

1. LO STATO TENSIONALE NEI SOLIDI

Un solido tridimensionale è un corpo continuo che occupa una regione dello spazio 3D di volume V , delimitata dalla superficie S . Una parte della superficie S può essere vincolata all'esterno in modo che gli spostamenti dei punti appartenenti a essa siano impediti.

Tensioni

L'oggetto dell'analisi è un solido tridimensionale in equilibrio sotto l'azione di forze esterne di massa e di superficie. L'unica ipotesi fatta sul materiale che lo costituisce è che sia continuo, per cui non vengono considerate le azioni scambiate tra particelle e a livello di dimensioni molecolari.

Si suppone valida l'ipotesi di Cauchy secondo cui le forze che si scambiano le parti del corpo in un elemento infinitesimo di superficie sono riducibili alla *sola* forza risultante applicata in un punto interno dell'elemento stesso.

Per esaminare gli effetti del sistema di forze si può immaginare il corpo diviso in due parti: affinché ciascuna parte resti in equilibrio è necessario applicare un sistema di forze esterne distribuite sulla superficie di separazione. Questo sistema di forze è equivalente all'azione che l'altra parte del corpo applicava prima della recisione.

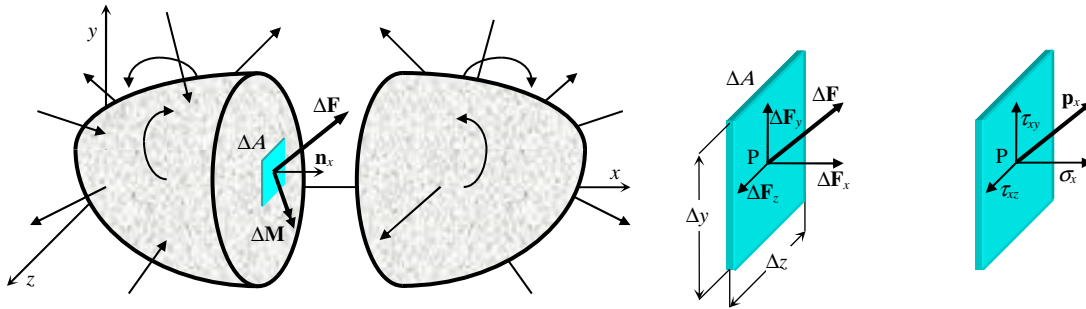


Fig.1.1 - Forze interne agenti su un elemento di superficie ΔA centrato nel punto P , in un solido caricato da forze esterne e tensioni agenti in P .

La fig.1 mostra il corpo tagliato da un piano parallelo al piano yz . La sua giacitura è individuata dal *versore* $\mathbf{n}_x = [1 \ 0 \ 0]^T$ parallelo alla direzione x , le cui componenti sono i coseni direttori della retta di direzione x . Se si considera un elemento di superficie $\Delta A = \Delta y \Delta z$ centrato in un punto P di coordinate $\mathbf{P} = (x, y, z)$ e si effettua la somma di tutte le forze agenti su di esso indicando il risultante con $\Delta \mathbf{F}$, si definisce vettore tensione \mathbf{p}_x , agente nel punto P , relativamente alla giacitura di normale \mathbf{n}_x (fig.1), il rapporto:

$$\mathbf{p}_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (1.1)$$

Per l'ipotesi di Cauchy sopra riportata si deve avere:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A} = 0. \quad (1.2)$$

In generale è opportuno descrivere la tensione in termini delle sue componenti cartesiane: se si considerano le componenti di $\Delta \mathbf{F}$ nella direzione degli assi coordinati, le componenti della tensione sono definite dalle tre equazioni:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (1.3)$$

da cui il vettore \mathbf{p}_x può essere espresso come:

$$\mathbf{p}_x = \left[\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \right]^T \quad (1.4)$$

Con il passaggio al limite le componenti di tensione sono associate a un singolo punto P . In generale il vettore tensione e le sue componenti assumono valori diversi in ciascun punto della superficie di separazione e ovviamente in ciascun punto del solido cioè $\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x(x, y, z) = \mathbf{p}_x(\mathbf{P})$, essendo \mathbf{P} il vettore le cui componenti sono le coordinate cartesiane del punto.

ΔF_x e σ_{xx} sono dirette lungo l'asse x normale all'area ΔA e quindi sono chiamate rispettivamente forza normale e tensione normale. Le forze ΔF_y e ΔF_z e le tensioni τ_{xy} e τ_{xz} sono parallele all'area ΔA e sono chiamate rispettivamente forze e tensioni di taglio o tangenziali. Il *primo* indice si riferisce alla *direzione della normale* all'area e il *secondo* alla *direzione della componente*. Questo doppio indice non è necessario per le tensioni normali e generalmente si scrive semplicemente σ_x .

La giacitura di un elemento di superficie è individuata dal versore \mathbf{n} della direzione normale alla superficie stessa: una faccia si definisce positiva quando la sua normale diretta verso l'esterno del corpo ha lo stesso verso di uno degli assi coordinati, negativa in caso contrario. Le componenti normali di tensione sono considerate positive se hanno

verso concorde con la normale all'elementino, cioè risultano uscenti, e viceversa. Dando un senso fisico a questa convenzione, si dice che sono *di trazione* se positive e *di compressione* se negative. I segni delle componenti tangenziali sono regolati da 2 possibili convenzioni: la prima afferma che le tensioni sono positive se, agendo su facce positive, hanno verso concorde con gli assi x, y, z , e se, agendo su facce negative, hanno verso discorde; negative nei casi opposti; l'altra convenzione le considera positive se tendono a provocare una rotazione oraria dell'elemento su cui agiscono e viceversa; questa convenzione viene utilizzata nel tracciamento dei *cerchi di Mohr*. Si noti che le due convenzioni attribuiscono segni differenti a stati tensionali uguali.

Tensione al variare del piano di giacitura

Considerato un punto P del solido, i possibili piani di sezione passanti per esso costituiscono un insieme infinito, definito *stella di piani* di centro P (fig.2); a loro volta le rette d'azione dei versori \mathbf{n} che identificano tali piani costituiscono una *stella di rette*. Il vettore tensione agente nel punto varia in modulo e direzione al variare della giacitura \mathbf{n} del piano di sezione su cui agisce, cioè si ha $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(\mathbf{P}, \mathbf{n})$.

Ad esempio (fig.3) si consideri una barra di materiale omogeneo di sezione quadrata avente superficie pari ad A e lunghezza l abbastanza grande rispetto al lato della sezione. La barra sia disposta lungo la direzione x e sia soggetta alle sezioni estreme a due distribuzioni di forze di risultante rispettivamente $-F$ ed F in direzione x . Si può intuitivamente ritenere che la tensione agente su sezioni in prossimità del centro della barra, aventi qualunque giacitura, sia costante in tutti i punti della sezione stessa. Considerando un punto P al centro della barra:

- se si effettua una sezione con un piano di normale parallela a x , il vettore \mathbf{p}_x risulta parallelo a x con modulo $p_x = F/A$ (intuitivamente, per l'equilibrio in direzione x , deve essere infatti $F = p_x A$, da cui $p_x = \sigma_x = F/A$);
- se si effettua una sezione con un piano di normale \mathbf{n} a 45° rispetto all'asse x , \mathbf{p}_n risulta ancora parallelo a x ; in questo caso la superficie della sezione ha un'area pari a $A/\cos(45^\circ)$ e, per l'equilibrio in direzione x , deve essere $F = p_n A / \cos(45^\circ)$, da cui $p_n = p_{nx} = F \cos(45^\circ) / A$;
- se si effettua una sezione con un piano di normale parallela a y , si osserva che la tensione agente, rappresentata dal vettore \mathbf{p}_y , è nulla.

Lo stato tensionale

Per definire lo stato tensionale in un punto del solido non è sufficiente conoscere la tensione agente su una sola giacitura. Se si effettuano sezioni con piani xz e xy , aventi normali secondo le direzioni coordinate y ($\mathbf{n}_y = [0 \ 1 \ 0]$) e z ($\mathbf{n}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$), e si considerano le forze agenti in modo analogo a quanto mostrato per la direzione x , si osserva che nel punto P, su detti piani, agiscono le tensioni \mathbf{p}_y e \mathbf{p}_z diverse tra loro e da \mathbf{p}_x (fig.4).

In definitiva le tensioni agenti nel punto P sui tre piani coordinati sono espresse dai tre vettori:

$$\mathbf{p}_x = [\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}]^T \quad \mathbf{p}_y = [\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz}]^T \quad \mathbf{p}_z = [\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z]^T \quad (1.5a,b,c)$$

È possibile dimostrare che le 9 componenti di tensione presenti nelle eq.(5) sono sufficienti a definire lo stato di sollecitazione in *un punto* al variare della *giacitura*. Usualmente esse vengono riunite nella matrice σ che prende il nome di *tensore degli sforzi*:

$$\sigma = [\mathbf{p}_x \quad \mathbf{p}_y \quad \mathbf{p}_z] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Nel seguito si mostrerà che sono valide le seguenti uguaglianze tra le tensioni tangenziali $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, per cui le grandezze indipendenti nella (6) si riducono a 6.

Nel S.I. la tensione viene misurata in MegaPascal (MPa) cioè N/mm^2 ($1 \text{ MPa} \approx 0.1 \text{ Kg/mm}^2$).

La tensione non può essere misurata sperimentalmente. Vi sono invece molte tecniche sperimentali che possono essere usate per misurare le deformazioni. In questi casi lo stato di tensione in un punto può essere valutato se sono note le relazioni fra tensione e deformazione.

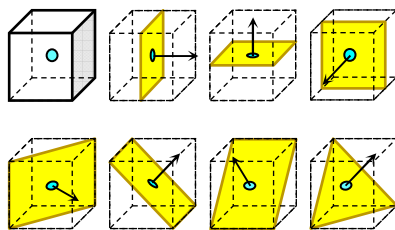


Fig.1.2 – Alcune delle possibili (infinite) giaciture relative a un punto.

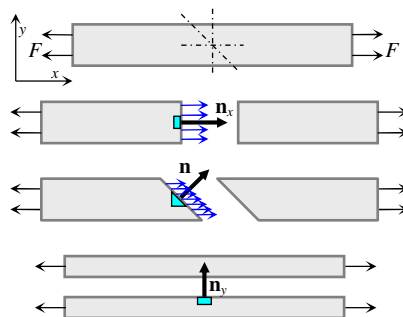


Fig.1.3 - Variazione della tensione al variare del piano di sezione in una barra soggetta a trazione.

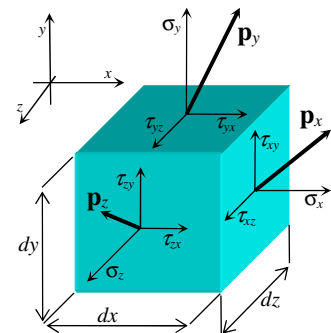


Fig.1.4 - Tensioni agenti secondo i piani coordinati.

Tensione al variare del piano di giacitura

Ci si propone di determinare la tensione \mathbf{p}_n agente (in un punto) su un piano di normale \mathbf{n} , obliquo rispetto al sistema di assi coordinati, partendo dalla conoscenza delle tensioni agenti (nel punto) sui piani coordinati. In questo caso sono noti il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ e il versore del piano \mathbf{n} .

Si consideri un tetraedro avente tre facce con giaciture parallele agli assi cartesiani (fig.5), aventi area dA_i ($i=x,y,z$), e una faccia inclinata con normale in direzione n , avente area dA_n . Sia \mathbf{n} il versore della direzione n le cui componenti sono i coseni direttori:

$$\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T \quad (1.7)$$

Deve essere ricordato che una direzione nello spazio può essere identificata mediante 2 sole informazioni, ad esempio 2 delle 3 componenti del versore (1.7), essendo la terza univocamente determinata dal fatto che il versore ha modulo unitario. Si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$n_i = dA_i / dA_n \quad i=x, y, z \quad (1.8)$$

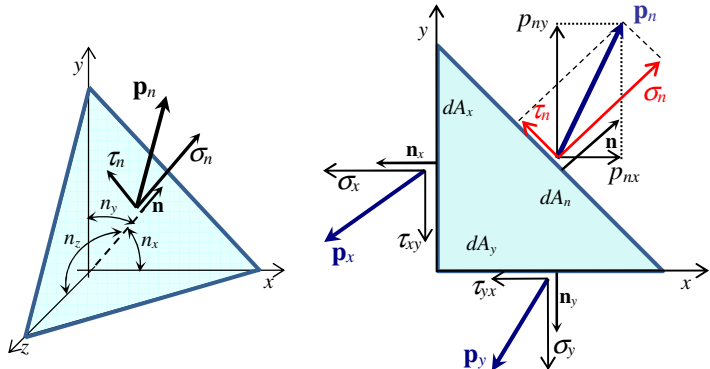


Fig.1.5 – Il tetraedro in 3D e 2D e le scomposizioni di \mathbf{p}_n secondo le direzioni cartesiane e le direzioni parallela e ortogonale al versore \mathbf{n} .

Il vettore tensione \mathbf{p}_n può essere scomposto secondo gli assi di riferimento cartesiani (fig.5):

$$\mathbf{p}_n = [p_{nx} \quad p_{ny} \quad p_{nz}]^T \quad (1.9)$$

o secondo le direzioni normale e parallela (tangenziale) al piano:

$$\mathbf{p}_n = [\sigma_n \quad \tau_n]^T \quad (1.10)$$

Da un punto di vista ingegneristico le componenti normale e tangenziale sono più significative in quanto costituiscono sollecitazioni fisicamente differenti sul materiale. Le componenti cartesiane vengono ricavate solo come passaggio intermedio per ottenere le componenti normale e tangenziale.

Le componenti cartesiane di \mathbf{p}_n

Le componenti cartesiane del vettore \mathbf{p}_n possono essere poste in relazione con il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ mediante le equazioni di equilibrio alla traslazione del tetraedro nelle tre direzioni coordinate, che possono essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{p}_n dA_n - \mathbf{p}_x dA_x - \mathbf{p}_y dA_y - \mathbf{p}_z dA_z = 0 \quad (1.11)$$

ricordando che le forze agenti sulle facce si ottengono moltiplicando le tensioni per le superfici su cui agiscono e che il segno attribuito a ciascuna forza coincide con il segno della faccia su cui agisce (in questo caso le facce di direzione parallele agli assi cartesiani sono negative). Dividendo per A_n e ricordando la (8) si ottiene:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z \quad [\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_j n_j] \quad (1.12)$$

La (12) scritta per esteso fornisce:

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} n_x + \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} n_y + \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} n_z \quad (1.13)$$

da cui

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

cioè:

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad [p_{ni} = \sigma_{ij} n_j] \quad (1.15)$$

Il modulo del vettore \mathbf{p}_n è dato da:

$$p_n = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} p_{ni}^2} = \sqrt{(\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z)^2 + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z)^2 + (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z)^2} \quad (1.16)$$

La componente normale di \mathbf{p}_n

La componente di \mathbf{p}_n lungo la direzione n si ottiene effettuandone la proiezione con la nota espressione del prodotto scalare fra vettori:

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n = \sum_{i=x,y,z} n_i p_{ni} = n_x p_{nx} + n_y p_{ny} + n_z p_{nz} \quad (1.17)$$

che, per esteso, fornisce:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z \quad \left[\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \right] \quad (1.18)$$

Ricordando la (15), la (17) può essere riscritta come

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (1.19)$$

nella quale il soprascritto significa trasposto.

È bene ricordare che nella relazione (18) le componenti di tensione cartesiane sono funzioni dello spazio, ma, fissato il punto nel quale si considera lo stato tensionale, sono valori costanti, mentre i termini variabili sono le componenti del versore \mathbf{n} . Poiché, come detto, le componenti indipendenti del versore indipendenti tra loro sono 2, il valore di σ_n (18) è una funzione di due variabili.

Per ottenere $\boldsymbol{\sigma}_n$, il vettore componente di \mathbf{p}_n in direzione n , basta moltiplicare la componente σ_n per il versore \mathbf{n} ottenendo le seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (1.20)$$

La componente tangenziale di \mathbf{p}_n

La componente di \mathbf{p}_n lungo la direzione tangenziale si ottiene come differenza tra il vettore \mathbf{p}_n stesso e il componente normale $\boldsymbol{\sigma}_n$:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{p}_n - \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (1.21)$$

In base alle (15) e (20) o al termine a destra della (21), questa relazione può essere riscritta come segue:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}_n) \mathbf{n} = \mathbf{S}_n \mathbf{n} \quad (1.22)$$

essendo \mathbf{I} la matrice identità ed \mathbf{S}_n data da:

$$\mathbf{S}_n = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Scritta per esteso la (22) fornisce:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \begin{bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

La direzione del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ può essere esplicitata mediante le componenti del suo versore \mathbf{n}' . Tenuto conto delle (20), (16) e (18), il modulo e il versore del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$, possono essere scritti come:

$$\tau_n = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} \tau_{ni}^2} = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} \quad \mathbf{n}' = \boldsymbol{\tau}_n / \tau_n \quad (1.25a,b)$$

Direzioni principali

Le *direzioni principali* sono le direzioni dei versori dei piani sui quali le tensioni tangenziali risultano nulle, dove cioè si verifica:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{S}_n \mathbf{n} = 0 \quad (1.26a)$$

cioè:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0 \quad (1.26b)$$

Le (26) costituiscono un sistema di equazioni lineari omogeneo nelle variabili n_x , n_y ed n_z ; essendo incognito anche il valore σ_n associato a ciascuna soluzione del sistema. Affinché il sistema (26) ammetta soluzioni diverse da quella identicamente nulla, deve essere:

$$\text{Det}(\mathbf{S}_n) = 0 \quad (1.27)$$

Sviluppando la (27) si ottiene la cosiddetta *equazione secolare* o degli *autovalori* che permette di valutare i valori σ_n

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (1.28)$$

essendo I_1 , I_2 e I_3 gli *invarianti* della matrice $\boldsymbol{\sigma}$ così definiti:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z & I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \text{Det}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1.29a-c)$$

Fissato il punto del solido, al variare dell'orientamento della terna x , y , z , tutte le componenti della matrice $\boldsymbol{\sigma}$ assumono valori differenti, mentre le quantità (29) rimangono invariate.

L'equazione secolare (28) ammette 3 radici reali indicate con σ_1 , σ_2 e σ_3 . Tali valori di tensione sono detti tensioni principali. Sostituendo uno alla volta questi valori nella (26) è possibile ottenere i versori delle corrispondenti direzioni principali \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 . Se le tensioni principali sono distinte si può dimostrare che sono ortogonali a due a due. Se due tensioni principali coincidono, *tutte le direzioni ortogonali all'altra sono direzioni principali*; ad esempio, se $\sigma_2 = \sigma_3$ e $\sigma_1 \neq 0$, tutte le direzioni normali a \mathbf{n}_1 sono direzioni principali, come nel caso dello stato di tensione monoassiale in cui $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $\sigma_1 > 0$. Se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, tutte le direzioni uscenti dal punto sono principali. I tre valori scalari delle tensioni principali e i tre versori sono rispettivamente gli *autovalori* e gli *autovettori* della matrice $\boldsymbol{\sigma}$, per cui, per la loro determinazione, è conveniente utilizzare gli *algoritmi appositamente sviluppati* nel campo del calcolo numerico.

Se si sceglie una terna di riferimento cartesiana i cui assi coincidono con le direzioni principali nel punto considerato del solido, la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ diventa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

La (14), che consente di ottenere la tensione agente sulla generica giacitura \mathbf{n} , si trasforma come segue:

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n1} \\ p_{n2} \\ p_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

La componente normale (18) diventa:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (1.32)$$

La componente tangenziale, utilizzando la (24), diventa:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} \quad (1.33)$$

oppure:

$$\tau_n = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2} \quad (1.34)$$

Cerchi di Mohr

Fissato un punto del solido, si consideri una terna di riferimento (x_1, x_2, x_3) con gli assi paralleli alle direzioni principali. In tale riferimento il tensore assume la forma descritta dalla (30). Si consideri il fascio di piani i cui versori \mathbf{n} sono perpendicolari a x_3 (fig.6): essendo $n_3=0$, le eq.(32) e (34) assumono la seguente forma:

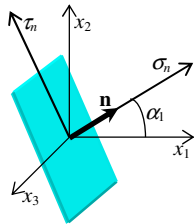


Fig.1.6 - fascio di piani di asse x_3 .

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 \qquad \tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2) n_1 n_2 \qquad (1.35, 36)$$

Se α_1 è l'angolo che il versore \mathbf{n} forma con l'asse x_1 si ha:

$$n_1 = \cos \alpha_1 \qquad n_2 = \sin \alpha_1 \qquad n_1^2 + n_2^2 = 1 \qquad (1.37, 38, 39)$$

Se si introducono nelle (35) e (36) vari valori di α_1 e si riportano i valori di σ_n e τ_n ottenuti su un piano cartesiano di assi $x=\sigma_n$ e $y=\tau_n$, i punti ottenuti si dispongono su una circonferenza come si vede, ad esempio, in fig.7. L'equazione di tale circonferenza può essere ottenuta eliminando n_1 ed n_2 dalle (35, 36) utilizzando la (39), nelle seguenti forme:

$$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2 = 0 \qquad (1.40a)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 = 0 \qquad (1.40b)$$

Le (40) sono le equazioni di una circonferenza nel piano σ_n, τ_n - la (a) del tipo $(x-a)(x-b)+y^2=0$ - i cui punti sono i valori di σ_n e τ_n che si ottengono al variare della direzione \mathbf{n} (cioè dell'angolo α_1). La circonferenza ha il centro sull'asse σ_n in posizione $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ e raggio pari a $(\sigma_1-\sigma_2)/2$. Questo valore coincide con quello della *massima tensione tangenziale tra quelle agenti sui piani che fanno fascio attorno all'asse x_3* ; in particolare si ha $\tau_{max}=(\sigma_1-\sigma_2)/2$, e il piano su cui agisce è quello con versore \mathbf{n} inclinato di 45° rispetto a \mathbf{n}_1 ($\alpha_1=45^\circ$).

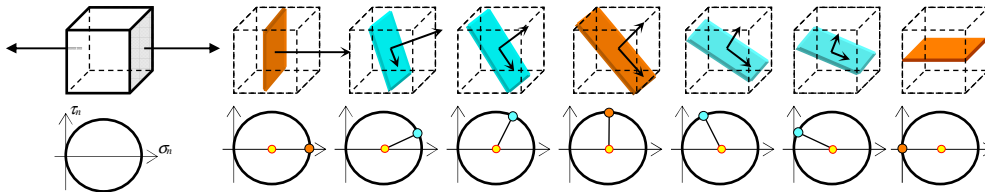


Fig.1.7 – Posizione delle coppie σ_n e τ_n sul cerchio di Mohr al variare della giacitura nel caso di stato tensionale monoassiale.

Introducendo le (37,38) nella (36) si ottiene questa equazione:

$$2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin 2\alpha_1 = \pm \frac{\tau_n}{(\sigma_1 - \sigma_2)/2} \qquad (1.41)$$

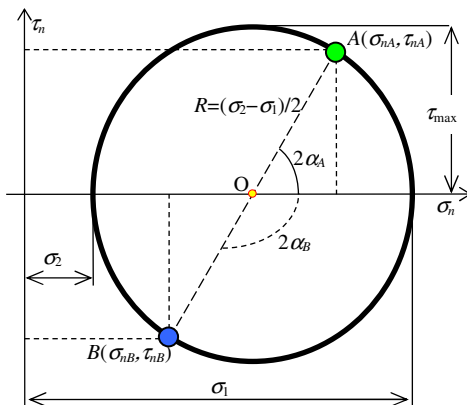


Fig.1.8 – Il cerchio di Mohr

dalla quale si osserva che l'angolo α_1 formato tra la direzione principale n_1 e la normale al piano le cui tensioni sono rappresentate dal punto prescelto del cerchio di Mohr (ad es. A in fig.8), è pari alla metà dell'angolo formato tra il raggio del cerchio passante per il punto e l'asse orizzontale σ_n . Se si considerano due punti qualunque del cerchio di Mohr, l'angolo formato tra i raggi passanti per essi sono pari al doppio dell'angolo formato tra i versori dei piani di cui i due punti rappresentano lo stato tensionale. In particolare se le normali dei due piani formano un angolo di 90° i punti rappresentativi σ_n, τ_n risultano diametralmente opposti (a 180°), come nel caso dei punti A e B in fig.8.

Ovviamente per tracciare il cerchio di Mohr è necessario conoscerne alcuni parametri. Non è necessario conoscere le tensioni e le direzioni principali, anzi il caso tipico è quello nel quale si conosce lo stato tensionale su due piani non principali disposti a 90° , purché la direzione del fascio a cui i due piani appartengono sia principale. In questo caso, essendo i punti corrispondenti diametralmente opposti sul cerchio di Mohr, è possibile l'identificazione del centro e del diametro. Si ricorda che la convenzione relativa al segno delle tensioni tangenziali nei cerchi di Mohr prevede che esse siano considerate positive se tendono a provocare una rotazione oraria dell'elemento su cui agiscono e viceversa.

Sul cerchio di Mohr è possibile identificare un punto N detto *polo delle normali* (fig.9) che gode di una utile proprietà. A partire da due punti diametralmente opposti del cerchio di Mohr si tracciano due rette a e b parallele ai versori dei piani cui i punti si riferiscono (ad es. gli assi x e y); il punto di intersezione di tali rette è N e gode della seguente proprietà: la congiungente di tale punto con un punto C (qualsiasi) del cerchio forma con a un angolo pari all'angolo formato tra il versore parallelo ad a e il versore del piano cui si riferisce C.

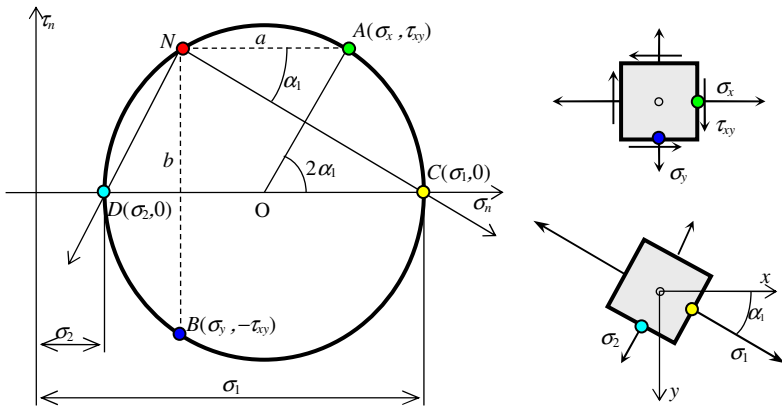


Fig.1.9 - Cerchio di Mohr nel caso di $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$.

Le fig.9-13 si riferiscono a vari casi di sollecitazione caratterizzati da differenti combinazioni delle tensioni principali. In particolare vengono mostrati il cerchio di Mohr, l'elementino con i lati i cui versori sono paralleli agli assi x e y e le corrispondenti tensioni e un'elementino con i lati i cui versori sono paralleli alle direzioni principali e le tensioni (principali) agenti. I cerchi sono tracciati a partire dalle tensioni agenti sui piani di normale x e y (ritenute note) e rappresentati nei punti A e B del cerchio e le direzioni principali sono ottenute utilizzando il polo delle normali.

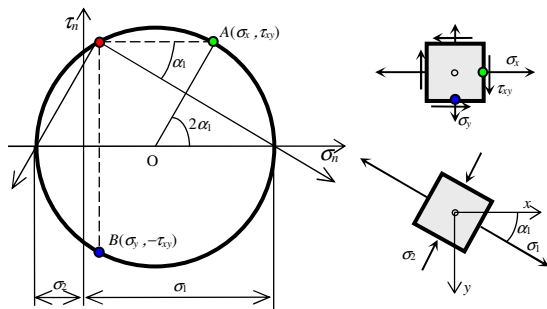


Fig.1.10 - Cerchio di Mohr nel caso di $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$.

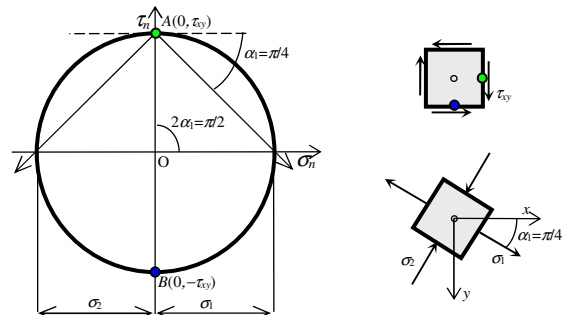


Fig.1.11 - Cerchio di Mohr nel caso di $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 = -\sigma_1$ (tangenz.).

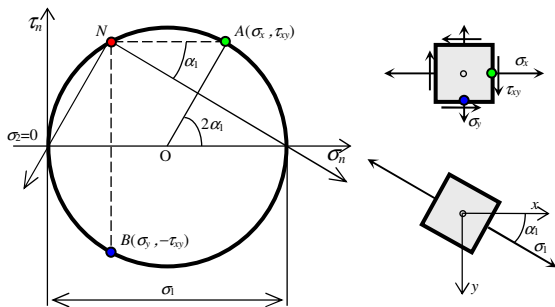


Fig.1.12 - Cerchio di Mohr nel caso di $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 = 0$ (tens. monoass.).

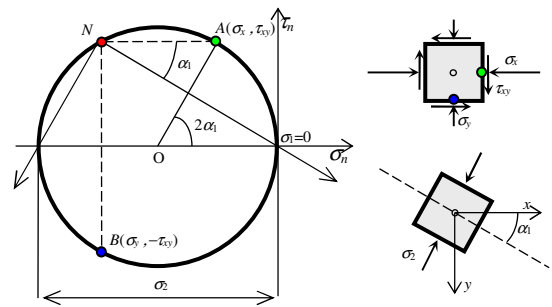


Fig.1.13 - Cerchio di Mohr nel caso di $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 < 0$ (compr. monoass.).

In modo del tutto analogo a quanto fatto per il fascio di piani avente per asse x_3 (fig.7), è possibile tracciare i cerchi di Mohr per i piani i cui versori \mathbf{n} sono perpendicolari a x_1 e a x_2 . I 3 cerchi (fig.14,15) risultano tangenti a due a due in corrispondenza dei punti rappresentativi delle tensioni principali. Il cerchio più esterno è rappresentativo degli stati di sollecitazione più onerosi, cui corrisponde la massima tensione tangenziale. In particolare nella fig.15 si può osservare che il fascio di piani più pericoloso è quello di asse x_2 contenente le tensioni principali σ_1 e σ_3 , sul quale agisce anche la massima tensione tangenziale $\tau_{max} = |\sigma_1 - \sigma_3|/2$. Tutte le altre possibili coppie σ_n e τ_n , relative alle giaciture non facenti parte dei tre fasci rappresentati dai cerchi di Mohr, sono comprese all'interno dell'area compresa tra i 3 cerchi, che prende il nome di *arbelo di Mohr*. I cerchi di Mohr costituiscono una rappresentazione bidimensionale dello stato di tensione completa e completa. Ovviamente le informazioni su σ_n e τ_n contenute nei 3 cerchi sono relative ai soli 3 fasci di piani aventi per asse le direzioni principali, mentre le informazioni contenute nelle (18) e (25) o (32) e (33) sono relative alla stella che comprende tutte le direzioni passanti per il punto, tuttavia esse richiederebbero una rappresentazione costituita da 2 superfici definite rispettivamente nello spazio σ_n, n_x, n_y e τ_n, n_x, n_y decisamente poco pratica. Il fatto che nei cerchi di Mohr siano rappresentati i fasci contenenti le tensioni massime e minime rende superflua la rappresentazione di quanto accade nelle altre giaciture per le applicazioni pratiche.

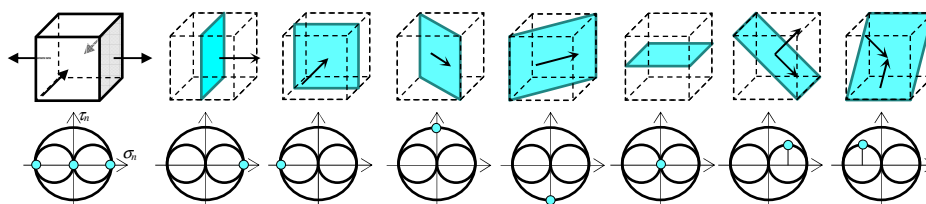


Fig.1.14 - 13 cerchi di Mohr relativi a uno stato di sollecitazione puramente tangenziale nel quale $\sigma_1 = -\sigma_2$ e $\sigma_3 = 0$; varie giaciture e corrispondenti punti σ_n e τ_n sui cerchi di Mohr.

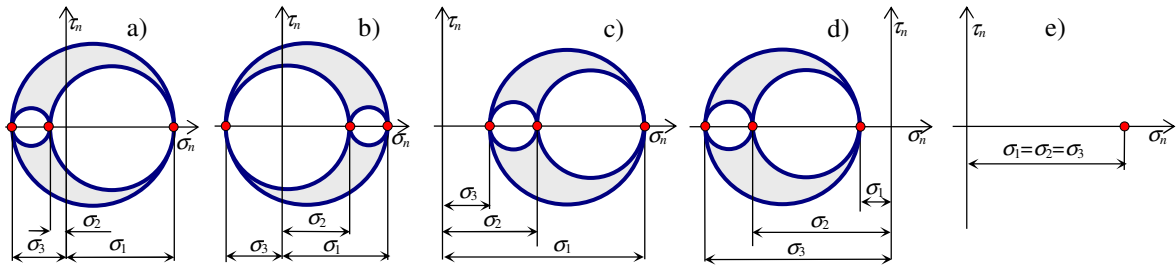


Fig. 1.15 - Cerchi di Mohr per diversi stati tensionali: a) $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < \sigma_2 < 0$; b) $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$; c) $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, d) $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < 0$, e) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

È utile notare che se 2 tensioni principali sono uguali, come nel caso monoassiale in cui $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, il cerchio di Mohr relativo al fascio dell'altro asse principale degenera in un punto e gli altri due cerchi risultano coincidenti. Nel caso di sollecitazioni nelle quali tutte e 3 le tensioni principali sono uguali, definito stato tensionale idrostatico, i tre cerchi di Mohr degenerano nello stesso punto (fig. 15e).

Se la terna di riferimento scelta è tale che la direzione z non è principale, come in fig. 16, è ancora possibile tracciare dei cerchi di Mohr rappresentativi dello stato tensionale. In questo caso però, in corrispondenza delle intersezioni di ciascun cerchio con l'asse σ_n , si vengono a determinare le cosiddette *tensioni principali secondarie* σ_i . Nelle giaciture di tali tensioni risultano nulle le tensioni tangenziali ortogonali all'asse del fascio cui il cerchio di Mohr si riferisce, cioè parallele al piano in cui le tensioni principali secondarie agiscono, ma sono diverse da zero quelle parallele all'asse del fascio, tratteggiate nell'esempio di fig. 16.

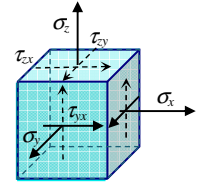


Fig. 1.16 - Caso di direzione z non principale ($\tau_{xz} \neq 0$ e $\tau_{yz} \neq 0$).

Stato di tensione piano

Lo stato di tensione nel punto P di un solido si definisce *piano* se il vettore di tensione \mathbf{p}_n al variare della giacitura \mathbf{n} si mantiene parallelo a un piano fisso D ; in questo caso, se si assume una terna di riferimento con gli assi x e y paralleli al piano D , la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ assume la seguente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

essendo le componenti di tensione in direzione z nulle, cioè $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Si noti che τ_{xz} e τ_{zy} , anche se parallele al piano xy , sono nulle per il principio di reciprocità essendo $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Per lo stesso motivo z risulta essere direzione principale. I cerchi di Mohr di fasci x e y passano per l'origine degli assi essendo $\sigma_z = 0$. In questo caso l'orientazione delle direzioni principali può essere identificata tramite un solo parametro, cioè l'angolo α_1 tra la direzione σ_1 e l'asse x . Si sottolinea il fatto che, indipendentemente dalla scelta del sistema di assi di riferimento, nello stato di tensione piano una delle 3 tensioni principali è nulla.

Si noti che lo stato di tensione è sempre piano sulle superfici non sollecitate da forze esterne. In tal caso, infatti, le tensioni agenti su tali superfici risultano nulle e la direzione normale a esse è anche direzione principale.

Nel caso di stato di tensione piano, gli invarianti (29) assumono la seguente forma:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \quad I_3 = \text{Det} (\boldsymbol{\sigma}_n) = 0 \tag{1.43}$$

e l'equazione secolare (28) può essere risolta nel modo seguente:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \tag{1.44}$$

In questo caso si è assunta come direzione 3 quella per la quale la tensione principale è nulla ($\sigma_3 = 0$). L'eq. (18) che permette di determinare la tensione normale agente in una giacitura generica \mathbf{n} si semplifica come segue:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y \tag{1.45}$$

In caso di stato di tensione piano, inoltre, le componenti σ_n e τ_n agenti su un piano ortogonale alla direzione z , la cui normale forma un angolo α con l'asse x , ponendo $n_x = \cos \alpha$ e $n_y = \sin \alpha$, possono essere espresse anche come:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad \tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \tag{1.46,47}$$

La (46) può essere ricavata dalla (45), utilizzando le formule trigonometriche di *bisezione*, mentre la (47) si ottiene sviluppando la (25a) utilizzando la definizione di p_n (16) e la (46) stessa.

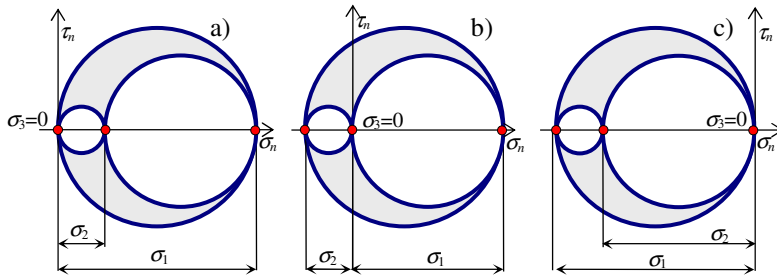


Fig.1.17 - Cerchi di Mohr nel caso stato di tensione piano per: a) $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$, b) $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$, c) $\sigma_1 < 0$ e $\sigma_2 < 0$.

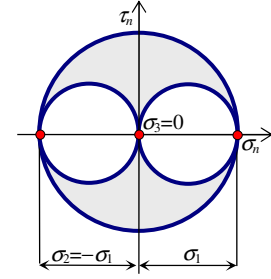


Fig.1.18 - Cerchi di Mohr nel caso di stato di tensione puramente tangenziale.

A sua volta, l'angolo α_1 formato dall'asse x e la direzione principale n_1 è dato dalla seguente espressione:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{1.48}$$

Ricordando che il valore della tensione tangenziale massima è pari al raggio del cerchio di Mohr $\tau_{max}=(\sigma_1-\sigma_2)/2$, utilizzando la (44), la tensione tangenziale massima nel piano xy si ottiene come:

$$\tau_{max,xy} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.49}$$

Se si scelgono gli assi x e y coincidenti con le direzioni principali ($x \equiv 1, y \equiv 2$) le espressioni (42) e (46,47,49) si modificano come segue:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1 \quad \tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1 \quad \tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{1.51-53}$$

In fig.17 sono mostrati cerchi di Mohr rappresentativi di due casi di stato di tensione piano. Si osserva come 2 cerchi risultano sempre tangenti in corrispondenza dell'origine degli assi.

Un caso importante è quello di stato di tensione puramente tangenziale i cui cerchi di Mohr sono rappresentati nelle fig.11 e 14 e riproposti in modo completo in fig.18. Uno stato di tensione piano si definisce puramente tangenziale se esistono due piani ortogonali sui agisce solo una tensione tangenziale τ_m , come nel caso della torsione pura (fig.19). Le tensioni principali agiscono su piani le cui normali formano un angolo pari a $\pi/4$ con quelli su cui agisce τ_m e risultano essere rispettivamente $\sigma_1 = \tau_m$ e $\sigma_2 = -\sigma_1$. La tensione tangenziale τ_m è quindi la massima nel punto al variare della giacitura e risulta pari alla massima tensione principale, $\tau_m = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\}$. Lo stato di tensione puramente tangenziale è quello per il quale il rapporto tra la tensione tangenziale massima e la massima tensione principale in valore assoluto è il più grande possibile, essendo, in particolare, $\tau_m / \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} = 1$.

Con opportuna scelta degli assi cartesiani, la (42) si trasforma nella (54) e la (50) nella (55):

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} = \tau_m & 0 \\ \tau_{xy} = \tau_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 = \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 = -\sigma_1 = -\tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.54,55}$$

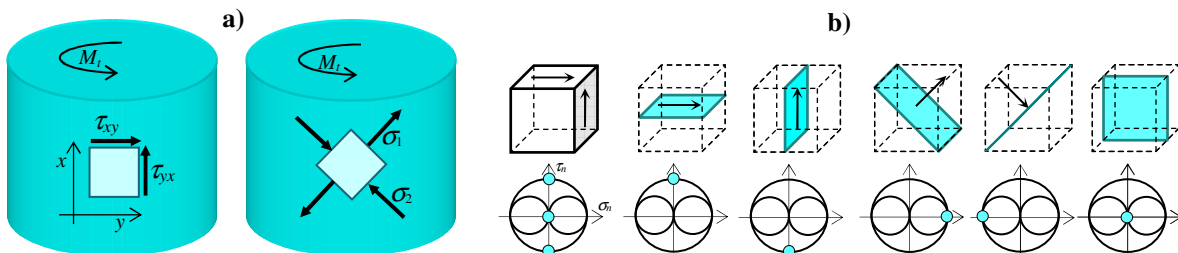


Fig.1.19 - Stato di tensione puramente tangenziale sulla superficie di un elemento sottoposto a torsione: a) a sinistra le tensioni tangenziali cartesiane agenti in un punto della superficie, a destra le tensioni principali nello stesso punto; b) punti dei cerchi di Mohr corrispondenti alle tensioni agenti sui singoli piani considerati in a).

Versori, coseni direttori e coordinate sferiche

È opportuno fornire alcune precisazioni riguardanti l'uso dei versori per la determinazione della giacitura rispetto alla quale si desidera valutare il vettore tensione. In fig.20 è mostrato un esempio di versore nel piano (fig.20a) e un esempio di versore nello spazio (fig.20b).

Le componenti del versore di una direzione sono costituite dai coseni direttori della retta parallela alla direzione stessa e sono posti in funzione degli angoli α , β e γ formati dal versore con gli assi di riferimento x , y , z mediante la ovvia relazione

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Le convenzioni sul verso di misura degli angoli sono mostrate in fig.20. È interessante notare che ai fini dell'identificazione della giacitura del piano su cui agisce la tensione, il *verso* del versore non ha rilevanza, cioè un versore e il suo opposto, ottenibile cambiando di segno tutte le componenti, identificano la stessa direzione.

Nel caso piano, come già visto in precedenza, la determinazione delle componenti del versore secondo una direzione desiderata è molto semplice (fig.20c). Infatti, ricordando che in questo caso è sufficiente considerare un solo angolo, ad esempio l'angolo α in quanto l'angolo γ risulta pari a 90° , si ottiene:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Nel caso tridimensionale l'identificazione delle componenti di \mathbf{n} tramite i coseni direttori è decisamente meno agevole (fig.20b). Spesso può essere opportuno utilizzare le *coordinate sferiche* con le quali la direzione viene identificata per mezzo degli angoli ϕ e θ mostrati in fig.20d. In particolare ϕ ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$) è l'angolo che la proiezione del versore sul piano xy forma con l'asse x (detto *azimut*) e $\theta = \gamma$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) è l'angolo che il versore forma con l'asse z (detto *elevazione*). In questo caso, con semplici considerazioni trigonometriche, è possibile mostrare che il versore \mathbf{n} assume la seguente forma:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Come è ovvio e facilmente verificabile, i moduli dei versori espressi dalle (57-58) sono unitari.

È utile anche la relazione che lega gli angoli ϕ e θ agli angoli α , β , γ alle componenti del versore \mathbf{n} :

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{n_y}{n_x} \\ \cos^{-1} n_z \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Una direzione di un certo interesse è quella della *trisettrice*, cioè la retta che forma uguali angoli con tutti e tre assi coordinati (fig.21). È utile notare che, mentre nel caso piano, la bisettrice degli assi x e y forma con detti assi un angolo di 45° , nel caso tridimensionale, la trisettrice del 1° quadrante forma con gli assi angoli $\alpha = \beta = \gamma = 54.74^\circ$. Ciò è facilmente dimostrabile dovendo essere $1 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{0.5} = (n^2 + n^2 + n^2)^{0.5} = (3n^2)^{0.5}$, da cui risulta $n = (1/3)^{0.5} = 0.5774$ e $\alpha = \beta = \gamma = \cos^{-1}(0.5774) \approx 54.74^\circ$. La trisettrice del 1° quadrante può essere identificata con angoli ϕ e θ pari rispettivamente a $\phi = 45^\circ$ e $\theta = \gamma = 54.74^\circ$ ($\phi = 0.7854$ rad, $\theta = 0.9553$ rad). Si noti che le trisettrici dei 4 quadranti *non sono mutuamente ortogonali*.

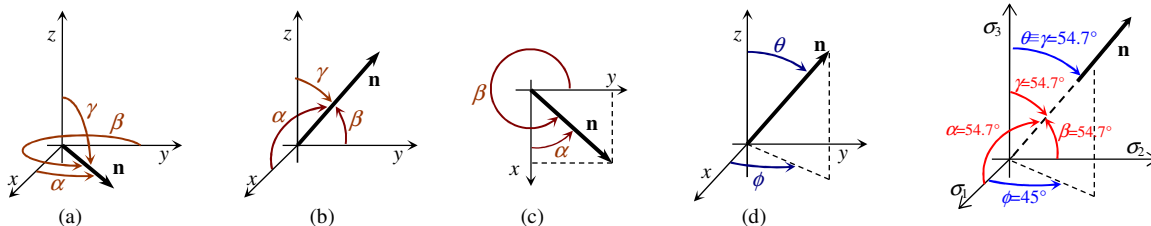


Fig.1.20 – (a,b) Versori nel piano e nello spazio; convenzioni sulla misura degli angoli α , β e γ . (c,d) Determinazione pratica delle componenti dei versori; l'angolo α (c) e gli angoli θ e ϕ (d).

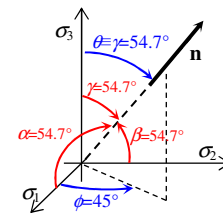


Fig.1.21 – La trisettrice del primo quadrante: $\alpha = \beta = \gamma = 54.74^\circ$, $\phi = 45^\circ$, $\theta = 54.74^\circ$.

Leggi di trasformazione degli assi

Come detto, fissato il punto del solido, le componenti della matrice σ assumono valori differenti al variare dell'orientamento della terna di riferimento. Nel caso bidimensionale, se xy e $x'y'$ sono due sistemi di assi con origine coincidente nel punto del solido, giacenti nello stesso piano e formanti un angolo α positivo se antiorario (fig.22), ponendo $m=\cos\alpha$ e $n=\sin\alpha$, le componenti cartesiane della tensione riferite al secondo sistema di assi possono essere espresse in funzione di quelle riferite al primo mediante la seguente relazione:

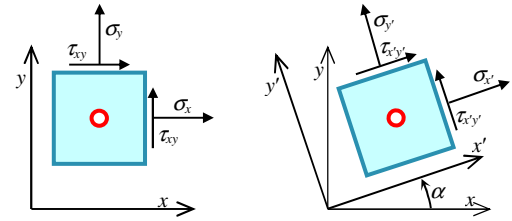


Fig.1.22 – A sinistra le componenti di tensione in un punto rispetto ad assi *iniziali* x, y , a destra le componenti rispetto a *nuovi* assi x', y'

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

Nel caso tridimensionale, siano xyz e $x'y'z'$ due sistemi di assi con origine coincidente e ruotati tra loro di 3 angoli indipendenti nel caso più generale, come in fig.23: il tensore degli sforzi $\sigma_{x'y'z'}$ in assi $x'y'z'$ ruotati rispetto agli assi iniziali xyz può essere ottenuto a partire dal tensore σ_{xyz} (6) con la seguente relazione

$$\sigma_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{y'x'} & \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{z'y'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} = \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \mathbf{N} \tag{1.61}$$

nella quale la matrice di rotazione \mathbf{N} può essere espressa come

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{x'} & \mathbf{n}_{y'} & \mathbf{n}_{z'} \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

essendo $\mathbf{n}_{x'}$, $\mathbf{n}_{y'}$ ed $\mathbf{n}_{z'}$ i versori delle rette parallele agli assi $x'y'z'$ con le componenti espresse rispetto agli assi xyz , cioè

$$\mathbf{n}_{x'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'} \\ \cos \beta_{x'} \\ \cos \gamma_{x'} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_{y'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{y'} \\ \cos \beta_{y'} \\ \cos \gamma_{y'} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_{z'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{z'} \\ \cos \beta_{z'} \\ \cos \gamma_{z'} \end{bmatrix} \tag{1.63a-c}$$

Nelle (63) $\alpha_{x'}$, $\beta_{x'}$ e $\gamma_{x'}$ sono rispettivamente gli angoli formati tra gli assi x, y e z e l'asse x' , $\alpha_{y'}$, $\beta_{y'}$ e $\gamma_{y'}$ gli angoli tra gli assi x, y e z e l'asse y' , $\alpha_{z'}$, $\beta_{z'}$ e $\gamma_{z'}$ gli angoli tra gli assi x, y e z e l'asse z' (fig.23). In base alle (63) \mathbf{N} assume la seguente forma

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'} & \cos \alpha_{y'} & \cos \alpha_{z'} \\ \cos \beta_{x'} & \cos \beta_{y'} & \cos \beta_{z'} \\ \cos \gamma_{x'} & \cos \gamma_{y'} & \cos \gamma_{z'} \end{bmatrix} \tag{1.64}$$

I nove angoli presenti nelle (63-64) sono *dependenti* tra loro in quanto i 3 assi cui fanno riferimento sono mutuamente ortogonali. La posizione relativa dei due sistemi d'assi può essere identificata mediante 3 soli angoli indipendenti, ad esempio i 3 angoli definiti di *imbardata* (*yaw*) ϕ , *beccheggio* (*pitch*) θ e *rollio* (*roll*) ω mostrati in fig.24. Il verso degli angoli è positivo se antiorario (guardando l'angolo dalla punta dell'asse di rotazione, ovvero se

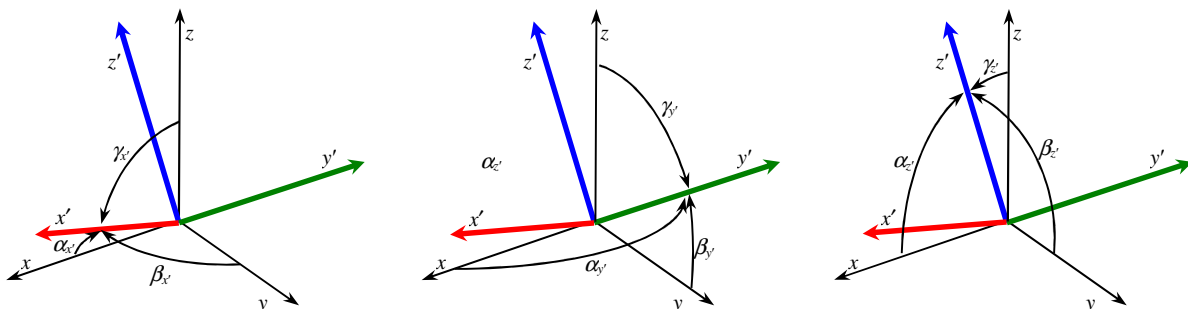


Fig.1.23 – Trasformazione d'assi: gli angoli α, β, γ tra il versore dell'asse cui fa riferimento il pedice e gli assi x, y e z .

viene rispettata la regola della mano destra): ad esempio in fig.24 gli angoli ϕ' e ω' sono positivi, mentre l'angolo θ' è negativo. È opportuno sottolineare il fatto che la convenzione del segno relativa all'angolo di rotazione ϕ' è simile a quella della coordinata sferica ϕ , mentre quella relativa all'angolo di rotazione θ' è differente.

Utilizzando la (58) è possibile dimostrare che i versori degli assi $x'y'z'$ possono essere posti in relazione con gli angoli ϕ' , θ' e ω' mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{n}_{x'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'} \\ \cos \beta_{x'} \\ \cos \gamma_{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \cos \theta' \\ \sin \phi' \cos \theta' \\ -\sin \theta' \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_{y'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{y'} \\ \cos \beta_{y'} \\ \cos \gamma_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \sin \theta' \sin \omega' - \sin \phi' \cos \omega' \\ \sin \phi' \sin \theta' \sin \omega' + \cos \phi' \cos \omega' \\ \cos \theta' \sin \omega' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_{z'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{z'} \\ \cos \beta_{z'} \\ \cos \gamma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \sin \theta' \cos \omega' + \sin \phi' \sin \omega' \\ \sin \phi' \sin \theta' \cos \omega' - \cos \phi' \sin \omega' \\ \cos \theta' \cos \omega' \end{bmatrix} \quad (1.65a-c)$$

da cui la matrice \mathbf{N} può essere riscritta come

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \cos \theta' & \cos \phi' \sin \theta' \sin \omega' - \sin \phi' \cos \omega' & \cos \phi' \sin \theta' \cos \omega' + \sin \phi' \sin \omega' \\ \sin \phi' \cos \theta' & \sin \phi' \sin \theta' \sin \omega' + \cos \phi' \cos \omega' & \sin \phi' \sin \theta' \cos \omega' - \cos \phi' \sin \omega' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \sin \omega' & \cos \theta' \cos \omega' \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

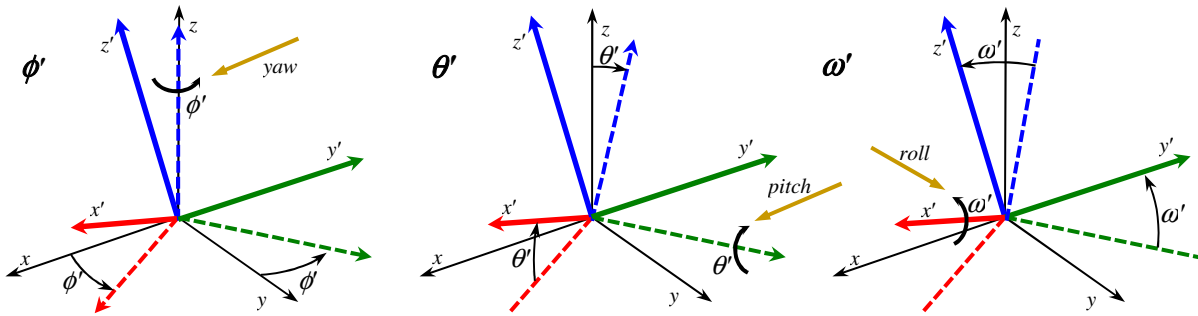


Fig.1.24 – Trasformazione d'assi: gli angoli ϕ' (*imbardata/yaw*) rispetto all'asse z , θ' (*beccheggio/pitch*) rispetto alla nuova posizione dell'asse y , ω' (*rollio/roll*) rispetto all'asse x' .

Da notare che, nella (61):

- il prodotto $\sigma \mathbf{N}$, in base alla (15), restituisce una matrice di dimensioni 3×3 le cui colonne sono le componenti cartesiane dei vettori tensione \mathbf{p}_n agenti sulle facce di normale x' , y' e z' valutate rispetto agli assi originali xyz :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{nx'} & \mathbf{p}_{ny'} & \mathbf{p}_{nz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \mathbf{n}_{x'} & \sigma \mathbf{n}_{y'} & \sigma \mathbf{n}_{z'} \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{N} \quad (1.67)$$

- il prodotto $\mathbf{N}^T(\sigma \mathbf{N})$ effettua la rotazione d'assi esprimendo le componenti cartesiane dei 3 vettori tensione \mathbf{p}_n rispetto agli assi ruotati $x'y'z'$; ovviamente, le componenti cartesiane ottenute coincidono con le componenti normali e tangenziali dei 3 vettori e, quindi, con gli elementi del tensore $\sigma_{x'y'z'}$.

Tensioni ottaedriche, tensori idrostatico e deviatorico, invarianti

I 4 piani le cui normali sono parallele alle trisettrici degli *assi principali* sono detti *piani ottaedrici* (fig.25). Tale definizione nasce dal fatto che disegnando 2 coppie di piani simmetrici rispetto all'origine degli assi per ciascuna delle 4 trisettrici si genera un ottaedro (similmente a come, disegnando 3 coppie di piani simmetrici rispetto all'origine per ciascuna delle tre direzioni principali si genera un cubo).

Come visto nel precedente paragrafo, le trisettrici delle direzioni principali formano con gli assi principali angoli uguali di 54.74° , per cui i versori \mathbf{n} che identificano i piani corrispondenti hanno ciascuna componente pari a $n=(1/3)^{0.5}=0.5774$ in valore assoluto. Utilizzando le equazioni (32) e (33) o (34), che consentono di ottenere le tensioni per assegnata giacitura, si può mostrare che le tensioni normali e tangenziali agenti sui piani ottaedrici (fig.25), dette *tensioni ottaedriche*, sono date dalle seguenti equazioni:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \tau_h = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (1.68,69)$$

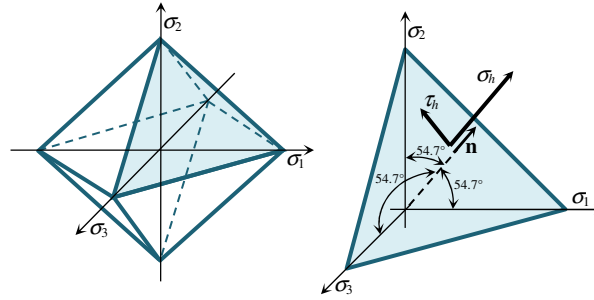


Fig.1.25 – L'ottaedro e il piano ottaedrico relativo al primo quadrante.

La (69) può essere scritta anche come

$$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad (1.70)$$

o, in coordinate cartesiane, come

$$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.71)$$

È interessante osservare che la σ_h e la τ_h possono essere riscritte in funzione del primo e del secondo invariante delle tensioni (29a,b) come segue:

$$\sigma_h = \frac{1}{3} I_1 \quad \tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (1.72,73)$$

Un'altra caratteristica interessante delle tensioni ottaedriche riguarda il fatto che esse sono legate a valori medi delle tensioni agenti nel punto, valutati rispetto a tutte le giaciture, cioè considerando le direzioni che si ottengono al variare degli angoli θ e ϕ in tutto il loro campo di definizione. In particolare, dalla (68) si osserva che la tensione σ_h è pari alla *media delle tensioni principali* σ_{med} , mentre dalla seguente relazione

$$\tau_h = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \tau_n(\phi, \theta)^2 \sin\theta d\phi d\theta} \quad (1.74)$$

si osserva che la tensione τ_h è pari alla radice quadrata del *valor quadratico medio delle tensioni tangenziali* che agiscono secondo tutte le giaciture.

Nel caso in cui le tre tensioni principali agenti in un punto del solido sono uguali e pari a un valore costante σ_0 , cioè si ha $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, è facile verificare che per qualunque giacitura \mathbf{n} passante per il punto si ha $\sigma_n = \sigma_0 = \sigma_h$ e $\tau_n = \tau_h = 0$. Questo stato tensionale si definisce *stato di tensione idrostatico*.

Come si vedrà nell'apposito capitolo, questo tipo di sollecitazione è importante nello sviluppo delle teorie relative alla resistenza dei materiali soggetti a tensioni, in quanto, in generale, i materiali possono sopportare tensioni idrostatiche estremamente maggiori di quelle monoassiali. Da questa osservazione sperimentale si ricava il fatto che gli stati tensionali sono tanto più pericolosi quanto più si differenziano rispetto a quello idrostatico. Qualunque stato tensionale può essere scomposto nella somma di uno stato tensionale idrostatico e di un altro dato dalla differenza tra lo stato di tensione originale e quello idrostatico stesso in base alla seguente espressione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{I} + (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}) \quad (1.74a)$$

che, scritta per esteso, diventa:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (1.74b)$$

Nel caso in cui la tensione idrostatica scelta è pari alla media delle tensioni principali, ovvero alla tensione ottaedrica σ_h

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_h = \sigma_{med} \quad (1.76)$$

la (74a) può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}_h + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) = \sigma_h \mathbf{I} + (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_h \mathbf{I}) \quad (1.77)$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}_h$ lo stato tensionale idrostatico

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \sigma_h \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

e $\boldsymbol{\sigma}'$ lo stato tensionale deviatorico:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_h & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_h & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

Le tensioni σ'_i ($i=x,y,z$) nella (79) sono definite *tensioni ridotte*

$$\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_h \quad (1.80)$$

Lo stato tensionale deviatorico può essere espresso anche nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

Se il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ è espresso negli assi principali, lo stato tensionale deviatorico (79) può essere scritto come

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

In definitiva le (75-82) mostrano che il tensore rappresentativo di qualsiasi stato tensionale può essere scomposto nella somma dei tensori idrostatico e deviatorico.

È possibile definire degli invarianti anche per le tensioni ridotte:

$$J_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] \quad (1.83a-c)$$

$$J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3$$

Utilizzando le definizioni (83) e ricordando le (72-73) è possibile dimostrare che la tensione tangenziale ottaedrica è proporzionale all'invariante J_2 , quindi le espressioni delle tensioni ottaedriche possono essere sintetizzate con le seguenti relazioni:

$$\sigma_h = \frac{1}{3} I_1 \quad \tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_2} \quad (1.84,85)$$

L'invariante J_2 può essere espresso in funzione delle tensioni cartesiane come:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.86)$$

La posizione del vettore τ_n sul piano di normale n

Come detto, la tensione agente su un generico piano, la cui giacitura è identificata dal versore n o dalle coordinate sferiche ϕ_n e θ_n , è costituita da un vettore $p_n = \sigma n$ (9,10,15) scomponibile in un componente normale σ_n (19), parallelo a n , e un componente tangenziale τ_n (21), che giace sul piano. Nel caso di sollecitazioni statiche la posizione del vettore τ_n non è di particolare interesse, mentre nel caso di sollecitazioni variabili nel tempo, soprattutto nell'analisi di *fatica multiassiale*, può essere necessario determinare le diverse posizioni assunte da τ_n sul piano al variare del tempo.

Per determinare in modo completo la posizione del vettore τ_n nel piano di normale n è opportuno stabilire un sistema di coordinate cartesiane nuv avente un asse coincidente con la direzione n stessa e assi u e v ortogonali a n , opportunamente orientati nel piano (fig.26). Identificando la direzione n mediante le coordinate sferiche ϕ_n, θ_n (fig.26a), un sistema di assi nuv può essere ottenuto assegnando al sistema di riferimento xyz due rotazioni rigide in modo che l'asse x vada a coincidere con la direzione della normale n . In particolare viene assegnata al sistema una prima rotazione pari a ϕ_n attorno all'asse z e una successiva rotazione pari a $\pi/2 - \theta_n$ attorno alla posizione assunta dall'asse y dopo la prima rotazione (in pratica gli angoli pitch e roll descritti nel paragrafo sulle rotazioni d'assi). Operando in questo modo (fig.26b):

- l'asse u risulta giacente nel piano xy , è ortogonale a n e v , con verso tale che la terna nuv risulti levogira;
- l'asse v si viene a trovare all'intersezione tra il piano di normale n e il piano contenente il vettore n e l'asse z .

Le coordinate sferiche delle direzioni u e v possono essere ottenute da quelle di n mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} \phi_u \\ \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n + \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \phi_v \\ \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n - \pi \\ \pi/2 - \theta_n \end{bmatrix} \qquad (1.87,88)$$

A loro volta le componenti cartesiane dei versori n, u e v possono essere ottenute mediante la (1.58) come

$$n = \begin{bmatrix} \cos \phi_n \sin \theta_n \\ \sin \phi_n \sin \theta_n \\ \cos \theta_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \cos \phi_u \sin \theta_u \\ \sin \phi_u \sin \theta_u \\ \cos \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \\ \cos \phi_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} \cos \phi_v \sin \theta_v \\ \sin \phi_v \sin \theta_v \\ \cos \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_n \cos \theta_n \\ -\sin \phi_n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{bmatrix} \qquad (1.89a-c)$$

Utilizzando questo sistema di coordinate, il vettore tensione agente sul piano di normale n (fig.27) può essere espresso come

$$p_{nuv} = [\sigma_n \quad \tau_u \quad \tau_v]^T \qquad (1.90)$$

Le componenti del vettore (90) possono essere determinate effettuando il *prodotto scalare* tra il vettore $p_n = \sigma n$ (15) e i versori n, u, v (89) mediante le seguenti relazioni:

$$\sigma_n = n \cdot p_n = \tilde{n} p_n \qquad \tau_u = u \cdot p_n = \tilde{u} p_n \qquad \tau_v = v \cdot p_n = \tilde{v} p_n \qquad (1.91a-c)$$

Se utile, il modulo di τ_n e l'angolo formato con l'asse u (fig.27) possono essere ottenuti come

$$\tau_n = \sqrt{\tau_u^2 + \tau_v^2} \qquad \beta = \tan^{-1} \tau_v / \tau_u \qquad (1.92a,b)$$

In definitiva, la determinazione della posizione del vettore τ_n nel piano di normale n può essere effettuata determinando i versori n, u e v mediante le (89) e le componenti di tensione mediante le (91), utilizzando le sole coordinate sferiche ϕ_n, θ_n , oppure le 3 coppie di coordinate ϕ_n, θ_n e $\phi_u, \theta_u, \phi_v, \theta_v$ ottenute con le (87,88).

Naturalmente se la direzione n coincide con una delle direzioni cartesiane xyz , gli assi u e v coincidono con le altre due direzioni cartesiane stesse e il vettore p_{nuv} (87) può essere rappresentato direttamente con uno dei vettori p_x, p_y o p_z (5a-c).

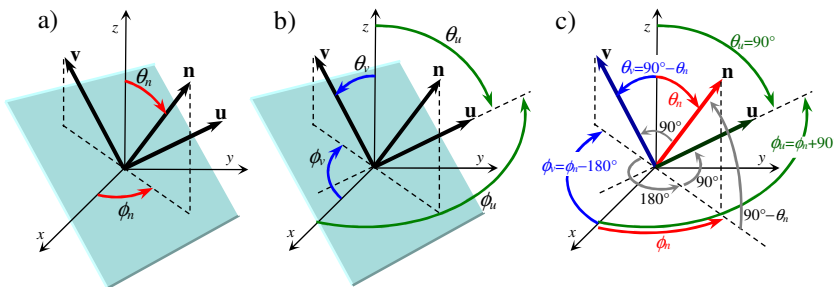


Fig.1.26 – Sistema di assi nuv e coordinate sferiche dei versori. a) orientazione del versore n , b) orientazione dei versori u e v , c) relazioni tra gli angoli.

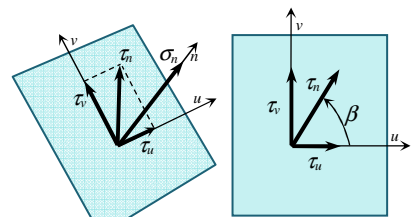


Fig.1.27 – Componenti nuv del vettore tensione p_n .

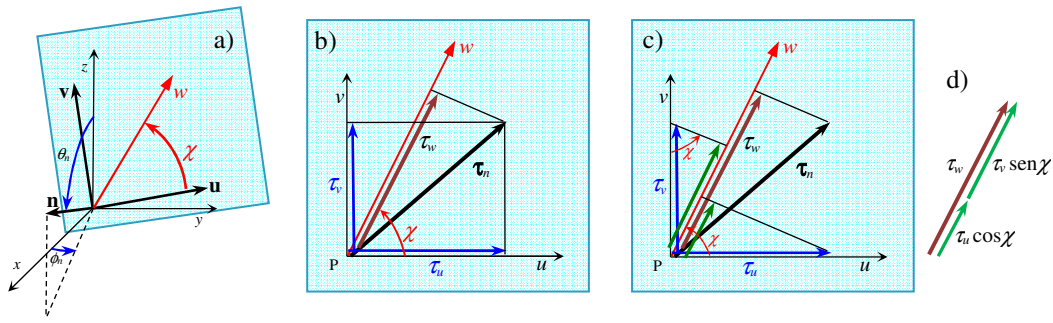


Fig.1.28 – a) Le coordinate nuv e l'asse w , formante un angolo χ con l'asse u ; b-d) Proiezioni del vettore τ_n lungo l'asse w .

In alternativa alle componenti cartesiane τ_u e τ_v , in alcuni casi, è utile determinare la proiezione del vettore τ_n lungo un asse w formante un angolo χ con l'asse u (fig.28a,b), definita *tensione tangenziale risolta* τ_w . Proiettando le componenti τ_u e τ_v lungo l'asse w (fig.28c,d) e ricordando le (91b,c) si ottiene

$$\tau_w = \tau_u \cos \chi + \tau_v \sin \chi = (\tilde{\mathbf{u}} \cos \chi + \tilde{\mathbf{v}} \sin \chi) \mathbf{p}_n \quad (1.93)$$

Introducendo il vettore \mathbf{w} definito come

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \cos \chi + \mathbf{v} \sin \chi = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \cos \chi - \cos \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \cos \phi_n \cos \chi - \sin \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \sin \theta_n \sin \chi \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

la (93) può essere riscritta convenientemente come

$$\tau_w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{p}_n \quad (1.95)$$

Ovviamente i valori di τ_w per $\chi=0$ e $\chi=\pi/2$ coincidono con le componenti τ_u e τ_v .

Nel caso dell'analisi di fatica multiassiale i tensori degli sforzi nei diversi punti della struttura sono funzione del tempo e, in generale, la determinazione delle componenti del vettore \mathbf{p}_{nuv} deve essere effettuata teoricamente in tutte le giaciture centrate nei punti analizzati. Volendo descrivere l'andamento nel tempo delle tensioni agenti su ciascuna giacitura, le grandezze di interesse, matriciali, vettoriali e scalari, risultano funzione delle variabili t e/o ϕ_n , θ_n e χ definite nei campi $0 \leq t < T$, $-\pi/2 \leq \phi_n < \pi/2$, $0 \leq \theta_n < \pi$, $0 \leq \chi < \pi$. Ovviamente l'analisi numerica richiede che le variabili t , ϕ_n , θ_n e χ vengano opportunamente discretizzate.

Al fine di semplificare la gestione delle variabili vettoriali e matriciali e di aumentare la velocità di esecuzione è possibile introdurre, in luogo del tensore $\boldsymbol{\sigma}$, un vettore \mathbf{s} contenente le 6 componenti di tensione, così definito:

$$\mathbf{s} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad (1.96)$$

e i vettori riga \mathbf{n}_n , \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n e \mathbf{w}_n loro volta definiti come:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_n &= [n_x^2 \quad n_y^2 \quad n_z^2 \quad 2n_x n_y \quad 2n_x n_z \quad 2n_y n_z] \\ \mathbf{u}_n &= [u_x n_x \quad u_y n_y \quad u_z n_z \quad u_x n_y + u_y n_x \quad u_x n_z + u_z n_x \quad u_y n_z + u_z n_y] \\ \mathbf{v}_n &= [v_x n_x \quad v_y n_y \quad v_z n_z \quad v_x n_y + v_y n_x \quad v_x n_z + v_z n_x \quad v_y n_z + v_z n_y] \\ \mathbf{w}_n &= [w_x n_x \quad w_y n_y \quad w_z n_z \quad w_x n_y + w_y n_x \quad w_x n_z + w_z n_x \quad w_y n_z + w_z n_y] \end{aligned} \quad (1.97a-d)$$

in modo che le relazioni (91a-c) possano essere convenientemente riscritte nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n}_n \mathbf{s} \quad \tau_u = \mathbf{u}_n \mathbf{s} \quad \tau_v = \mathbf{v}_n \mathbf{s} \quad (1.98a-c)$$

e la relazione (95) come:

$$\tau_w = \mathbf{w}_n \mathbf{s} \quad (1.99)$$

Notare come la (98a) sia più semplice della (19) e fornisca direttamente la (18) qui riscritta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n &= \sigma_x n_{n_1} + \sigma_y n_{n_2} + \sigma_z n_{n_3} + \tau_{xy} n_{n_4} + \tau_{xz} n_{n_5} + \tau_{yz} n_{n_6} = \\ &= \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{xz} n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z \end{aligned} \quad (1.18)$$

EQUAZIONI DELLO STATO TENSIONALE					
Tensore			Tensore Stato Piano		
$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$		$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$		$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
Invarianti			Invarianti nel piano		
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$			$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$		$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$
$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$			Equazione secolare		
$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$			$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$		
Vettore nello spazio e nel piano			Coordinate sferiche		
$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$		$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{n_y}{n_x} \\ \cos^{-1} n_z \end{bmatrix}$	
Tensioni sul piano di normale n (α_1=angolo tra la direzione n e la direzione 1; α angolo tra la direzione n la direzione x)					
$\mathbf{p}_n = \sigma \mathbf{n}$	$\sigma_n = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n \mathbf{n}$ $\sigma_n = \tilde{\mathbf{n}} \sigma \mathbf{n} \mathbf{n}$	$\tau_n = \mathbf{p}_n - \sigma_n$ $\tau_n = \sigma \mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}} \sigma \mathbf{n} \mathbf{n}$	$\sigma_n = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n$ $\sigma_n = \tilde{\mathbf{n}} \sigma \mathbf{n}$	$\tau_n = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} \tau_{ni}^2}$	$\mathbf{n}' = \tau_n / \tau_n$
$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$		$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_x n_z$			
$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2$		$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y$			
$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha_1$		$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$			
$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2}$					
$\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2) n_1 n_2$		$\tau_n = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1$		$\tau_n = \pm \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)$	
Cerchi di Mohr					
$(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_n^2 = 0$			$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 = 0$		
Tensioni normali - stato piano			Tensioni tangenziali - stato piano		
$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$			$\tau_{\max,xy} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$		
$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha_1$			$\tau_{xy} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}$		
Angolo α_1 tra l'asse x e la direzione n_1			Relazioni tra α_x e σ_y		
$\alpha_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$			$\sigma_y = \sigma_x \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$		
$\sin 2\alpha_1 = 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \pm \frac{\tau_n}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)}$			$\sigma_y = \sigma_x - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha_1$		
			$\sigma_y = \sigma_x \pm 2\sqrt{\tau_{\max}^2 - \tau_{xy}^2}$		
Differenza tra le tensioni principali			Differenza tra le tensioni normali cartesiane		
$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\cos 2\alpha_1} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$			$\sigma_x - \sigma_y = \pm (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha_1 = \pm \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_{xy}^2}$		

Tensioni ottaedriche		
$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$	$\tau_h = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ $\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)}$	
$\sigma_h = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$	
Tensioni ottaedriche - stato piano		
$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$	$\tau_h = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$
$\sigma_h = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y} + 3\tau_{xy}^2$	
Tensore deviatorico e invarianti		
$\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_h$	$J_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$	
$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$ $J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$	$J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3$	
$\sigma = \sigma_h + \sigma' = \sigma_h + (\sigma - \sigma_h) = \sigma_h \mathbf{I} + (\sigma - \sigma_h \mathbf{I})$	$\sigma_h = \sigma_h \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix}$	
Tensore deviatorico in assi cartesiani		
$\sigma' = \sigma - \sigma_h = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_h & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_h & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_h \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}$	
Tensore deviatorico in assi principali		
$\sigma' = \sigma - \sigma_h = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_h \end{bmatrix}$		
Tensioni ottaedriche in funzione degli invarianti		
$\sigma_h = \frac{1}{3} I_1$	$\tau_h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_2}$	
Legge di trasformazione degli assi delle componenti cartesiane della tensione - stato piano		
$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$		
Legge di trasformazione degli assi delle componenti cartesiane della tensione nello spazio		
$\sigma_{x'y'z'} = \mathbf{N}^T \sigma_{xyz} \mathbf{N}$	$\mathbf{N} = [\mathbf{n}_{x'} \quad \mathbf{n}_{y'} \quad \mathbf{n}_{z'}]$	$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{x'} & \cos \alpha_{y'} & \cos \alpha_{z'} \\ \cos \beta_{x'} & \cos \beta_{y'} & \cos \beta_{z'} \\ \cos \gamma_{x'} & \cos \gamma_{y'} & \cos \gamma_{z'} \end{bmatrix}$
$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos \phi' \cos \theta' & \cos \phi' \sin \theta' \sin \omega' - \sin \phi' \cos \omega' & \cos \phi' \sin \theta' \cos \omega' + \sin \phi' \sin \omega' \\ \sin \phi' \cos \theta' & \sin \phi' \sin \theta' \sin \omega' + \cos \phi' \cos \omega' & \sin \phi' \sin \theta' \cos \omega' - \cos \phi' \sin \omega' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \sin \omega' & \cos \theta' \cos \omega' \end{bmatrix}$		

Il vettore \mathbf{p}_{nuv}		
$\mathbf{p}_{nuv} = [\sigma_n \quad \tau_u \quad \tau_v]^T$	$\tau_n = \sqrt{\tau_u^2 + \tau_v^2}$	$\beta = \tan^{-1} \tau_v / \tau_u$
$\mathbf{p}_n = \sigma \mathbf{n}$		
$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{p}_n$	$\tau_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{p}_n$	$\tau_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{p}_n$
$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \phi_n \sin \theta_n \\ \sin \phi_n \sin \theta_n \\ \cos \theta_n \end{bmatrix}$	$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \phi_u \sin \theta_u \\ \sin \phi_u \sin \theta_u \\ \cos \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \\ \cos \phi_n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos \phi_v \sin \theta_v \\ \sin \phi_v \sin \theta_v \\ \cos \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_n \cos \theta_n \\ -\sin \phi_n \cos \theta_n \\ \sin \theta_n \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \theta_n \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \phi_u \\ \theta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n + \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \phi_v \\ \theta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n - \pi \\ \pi/2 - \theta_n \end{bmatrix}$
La componente τ_w		
$\tau_w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{p}_n = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{p}_n$	$\mathbf{w} = \mathbf{u} \cos \chi + \mathbf{v} \sin \chi = \begin{bmatrix} -\sin \phi_n \cos \chi - \cos \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \cos \phi_n \cos \chi - \sin \phi_n \cos \theta_n \sin \chi \\ \sin \theta_n \sin \chi \end{bmatrix}$	
Componenti σ_n, τ_u, τ_v e τ_w		
$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$	$\sigma_n = \mathbf{n}_n \mathbf{s}$	$\mathbf{n}_n = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & n_z^2 & 2n_x n_y & 2n_x n_z & 2n_y n_z \end{bmatrix}$
	$\tau_u = \mathbf{u}_n \mathbf{s}$	$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_x n_x & u_y n_y & u_z n_z & u_x n_y + u_y n_x & u_x n_z + u_z n_x & u_y n_z + u_z n_y \end{bmatrix}$
	$\tau_v = \mathbf{v}_n \mathbf{s}$	$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_x n_x & v_y n_y & v_z n_z & v_x n_y + v_y n_x & v_x n_z + v_z n_x & v_y n_z + v_z n_y \end{bmatrix}$
	$\tau_w = \mathbf{w}_n \mathbf{s}$	$\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} w_x n_x & w_y n_y & w_z n_z & w_x n_y + w_y n_x & w_x n_z + w_z n_x & w_y n_z + w_z n_y \end{bmatrix}$