3. IL PROBLEMA ELASTICO

Il problema elastico consiste nella determinazione del campo tensionale, delle deformazioni e degli spostamenti di un solido costituito di materiale dal comportamento elastico lineare, vincolato su porzioni della superficie, soggetto a carichi esterni di volume F_x, F_y, F_z e di superficie f_x, f_y, f_z.

Proprietà del materiale, incognite ed equazioni

Nell'ipotesi di materiale omogeneo, isotropo ed elastico lineare le proprietà elastiche sono espresse mediante le costanti ingegneristiche E (modulo di Young) e ν (coefficiente di Poisson), oppure mediante le *costanti di Lamè* G e λ legate ad E e ν mediante le relazioni:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.1,2}$$

G è il noto *modulo di elasticità tangenziale*. Le relazioni inverse delle (1-2) sono le seguenti:

$$E = G\frac{3\lambda+2G}{\lambda+G} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \tag{3.3,4}$$

In coordinate cartesiane le incognite del problema elastico sono 15 funzioni delle coordinate spaziali:

- le tensioni $\sigma_x(x,y,z)$, $\sigma_y(x,y,z)$, $\sigma_z(x,y,z)$, $\tau_{xy}(x,y,z)$, $\tau_{yz}(x,y,z)$, $\tau_{zx}(x,y,z)$,
- le deformazioni $\varepsilon_x(x,y,z)$, $\varepsilon_y(x,y,z)$, $\varepsilon_z(x,y,z)$, $\gamma_{xy}(x,y,z)$, $\gamma_{yz}(x,y,z)$, $\gamma_{zx}(x,y,z)$,
- gli spostamenti $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$.

Le equazioni disponibili sono 15 suddivise in 3 gruppi:

- **le equazioni indefinite di equilibrio**

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0 \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0 \qquad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0 \tag{3.5}$$

- **le equazioni di compatibilità (caso dei piccoli spostamenti)**

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.6}$$

- **le equazioni costitutive**

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z\right) \qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x-\nu\sigma_z\right) \qquad \varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\nu\sigma_y-\nu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx} \tag{3.7}$$

Le equazioni costitutive possono essere esplicitate rispetto alle tensioni:

$$\sigma_x=E\frac{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \sigma_y=E\frac{(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \sigma_z=E\frac{(1-\nu)\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz}=G\,\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx}=G\,\gamma_{zx} \tag{3.7b}$$

Le prime 3 delle (7.b) possono essere riscritte utilizzando le costanti di Lamè:

$$\sigma_x=(\lambda+2G)\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z \qquad \sigma_y=(\lambda+2G)\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_z \qquad \sigma_z=(\lambda+2G)\varepsilon_z+\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y \tag{3.7c}$$

Le equazioni di congruenza interna

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z} \tag{3.8}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Le equazioni di congruenza interna (8) mettono in relazione tra loro le componenti di deformazione indipendentemente dalle funzioni spostamento e si ottengono dalle equazioni di compatibilità (6) eliminando, tramite operazioni di derivazione, gli spostamenti stessi. In particolare, derivando due volte la prima delle (6) rispetto a y e la seconda rispetto a x e sommando si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \tag{3.9a,b,c}$$

derivando la quarta una volta rispetto ad x e una volta rispetto ad y si ottiene

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \tag{3.10}$$

i secondi membri delle (9c) e (10) risultano uguali, di conseguenza lo sono i primi. L'uguaglianza tra questi termini fornisce la prima delle (8); operando analogamente con le altre componenti si ottengono le altre equazioni di congruenza. Le relazioni (8) esistono in quanto le 6 funzioni deformazione dipendono da 3 funzioni spostamento. Se le componenti di deformazione rispettano le equazioni di compatibilità interna, la congruità della deformazione è garantita, cioè non si verificano compenetrazioni o lacerazioni a causa della deformazione. Tale garanzia di compatibilità dipende dal fatto che le (8) sono dedotte dalle (6).

Soluzione del problema elastico

In generale nessuno dei sistemi di equazioni (5-8) può essere risolto autonomamente, in quanto in ciascuno sono presenti più incognite che equazioni, tuttavia, effettuando alcune sostituzioni, è possibile riscrivere le 3 equazioni indefinite di equilibrio (5) in funzione dei soli spostamenti u, v e w (le equazioni di Navier) o le 6 equazioni di congruenza (8) in funzione delle sole tensioni σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} (le equazioni di Michell-Beltrami): nel primo caso si parla di *formulazione agli spostamenti* del problema elastico e nel secondo di *formulazione alle tensioni*. Tipicamente la formulazione agli spostamenti è adatta alla soluzione del caso di solidi vincolati al contorno, mentre quella alle tensioni è adatta al caso di solidi non vincolati, ma soggetti a carichi esterni in equilibrio tra loro (tuttavia è facile trovare in bibliografia problemi del secondo tipo risolti con la formulazione agli spostamenti). Non esistono formulazioni alle deformazioni per via della difficoltà nell'imposizione delle condizioni al contorno in questo caso.

È opportuno osservare che la linearità di tutte le equazioni che governano il problema consente di utilizzare la *sovrapposizione degli effetti*, grazie alla quale la risposta di un sistema soggetto a una *combinazione* di azioni esterne può essere ottenuta come somma delle risposte delle singole azioni.

Inoltre risulta valido il *principio di equivalenza elastica* in base al quale le azioni dell'effettiva distribuzione di forze agente su una porzione limitata di superficie o volume del solido risultano equivalenti a quelle delle risultanti ad una distanza *sufficiente* dalla zona di applicazione stessa.

Il problema elastico può essere notevolmente semplificato se la geometria dell'elemento analizzato e i carichi cui è sottoposto possono essere approssimati anche parzialmente a sistemi bidimensionali (come nel caso del *problema piano*) o monodimensionali (come nel caso delle *travi* o dei sistemi *assialsimmetrici*). In questi casi, infatti, è possibile ipotizzare che alcune delle funzioni incognite (tensioni, deformazioni e spostamenti) risultino identicamente nulle in tutto il campo e/o che siano funzioni di 1 o 2 variabili spaziali, invece che 3.

In vari casi la semplicità della geometria dell'elemento analizzato (es. travi e piastre) consente di formulare delle ipotesi semplificative sulla *forma* delle funzioni che descrivono gli spostamenti e/o di riscrivere le equazioni di equilibrio in funzione dei *risultanti* delle tensioni agenti nelle sezioni (momenti flettenti, sforzo normale, ecc..), piuttosto che delle tensioni stesse. Nel caso delle travi i risultanti sono funzione della sola posizione della sezione invece che delle 3 coordinate spaziali come, in generale, le tensioni; nel caso delle lastre i risultanti sono forze e momenti ad unità di lunghezza e, in genere, sono funzione di 2 coordinate spaziali, invece di 3.

Formulazione agli spostamenti - Equazioni di Navier

Le equazioni di Navier sono le equazioni indefinite di equilibrio (5) scritte in funzione degli spostamenti. Questa formulazione è indicata nei casi in cui, come condizioni al contorno, sono prefissati gli spostamenti. Per prima cosa le equazioni costitutive (7c,b) vengono riscritte introducendo al posto delle deformazioni gli spostamenti dedotti dalle equazioni di compatibilità (6), ottenendo, nel caso della σ_x e della τ_{xy}, espressioni del tipo

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.11}$$

quindi, sostituendo le tensioni espresse con le (11) nelle equazioni di equilibrio (5) è possibile riscrivere queste ultime in termini di spostamento. Ad esempio in direzione x si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + F_x =$$

$$= G\nabla_2 u + 3(\lambda + G)\frac{\partial\,\Theta}{\partial x} + F_x = 0 \tag{3.12}$$

L'espressione finale di tutte e tre le equazioni è la seguente:

$$G\left[\nabla_2 u + \frac{3}{1-2\nu}\frac{\partial\,\Theta}{\partial x}\right] + F_x = 0 \qquad G\left[\nabla_2 v + \frac{3}{1-2\nu}\frac{\partial\,\Theta}{\partial y}\right] + F_y = 0 \qquad G\left[\nabla_2 w + \frac{3}{1-2\nu}\frac{\partial\,\Theta}{\partial z}\right] + F_z = 0$$

(3.13a-c)

nella quale l'*operatore di Laplace* e la variazione di volume sono così definiti:

$$\nabla_2(\;) = \frac{\partial^2(\;)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial z^2} \qquad\qquad 3\Theta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3.14,15}$$

Condizioni al contorno relative alle tensioni possono essere espresse sostituendo le (7c,b) scritte in funzione degli spostamenti (11), nelle equazioni di equilibrio al contorno (2.9). Ad esempio, nella direzione x, dove $\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = f_x$, si ottiene:

$$G\left[2\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)n_z\right] + 3\lambda\;\Theta\;n_x = f_x \tag{3.16}$$

Il problema è ricondotto alla determinazione delle tre componenti di spostamento che soddisfano le equazioni precedenti (13) più le equazioni di congruenza al contorno (16).

Formulazione alle tensioni - Equazioni di Michell-Beltrami

Le equazioni di Michell-Beltrami sono le equazioni di compatibilità (8) scritte in funzione delle tensioni. Questa formulazione è indicata nei casi in cui come condizioni al contorno sono prefissati i valori delle tensioni; un caso tipico è quello dei corpi privi di vincoli, soggetti a forze equilibrate, come i cilindri in pressione.

Considerando la prima delle (8), sostituendo ε_x, ε_y, γ_{xy} con σ_x, σ_y, τ_{xy}, mediante le (7), eliminando il termine $\partial^2\tau_{xy}/\partial x\partial y$ mediante le equazioni di equilibrio (5) opportunamente derivate e sommate, e trascurando le forze di volume, si ottiene:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = 0 \tag{3.17a}$$

Utilizzando tutte e sei le equazioni di congruenza interna, introducendo l'operatore di Laplace (14) e l'invariante primo delle tensioni $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ è possibile ottenere tutte le equazioni di Michell-Beltrami:

$$\nabla_2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla_2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla_2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla_2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0 \qquad \nabla_2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0 \qquad \nabla_2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0 \tag{3.17b}$$

che possono essere sintetizzate nella seguente espressione

$$\nabla_2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0 \tag{3.17.c}$$

<u>Problema piano</u>

Il problema elastico è definito *piano* se:

- il *continuo* (fig.1) è di forma *cilindrica* di spessore h, con la sezione trasversale (di area A e contorno C) disposta parallelamente al piano xy,
- le forze esterne **F** di volume ed **f** agenti sulla superficie C sono parallele al piano xy e indipendenti da z (cioè costanti lungo z), si ha cioè $\mathbf{F}=[F_x\ F_y]^T$, $\mathbf{f}=[f_x\ f_y]^T$, essendo $F_z=0$ ed $f_z=0$.

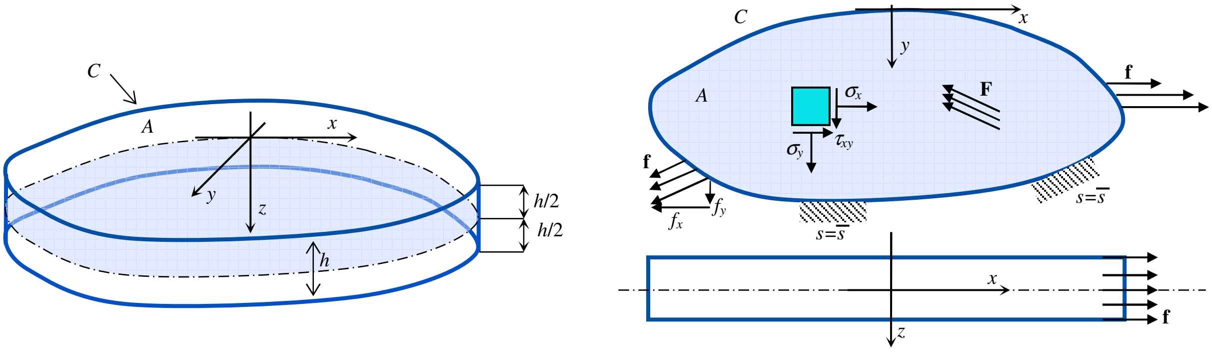

Fig.3.1 – Il continuo elastico nel caso piano e il sistema di riferimento.

Variabili

Anche nel caso piano, in generale, tutte le componenti di tensione, deformazione e spostamento sono diverse da zero e dipendenti da x, y e z, tuttavia le variabili σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v possono essere identificate come *primarie* e ritenute *indipendenti da z* per ipotesi semplificativa:

$$\boldsymbol{\sigma}(x,y)=\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy}\end{bmatrix}^T \qquad\qquad \mathbf{s}(x,y)=\begin{bmatrix}u & v\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Equazioni disponibili

Le variabili primarie sono legate fra loro e alle condizioni meccaniche e cinematiche esterne dalle seguenti equazioni nel dominio A e sul contorno C:

le equazioni di equilibrio *semplificate*:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0 \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0 \qquad \text{in A} \tag{3.19}$$

$$\sigma_x n_x+\tau_{yx}n_y=f_x \qquad \tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y=f_y \qquad \text{su } C \tag{3.20}$$

le equazioni di congruenza, in base alle quali si osserva che anche le variabili ε_x, ε_y, γ_{xy} sono indipendenti da z

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \text{in } A \tag{3.21}$$

$$s_x=\bar{s}_x \qquad s_y=\bar{s}_y \qquad \text{su } C \tag{3.22}$$

le equazioni costitutive espresse in funzione delle sole variabili nel piano, essendo $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}]^T$:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{3.23, 24}$$

- **R** è la matrice di rigidezza, di dimensioni matrice 3*3, simmetrica, definita positiva,
- **C** è la matrice di cedevolezza, inversa di **R**.

La forma definitiva delle equazioni costitutive dipende dalle ipotesi semplificative che è possibile fare su σ_z ed ε_z.

Ipotesi e semplificazioni

Affinché le equazioni complete di equilibrio (5) siano rispettate deve verificarsi che

$$\tau_{zx}=\tau_{zy}=0 \qquad\qquad \sigma_z=\sigma_z(x,y) \tag{3.25a,b}$$

La prima relazione discende dal fatto che, affinché le prime due equazioni di equilibrio (5) si possano trasformare nelle (19), devono essere nulle le derivate di τ_{zx} e τ_{zy} rispetto a z (quindi τ_{zx} e τ_{zy} devono essere costanti rispetto a z) e, dovendo essere nulle sulle superfici esterne, devono essere nulle ovunque. Essendo nulle le τ_{zx} e τ_{zy}, l’ultima delle (5), per l’ipotesi di forze di massa nulle in direzione z (F_z=0), mostra a sua volta che la derivata di σ_z rispetto a z deve essere nulla e che, di conseguenza, la σ_z risulta dipendere solo da x e y.

Per l’isotropia del materiale espressa dalle (7) e per la (25a), discende che:

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \tag{3.26}$$

In base alle (26) e all'indipendenza da z delle componenti di spostamento u e v supposta con l'eq.18, le ultime due equazioni di compatibilità (6) forniscono:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \qquad w = w(z) \tag{3.27a,b}$$

La (27a), infatti, implica che la w è costante rispetto ad x e y e quindi funzione della sola z. In base alle (27) si deduce che risulta possibile la presenza di una $\varepsilon_z = dw/dz$ diversa da 0, ma, poiché le σ non dipendono da z per l'ipotesi (18) e per la (25b), ε_z, per la terza delle (7), non vi può dipendere. Allora deve essere:

$$\varepsilon_z = C \qquad w = C\,z \tag{3.28,29}$$

Ipotesi		
Variabili principali indipendenti da z	Equazioni di equilibrio semplificate	Forze di massa nulle in direzione z
$\boldsymbol{\sigma}(x,y) = \left[\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \tau_{xy}\right]^T$	$\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$	$F_z = 0$
$\mathbf{s}(x,y) = [u \;\; v] \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \left[\varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \gamma_{xy}\right]^T$	$\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$	Forze di superficie in dir. x, y a $z=\pm h/2$ $f_x = f_y = 0; \quad z = \pm h/2$

Tab.3.1 – Variabili e ipotesi semplificative del problema elastico piano.

Semplificazioni				
Tensioni τ in direzione z nulle	σ_z costante rispetto a z	Scorrimenti fuori dal piano xy nulli	ε_z costante	w costante in x e y, lineare in z
$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{zy} = 0$	$\sigma_z = \sigma_z(x,y)$	$\gamma_{zx} = 0 \qquad \gamma_{zy} = 0$	$\varepsilon_z = C$	$w = Cz$

Tab.3.2 – Semplificazioni derivate dalle ipotesi semplificative nel problema elastico piano.

Ipotesi	Equazione	$\Rightarrow$	Semplificazione
$\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0$ $\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$ $f_x = f_y = 0; \quad z = \pm h/2$	$\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$ $\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$	$\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$ $\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$	$\tau_{zx} = 0$ $\tau_{zy} = 0$
$F_z = 0$ $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$	$\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$	$\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$	$\sigma_z = \sigma_z(x,y)$
$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$	$\gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \qquad \gamma_{zy} = \dfrac{1}{G}\tau_{zy}$	$\rightarrow$	$\gamma_{zx} = 0$ $\gamma_{zy} = 0$
$\mathbf{s}(x,y) = [u \;\; v]$ $\quad \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$	$\gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}$ $\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}$	$\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$	$w = w(z)$
$\boldsymbol{\sigma}(x,y) = \left[\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \tau_{xy}\right]^T$ $\sigma_z = \sigma_z(x,y)$	$\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$	$\varepsilon_z = \varepsilon_z(x,y)$	$\varepsilon_z = C$
$w = w(z)$	$\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$	$\varepsilon_z = \varepsilon_z(z)$	
$\varepsilon_z = C$	$\varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$	$\rightarrow$	$w = Cz$

Tab.3.3 – Ipotesi, equazioni, passaggi e semplificazioni nel problema elastico piano.

Fisicamente le (28-29) affermano che tutti i punti della sezione che si trovano alla stessa quota z si spostano in direzione verticale della stessa quantità e le sezioni parallele al piano xy si mantengono piane.

Le equazioni di congruenza interna (8) diventano:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}=0 \tag{3.30}$$

Riguardo alle condizioni al contorno sulle sezioni estreme a $z=\pm h/2$: le forze esterne in direzione xy devono essere nulle, per la definizione di problema piano data all'inizio del paragrafo,

$$f_x = f_y = 0; \quad z=\pm h/2 \tag{3.31}$$

mentre in direzione z si può ammettere l'esistenza di una distribuzione di forze (forze esterne o reazioni vincolari) variabili con x e y *autoequilibrate*, cioè agenti in direzione opposta sulle facce superiore e inferiore:

$$f_z = \pm\sigma_z; \quad z=\pm h/2 \tag{3.32}$$

In generale, considerando che $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$, il legame elastico espresso dalle (7) aggiunge al problema piano descritto dalle eq.(19-22) quattro equazioni utilizzabili nelle quali sono presenti anche le due funzioni incognite σ_z e ε_z; in generale le equazioni disponibili diventano 9 e le funzioni incognite 10, per cui il problema risulta definito solo se le funzioni σ_z o ε_z sono determinabili in modo indipendente dal problema piano o hanno una forma ipotizzabile a priori. I casi più importanti sono quelli nei quali si può ipotizzare rispettivamente $\varepsilon_z=0$ o $\sigma_z=0$ e risulta possibile scrivere 3 equazioni di compatibilità in funzione delle sole variabili nel piano nella forma delle (23,24).

Le ipotesi e semplificazioni del problema piano sono riassunte nelle tab.1-3.

L'eq.(28) indica che, in base all'impostazione del problema elastico piano, le deformazioni ε_z risultano ovunque costanti. Come già detto, tale ipotesi implica la costanza degli spostamenti verticali rispetto ad x e y (29), per la quale le sezioni parallele al piano xy, nonostante la deformazione, si mantengono piane, ovvero *non presentano ingobbamenti*. Effettivamente questa caratteristica è osservata sperimentalmente negli elementi la cui geometria e il sistema di carichi rispettano la definizione del problema piano, anche nel caso di elementi di grosso spessore nei quali eventuali deformazioni ε_z integrate nello spessore darebbero luogo a elevati spostamenti in corrispondenza delle sezioni di estremità.

Tenuto conto del fatto che, in generale, in base alla terza delle equazioni costitutive (7), le deformazioni ε_z sono causate direttamente dalle tensioni σ_z e, tramite l'effetto Poisson, dalla somma delle tensioni $\sigma_x+\sigma_y$, l'ipotesi (28) risulta verificata matematicamente nei seguenti casi:

1. se tutte le componenti di tensione sono costanti;
2. se la tensione σ_z compensa localmente le variazioni della somma $\sigma_x+\sigma_y$, come nel caso in cui esistono vincoli sulle sezioni di estremità che impediscono gli spostamenti in direzione z producendo forze f_z (32), o come accade nel caso dei cilindri di grosso spessore soggetti a variazione termica nello spessore;
3. se la tensione σ_z è nulla o costante e la somma $\sigma_x+\sigma_y$ è ovunque costante, come accade nel caso dei cilindri in pressione.

In pratica, se le tensioni sono tendenzialmente uniformi nel solido, si ricade nel caso 1, mentre, se le tensioni σ_x e σ_y presentano elevati gradienti, si genera un'azione mutua in direzione z per via dell'effetto Poisson tra le zone soggette alle tensioni più basse, che tendono a rimanere indeformate, e quelle più sollecitate; tale azione tende ad uniformare le deformazioni verticali nel piano xy e riconduce la situazione meccanica a quella descritta nel caso 2.

Le eq.(18) e (25) mostrano che le componenti di tensioni sono schematizzate come indipendenti da z, cioè $\sigma_x=\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y=\sigma_y(x,y)$, $\sigma_z=\sigma_z(x,y)$. Il caso di $\sigma_z(x,y)$ costante lungo z è fisicamente realizzabile in presenza di forze autoequilibrate agenti sulle sezioni estreme dell'elemento come quelle descritte dalla (32), anche dovute a vincoli che impediscano gli spostamenti verticali, in quanto, in assenza di esse, la tensione σ_z deve risultare nulla in corrispondenza delle facce di estremità per rispettare le equazioni di equilibrio al contorno. In assenza di tali forze l'ipotesi semplificativa è ancora valida nel caso di tensioni σ_z identicamente nulle, ipotesi spesso accettabile nel caso di elementi di piccolo spessore, e nel caso teorico di elementi di *spessore infinito*. Sempre in assenza di forze del tipo (32), nel caso di elementi di spessore grande, ma finito, l'ipotesi di costanza della σ_z rispetto a z può essere considerata valida *a opportuna distanza* dalle sezioni estreme, sfruttando il principio di equivalenza elastica.

Da notare che, nel caso degli elementi di piccolo spessore per i quali si accetta l'ipotesi di tensione σ_z identicamente nulla, l'ipotesi di $\varepsilon_z=C$ può essere rispettata esclusivamente se la somma $\sigma_x+\sigma_y$ è ovunque costante. In ogni caso, però, la piccolezza dello spessore rende gli spostamenti verticali w trascurabili ovunque e l'approssimazione accettabile.

Stato piano di deformazione e stato piano di tensione

Un caso particolare di problema elastico piano, generalmente identificato come *stato di deformazione piano*, è quello nel quale le deformazioni e, di conseguenza, gli spostamenti in direzione z sono nulli:

$$\varepsilon_z=0 \qquad w=0 \tag{3.33}$$

Ovviamente questa condizione rispetta le (28-29). La formulazione è corretta se vi sono vincoli nelle sezioni estreme che, esplicitando reazioni come in (32), impediscono gli spostamenti lungo z, da cui w=0. Si noti che spesso si definisce stato di deformazione piano anche il caso in cui la ε_z é costante rispetto a x e y, ipotesi che, secondo quanto espresso dalla (28), dovrebbe essere sempre verificata nei problemi piani. Spesso l'ipotesi di stato piano di deformazione è utilizzabile nel caso di elementi di grosso spessore nei quali zone soggette a modeste tensioni nel piano impediscono la deformazione in direzione z dovuta all'effetto Poisson delle zone soggette a tensioni maggiori.

In base all'ipotesi ε_z=0, le equazioni costitutive (7b) si semplificano dando luogo alle seguenti relazioni:

$$\sigma_x = E\frac{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \sigma_y = E\frac{\nu\varepsilon_x+(1-\nu)\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{3.34a-c}$$

In particolare, la posizione ε_z=0 nella terza delle (7b) fornisce un'equazione indipendente relativa alle tensioni σ_z generate dall'effetto Poisson:

$$\sigma_z=\nu E\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \tag{3.35}$$

Il termine di destra della (35) può essere ricavato facilmente sommando le (34a,b). Sostituendo la (35) nelle (7) si ottengono anche le equazioni costitutive deformazioni-tensioni per lo stato di deformazione piano. In base alle (23-24), le matrici di rigidezza e cedevolezza **R** e **C** assumono la seguente forma:

$$\mathbf{R}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Le soluzioni ottenute risultano indipendenti da z; si noti che per z=0, cioè nella sezione di simmetria, w=0 comunque. Nel caso di solido di spessore infinitamente lungo, ogni sezione può considerarsi di simmetria e la condizione w=0 risulta rispettata ovunque.

Altro caso particolare di problema elastico piano, generalmente identificato come *stato di tensione piano*, è quello nel quale anche le tensioni σ_z risultano nulle, cioè:

$$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \tag{3.37}$$

L'ipotesi di stato piano di tensione approssima bene il comportamento di elementi sottili caricate nel loro piano, essendo le forze (32) identicamente nulle. In questo caso, infatti, la condizione $\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ per $z=\pm h/2$ può essere estesa a tutto lo spessore, considerandone la limitata ampiezza.

In base all'ipotesi σ_z=0, le equazioni costitutive (7) si semplificano dando luogo alle seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right) \qquad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{3.38a-c}$$

In particolare, la posizione σ_z=0 nella terza delle (7) fornisce un'equazione indipendente relativa alle deformazioni ε_z prodotte dall'effetto Poisson:

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right) \tag{3.39}$$

Il termine di destra della (39) può essere ricavato facilmente sommando le (38a,b). Sostituendo la (39) nelle (7b) si ottengono anche le equazioni costitutive tensioni-deformazioni per lo stato di tensione piano. In base alle (23-24), le matrici di rigidezza e cedevolezza **R** e **C** assumono la seguente forma:

$$\mathbf{R}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix} \tag{3.40}$$

In generale l’espressione di ε_z (39), non verifica la condizione espressa dalla (28), cioè $\varepsilon_z=C$. L’ipotesi di stato di tensione piano fornisce una soluzione approssimata che soddisfa l’equilibrio, ma non la congruenza. In realtà si può avere $\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ solo sulle superfici esterne del solido scariche, cioè per $z=\pm h/2$, e i valori effettivi lungo z vengono trascurati. In questa ipotesi si trascurano anche le variazioni lungo z delle altre componenti di tensione considerandone il valore medio.

In tab.4 sono riportate le forme complete assunte dalle equazioni costitutive nei due casi.

Stato di deformazione piano $\varepsilon_z=0$		**Stato di tensione piano** $\sigma_z=0$	
$\sigma_z=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$		$\varepsilon_z=-\dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)$	
$\varepsilon_x=\dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y\right]$	$\sigma_x=E\dfrac{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right)$	$\sigma_x=E\dfrac{\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{1-\nu^2}$
$\varepsilon_y=\dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x\right]$	$\sigma_y=E\dfrac{(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right)$	$\sigma_y=E\dfrac{\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x}{1-\nu^2}$
$\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}$	$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}$	$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$

Tab3.4 – Le equazioni costitutive nei casi di stato di deformazione piano e stato di tensione piano.

Soluzione del problema piano nelle tensioni

Le formulazioni relative a stato di deformazione piano e stato di tensione piano si basano sulle stesse equazioni di equilibrio e di congruenza, mentre le equazioni costitutive (34,35) e (38,39) differiscono per i due casi.

Nel caso della formulazione alle tensioni, osservando che le tensioni incognite sono tre e che sono già disponibili le due equazioni di equilibrio (19), si può pensare di ottenere una terza equazione nelle tensioni utilizzando l’equazione di congruenza interna (30). In particolare, è possibile sostituire le deformazioni presenti nella (30) con le tensioni ottenute dalle equazioni costitutive (34,35) e le inverse delle (38,39) per i due casi del problema piano.

Per stato di deformazione piano si ottiene:

$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\left[\frac{\partial^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)}{\partial y^2}\right]=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{3.41}$$

Sommando ad ambo i membri la quantità

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \tag{3.42}$$

la relazione diviene:

$$\nabla_2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\right) \tag{3.43}$$

Operando analogamente, per stato di tensione piano invece si ottiene

$$\nabla_2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\right) \tag{3.44}$$

Le due relazioni differiscono solo per le costanti presenti nei termini a destra, legate al coefficiente di Poisson ν.

Derivando le equazioni di equilibrio (19) rispettivamente rispetto ad x e y e sommando si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \tag{3.45}$$

Sostituendo la parte a destra della (45) nelle (43) e (44) si ottiene:

$$\nabla_2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-k\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \tag{3.46}$$

con k nei due casi dato da:

$$k = \frac{1}{1-\nu} \qquad\qquad k = 1+\nu \tag{3.47,48}$$

Nel caso di forze di volume nulle o costanti il secondo membro della (46) si annulla e la soluzione è identica in entrambi i casi.

Come detto, si può parlare di problema piano governato dalle equazioni di equilibrio, dall’equazione di congruenza di Michell-Beltrami e dalle equazioni di equilibrio al contorno. Nel caso di forze di volume nulle o costanti si ha:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{3.49}$$

$$\nabla_2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \tag{3.50}$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = f_x \qquad\qquad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \tag{3.51}$$

Le componenti trasversali ε_z e σ_z saranno differenti per i due casi e date dalle eq.(33) e (35) per deformazione piana e (38) e (39d) per tensione piana.

La funzione di Airy

Introducendo una funzione $\varphi(x,y)$ detta *funzione di sforzo* o *funzione di Airy*, tale che

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x} - F_x y - F_y x \tag{3.52}$$

La (50) si trasforma in

$$\nabla_4 \varphi = 0 \tag{3.53}$$

essendo l’operatore doppio di Laplace così definito:

$$\nabla_4(\ ) = \nabla_2\left(\nabla_2(\ )\right) = \left(\frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4(\ )}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\ )}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial y^4} \tag{3.54}$$

Una funzione $\varphi(x,y)$ che soddisfi la (53) è detta *biarmonica*. La soluzione del problema elastico può essere ricondotto alla determinazione della particolare funzione di Airy che soddisfa le condizioni al contorno del caso analizzato.

Tipici esempi di funzioni biarmoniche sono tutti i polinomi di grado inferiore al 4°, ad esempio i seguenti

$$\varphi_2(x,y) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 \qquad\qquad \sigma_x = 2a_3,\ \sigma_y = 2a_1,\ \tau_{xy} = -a_2 \tag{3.55a-d}$$

$$\varphi_3(x,y) = b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3 \qquad \sigma_x = 2b_3 y + 6b_4 y,\ \sigma_y = 6b_1 x + 2b_2 y,\ \tau_{xy} = -2\left(b_2 x + b_3 y\right) \tag{3.56a-d}$$

compresi tutti quelli ottenibili da essi ponendo a 0 una o più costanti.

Diversi polinomi di grado superiore sono funzioni biarmoniche, come, ad esempio, il seguente

$$\varphi_4(x,y) = c_1 x^4 + c_2 x^3 y - 3\left(c_1 + c_5\right) x^2 y^2 + c_4 x y^3 + c_5 y^4 \tag{3.57}$$

nel quale il coefficiente c_3 deve essere posto come c_3=c_1+c_5, come si vede nella (57), affinché la (53) risulti verificata.

Tensioni termiche

Una variazione di temperatura provoca nei solidi elastici isotropi delle deformazioni in quanto ogni elementino di materiale tende ad espandersi in tutte le direzioni in misura proporzionale alla variazione di temperatura, secondo la classica relazione $\varepsilon_{x,y,z}=\alpha(T-T_0)=\alpha\Delta T$, considerando $\Delta T=\Delta T(x,y)$ funzione delle variabili x e y.

In presenza di variazioni di temperatura le prime tre equazioni costitutive (7) e le (39a,b,d) del caso di stato piano di tensione devono essere modificate sommando il termine $\alpha\Delta T$:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z\right)+\alpha\,\Delta T \quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x-\nu\sigma_z\right)+\alpha\,\Delta T \quad \varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\nu\sigma_y-\nu\sigma_x\right)+\alpha\,\Delta T \tag{3.58}$$

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right)+\alpha\,\Delta T \qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right)+\alpha\,\Delta T \qquad \varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\alpha\,\Delta T \tag{3.59}$$

Anche la tensione in direzione z del caso di stato di deformazione piano (35) deve essere modificata per includere l’effetto della deformazione termica impedita

$$\sigma_z=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)=\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)-E\alpha\,\Delta T \tag{3.60}$$

Infine l’equazione di congruenza (50) si modifica in

$$\nabla_2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=E\,\alpha\,\nabla_2\,\Delta T \tag{3.61}$$

La (61) mostra che se il corpo è libero da vincoli o vincolato in modo isostatico, una variazione uniforme di temperatura (ΔT=cost) o una variazione tale da creare un gradiente di temperatura lineare ($\Delta T=c_1\,x+c_2\,y$) non danno luogo ad uno stato tensionale. Infatti, in tal caso, il termine a destra della (61) si annulla.

EQUAZIONI DEL PROBLEMA ELASTICO

Modulo di elasticità trasversale - Costanti di Lamè (G e λ)

$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}=\dfrac{E}{2}\dfrac{1-\nu}{1-\nu^2}$	$\lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$E=G\dfrac{3\lambda+2G}{\lambda+G}$	$\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+G)}$

Equazioni di equilibrio indefinite e al contorno

$\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0$	$\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0$	$\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0$
$\sigma_x n_x+\tau_{yx}n_y+\tau_{zx}n_z=f_x$	$\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{zy}n_z=f_y$	$\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z=f_z$

Equazioni di compatibilità

$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$	$\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}$	$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$	$\gamma_{yz}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}$	$\gamma_{zx}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$

Dilatazione cubica	**Deformazione termica**
$\varepsilon_V=\dfrac{dV}{V}=3\Theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)$	$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\alpha(T-T_0)=\alpha\,\Delta T$

Equazioni di congruenza interna

$\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$	$\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}$	$\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}$
$2\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$	$2\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$	$2\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$

Equazioni costitutive deformazioni - tensioni

$\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z\right)$	$\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x-\nu\sigma_z\right)$	$\varepsilon_z=\dfrac{1}{E}\left(\sigma_z-\nu\sigma_y-\nu\sigma_x\right)$
$\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}$	$\gamma_{yz}=\dfrac{1}{G}\tau_{yz}$	$\gamma_{zx}=\dfrac{1}{G}\tau_{zx}$

Equazioni costitutive tensioni - deformazioni

$\sigma_x=E\dfrac{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\sigma_y=E\dfrac{(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\sigma_z=E\dfrac{(1-\nu)\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$	$\tau_{yz}=G\,\gamma_{yz}$	$\tau_{zx}=G\,\gamma_{zx}$

Equazioni costitutive tensioni - deformazioni espresse mediante le costanti di Lamè

$\sigma_x=(\lambda+2G)\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z$	$\sigma_y=(\lambda+2G)\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_z$	$\sigma_z=(\lambda+2G)\varepsilon_z+\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y$
$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$	$\tau_{yz}=G\,\gamma_{yz}$	$\tau_{zx}=G\,\gamma_{zx}$

Equazioni di Navier

$G\left[\nabla_2 u+\dfrac{3}{1-2\nu}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}\right]+F_x=0$	$G\left[\nabla_2 v+\dfrac{3}{1-2\nu}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}\right]+F_y=0$	$G\left[\nabla_2 w+\dfrac{3}{1-2\nu}\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\right]+F_z=0$

Equazioni di Michell-Beltrami

$\nabla_2\sigma_x+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0$	$\nabla_2\sigma_y+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$	$\nabla_2\sigma_z+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0$
$\nabla_2\tau_{xy}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=0$	$\nabla_2\tau_{xz}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}=0$	$\nabla_2\tau_{yz}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=0$

Operatori di Laplace

$\nabla_2(\ )=\dfrac{\partial^2(\ )}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2(\ )}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$	$\nabla_4(\ )=\nabla_2\left(\nabla_2(\ )\right)=\dfrac{\partial^4(\ )}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4(\ )}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4(\ )}{\partial y^4}$

PROBLEMA ELASTICO PIANO

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0$	$\sigma_x n_x+\tau_{yx} n_y=f_x$	$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$	$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$	$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$
$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_y=0$	$\tau_{xy} n_x+\sigma_y n_y=f_y$	$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$		

Stato di deformazione piano $\varepsilon_z=0$		Stato di tensione piano $\sigma_z=0$	
$\sigma_z=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$		$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$	
Equazioni costitutive		**Equazioni costitutive**	
$\varepsilon_x=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y\right]$	$\sigma_x=E\frac{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)$	$\sigma_x=E\frac{\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y}{1-\nu^2}$
$\varepsilon_y=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x\right]$	$\sigma_y=E\frac{(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)$	$\sigma_y=E\frac{\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x}{1-\nu^2}$
$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$	$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$	$\tau_{xy}=G\,\gamma_{xy}$

Equazione di congruenza interna nelle tensioni (Michell Beltrami)

$\nabla_2(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$	$\nabla_2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$

Funzione di Airy

$\nabla_4\varphi=0$	$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$	$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$	$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}-F_x y-F_y x$

LAVORO DI DEFORMAZIONE

Lavoro di deformazione ad unità di volume

$$l=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}=\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

$$l=\tfrac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3\right)$$

$$l=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\sigma}=\tfrac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)\right]+\tfrac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)$$

$$l=\tfrac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\right]$$