

2. EQUAZIONI DEL PROBLEMA ELASTICO - LAVORO DI DEFORMAZIONE

Equazioni indefinite di equilibrio

L'andamento delle tensioni cartesiane in un solido di Cauchy è descritto dalle funzioni $\mathbf{p}_x=\mathbf{p}_x(x,y,z)$, $\mathbf{p}_y=\mathbf{p}_y(x,y,z)$ e $\mathbf{p}_z=\mathbf{p}_z(x,y,z)$, essendo, ad esempio,

$$\mathbf{p}_x(x,y,z) = \left[\sigma_x(x,y,z) \quad \tau_{xy}(x,y,z) \quad \tau_{xz}(x,y,z) \right]^T \quad (2.1)$$

il vettore tensione che agisce nel punto di coordinate x, y, z nel piano di normale x . Affinché sia rispettato l'equilibrio in ciascun punto del solido, queste funzioni devono rispettare alcune condizioni che sono espresse sotto forma di equazioni differenziali.

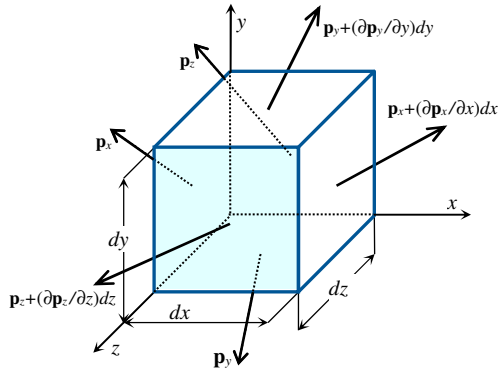


Fig.2.1 - Tensioni agenti sull'elementino di volume.

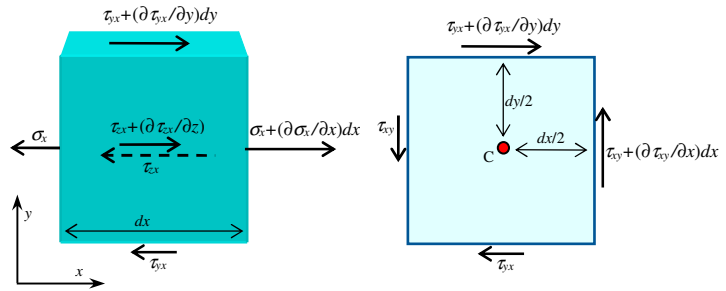


Fig.2.2 - A sinistra componenti di tensione agenti in direzione x ; a destra componenti aventi momento rispetto all'asse parallelo a z passante per C .

In particolare, con riferimento alla fig.1, si consideri un elemento di volume di forma cubica, con lati dx, dy, dz e volume $dV=dx dy dz$ all'interno del solido. Sulle 6 facce agiscono le azioni provenienti dal resto del solido; sul cubetto agisce inoltre una forza esterna ad unità di volume pari a $F=[F_x F_y F_z]^T$. In fig.2, a sinistra, sono mostrate le sole componenti di tensione che agiscono in direzione x .

Ricordando che:

- la forza elementare agente su ciascuna faccia è data dal prodotto della tensione per la superficie della faccia stessa,
- il segno della forza va attribuito concordemente a quello della faccia su cui la tensione agisce, cioè positivo se il versore della faccia è concorde con il verso dell'asse al quale è parallelo e viceversa,
- la forza di volume agente si ottiene moltiplicando F per il volume dell'elementino,

l'equazione di equilibrio dell'elementino in direzione x può essere scritta come segue:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.2)$$

Semplificando e dividendo per il prodotto $dV=dx dy dz$ si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.3)$$

Questa equazione differenziale, ottenuta imponendo che la condizione di equilibrio sia verificata in ciascun elementino del solido, mette in relazione tra loro le funzioni $\sigma_x(x,y,z)$, $\tau_{yx}(x,y,z)$ e $\tau_{zx}(x,y,z)$ mediante le rispettive derivate parziali.

Operando analogamente rispetto alle direzioni y e z si ottengono le equazioni di equilibrio nelle direzioni corrispondenti. Le 3 equazioni possono essere scritte in forma matriciale ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = 0 \quad \sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad (2.4)$$

Le (4) possono essere scritte anche come

$$\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} + \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{p}_{i,i} + \mathbf{F} = 0 \quad (2.4b)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

Condizioni di equilibrio al contorno

I contorni esterni di un solido possono essere liberi o caricati da forze esterne note (fig.3a,b) o vincolati e quindi soggetti alle reazioni vincolari. Siano $\mathbf{f}=[f_x \ f_y \ f_z]^T$ e $\mathbf{r}=[r_x \ r_y \ r_z]^T$ vettori contenenti rispettivamente le forze e le reazioni vincolari, entrambe ad unità di superficie, agenti su un punto del contorno, per l'equilibrio, su ciascun punto del contorno stesso vale una relazione del tipo:

$$\mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z = \begin{cases} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \end{cases} \quad (2.8)$$

Questa equazione è del tutto analoga alla (1.12) del precedente capitolo che mette in relazione le tensioni cartesiane con la tensione \mathbf{p}_n agente su un piano di normale \mathbf{n} . In questo caso al posto del vettore \mathbf{p}_n si considera la forza esterna ad unità di superficie \mathbf{f} (o la reazione vincolare \mathbf{r}).

La (8), scritta per esteso nel caso di contorno caricato, fornisce:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= f_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z &= f_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= f_z \end{aligned} \quad (2.9a-c)$$

Ad esempio in fig.3b è mostrato il caso di contorno con normale parallela all'asse x il cui versore è dato da $\mathbf{n}=[n_x=1 \ n_y=0 \ n_z=0]^T$. Particolarizzando le (9) si ottiene $\sigma_x=f_x$, $\tau_{xy}=f_y$, $\tau_{xz}=f_z$. Nel caso in cui agisce solo una forza ad unità di superficie normale alla superficie stessa (ad esempio una pressione) le (9) diventano $\sigma_x=f_x$, $\tau_{xy}=0$, $\tau_{xz}=0$. In questo caso si evince che la tensione normale al contorno in quel punto è proprio pari alla forza ad unità di superficie applicata, mentre le tensioni tangenziali sono nulle.

Le equazioni indefinite al contorno permettono di particularizzare le funzioni delle tensioni ottenute risolvendo il problema elastico per casi di carico specifici, come si vedrà nel seguito.

Reciprocità delle tensioni tangenziali

Scrivendo l'equazione di equilibrio ai momenti dell'elementino di lati $dx - dy$, rispetto alla retta parallela all'asse z passante per il centro C dell'elementino stesso (fig.2), tenuto conto del fatto che le tensioni normali e le tensioni tangenziali agenti sulle facce di normale z non hanno braccio rispetto a tale asse, si ottiene:

$$\sum M_z = \left[(\tau_{xy} + (\partial \tau_{xy} / \partial x) dx + \tau_{xy}) dy dz \right] dx/2 - \left[(\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) dy + \tau_{yx}) dx dz \right] dy/2 = 0 \quad (2.10a)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine inferiore legati alle derivate delle tensioni, la (10a) diventa:

$$\sum M_z = (\tau_{xy} dy dz) dx - (\tau_{yx} dx dz) dy = 0 \quad (2.10b)$$

da cui

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.11)$$

Scrivendo le analoghe equazioni di equilibrio per gli assi y e x si ottiene:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.12)$$

In definitiva, per descrivere lo stato tensionale, sono necessarie solo le 6 componenti $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ e τ_{yz} .

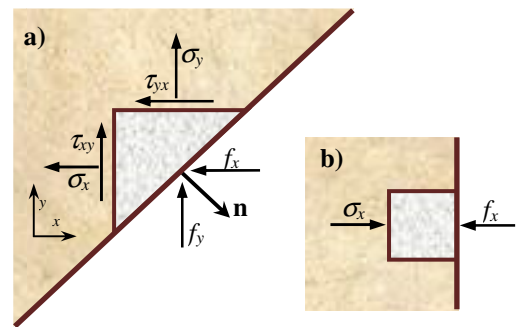


Fig.2.3 – Forze e tensioni al contorno.

Equazioni di compatibilità

Un solido tridimensionale soggetto a forze esterne subisce un cambiamento di configurazione definito *deformazione*. Tale cambiamento di configurazione comporta che ciascun punto di coordinate x, y, z in assi cartesiani, è soggetto ad uno spostamento $s(x,y,z)$ le cui componenti rispetto agli assi di riferimento sono $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$. Lo stato di deformazione è legato agli spostamenti s tramite le *equazioni di compatibilità*. L'ipotesi di compatibilità o *congruenza* implica che nel cambiamento di configurazione non si verifichino lacerazioni o compenetrazioni tra le parti del solido. La procedura corretta per la determinazione delle equazioni di compatibilità richiede l'applicazione del principio dei lavori virtuali affinché il lavoro compiuto dalle forze esterne sul solido (legato a forze e spostamenti) sia bilanciato con quello dovuto alle forze interne (legato a tensioni e deformazioni). Per semplicità, in questo caso, esse sono dedotte direttamente.

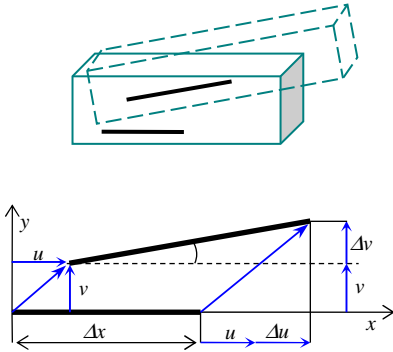


Fig.2.4 - Dilatazione di una fibra di lunghezza infinitesima

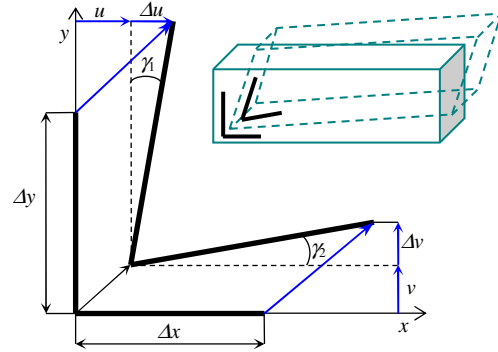


Fig.2.5 - Deformazione di scorrimento

Si consideri la fibra di lunghezza Δx mostrata in fig.4, se le sue estremità sono soggette a spostamenti orizzontali diversi tra loro, essa subisce una variazione di lunghezza in direzione x pari alla differenza tra gli spostamenti:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) \quad (2.13)$$

si definisce *dilatazione* assiale in direzione x il limite per Δx tendente a 0 del rapporto tra la variazione di lunghezza Δu e la lunghezza iniziale Δx :

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.14)$$

Analogamente, in seguito a spostamenti v e w , si verificano deformazioni longitudinali secondo gli altri assi, date dalle seguenti equazioni:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.15, 16)$$

In generale, inoltre, nel cambiamento di configurazione due fibre inizialmente disposte in modo parallelo rispettivamente agli assi y e x , come in fig.5, ruotano rispettivamente di quantità $\gamma_1 \approx \Delta u / \Delta y$ e $\gamma_2 \approx \Delta v / \Delta x$ (fig.5). La variazione complessiva dell'angolo formato dalle due fibre è dato dalla somma di questi termini. Si definisce *scorrimento* γ_{xy} il limite per Δx e Δy tendenti a 0 della somma dei due termini γ_1 e γ_2 :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.17)$$

Analogamente, in seguito a rotazioni attorno agli altri assi, si hanno degli scorrimenti dati dalle seguenti equazioni:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.18)$$

In definitiva le equazioni di compatibilità relative al solido tridimensionale sono le seguenti:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.19)$$

Si noti che le deformazioni sono grandezze adimensionali.

Per effetto della deformazione, in ciascun punto del solido, in generale, si verifica una variazione di volume. Si definisce *dilatazione cubica* ε_v la variazione di volume subita dall'unità di volume. Essa si dimostra essere data dalla seguente espressione:

$$\varepsilon_v = dV/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.20)$$

Equazioni costitutive

Le deformazioni che si producono in un corpo a causa della tensione applicata, dipendono dalle caratteristiche fisico-meccaniche del materiale che lo costituisce. Queste caratteristiche sono determinate in modo sperimentale (prove meccaniche) e il comportamento del materiale è caratterizzato mediante le *equazioni costitutive*.

Le equazioni costitutive mettono in relazione le tensioni applicate sul materiale (σ e τ) e le deformazioni che vi si producono (ε e γ). Spesso tali equazioni costituiscono una semplificazione del comportamento reale.

In generale una singola componente di tensione può provocare deformazioni in tutte le direzioni, questo è il caso dei materiali fortemente *anisotropi*. Un materiale è definito:

- *omogeneo* se ha proprietà uguali in tutti i punti,
- *isotropo* se ha proprietà uguali in tutte le direzioni.

Molti dei materiali reali obbediscono a queste idealizzazioni solo su scala macroscopica. Si noti che un materiale non omogeneo può essere isotropo in alcuni punti e anisotropo in altri.

Comportamento elastico lineare per materiali isotropi

Molti dei materiali da costruzione presentano, entro certi limiti delle tensioni applicate, un comportamento schematizzabile come *elastico lineare*:

- le deformazioni scompaiono se i carichi si annullano;
- esiste una proporzionalità diretta tra carico e deformazione.

Le deformazioni elastiche sono tipicamente associate allo stiramento dei legami atomici nei solidi.

Un materiale elastico lineare, sottoposto ad uno stato tensionale monoassiale, presenta una deformazione longitudinale ε_l (fig.6) che risulta legata alla tensione tramite la seguente espressione:

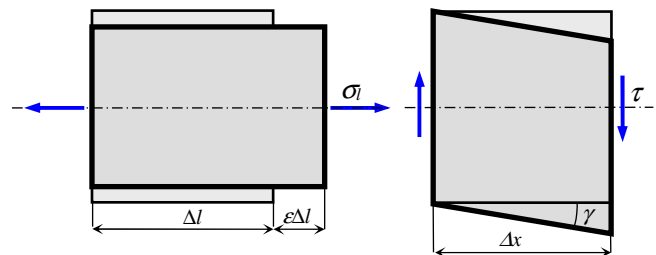


Fig.2.6 – Tensioni e deformazioni in solidi elastici

$$\varepsilon_l = \sigma_l / E \quad (2.21)$$

nella quale E è il *modulo di elasticità longitudinale* o *modulo di Young* del materiale ($E = \sigma_l / \varepsilon_l$) avente le dimensioni di una tensione [N/mm^2].

Sperimentalmente si osserva anche una deformazione trasversale di segno opposto a quella assiale. Nei materiali isotropi essa è data da:

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon_l = -\nu \sigma_l / E \quad (2.22)$$

nella quale ν è il *coefficiente di Poisson* del materiale definito come

$$\nu = -\varepsilon_t / \varepsilon_l \quad (2.23)$$

Il coefficiente di Poisson è adimensionale e varia nel campo $\nu = 0.0 \div 0.5$. Il valore $\nu = 0.5$ è un limite estremo che corrisponde fisicamente al caso in cui per tensione monoassiale la deformazione non provoca variazione di volume, come è possibile osservare particolarizzando la (20) per tensione monoassiale mediante la (21) e la (22): $\varepsilon_V = dV/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x - 0.5\varepsilon_x - 0.5\varepsilon_x = 0$.

Se si sottopone il materiale ad una sollecitazione tangenziale, si osserva una deformazione di scorrimento (fig.6) che è legata alla tensione tramite la seguente espressione:

$$\gamma = \tau / G \quad (2.24)$$

nella quale G è il modulo di elasticità trasversale (o tangenziale) ($G = \tau / \gamma$). In caso di materiale isotropo si può dimostrare che esiste la seguente relazione tra le costanti G , E e ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.25)$$

Le costanti del materiale E , G e ν sono dette anche *costanti ingegneristiche*; esse legano tensioni monoassiali alle deformazioni misurate *nella stessa direzione* in cui agisce la tensione e *in direzione ortogonale* e possono essere determinate direttamente per via sperimentale.

Nel caso dei materiali isotropi, ovviamente, le costanti ingegneristiche sono uguali in tutte le direzioni, cioè il loro valore *non dipende dalla scelta del sistema di riferimento*. Per la proprietà di omogeneità esse risultano uguali in tutti i punti del solido.

Nel caso più generale di sollecitazione triassiale, le equazioni costitutive del materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo sono le seguenti:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2.26a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad (2.26b)$$

Si noti che le deformazioni tangenziali non sono influenzate da tensioni tangenziali in altri piani, cioè non vi è un effetto analogo a quello di Poisson. Osservando le (26a,b) è possibile notare che, applicando una tensione monoassiale, si generano deformazioni solo nella direzione della tensione stessa e nelle direzioni ortogonali. In definitiva, tenendo conto della (25), il comportamento deformativo di un materiale isotropo elastico-lineare è descritto dalle due sole costanti E e ν .

Le equazioni (26) possono essere poste in forma matriciale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.27)$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ vettori così definiti

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^T \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (2.28,29)$$

e la matrice \mathbf{C} , detta di *cedevolezza*, facilmente individuabile nella seguente relazione che è la (27) scritta per esteso:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

I termini della matrice \mathbf{C} sono le *costanti elastiche* del materiale, funzioni dirette delle costanti ingegneristiche.

È opportuno evidenziare le seguenti caratteristiche della matrice di rigidità dei materiali isotropi:

- le tre terne di zeri nelle righe da 1 a 3 implicano che non vi è *accoppiamento tra deformazioni longitudinali e tensioni tangenziali*, mentre i primi 3 zeri nelle righe da 4 a 6 implicano che non vi è *accoppiamento tra deformazioni tangenziali e tensioni normali*; a questo tipo di comportamento viene spesso associato l'aggettivo *simmetrico*;
- gli zeri in corrispondenza delle righe e delle colonne da 4 a 6 derivano dall'assenza di un effetto simile a quello di Poisson per le tensioni tangenziali;
- gli elementi della matrice \mathbf{C} si mantengono costanti *al variare dell'orientamento del sistema di assi*.

È opportuno sottolineare che la proprietà di isotropia riguarda la costanza degli elementi della matrice di cedevolezza al variare della *direzione* di applicazione delle tensioni, ovvero dell'*orientazione* della terna cartesiana di riferimento e non della *posizione dell'origine* della terna stessa: l'eventuale a costanza degli elementi della matrice di cedevolezza al variare dalla posizione dell'origine degli assi è relativa alla proprietà di *omogeneità* del materiale.

L'espressione (30) può essere scritta in modo inverso esplicitando le tensioni rispetto alle deformazioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.31)$$

essendo \mathbf{R} la *matrice di rigidità*, inversa della \mathbf{C} .

Deformazioni termiche

I materiali isotropi soggetti a variazione di temperatura subiscono una deformazione uguale in tutte le direzioni esprimibile secondo la seguente relazione:

$$\varepsilon_{x,y,z} = \alpha (T - T_0) = \alpha \Delta T \quad (2.32)$$

nella quale T_0 e T sono rispettivamente la temperatura iniziale (alla quale il solido si considera indeformato) e quella finale e α è il *coefficiente di dilatazione termica*, che può variare con la temperatura e che ha le dimensioni dell'inverso della temperatura ($1/^\circ\text{C}$).

Il termine a destra delle (32) deve essere sommato alle (26) per ottenere le espressioni globali delle dilatazioni comprendenti effetto meccanico e termico.

Comportamento elastico lineare dei materiali ortotropi

I materiali reali non possono essere sempre schematizzati come isotropi in quanto, in vari casi, la differenza tra le proprietà nelle varie direzioni non è trascurabile. Nel caso dei materiali fortemente anisotropi, la forma più generale possibile della (30) prevede che la matrice \mathbf{C} abbia *tutti i termini diversi da zero e dipendenti dal sistema di riferimento scelto*. In questo caso la matrice risulta comunque *simmetrica* rispetto alla diagonale, essendo cioè $C_{i,j} = C_{j,i}$ con $i \neq j$, e le costanti indipendenti sono 21. Al contrario di quanto accade nei materiali isotropi, applicando una tensione monoassiale su un materiale anisotropo si generano deformazioni anche in direzioni diverse da quella in cui agisce la tensione stessa e dalle direzioni a essa ortogonali, esiste cioè un *accoppiamento tra tensioni normali e deformazioni tangenziali* e viceversa.

Tra i materiali anisotropi, gli *ortotropi* sono caratterizzati dal fatto che è possibile identificare tre piani ortogonali rispetto ai quali le caratteristiche deformative risultano di tipo *simmetrico*. In particolare, se si scelgono assi di riferimento 1, 2, 3 paralleli a tali piani, da non confondere con gli assi principali delle tensioni, le equazioni costitutive assumono una forma simile a quella dei materiali isotropi:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

ovvero

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{123} = \mathbf{C}_{123} \boldsymbol{\sigma}_{123} \quad (2.33b)$$

Osservando la (33) si nota che, *con il sistema di assi orientato secondo le direzioni di ortotropia*, similmente ai materiali isotropi, non si verifica accoppiamento tra tensioni normali/tangenziali e deformazioni tangenziali/normali. Naturalmente, a differenza dei materiali isotropi, i moduli di rigidezza e i coefficienti di Poisson nelle varie direzioni sono differenti tra loro.

In particolare, i coefficienti di Poisson nella (33) sono definiti come

$$\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i \quad (2.34)$$

il primo indice si riferisce alla direzione di applicazione della tensione e il secondo alla direzione della deformazione trasversale. Per la simmetria della matrice \mathbf{C} rispetto alla diagonale, deve essere

$$\nu_{ij} / E_i = \nu_{ji} / E_j \quad (2.35)$$

in conseguenza di ciò i coefficienti di Poisson indipendenti risultano 3. In definitiva nella (33) vi sono 9 costanti indipendenti: i 3 moduli E_i , i 3 moduli G_i e solo 3 dei 6 coefficienti ν_{ij} .

Se si applicano tensioni in direzioni diverse da quelle di ortotropia (cioè orientate secondo assi generici xyz formanti angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispetto agli assi 123), la relazione (33) non risulta più valida, poiché, come detto, i termini della matrice dipendono dalla scelta del sistema d'assi. La (33) deve essere infatti riscritta come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} = \mathbf{C}_{xyz} \boldsymbol{\sigma}_{xyz} \quad (2.36)$$

essendo \mathbf{C}_{xyz} una matrice simmetrica, ma, in generale, *avente tutti i termini diversi da 0*.

Tipicamente il comportamento meccanico dei materiali ortotropi viene caratterizzato determinando sperimentalmente o stimando teoricamente i coefficienti della matrice \mathbf{C}_{123} nella (33). Quando necessario, la matrice \mathbf{C}_{xyz} relativa ad una certa orientazione degli assi xyz può essere facilmente determinata a partire dalla \mathbf{C}_{123} mediante opportune operazioni di *rotazione d'assi*, come verrà mostrato nel paragrafo successivo per il caso bidimensionale.

Compositi a fibra lunga

I *materiali compositi* sono ottenuti combinando 2 o più materiali tra loro insolubili mediante miscelazione o incollaggio. In molte applicazioni il materiale composito è costituito da una *matrice* di materiale duttile (polimerico o metallico - ma anche ceramico) conformata in una *lamina* di spessore sottile rispetto alle dimensioni principali e da *fibres di rinforzo* di altro materiale (fibre di vetro, carbonio, aramide, di materiali ceramici ecc) disposte in modo unidirezionale (fig.7) o secondo direzioni ortogonali. In questo caso il comportamento risulta ortotropo e le caratteristiche meccaniche (E_i e ν_{ij}) della lamina di materiale composito dipendono dalle caratteristiche meccaniche della matrice e del rinforzo (E_m, ν_m, E_r, ν_r). Poiché le fibre hanno dimensioni dell'ordine della decina/centinaio di micron, ai fini dell'analisi meccanica il materiale può essere considerato omogeneo.

Per ottenere elevate proprietà di resistenza secondo direzioni diverse, lamine con fibre disposte in differenti direzioni vengono incollate tra loro creando una lastra detta *laminato*. L'analisi del comportamento meccanico delle

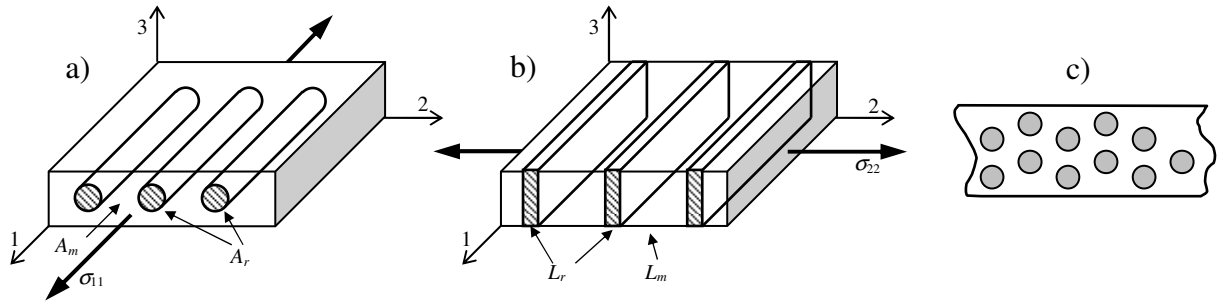


Fig.2.7 – Compositi a fibra lunga con rinforzo in direzione 1: a) schema per la determinazione di E_1 , b) schema per la determinazione di E_2 , c) possibile disposizione delle fibre.

lastre ottenute in questo modo è oggetto della *teoria della laminazione* per la quale si rimanda a testi specializzati, mentre nel seguito vengono mostrate le relazioni tra le tensioni e le deformazioni agenti nella singola lamina.

A causa della piccolezza dello spessore, le lamine, sollecitate nel loro piano, agiscono in stato piano di tensione. Assumendo una terna di riferimento cartesiana con assi 1, 2 nel piano della lamina con l'asse 1 in direzione parallela al rinforzo e l'asse 3 nella direzione dello spessore (assi della lamina), le tensioni in direzione 3 possono essere trascurate ($\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$). La deformazione lungo 3 in generale è diversa da 0, ma non fa parte delle variabili principali del problema e può essere dedotta separatamente. Le equazioni costitutive possono essere ottenute dalla (33) in modo semplificato:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

La (37) può essere posta in forma compatta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \mathbf{C}_{12} \boldsymbol{\sigma}_{12} \quad (2.38)$$

essendo \mathbf{C}_{12} la matrice di cedevolezza negli assi della lamina.

La deformazione in direzione ortogonale al piano della lamina è data da

$$\varepsilon_{33} = - \left(\sigma_{11} \frac{\nu_{13}}{E_1} + \sigma_{22} \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) \quad (2.39)$$

La (37) e la (35), particolarizzata per $i=1$ e $j=2$, mostrano che le costanti elastiche indipendenti per i materiali ortotropi, nel passaggio del problema da tridimensionale a bidimensionale, si riducono a 4. I valori delle costanti devono essere valutati con prove sperimentali, tuttavia in alcuni casi esse possono essere dedotte direttamente da quelle dei materiali componenti.

La relazione inversa della (37), che esplicita le tensioni rispetto alle deformazioni, è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ovvero, in forma compatta,

$$\boldsymbol{\sigma}_{12} = \mathbf{R}_{12} \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \quad (2.41)$$

nella quale \mathbf{R}_{12} la matrice di rigidità negli assi della lamina, inversa della \mathbf{C}_{12} .

Le (37) e (40) legano tra loro tensioni e deformazioni negli assi della lamina. Come detto, per ottenere analoghe formule in assi generici x, y , anch'essi paralleli al piano della lamina, formanti angolo α rispetto agli assi 1, 2, misurato dalla direzione 1 alla direzione x in senso positivo se orario, è necessario ricorrere alle formule di trasformazione d'assi che, per il caso delle tensioni, coincidono con le (1.60). Ponendo $m = \cos \alpha$ e $n = \sin \alpha$, la tensione e la deformazione negli assi x, y possono essere ottenute rispettivamente con le seguenti espressioni:

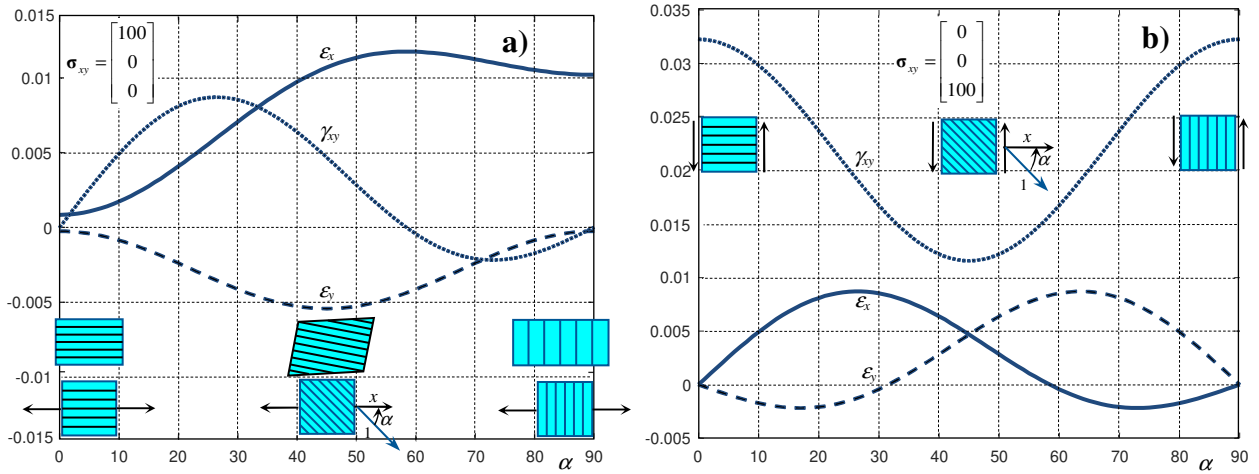


Fig.2.8 – Andamento delle deformazioni nei casi di sollecitazione monoassiale e puramente tangenziale al variare dell'angolo α (in gradi) tra la direzione 1 del materiale e l'asse x , lungo cui agisce la tensione, ottenute mediante la (2.49). Costanti: $E_1=117.5$ GPa, $E_2=9.8$ GPa, $G_{12}=3.1$ GPa, $\nu_{12}=0.3$; a) tensione monoassiale $\sigma_x=100$ MPa, $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$; b) tensione tangenziale $\tau_{xy}=100$ MPa, $\sigma_x=0$, $\sigma_y=0$.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.42,43)$$

Queste relazioni possono essere scritte nella seguente forma compatta:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{.xy} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\epsilon}_{12} \quad \boldsymbol{\sigma}_{.xy} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{12} \quad (2.44,45)$$

Esprimendo $\boldsymbol{\epsilon}_{12}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{12}$ in funzione di $\boldsymbol{\epsilon}_{.xy}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{.xy}$ mediante le inverse della (44) e della (45) (cioè $\boldsymbol{\epsilon}_{12}=\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{.xy}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{12}=\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{.xy}$), introducendo le espressioni ottenute nella (38) e nella (41) ed esplicitando rispetto a $\boldsymbol{\epsilon}_{.xy}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{.xy}$, si ottiene:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{.xy} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C}_{12} \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{.xy} \quad \boldsymbol{\sigma}_{.xy} = \mathbf{P} \mathbf{R}_{12} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{.xy} \quad (2.46,47)$$

Ponendo

$$\mathbf{C}_{.xy} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C}_{12} \mathbf{P}^{-1} \quad \mathbf{R}_{.xy} = \mathbf{P} \mathbf{R}_{12} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad (2.48,49)$$

infine si ottiene

$$\boldsymbol{\epsilon}_{.xy} = \mathbf{C}_{.xy} \boldsymbol{\sigma}_{.xy} \quad \boldsymbol{\sigma}_{.xy} = \mathbf{R}_{.xy} \boldsymbol{\epsilon}_{.xy} \quad (2.50,51)$$

Queste relazioni consentono di calcolare le deformazioni per tensioni applicate in direzioni qualsiasi e viceversa.

In fig.8 è mostrato l'andamento delle deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}_{.xy}$ in una lamina ortotropa, nel caso di tensione *monoassiale* σ_x ($\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$) al variare dell'angolo α tra la direzione 1 del materiale e la direzione x . Per $\alpha=0^\circ$ e $\alpha=90^\circ$ la tensione σ_x agisce rispettivamente nelle direzioni 1 ($\sigma_x \equiv \sigma_1$) e 2 ($\sigma_x \equiv \sigma_2$) e il comportamento del materiale è di tipo *simmetrico*, risultando $\gamma_{xy}=0$; per gli altri valori di α è in genere presente una deformazione γ_{xy} . È interessante notare come la deformazione massima non si abbia in corrispondenza di $\alpha=90^\circ$ (caso in cui $\sigma_x \equiv \sigma_2$) e come per $\alpha=90^\circ$ la deformazione trasversale dovuta all'effetto Poisson, in questo caso coincidente con ϵ_y , risulti bassa, nonostante l'elevato valore di ϵ_x ; ciò è dovuto al fatto che le fibre sono disposte in direzione y rendendo elevata la rigidità in tale direzione. Un'altro aspetto da tenere presente è che, invertendo il segno della tensione tangenziale, applicando la (50) è possibile osservare che, oltre al segno della deformazione γ_{xy} corrispondente, si invertono anche i segni delle deformazioni ϵ_x ed ϵ_y , da cui si evince che, contrariamente a quanto accade nei materiali isotropi, il verso delle tensioni tangenziali ha un effetto sulla variazione di forma del materiale.

Determinazione del modulo parallelo alle fibre E_1

Come detto, le costanti ingegneristiche E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} del materiale ortotropo dipendono dalle costanti elastiche E_m , ν_m , E_r , ν_r della matrice e del rinforzo. Esse devono essere determinate sperimentalmente, ma, in alcuni casi, possono essere stimate in modo accettabile a partire da quelle dei materiali componenti. A tale fine è necessario rinunciare all'ipotesi di omogeneità e considerare le differenti caratteristiche meccaniche dei 2 materiali e le differenti sollecitazioni agenti su di essi, come mostrato nel seguito.

Nel caso in esame (fig.7) A_r è l'area data dalla somma delle aree delle sezioni trasversali delle fibre di rinforzo e A_m è l'area occupata dalla matrice. Naturalmente l'area della sezione trasversale del materiale composito è

$$A = A_r + A_m \quad (2.52)$$

Poiché la lunghezza in direzione 1 è uguale per le fibre e la matrice, le *frazioni volumetriche* di rinforzo e matrice rispetto al materiale composito, definite semplicemente come rapporti tra il volume di fibra e di matrice e il volume totale, possono essere espresse come

$$V_r = A_r / A \quad V_m = 1 - V_r = A_m / A \quad (2.53,54)$$

In presenza di tensione monoassiale agente in direzione 1, cioè σ_{11} , le fibre e la matrice possono essere considerate elementi elastici agenti in parallelo. In questo caso l'allungamento in direzione 1 ($\Delta L = \varepsilon_{11} L = \varepsilon_r L = \varepsilon_m L$) risulta uguale per rinforzo e matrice, per cui, *essendo uguali le lunghezze*, risultano uguali le deformazioni, e la forza complessivamente agente nella stessa direzione è data dalla somma delle forze agenti nel rinforzo e nella matrice:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_r = \varepsilon_m = \varepsilon \quad \sigma_{11} A = \sigma_r A_r + \sigma_m A_m \quad (2.55,56)$$

Le tensioni agenti nel rinforzo e nella matrice σ_r e σ_m in direzione 1 e la tensione media agente nella lamina σ_{11} sono legate alle corrispondenti deformazioni mediante le classiche relazioni costitutive

$$\sigma_r = E_r \varepsilon_r \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_m \quad \sigma_{11} = E_1 \varepsilon_{11} \quad (2.57-59)$$

Sostituendo le (57-59) nella (56) e utilizzando la (55) per eliminare le deformazioni, si ottiene

$$E_{11} = \frac{E_r A_r + E_m A_m}{A} = V_r E_r + V_m E_m \quad (2.60)$$

Determinazione del modulo ortogonale alle fibre E_2

Nel caso del modulo longitudinale la disposizione effettiva delle fibre nella matrice non influenza molto il valore ottenuto con la (60), al contrario, nel caso del modulo trasversale, una analisi esatta non può essere effettuata e si approssima la geometria effettiva del composito (ad es. in fig.7c) con quella mostrata in fig.7b. Il risultato che si ottiene deve essere considerato un limite inferiore del valore effettivo.

Nel caso in esame L_r ed L_m sono la lunghezza totale in direzione y delle sezioni trasversali delle fibre di rinforzo e della matrice (vedi fig.7). Naturalmente la lunghezza totale è

$$L = L_r + L_m \quad (2.61)$$

Poiché la lunghezza in direzione 1 e lo spessore sono uguali per le fibre e la matrice, le frazioni volumetriche di rinforzo e matrice rispetto al materiale composito possono essere ottenute come rapporti tra le lunghezze L_r ed L_m e la lunghezza totale L

$$V_r = \frac{L_r}{L} \quad V_m = 1 - V_r = \frac{L_m}{L} \quad (2.62,63)$$

Lo schema di fig.7b coincide con quello di elementi elastici disposti in serie; in presenza di tensione monoassiale σ_{22} , la forza agente nella matrice e nel rinforzo è la stessa ($F = A \sigma_{22} = A_r \sigma_r = A_m \sigma_m$), per cui, essendo uguali le sezioni, risultano uguali le tensioni, mentre l'allungamento complessivo è dato dalla somma degli allungamenti nel rinforzo e nella matrice:

$$\sigma_{22} = \sigma_r = \sigma_m \quad \Delta L = \Delta L_r + \Delta L_m = \varepsilon_{22} L = \varepsilon_r L_r + \varepsilon_m L_m \quad (2.64,65)$$

Anche in questo caso le tensioni e le deformazioni in direzione 2 nel rinforzo e nella matrice, la tensione media agente nella lamina in direzione 2 e l'analoga deformazione sono legate tra loro mediante le classiche relazioni costitutive:

$$\varepsilon_r = \sigma_r / E_r \quad \varepsilon_m = \sigma_m / E_m \quad \varepsilon_{22} = \sigma_{22} / E_{22} \quad (2.66-68)$$

Sostituendo le (66-68) nella (65) a destra, utilizzando la (64) per eliminare le tensioni e dividendo per L si ottiene

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{1}{E_r} \frac{L_r}{L} + \frac{1}{E_m} \frac{L_m}{L} = \frac{V_r}{E_r} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2.69)$$

da cui

$$E_{22} = \frac{E_r E_m}{V_r E_m + V_m E_r} \quad (2.70)$$

In modo analogo è possibile ottenere le seguenti relazioni tra le altre costanti del materiale:

$$\nu_{12} = V_r \nu_r + V_m \nu_m \quad G_{12} = \frac{G_r G_m}{V_r G_m + V_m G_r} \quad (2.71,72)$$

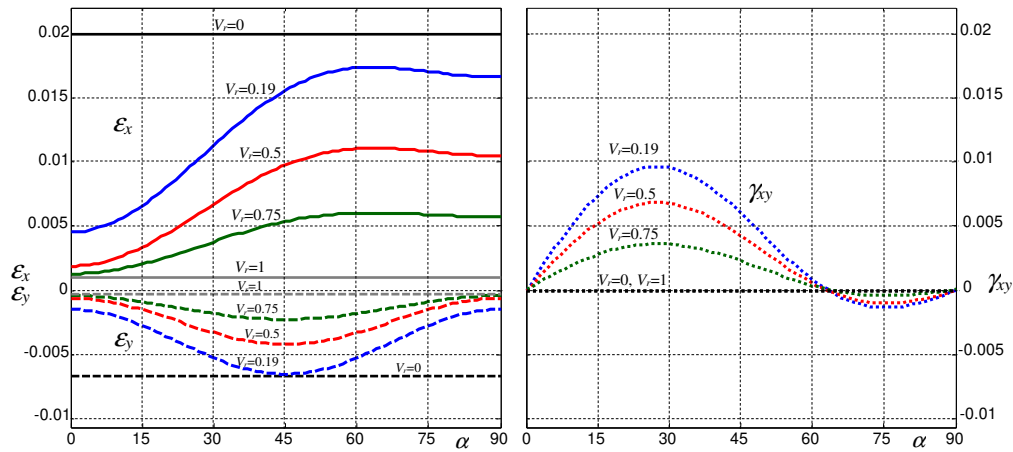


Fig.2.9 – Andamento delle deformazioni nel caso di sollecitazione monoassiale, al variare dell'angolo α (in gradi) per diversi valori di V_r . $\sigma_x=100$ MPa, $E_r=100$ GPa, $\nu_r=0.3$, $G_r=E_r/[2(1+\nu_r)]\approx 38.5$ GPa; $E_m=5$ GPa, $\nu_m=0.33$, $G_m=E_m/[2(1+\nu_m)]\approx 1.9$ GPa.

In fig.9 è mostrato un confronto tra le deformazioni ottenute per diversi valori della frazione volumetrica del rinforzo, operando come nel caso di fig.8. Le caratteristiche dei materiali sono riportate nella didascalia.

Lavoro di deformazione

Nel caso di un solido di materiale elastico, isotropo e omogeneo, si definisce lavoro di deformazione (potenziale elastico, energia elastica) ad unità di volume la seguente quantità:

$$l = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (2.73)$$

Il lavoro di deformazione è una quantità scalare positiva pari al lavoro necessario a portare l'unità di volume di un solido dallo stato iniziale indeformato a quello finale deformato.

Il lavoro di deformazione complessivo compiuto dalle forze interne si ottiene integrando l'espressione precedente rispetto al volume del solido:

$$L_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.74)$$

La (74), scritta per esteso, diventa

$$L_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (2.75)$$

Si osservi che il lavoro compiuto dalla tensione normale σ_x per deformare un elementino di volume è dato appunto dalla seguente quantità:

$$dL = \frac{1}{2} dF_x du = \frac{1}{2} \sigma_x dA \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (2.76)$$

Il termine $\frac{1}{2}$ dipende dal fatto che il lavoro si ottiene passando gradualmente dal livello di tensione applicata nullo, con deformazione nulla, al livello finale. Allo stesso modo il lavoro compiuto dalla tensione tangenziale $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ per deformare un elementino di volume è dato da:

$$dL = \frac{1}{2} (dF_x du + dF_y dv) = \frac{1}{2} \left(\tau_{yx} dx dz \frac{du}{dy} dy + \tau_{xy} dy dz \frac{dv}{dx} dx \right) = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad (2.77)$$

Teorema di Clapeyron

Indicando con \mathbf{F}_v ed \mathbf{F}_s le forze esterne, rispettivamente di volume e di superficie, agenti sul solido e con \mathbf{s} i relativi spostamenti, il lavoro di tali forze è dato dalle seguente espressione:

$$L_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{F}_v^T \mathbf{s} dV + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{F}_s^T \mathbf{s} dS \quad (2.78)$$

Il teorema di Clapeyron afferma che l'energia elastica L_i immagazzinata in un solido elastico-lineare è pari al lavoro compiuto dalle forze esterne applicate gradualmente dal valore 0 al valore finale durante il processo di deformazione (cioè è uguale alla metà del lavoro che le forze compirebbero se agissero con l'intensità finale durante l'intero processo di deformazione):

$$L_e = L_i \quad (2.79)$$

La (79) scritta per esteso fornisce:

$$\int_V \mathbf{F}_v^T \mathbf{s} dV + \int_S \mathbf{F}_s^T \mathbf{s} dS = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.80)$$