

## 12. PLASTICITÀ - CURVA CICLICA

La deformazione elastica è legata allo stiramento dei legami atomici e molecolari nei solidi e si annulla alla rimozione del carico. Quando la tensione supera il limite di snervamento, il comportamento del materiale è definito *plastico*: deformazioni e tensioni non sono più linearmente proporzionali e relazioni più generali della legge di Hooke sono necessarie per descriverlo. In particolare la deformazione plastica permane dopo la rimozione del carico. Essa non è legata alla rottura dei legami atomici essendo sperimentalmente più bassa di quella necessaria a questo scopo ( $\sigma_r \approx E/8$ , per gli acciai  $\sigma_r > 25.000$  MPa! contro  $\sigma_r < 2.000$  MPa), ma a meccanismi relativi allo spostamento degli atomi, come il movimento delle dislocazioni o lo slittamento tra piani di atomi nei grani cristallini, favoriti dalla presenza di difetti in questi ultimi. Per via del meccanismo fisico della deformazione plastica, essa non provoca variazione di volume nel materiale.

Dopo il superamento del limite di snervamento, generalmente un incremento della deformazione richiede un aumento di tensione, seppure inferiore a quello necessario in campo elastico. Questo fenomeno si chiama *incrudimento* ed è dovuto al fatto che la mobilità delle dislocazioni diminuisce al crescere della deformazione plastica. Nel loro movimento le dislocazioni non superano i bordi del grano cristallino, per cui materiali a grano fine hanno carico di snervamento più alto. In alcuni casi la tendenza all'incrudimento è modesta e può essere trascurata.

Il comportamento dei materiali in campo plastico è importante per strutture soggette a sollecitazioni elevate nelle quali si ammette che vi siano zone soggette a deformazioni plastiche, per analizzare casi di fatica a basso numero di cicli, per l'introduzione di tensioni residue utili (di compressione) in strutture superando il limite elastico con campi tensionali non uniformi.

### Comportamento sforzi-deformazioni

#### Deformazione elastica, plastica e totale

Per effettuare una corretta analisi delle relazioni tra tensioni e deformazioni in campo plastico è necessario fare riferimento a tensioni e deformazioni reali. In questa fase si supponga che il materiale, inizialmente vergine, venga sottoposto ad una tensione reale monoassiale  $\sigma$  crescente in modo monotono.

Superando il limite di snervamento del materiale, la deformazione reale compressiva (fig.1) è data dalla somma della componente elastica e di quella plastica

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (12.1)$$

La componente elastica è legata alla tensione reale dalla classica relazione di Hooke

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (12.2)$$

Si noti che la deformazione elastica in campo plastico  $\varepsilon_e$  è maggiore di quella che si ha allo snervamento  $\varepsilon_s = \sigma_s/E < \sigma/E$ , in quanto la deformazione elastica continua a crescere anche dopo lo snervamento (fig.1).

Quando viene superato il campo elastico, la deformazione trasversale risulta data dalla somma della componente di deformazione trasversale elastica, data da  $\varepsilon_{te} = -\nu \varepsilon_e$ , nella quale  $\nu$  è il coefficiente di Poisson del materiale, e di quella plastica data da  $\varepsilon_{tp} = -\nu_p \varepsilon_p$ . In quest'ultima  $\nu_p$  è il coefficiente di Poisson in campo plastico che assume il valore  $\nu_p = 0.5$ , circostanza che corrisponde fisicamente al fatto che la deformazione plastica non contribuisce alla variazione di volume del materiale ( $\varepsilon_{vp} = \varepsilon_{xp} + \varepsilon_{yp} + \varepsilon_{zp} = \varepsilon_p - \nu_p \varepsilon_p - \nu_p \varepsilon_p = 0$ ). In definitiva la deformazione trasversale totale in campo plastico è data da

$$\varepsilon_t = -(\nu \varepsilon_e + 0.5 \varepsilon_p) \quad (12.3)$$

#### Tensioni

Il comportamento tensioni-deformazioni in campo plastico può essere descritto con vari modelli. Un tipo di approccio intuitivo prevede che si utilizzino leggi separate per il campo elastico e quello plastico; ovviamente per il primo caso vale la legge di Hooke

$$\sigma = E \varepsilon \quad (\sigma \leq \sigma_s), \quad (12.4)$$

mentre per il campo plastico i modelli più rappresentativi sono: il modello *perfettamente plastico*, che non prevede il fenomeno dell'incrudimento, ed il modello *incrudito esponenziale*. Il primo caso costituisce una schematizzazione estremamente semplificata e predice che, superando la deformazione corrispondente allo snervamento, la tensione si mantenga costante. Nel secondo caso si prevede che la tensione aumenti in modo esponenziale con la deformazione. Di seguito sono riportate le relazioni sforzi-deformazioni in campo plastico per i 2 modelli di comportamento citati:

Elastico-perfettamente plastico

$$\sigma = \sigma_s$$

Elastico-incrudito esponenziale

$$\sigma = H_1 \varepsilon^{n_1} \quad (\varepsilon \geq \varepsilon_s) \quad (12.5,6)$$

Nella (6), detta anche legge di Hollomon,  $H_1$  ed  $n_1$  sono costanti relative al materiale, in particolare la seconda è

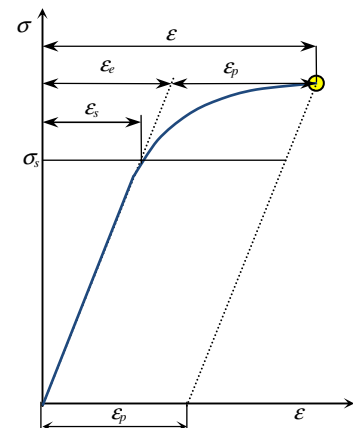


Fig.12.1 - Deformazioni in campo plastico.

definita *esponente di incrudimento* che, per i metalli, assume valori tipici nell'intervallo  $0.05 \div 0.4$ . Si noti che la deformazione presente nella (6) è quella totale data dalla (1). In campo plastico, le deformazioni totali per i due casi possono essere espresse, rispettivamente, con le seguenti espressioni:

$$\varepsilon = \sigma/E + \varepsilon_p \quad (\varepsilon \geq \varepsilon_s) \quad (12.7)$$

$$\varepsilon = (\sigma/H_1)^{1/n_1} \quad (\sigma \geq \sigma_s) \quad (12.8)$$

Le espressioni (4) e (5) o (4) e (6) che, nel rispettivo campo di definizione, descrivono il comportamento elastico-perfettamente plastico o elastico-incrudito esponenziale, nel loro insieme, forniscono una linea spezzata con un punto angoloso in corrispondenza di  $(\varepsilon_s, \sigma_s)$ . Poiché la retta e la curva hanno questo punto in comune, le costanti  $n_1$ ,  $H_1$  e  $\sigma_s$  non sono indipendenti.

### La legge di Ramberg-Osgood

La relazione esistente tra tensioni e deformazioni in campo plastico, cioè per  $\sigma > \sigma_s$ , può essere descritta dalla legge di Ramberg-Osgood (RO) proposta nel 1943:

$$\sigma = H \varepsilon_p^n \quad (12.9)$$

nella quale

- $\varepsilon_p$  è la deformazione plastica,
- $\sigma$  è la tensione nella corrispondente direzione,
- $H$  è una costante del materiale che coincide con il valore di  $\sigma$  per  $\varepsilon_p=1$  (per metalli ingegneristici tipicamente  $H=400 \div 1100$  MPa),
- $n$  è l'esponente di incrudimento del materiale, differente da  $n_1$  (tipicamente  $n=0.02 \div 0.3$ ).

Si noti che la (9) è formalmente identica alla (6), ma ne differisce poiché esprime la tensione in funzione della sola componente plastica della deformazione. La (9) può essere esplicitata rispetto alla deformazione plastica:

$$\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma}{H} \right)^{1/n} \quad (12.10)$$

Ricordando che la parte elastica della deformazione è data dalla (2), si può mettere in relazione la deformazione totale  $\varepsilon$  (eq.1) con la tensione agente come segue:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{H} \right)^{1/n} \quad (12.11)$$

Questa relazione non può essere esplicitata rispetto alla tensione come per le (4, 6), ma fornisce una curva valida e continua in tutto il campo delle deformazioni, a differenza delle relazioni precedenti (2, 8) o (2, 7). In fig.2a è mostrato in linea continua l'andamento  $\sigma$ - $\varepsilon$  ottenuto con la (11). In linea tratteggiata sono mostrate le curve ottenute con la (4) e la (10). In (fig.2b) le stesse curve sono mostrate in coordinate logaritmiche. In tali coordinate, in zone lontane dal punto di snervamento, la (11) può essere approssimata tramite 2 rette. La legge di RO (9) e la (6) coincidono per deformazioni di ampiezza sufficiente a considerare trascurabile la parte elastica ( $\varepsilon_e \ll \varepsilon_p$ ) e, di conseguenza, il primo termine della (11). In appendice è riportata la procedura per la determinazione delle costanti  $n$  ed  $H$  a partire da dati ricavati dalla prova di trazione.

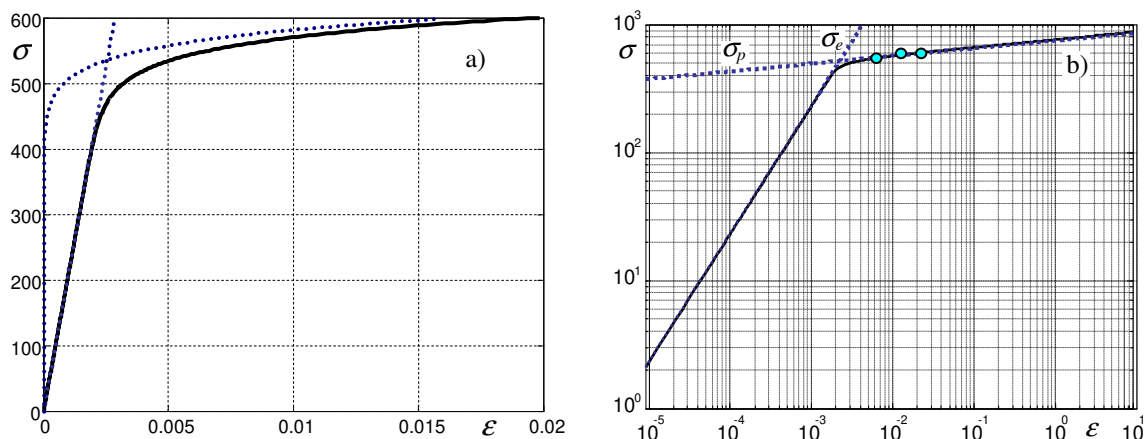


Fig.12.2 – La legge di Ramberg-Osgood per un acciaio avente  $n=0.0601$ ,  $H=766.5$ ,  $E=210000$ . a) in coordinate lineari, b) in coordinate logaritmiche. Le componenti plastica ed elastica espresse dalla (10) e dalla (4) sono tratteggiate.

**Effetto Bauschinger - Ciclo di isteresi**

Generalmente negli acciai la tensione di snervamento a compressione del materiale vergine è uguale a quella di trazione  $\sigma_{sc} = \sigma_{st} = \sigma_s$ , come mostrato in fig.3. Tuttavia, se si sottopone un acciaio a una tensione di trazione superiore a quella di snervamento  $\sigma_{max} > \sigma_s$ , in fase di scaricamento, il comportamento del materiale è elastico solo fino a che il decremento di tensione  $\Delta\sigma$  rispetto a  $\sigma_{max}$  raggiunge il valore  $\Delta\sigma = 2\sigma_s$ . Se la tensione di compressione, in valore assoluto, supera il valore  $\sigma_{sc'} = \sigma_{max} - 2\sigma_s < \sigma_{sc}$ , il materiale si comporta in modo plastico. Ciò equivale a dire che la tensione di snervamento a compressione di un materiale portato a snervamento a trazione è inferiore a quella del materiale originale, cioè  $\sigma_{sc'} < \sigma_{sc} < \sigma_s$  (fig.3). Nel caso in cui si porta il materiale vergine a snervamento di compressione si ha un'analogo diminuzione della tensione di snervamento a trazione, cioè  $\sigma_{st'} < \sigma_{st} < \sigma_s$ . Questo fenomeno prende il nome di *effetto Bauschinger*.

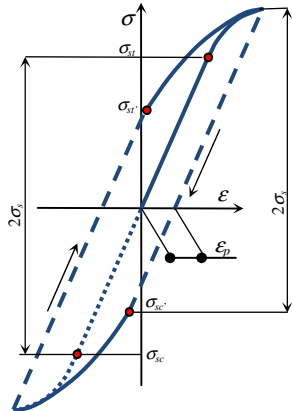


Fig.12.3 - Effetto Bauschinger

L'effetto Bauschinger spiega la tipica forma delle curve di tensione-deformazione che si ottengono deformando un materiale oltre il limite di snervamento in modo ciclico, cioè tra valori di tensione o di deformazione simmetrici rispetto allo zero come in fig.3. Scaricando il provino dopo che è stato sottoposto ad una tensione superiore al limite di snervamento, il punto rappresentativo dello stato tensione deformazione percorre una retta di inclinazione proporzionale al modulo di Young e al cessare della tensione, cioè all'intersezione con l'asse  $\epsilon$ , si riscontra una deformazione residua pari alla componente plastica  $\epsilon_p$  raggiunta in fase di caricamento. Comprime il materiale, esso si comporta in modo elastico fino a che non viene raggiunto il livello  $\sigma_{sc'} = \sigma_{max} - 2\sigma_s < \sigma_{sc}$ , dopodiché mostra nuovamente un comportamento plastico.

Imponendo al materiale dei cicli di deformazione tra valori uguali e tali da superare lo snervamento, l'andamento  $\sigma-\epsilon$  mostra un andamento ciclico del tipo di quello mostrato in fig.3, nella quale l'area racchiusa dalle curve è il lavoro necessario per la deformazione plastica, che non viene restituito in fase di scarico come quello dovuto alla componente elastica.

**Comportamento per cicli di deformazione-tensione**

Sottoponendo il materiale a cicli di deformazioni alternati simmetrici di semi-ampiezza costante  $\epsilon_a$  (fig.4a), aventi cioè ampiezza, valori massimo e minimo dati rispettivamente da

$$\Delta\epsilon = 2\epsilon_a \quad \epsilon_{max} = +\epsilon_a \quad \epsilon_{min} = -\epsilon_a, \quad (12.12,13,14)$$

e tali da provocare il superamento del limite elastico ( $\epsilon_a > \epsilon_s$ ), in una prima fase la tensione necessaria al raggiungimento degli estremi di deformazione  $\epsilon_{max} = \epsilon_a$ ,  $\epsilon_{min} = -\epsilon_a$  può aumentare o diminuire (fig.4a,b). Nel primo caso si dice che si verifica un *incrudimento* ciclico del materiale, nel secondo caso un *addolcimento*. Il ciclo di isteresi (fig.4b,c) assume una forma stabile prima della metà della durata a rottura  $N_r$ , tipicamente il numero di cicli a cui si raggiunge la stabilità  $N_s$  è compreso tra il 10% e il 30% del numero di cicli a rottura ( $10\% N_r < N_s < 30\% N_r$ ), di solito  $N_s < 30\% N_r$ , spesso  $N_s < 100$  cicli.

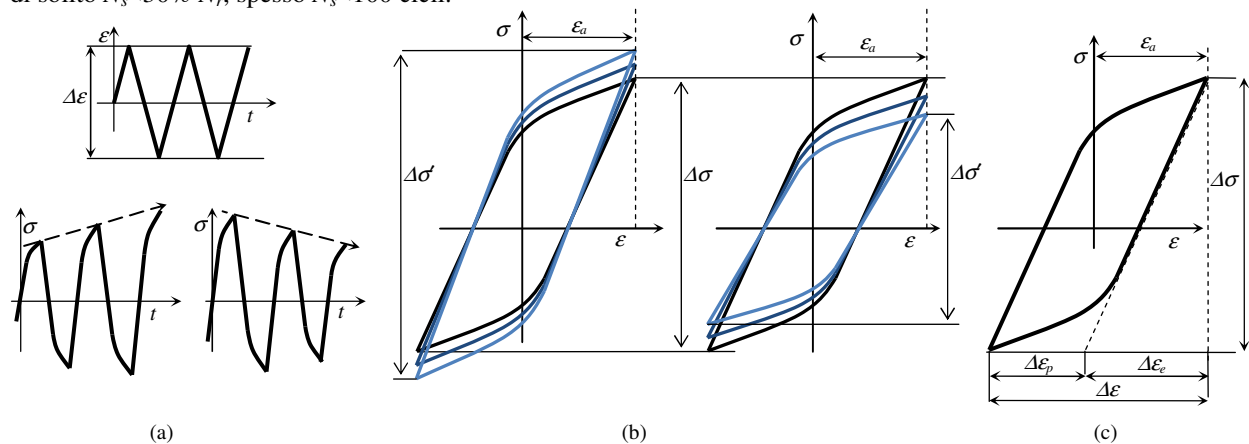


Fig.12.4 - a) Andamento della deformazione in funzione del tempo e corrispondente andamento della tensione nel caso d'incrudimento e addolcimento. b) Cicli di isteresi per incrudimento e addolcimento. c) Deformazioni nel ciclo di isteresi

Il comportamento può essere previsto dalla prova di trazione in base a considerazioni derivanti dall'esperienza. In particolare si trova che il rapporto tra la tensione di rottura  $\sigma_r$  e la tensione di snervamento  $\sigma_s$  oppure quella corrispondente ad una deformazione plastica pari allo 0.2%  $\sigma_{s2\%}$  è indicativo del comportamento del materiale:

- $\sigma_r / \sigma_s > 1.4$       incrudisce       $n > 0.2$       (acciaio dolce, materiali ricotti)
- $\sigma_r / \sigma_s < 1.2$       addolcisce       $n < 0.1$       (acciaio trattato, materiali incruditi o trattati termicamente)
- $1.2 < \sigma_r / \sigma_s < 1.4$       è difficile effettuare previsioni

Tipicamente i materiali dolci a bassa resistenza tendono ad incrudire mentre quelli duri ad alta resistenza tendono ad addolcire. In alcuni materiali dopo il primo addolcimento si verifica un incrudimento.

L'ampiezza della deformazione del ciclo di isteresi è data dalla somma di una componente elastica ed una plastica visualizzabili in fig.4:

$$\Delta \varepsilon = 2\varepsilon_a = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p = \Delta \sigma / E + \Delta \varepsilon_p \quad (12.15)$$

Fisicamente la variazione delle caratteristiche del materiale sottoposto a deformazioni cicliche è dovuta al riassetamento delle dislocazioni.

### Curva ciclica

Il comportamento del materiale soggetto a cicli di deformazione è rappresentato mediante la *curva ciclica* che mette in relazione l'ampiezza del ciclo di deformazione reale totale  $\Delta \varepsilon$  (o plastica  $\Delta \varepsilon_p$ ) con la variazione della tensione  $\Delta \sigma$  per cicli di isteresi stabilizzati. Essa si costruisce sottoponendo il materiale a cicli di deformazione totale di ampiezza  $\Delta \varepsilon$  (o plastica  $\Delta \varepsilon_p$ ) e misurando l'ampiezza di carico  $\Delta \sigma$  quando il valore si stabilizza, ripetendo la prova con valori di  $\Delta \varepsilon$  crescenti. Riportando le coppie  $\Delta \varepsilon$ - $\Delta \sigma$  su un diagramma si ottiene la curva ciclica che coincide con l'involuppo dei vertici dei cicli di isteresi stabilizzati a vari livelli di deformazione.

La curva ciclica è poco influenzata dallo stato iniziale del materiale e può differire notevolmente dalla curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  monotona. Tipicamente essa si mantiene al disotto di quella monotona nel caso di materiali che addoliscono e viceversa. In alcuni casi la curva ciclica interseca la monotona; ciò significa che il materiale ha tendenza all'incrudimento o all'addolcimento a seconda del livello di carico. La composizione delle leghe e i trattamenti possono avere effetti differenti sulle caratteristiche meccaniche per deformazioni cicliche e monotone. I polimeri duttili tipicamente addoliscono.

La curva ciclica può essere rappresentata con una espressione simile a quella di Ramberg-Osgod (11):

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{H'} \right)^{1/n'} \quad (12.16)$$

nella quale

- $\varepsilon_a$  è la semiampiezza del ciclo di deformazione stabilizzato,
- $\sigma_a$  è la semiampiezza del ciclo di tensione corrispondente,
- $H'$  è il coefficiente di incrudimento ciclico del materiale,
- $n'$  è l'esponente di incrudimento ciclico del materiale;  $0.05 < n' < 0.2$ ;

Le curve cicliche deviano dalla linearità in modo graduale anche per materiali con punto snervamento netto nella curva monotona. I materiali metallici hanno  $n'=0.1 \div 0.2$ ; per  $n' < 0.1$  la curva risulta piatta, cioè descrive il caso perfettamente plastico.

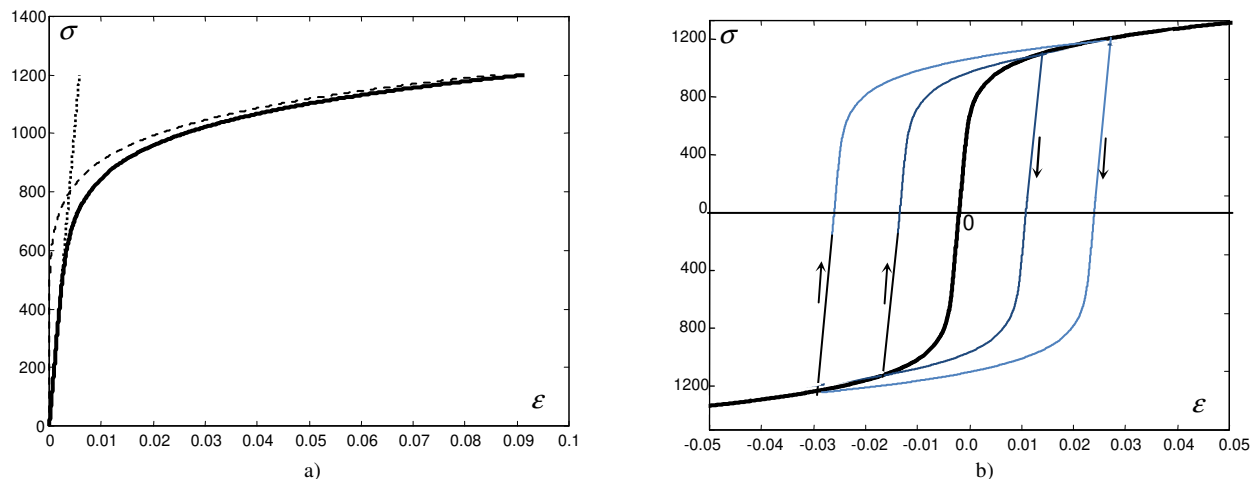


Fig. 12.5 - Curva ciclica: a) con le componenti elastica e plastica; b) con i cicli di isteresi stabilizzati.

### Tensione e deformazione in campo plastico

In campo elastico lineare, in presenza di concentrazione di tensione, il rapporto tra tensione nominale e tensione massima, pari al coefficiente di concentrazione delle tensioni, è uguale a quello tra le corrispondenti deformazioni, cioè:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{\text{nom}}} = \frac{\sigma_{\max}/E}{\sigma_{\text{nom}}/E} \quad (12.17)$$

Oltre il campo elastico lineare, la tensione realmente agente risulta inferiore a quella calcolata con le formule della teoria dell'elasticità, mentre la deformazione risulta maggiore. In conseguenza di ciò si può definire un coefficiente di concentrazione per le tensioni e uno per le deformazioni:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \qquad k_\epsilon = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\text{nom}}} \qquad (12.18,19)$$

**Stato piano di tensione: l'ipotesi di Neuber**

Nel caso di stato piano di tensione, l'ipotesi di Neuber afferma che il prodotto dei fattori in campo plastico è costante e pari al prodotto di quelli (uguali a  $k_i$ ) in campo elastico:

$$k_\sigma k_\epsilon = k_t^2 \qquad (12.20)$$

in base alle definizioni (18,19) la (20) diventa

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_{\text{nom}}} = k_t^2 \qquad (12.21)$$

Ricordando che  $\epsilon_{\text{nom}} = \sigma_{\text{nom}}/E$ , si ottiene

$$\sigma_{\max} \epsilon_{\max} = \frac{k_t^2}{E} \sigma_{\text{nom}}^2 \qquad (12.22)$$

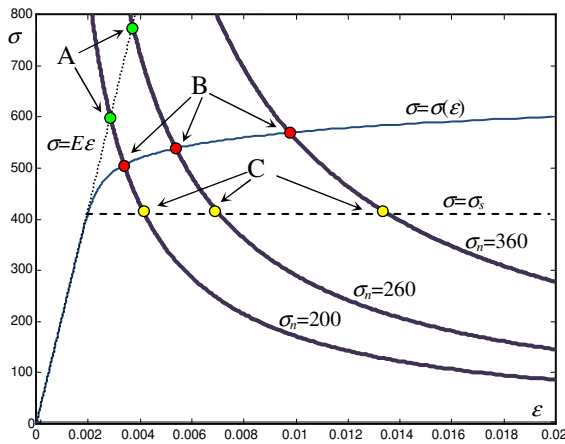


Fig.12.6 - Iperboli di Neuber per  $K_t=3$  e diversi valori della tensione nominale; il materiale è l'acciaio di fig.2. Nei punti A si ha  $\sigma=K_t\sigma_n$ ; i punti B rappresentano lo stato effettivo del materiale nei vari casi; i punti C rappresentano gli analoghi nel caso di un materiale perfettamente plastico.

Nel piano  $\epsilon$ - $\sigma$  questa relazione descrive l'iperbole di Neuber (fig.6). Essa passa dal punto di coordinate  $\sigma=k_t\sigma_{\text{nom}}$ ,  $\epsilon=k_t\epsilon_{\text{nom}}=k_t\sigma_{\text{nom}}/E$  (che soddisfa l'equazione di Neuber, ma non è un punto rappresentativo dello stato del materiale) e che si trova sul prolungamento della retta  $\sigma=E\epsilon$  rappresentativa della parte lineare della legge costitutiva del materiale, nota dalla prova di trazione (punti A di fig.6).

La (22) può essere utilizzata per ottenere i valori massimi di  $\sigma$  ed  $\epsilon$  dopo lo snervamento: il punto rappresentativo dello stato del materiale si trova all'intersezione dell'iperbole di Neuber con la curva che rappresenta la legge costitutiva  $\sigma=\alpha(\epsilon)$ . Nel caso di materiale perfettamente plastico si ha  $\sigma_{\max}=\sigma_s$  e, introducendo tale valore nella (22), si ottiene

$$\epsilon_{\max} = \frac{(k_t \sigma_{\text{nom}})^2}{\sigma_s E} \qquad (12.23)$$

Nel caso in cui la legge costitutiva del materiale è del tipo di quella di Ramberg-Osgod (11), non è possibile esplicitare la relazione rispetto a  $\sigma_{\max}$  o  $\epsilon_{\max}$ . Ad esempio, sostituendo la (11) nella (22) si ottiene

$$\sigma_{\max} \left[ \frac{\sigma_{\max}}{E} + \left( \frac{\sigma_{\max}}{H} \right)^{1/n} \right] = \frac{k_t^2}{E} \sigma_{\text{nom}}^2 \qquad (12.24)$$

Quest'ultima può essere riscritta nel seguente modo

$$\sigma_{\max} = \left[ \frac{H^{1/n}}{E} \left( k_t^2 \sigma_{\text{nom}}^2 - \sigma_{\max}^2 \right) \right]^{n/(n+1)} \qquad (12.25)$$

e risolta in modo iterativo ponendo inizialmente  $\sigma_{\max}=\sigma_s$  nel termine a destra della (25) o  $\sigma_{\max}=0$ , caso che corrisponde a trascurare inizialmente la componente elastica della deformazione.

## APPENDICE

**A1. Determinazione delle costanti della legge di Ramberg-Osgod**

I dati sperimentali per la determinazione dei parametri della legge di Ramberg-Osgod sono costituiti da coppie di punti  $\sigma_i$  ed  $\varepsilon_i$  ottenuti durante la prova di trazione, misurando il diametro del provino nella zona della strizione. Per valori di  $\varepsilon$  sufficientemente grandi si può trascurare la componente elastica di deformazione e ritenere  $\varepsilon \approx \varepsilon_p$ , come si osserva in fig.2b, mentre, in generale, essa può essere calcolata, in base alla (12.11) come  $\varepsilon_p = \varepsilon - \sigma/E$ . La deformazione reale in campo plastico può essere determinata misurando la variazione di diametro del provino nella zona di strizione ed utilizzando la relazione (10.11)

$$\varepsilon_R = \ln A_0/A = \ln d_0/d \quad (A1)$$

mentre la tensione reale può essere valutata mediante la (10.5)

$$\sigma_R = F/A \quad (A2)$$

o la (10.10)

$$\sigma_R = \sigma(\varepsilon_N + 1) \quad (A3)$$

nella quale la deformazione introdotta è quella nominale.

Per determinare le costanti  $n$  ed  $H$  è opportuno riscrivere la relazione (11) in termini di logaritmi ottenendo

$$\log_{10} \sigma = \log_{10} H + n \log_{10} \varepsilon_p \quad (A4)$$

La (4) mostra che il legame tra i  $\log_{10} \sigma_i$  e i  $\log_{10} \varepsilon_i$  è lineare, per cui, su un grafico cartesiano, tali valori si dispongono su una retta della quale  $n$  è il coefficiente angolare, e può essere determinato graficamente o tramite regressione lineare, mentre l'ordinata dell'intersezione della retta con l'asse verticale è pari a  $\log_{10} H$ , come si vede in fig.1. In pratica per

$$\log_{10} \varepsilon_p = 0 \quad (A5)$$

cui corrisponde  $\varepsilon_p=1$  (valore teorico, fisicamente non ottenibile per la maggior parte dei materiali), si ha:

$$\log_{10} \sigma = \log_{10} H \quad (A6)$$

Se  $L_0 = \log_{10} \sigma$  è il valore letto sul diagramma per  $\log_{10} \varepsilon_p = 0$ , o determinato con la regressione lineare,  $H$  può essere calcolato come:

$$H = 10^{L_0} \quad (A7)$$

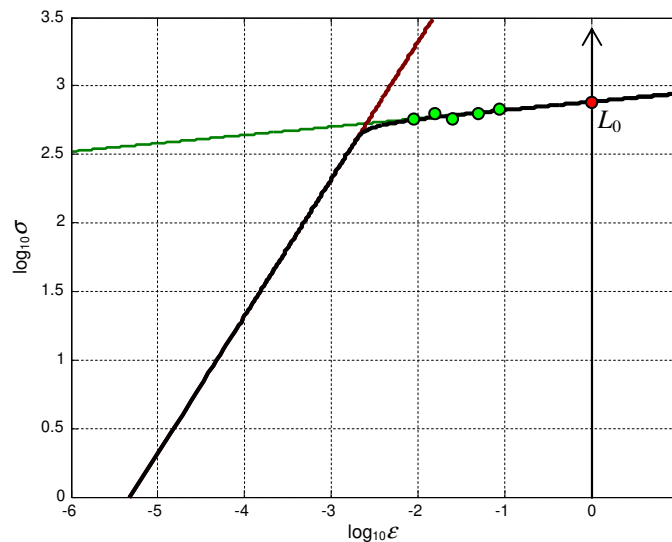


Fig.A1 – Determinazione sperimentale dei parametri di Ramberg-Osgod.