale, *non è quello all'apice della frattura*.

Ad esempio, in fig.4 è mostrato il diagramma di β per cilindri soggetti a pressione interna con frattura radiale al bordo esterno. In questo caso β è diagrammato in funzione della dimensione della frattura adimensionalizzata rispetto allo spessore, cioè $a/(r_e-r_i)$. Il valore di σ_0 da utilizzare per calcolare K_I mediante la (9) è la *tensione circonferenziale al bordo interno* $\sigma_\theta(r_i)$ calcolabile con l'apposita formula della teoria dell'elasticità (vedi cap.34).

In altri casi viene fornito direttamente un valore numerico per data dimensione della cricca che deve essere moltiplicato per la σ_0 agente nel punto del campo tensionale specificato.

In appendice sono riportate le funzioni empiriche di β per i casi di lastre in trazione e flessione.

I Modi

Quanto fin qui riportato vale per carico agente in direzione normale alla frattura, cui corrisponde il cosiddetto *Modo I* (primo) di propagazione del difetto: il *distacco*. Esistono altre situazioni di carico che provocano differenti modi di propagazione (fig.5): il *Modo II, scorrimento* e il *Modo III, lacerazione*. Il *Modo I* è il più pericoloso.

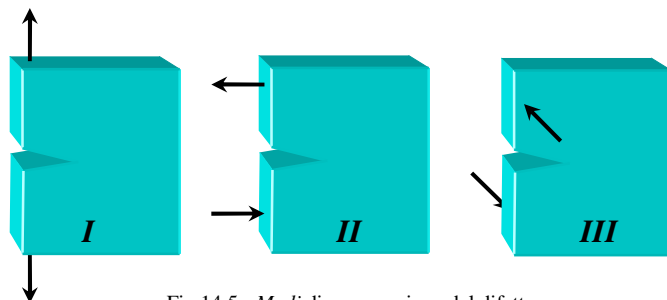


Fig.14.5 - Modi di propagazione del difetto.

MATERIALE	K_{Ic} [Mpa m ^{0.5}]
Metalli duttili	100÷300
Acciaio	50÷200
Leghe di Titanio	55÷115
Ceramici	5÷6
Polimeri	1÷2
Materiali fragili	0.7÷4

Tab.14.1 – Valore di K_{Ic} per alcuni tipi di materiali.

Tenacità a frattura K_c

Come già detto K_I è l'unico indice dell'intensità della tensione nell'intorno del difetto per cui la verifica di resistenza viene effettuata mediante tale parametro. In particolare si definisce *tenacità a frattura* o *valore critico del fattore di intensificazione* o *K critico*, K_c , la proprietà del materiale indice della combinazione sforzo-difetto che provoca la propagazione instabile di quest'ultimo, cioè la frattura dell'elemento. I valori di K_c sono riferiti ai diversi Modi (I, II, III) e allo stato di deformazione piano. In particolare la propagazione del difetto si verifica se si ha $K_I \geq K_c$.

Lo stato di deformazione piano risulta più pericoloso in quanto la zona limitrofa a quella plasticizzata è soggetta ad una tensione σ_z di trazione che provoca uno stato tensionale che rende più facile la propagazione della frattura. In conseguenza di ciò si verifica $K_{c,DP} < K_{c,TP}$. Naturalmente un elemento è verificato a frattura se si ha:

$$K_I \leq K_c \quad (14.10)$$

Questo tipo di verifica è definito *criterio di campo*, in quanto viene confrontata una grandezza caratteristica dell'intero campo tensionale con il suo valore critico, a differenza dei *criteri di punto*, basati sull'utilizzazione del valore nel punto più sollecitato.

In tabella 1 sono riportati i valori di K_c per alcuni materiali: è importante notare che le dimensioni di K_c sono MPa m^{0.5}, da cui si evince che nell'espressione di K_I e K_c le tensioni devono essere espresse in MPa (N/mm²) e le lunghezze in metri. Analogamente, le coordinate r delle relazioni (2-7) devono essere espresse in metri.

Imponendo l'uguaglianza tra il valore di K_I e K_c e utilizzando la (9) è possibile ottenere, per data lunghezza della cricca, il valore critico della tensione o, viceversa, la lunghezza critica del difetto per la tensione assegnata

$$\sigma_c = \frac{K_c}{\beta \sqrt{\pi a}} \quad a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{\beta \sigma_0} \right)^2 \quad (14.11,12)$$

Il valore di β_c nella (12) dipende da a_c per cui il risultato esatto può essere ottenuto in modo *iterativo*.

Estensione e forma della zona plastica

Una valutazione approssimata dell'estensione e della forma della zona plasticizzata nei materiali duttili può essere effettuata analizzando il comportamento della tensione equivalente di Von Mises all'apice della frattura, determinabile mediante le eq.(2,4) e le (11.26,11.28) per i casi di stato di tensione e deformazione piano. In fig.6 sono mostrati gli andamenti delle tensioni equivalenti di Von Mises all'apice della frattura per i due casi.

L'estensione della zona plasticizzata *lungo l'asse x*, pari a r_p , può essere stimata in modo approssimato determinando, in primo luogo, la distanza dall'apice della frattura alla quale la tensione equivalente teorica, ottenuta con il criterio di Von Mises, raggiunge il valore di snervamento. Lungo l'asse x le tensioni σ_x , σ_y e σ_z , date rispettivamente dalle (6) e dalle (7), sono principali e le tensioni equivalenti di Von Mises per i casi di stato Piano di Tensione e Deformazione possono essere espresse rispettivamente come:

$$\sigma_{e,TP} = \sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \sigma_{e,DP} = \sigma_x - \sigma_z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (1-2\nu) \quad (14.13a,b)$$

L'andamento delle tensioni (13a,b) è riportato in fig.7 in linea punteggiata nera (TP) e rossa (DP).

Imponendo $\sigma_e = \sigma_s$ ed esplicitando rispetto a r si ottiene:

$$r'_{p,TP} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} \quad r'_{p,DP} = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} \quad (14.14a,b)$$

Il valore ottenuto, mostrato in fig.7 relativamente al caso TP, non rappresenta l'estensione della zona realmente plasticizzata, che risulta essere maggiore. Infatti, considerando lo spessore costante, la differenza tra la σ_y teorica (6b) e la tensione di snervamento dà luogo ad una *forza ad unità di spessore* data dalla seguente espressione:

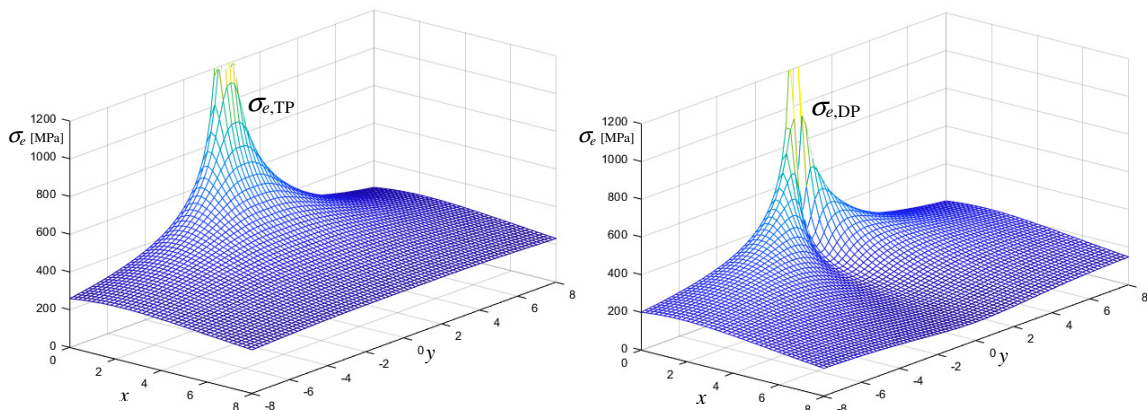


Fig.14.6 - Tensioni equivalenti di Von Mises all'apice della frattura per i casi TP e DP.

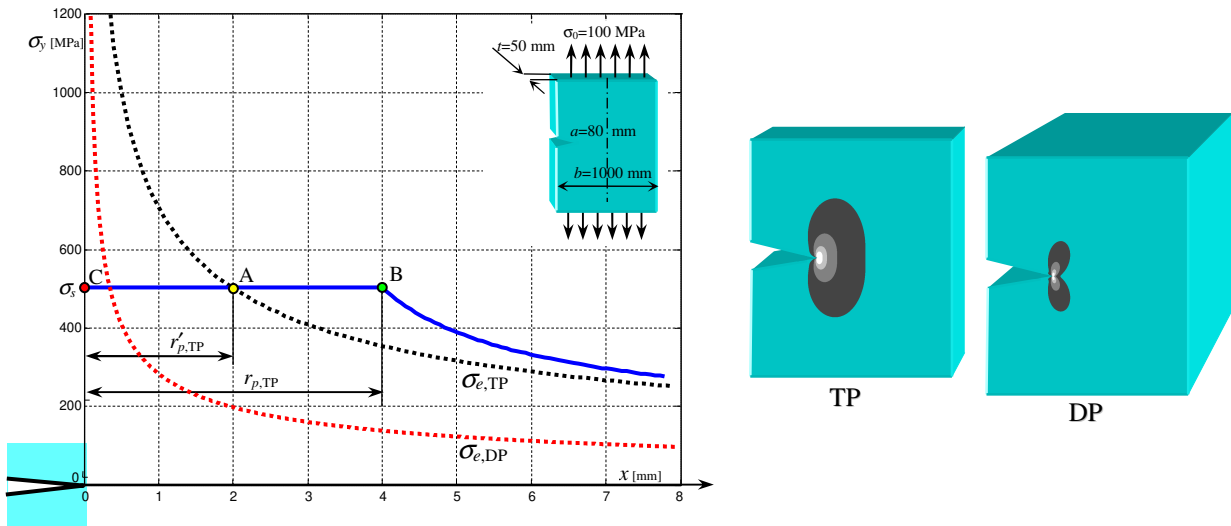


Fig.14.7 - a) Tensioni equivalenti di Von Mises lungo l'asse x per i casi di stato di tensione e deformazione piano (---TP/---DP). Estensione della zona plastica per il caso (TP). b) Forma della zona in cui $\sigma_e = \sigma_s$ per i casi TP e DP.

$$\Delta F = \int_0^{r'_p} \sigma_y dr - \sigma_s r'_p \tag{14.15}$$

Tale forza deve essere equilibrata da un incremento di tensione nelle zone limitrofe alla posizione r'_p che rende più ampia la zona soggetta allo snervamento. Una valutazione approssimata può essere effettuata uguagliando la forza ad unità di spessore agente in tutta la zona plasticizzata in direzione y, pari al prodotto $\sigma_s r'_p$, alla forza che sarebbe stata esercitata dalla tensione teorica σ_y (6b) agente dall'apice della frattura sino alla distanza r'_p

$$\sigma_s r'_p \approx \int_0^{r'_p} \sigma_y dr = \int_0^{r'_p} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{r'_p} r^{-0.5} dr \tag{14.16}$$

Introducendo nell'estremo superiore d'integrazione della (16), al posto di r'_p , le espressioni (14a) e (14b), si ottengono due espressioni valide rispettivamente per i casi TP e DP:

$$r_{p,TP} = \frac{1}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} \qquad r_{p,DP} = \frac{1}{3} \frac{1}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} \tag{14.17a,b}$$

In fig.7a è rappresentato il caso TP. Dalle (17) e osservando le fig.6,7 risulta evidente che, a parità di tensioni σ_x e σ_y , la zona plasticizzata risulta più estesa nel caso di stato di tensione piano (lastra sottile) e questo nonostante il fatto che lo stato di deformazione piano sia più pericoloso.

Come detto, i valori r_p sono relativi all'estensione della zona plasticizzata lungo l'asse x; una visualizzazione qualitativa della forma della zona plasticizzata nel piano x-y, differente per i casi TP e DP, può essere ottenuta considerando l'area nella quale la tensione equivalente di Von Mises risulta uguale alla tensione di snervamento ($\sigma_e = \sigma_s$), mostrata in fig.7b per i due casi.

Determinazione di K_c tramite prova di frattura

Il valore di K_c si determina portando a rottura un provino di spessore t con difetto pre-esistente. Effettuando la prova si ottengono:

- P_c carico che provoca rottura
- $\sigma_c = P_c/A_c$ tensione nominale che provoca rottura
- $K_c = \sigma_c (a\pi)^{0.5}$ fattore corrispondente ($\beta=1$ se il difetto è piccolo in confronto alle dimensioni della lastra)

Effettuando la prova per spessori della lastra crescenti si vede che K_c si abbassa, come mostrato in fig.8. Come visto precedentemente, in questo caso nel provino si tende ad uno stato di deformazione piana con $\sigma_z > 0$ (eq.14.4b) che, al confine della zona plasticizzata, risulta essere più oneroso. Come K critico si assume $K_{Ic} = K_c$ per t tendente a infinito. Lo spessore minimo dei provini, affinché la prova avvenga in stato di deformazione piana, deve verificare la seguente disuguaglianza:

$$t \geq 2.5 \left(K_{Ic} / \sigma_s \right)^2 \tag{14.18}$$

con σ_s tensione di snervamento.

Le dimensioni e la geometria del provino, le modalità di esecuzione della prova e valutazione dei risultati sono descritte da normative italiane e internazionali che è necessario consultare per la corretta determinazione del K_c .

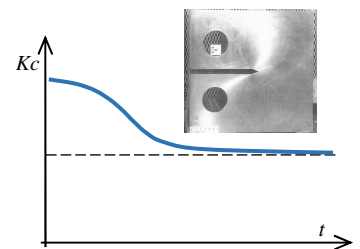


Fig.14.8 - Andamento qualitativo di K_c in funzione dello spessore t del provino.

APPENDICE

A1. Esempi di lastre con difetto

In questi esempi la *geometria* dell'elemento è la stessa e vengono mostrati i casi relativi a due diversi *stati tensionali*: trazione e flessione. Nel caso delle lastre in trazione, inoltre, sono mostrati i casi di tre diverse *posizioni* del difetto e, di conseguenza, tre diverse *geometrie elemento-difetto*.

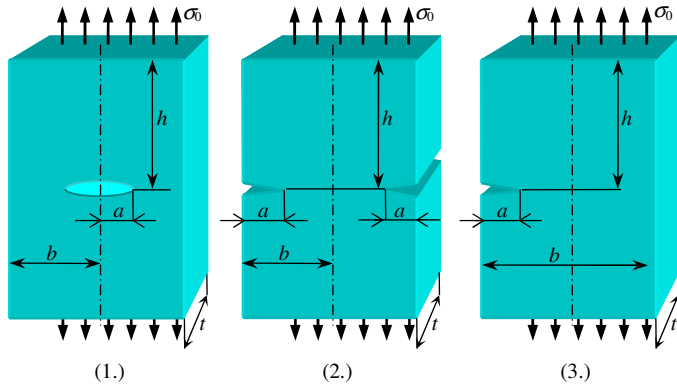


Fig.A1 - Esempi di difetti in lastre soggette a trazione

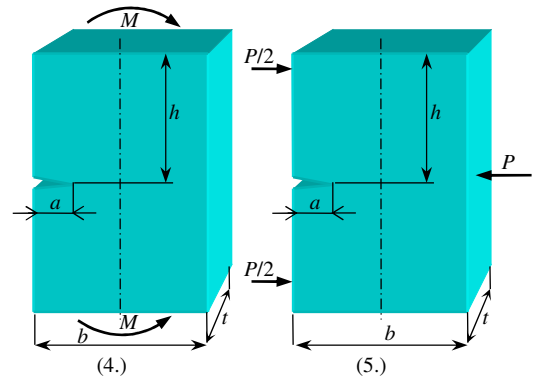


Fig.A2 - Esempi di difetti in lastre soggette a flessione

Lastre in trazione

I valori di K per piccoli valori $\alpha = a/b$ e accuratezza del 10 % nei tre casi sono dati da:

(1.) Per $\alpha \leq 0.4 \Rightarrow K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ (A1.1)

(2.) Per $\alpha \leq 0.6 \Rightarrow K_I = 1.12 \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ (A1.2)

(3.) Per $\alpha \leq 0.13 \Rightarrow K_I = 1.12 \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ (A1.3)

Per valori qualsiasi di α si ha $K_I = \beta \sigma_0 \sqrt{\pi a}$; i valori di β da introdurre sono i seguenti:

(1.) $\beta = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.326\alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha}}$ (A1.4) $h/b \geq 1.5$

(2.) $\beta = \left(1 + 0.122 \cos^4 \frac{\pi\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}}$ (A1.5) $h/b \geq 2$

(3.) $\beta = 0.265 (1 - \alpha)^4 + \frac{0.857 + 0.265\alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}}$ (A1.6) $h/b \geq 1$

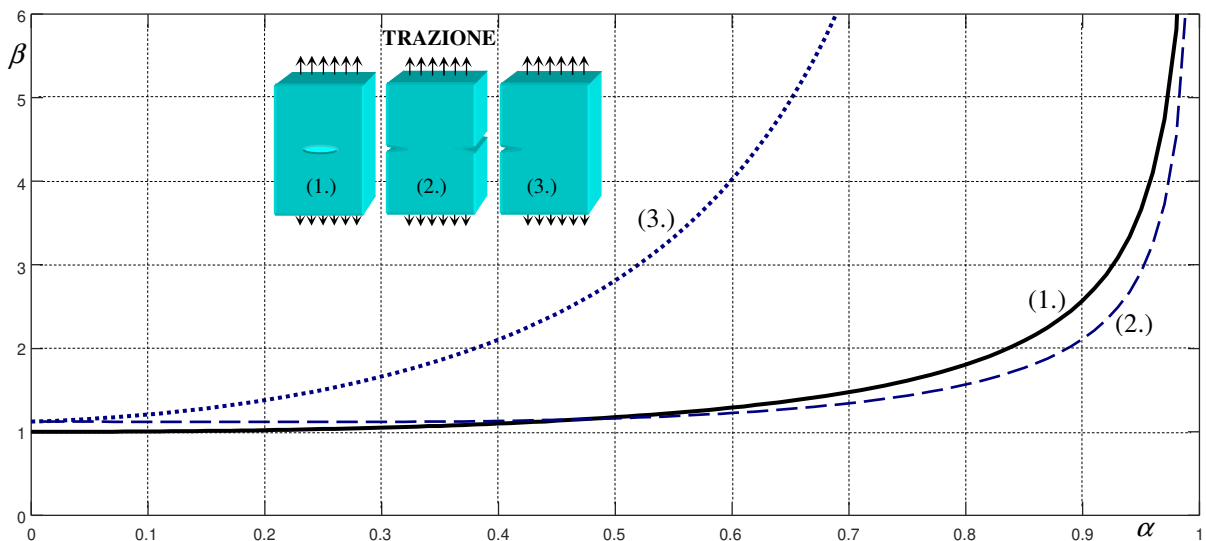


Fig.A1.1 - Fattore β per i casi di lastre sollecitate a trazione

Lastre in flessione

I 2 casi di flessione nella fig.2 sono coincidenti e si assume come tensione di riferimento σ_0 il valore di tensione al bordo della lastra in assenza di difetto dato, nei due casi, dalle seguenti espressioni:

$$\sigma_0 = \frac{6M}{b^2 t} \qquad \sigma_0 = \frac{3hP}{b^2 t} \qquad (A1.7)$$

Il valore di K per valori di $\alpha = a/b \leq 0.4$ e accuratezza del 10 % è dato da:

$$\text{Per } \alpha \leq 0.4 \qquad \Rightarrow \qquad K_I = 1.12 \sigma_0 \sqrt{\pi a} \qquad (A1.8)$$

I valori di β da introdurre per valori qualsiasi di α sono i seguenti (fig.2):

$$(4.) \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}} \left[\frac{0.923 + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \right] \qquad h/b \text{ elevato} \qquad (A1.9)$$

$$(5.) \quad \beta = \frac{1.99 - \alpha(1-\alpha)(2.15 - 3.93\alpha + 2.7\alpha^2)}{\sqrt{\pi}(1+2\alpha)(1-\alpha)^{3/2}} \qquad h/b=2 \qquad (A1.10)$$

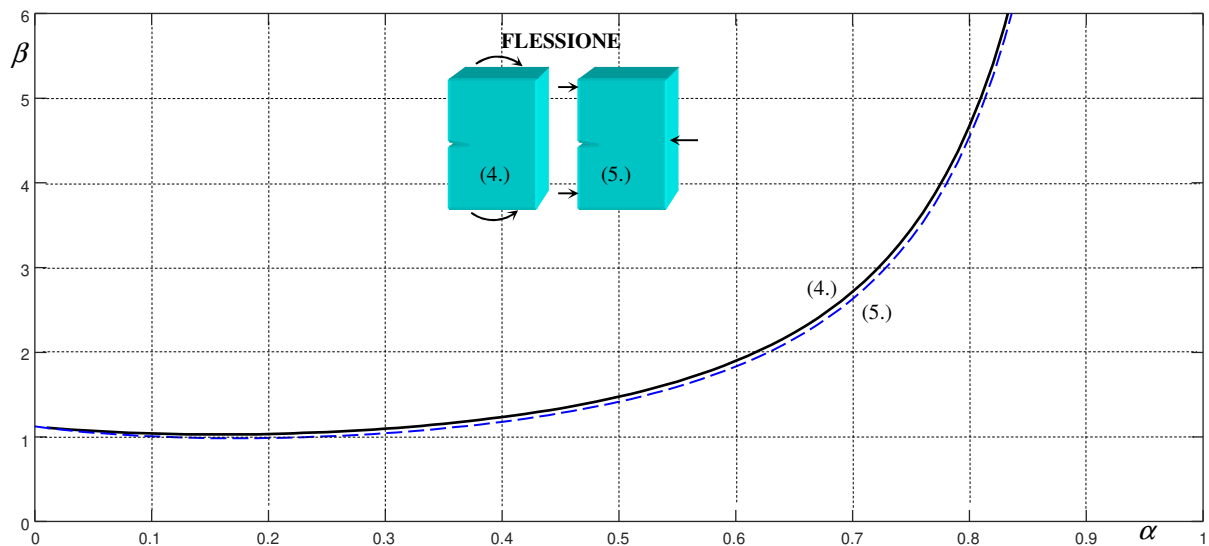


Fig.A1.2 – Fattore β per i casi di lastre sollecitate a flessione.