8. TRAVI CURVE

Flessione Semplice

La curvatura di una trave non può essere trascurata quando la lunghezza del raggio di curvatura della fibra baricentrica è piccola, cioè paragonabile alla dimensione trasversale della trave stessa. In questo caso la distribuzione delle tensioni assiali dovute al momento flettente non risulta lineare e l’asse neutro non è baricentrico.

Nel seguito si fa riferimento a travi a *curvatura semplice*, per le quali il piano di curvatura xz è anche piano di simmetria delle sezioni trasversali e si ipotizza che i carichi flettenti agiscano nel piano di curvatura stesso.

Per caratterizzare geometricamente le travi curve (fig.1) si deve anzitutto stabilire un verso di percorrenza sulla linea l, costituita dalle posizioni dei baricentri delle sezioni, mostrata in fig.1 con linea tratto-punto. Quindi si considerano un sistema di coordinate polari ρ-θ, con origine nel centro di curvatura C della trave e un sistema di coordinate n-z nel piano della sezione della trave, avente l’asse n coincidente con l’asse neutro e l’asse z ortogonale ad esso, passante per il baricentro della sezione, traccia del piano di simmetria della trave. In particolare, con riferimento alla fig.1, siano:

- z distanza della generica fibra dall’asse neutro,
- z_g distanza del baricentro della sezione dall’asse neutro,
- ρ raggio di curvatura della generica fibra variabile rispetto a z,
- ρ_n raggio di curvatura della fibra in corrispondenza dell’asse neutro,
- ρ_g raggio di curvatura della fibra in corrispondenza dell’asse baricentrico,
- θ posizione angolare (anomalia) della generica sezione.

I raggi di curvatura sono misurati a partire dal centro di curvatura della trave C, di posizione nota, e devono essere considerati con il loro segno. Il segno dei raggi di curvatura dei punti appartenenti ad una sezione è costante e coincide con quello dell’incremento dell’angolo θ lungo la direzione positiva di l. Tale variazione viene considerata positiva se la sezione a monte deve ruotare in senso antiorario per sovrapporsi a quella a valle, come in fig.1. Tra le coordinate rispetto all’asse neutro e quelle rispetto al centro di curvatura (fig.1) sussiste la seguente relazione:

$$z = \rho - \rho_n \tag{8.1}$$

Nel caso di flessione semplice sia $M=M_y$ il momento che agisce su una sezione nel piano xz, considerato positivo se tende le fibre in basso secondo la classica convenzione. Le tensioni normali alla sezione hanno risultante nullo e momento risultante pari al momento flettente agente secondo le note espressioni:

$$N = \int_A \sigma \, dA = 0 \qquad\qquad M = \int_A z\,\sigma \, dA \tag{8.2,3}$$

Si consideri una fibra posta tra due sezioni a distanza angolare $d\theta$, avente distanza ρ dal centro di curvatura e z dall’asse neutro, la cui lunghezza iniziale è $l=\rho d\theta$ (fig.1). Dopo la deformazione le sezioni della trave ruotano della quantità $\phi(\theta)$ attorno all’asse neutro in corrispondenza del quale la fibra mantiene lunghezza inalterata. Le rotazioni devono essere considerate positive se antiorarie come in fig.1.

La rotazione relativa delle sezioni è $d\phi=\phi(\theta+d\theta)-\phi(\theta)$ e il conseguente allungamento della fibra posta a distanza z dall’asse neutro risulta $dl=zd\phi$; la deformazione della fibra è data dalla seguente espressione:

$$\varepsilon = \frac{d\,l}{l} = \frac{d\phi}{d\theta}\frac{z}{\rho} = \frac{d\phi}{d\theta}\frac{z}{\rho_n + z} \tag{8.4}$$

Dalle (3) e (4) è possibile ricavare la seguente relazione:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{d\phi}{d\theta}\frac{z}{\rho} \tag{8.5}$$

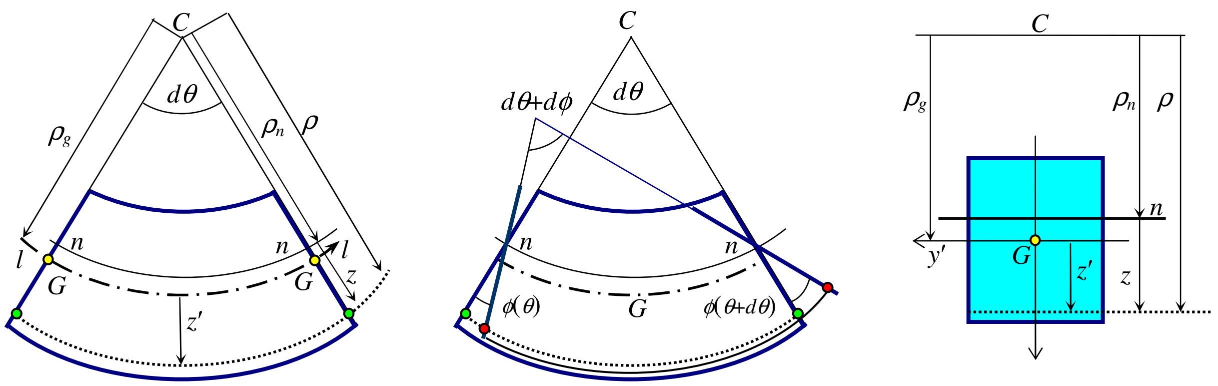

Fig.1 – Travi curve: a sinistra il sistema di riferimento, al centro rotazioni delle sezioni ed allungamento della generica fibra, a destra la sezione.

che lega la tensione in un punto alla distanza z dall'asse neutro, alla curvatura ρ nel punto stesso e alla funzione $d\phi/d\theta$, derivata della funzione delle rotazioni rispetto all'anomalia; questa funzione descrive la deformazione flessionale della trave curvilinea in modo analogo alla curvatura k per le travi rettilinee. La (5) mostra che le tensioni non variano in modo lineare con z poiché anche la curvatura ρ dipende da z. Nelle travi rettilinee l'analoga relazione è la seguente

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{d\phi}{dx}z \tag{8.6a}$$

che può essere determinata allo stesso modo con il quale si è operato per la (5), oppure utilizzando la formula di Navier per le tensioni e la relazione tra il momento flettente e la curvatura k della trave:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z \qquad\qquad k_y = -w'' = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_y}{EI_y} \tag{8.6b,c}$$

Determinazione dell'asse neutro
Anche nel caso di flessione semplice, l'asse neutro non è baricentrico, infatti dalle (2) e (5) si ottiene

$$N = E\frac{d\phi}{d\theta}\int_A \frac{z}{\rho}\, dA = 0 \tag{8.7}$$

che è verificata per

$$\int_A z/\rho \; dA = 0 \tag{8.8}$$

e non per $\int_A z\; dA = 0$ come nel caso delle travi rettilinee.

La posizione dell'asse neutro può essere ricavata dalla (8):

$$\int_A \frac{z}{\rho}\, dA = \int_A \frac{\rho-\rho_n}{\rho} dA = -\rho_n\int_A \frac{1}{\rho} dA + \int_A dA = 0 \tag{8.9}$$

e può essere ottenuta risolvendo il seguente integrale che dipende dalla forma della sezione

$$\rho_n = \frac{A}{\int_A 1/\rho\; dA} \tag{8.10}$$

È possibile dimostrare che l'asse neutro risulta sempre spostato dalla parte della concavità rispetto al baricentro.

Distribuzione delle tensioni
Per determinare l'andamento delle tensioni normali di flessione sulla sezione è necessario mettere in relazione la funzione $d\phi/d\theta$ con il momento stesso, ottenendo una relazione simile alla (6c) per le travi rettilinee, e utilizzare l'equazione ottenuta in congiunzione alla (5). Utilizzando la (3) e la (5) si può scrivere:

$$M = \int_A z\sigma dA = E\frac{d\phi}{d\theta}\int_A \frac{z^2}{\rho} dA \tag{8.11}$$

ricordando la (1) si ottiene

$$\frac{z^2}{\rho} = z\frac{\rho-\rho_n}{\rho} = z - \rho_n\frac{z}{\rho} \tag{8.12}$$

da cui

$$M = E\frac{d\phi}{d\theta}\left(\int_A z dA - \rho_n\int_A \frac{z}{\rho} dA\right) \tag{8.13}$$

Il primo degli integrali fornisce

$$\int_A z\, dA = A\, z_g \tag{8.14}$$

essendo z_g distanza tra il baricentro della sezione e l'asse neutro, il secondo è nullo per la (7). La (13) diventa:

$$M = E\frac{d\phi}{d\theta}A\,z_g \tag{8.15}$$

Questa relazione corrisponde alla (6c) per le travi rettilinee. Dalla (15) si può scrivere

$$E\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{M_y}{A\,z_g} \tag{8.16}$$

Infine, sostituendo la (16) nell'espressione della tensione (5), si ottiene

$$\sigma = \frac{M}{A\,z_g}\frac{z}{\rho} = \frac{M}{A\,z_g}\frac{z}{\rho_n + z} \tag{8.17}$$

L'andamento della tensione risulta iperbolico. Ai bordi superiore ed inferiore, si ottiene rispettivamente

$$\sigma = \frac{M}{A\,z_g}\frac{z_s}{\rho_s} \qquad\qquad \sigma = \frac{M}{A\,z_g}\frac{z_i}{\rho_i} \tag{8.18,19}$$

In base alla scelta del sistema di assi effettuata e riportata in fig.1, si osserva che i termini z_g e ρ hanno sempre lo stesso segno, infatti, poiché l'asse neutro si sposta sempre dalla parte della concavità rispetto al baricentro, se quest'ultima è verso l'alto si ha ρ>0 per definizione e z_g>0 perché l'asse neutro si colloca sopra l'asse baricentrico e l'asse z è rivolto verso il basso. Questo implica che z_g e ρ possono essere introdotti nella formula in valore assoluto senza che il segno della tensione, determinato dai segni del solo momento M e della posizione z, sia influenzato.

In fig.2 è riportato l'andamento delle tensioni nel caso di sezione rettangolare, concavità rivolta verso l'alto e momento agente positivo. Si nota come la distribuzione delle tensioni sia iperbolico e come la tensione massima si raggiunga al bordo più vicino all'asse neutro, contrariamente a quanto accade nel caso delle travi rettilinee con andamento lineare della tensione. Si noti anche che, in base a quanto detto, la tensione massima si trova sempre sul bordo *più vicino al centro di curvatura*.

Distribuzione delle tensioni in presenza di sforzo normale

Nel caso di sforzo normale puro la distribuzione delle tensioni è costante e la (1) si trasforma come segue

$$N = \int_A \sigma\, dA = \sigma_0 A \tag{8.20}$$

Una distribuzione di tensioni costante ha una risultante N che passa per il baricentro. Infatti, il punto di applicazione della risultante della distribuzione delle tensioni è un punto rispetto al quale essa ha momento nullo; valutando il momento della distribuzione delle σ rispetto ad un asse generico e imponendo che esso sia nullo si ottiene

$$M = \int_A z'\sigma dA = \sigma_0 \int_A z' dA = 0 \tag{8.21}$$

l'integrale a destra si annulla per qualunque asse z' baricentrico. Si sottolinea che, affinché una forza N dia luogo a una distribuzione di tensioni uniforme, deve avere il punto di applicazione nel baricentro e non nel punto di intersezione tra l'asse di simmetria e l'asse neutro della flessione ottenuto con la (10). Se la forza N agisce a distanza a dal baricentro dà luogo ad una presso-flessione per la quale la tensione può essere ottenuta come

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{A}\frac{a}{z_g}\frac{z}{\rho} = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{a}{z_g}\frac{z}{\rho}\right) \tag{8.22}$$

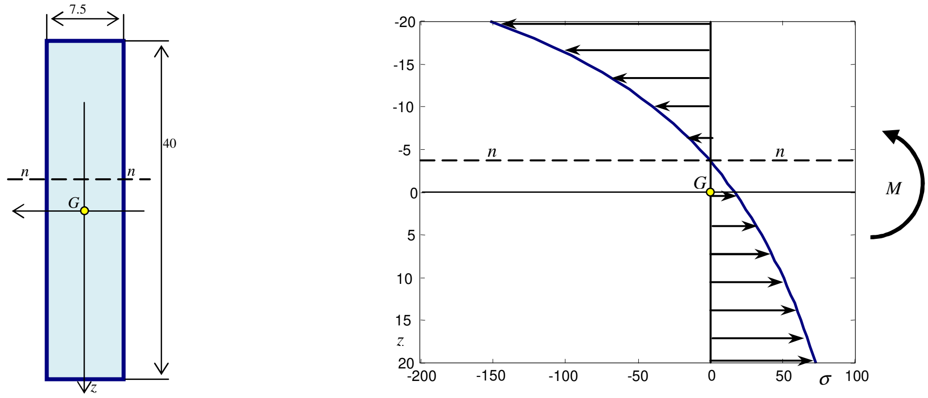

Fig.8.2 - Tensioni in una sezione rettangolare con b=7.5mm, h=40mm, ρ_g=40mm (concavità rivolta verso l'alto), in presenza di momento M=200000 Nmm (positivo). Si ottiene z_f=3.6 mm.

Spostamenti e rotazioni

Il legame tra spostamenti e rotazioni delle sezioni e caratteristiche di sollecitazione delle travi curve è molto più complesso rispetto a quello delle travi rettilinee. A titolo di esempio si fa notare che una forza *N* con retta d'azione passante per il baricentro della sezione provoca una rotazione della sezione con centro di rotazione nel centro di curvatura della trave, una forza *N* con retta d'azione nel piano di curvatura e passante dall'asse neutro provoca una semplice traslazione, una forza *N* con retta d'azione nel piano di curvatura e passante per il centro di curvatura della trave provoca una rotazione attorno all'asse baricentrico.

Distribuzione delle tensioni rispetto ad assi baricentrici

L'espressione della tensione (16) può essere riscritta riferendo le distanze rispetto alla fibra baricentrica invece che a quella dell'asse neutro. Siano

- ρ_g raggio di curvatura dell'asse baricentrico,
- z' distanza della generica fibra dall'asse baricentrico (fig.1).

La relazione della tensione in questo riferimento è

$$\sigma = \frac{M}{A\rho_g}\left[\frac{1}{\chi}\frac{z'}{\rho_g - z'} - 1\right] \tag{8.23}$$

essendo

$$\chi = \frac{1}{A}\int_A \frac{z'}{\rho_g - z'}dA \tag{8.24}$$

Nel caso di sezione circolare di raggio *R*, in particolare, si ottiene

$$\sigma = \frac{M}{A\rho_g}\left[\frac{1}{\tan\left(\mathrm{sen}^{-1} R/\rho_g\right)}\frac{z'}{\rho_g - z'} - 1\right] \tag{8.25}$$

Posizione dell'asse neutro per alcune sezioni

In questo paragrafo ρ_s, e ρ_i sono i raggi di curvatura della fibra superiore ed inferiore della sezione (rispetto al centro di curvatura) ed *A* è l'area della sezione. Per sezione *rettangolare* il denominatore della (10) diventa

$$\int_A \frac{1}{\rho}dA = \int_{\rho_i}^{\rho_s}\frac{1}{\rho}b\,d\rho = b\int_{\rho_i}^{\rho_s}\frac{d\rho}{\rho} = b\,\ln \rho_s/\rho_i \tag{8.26}$$

nella quale *b* ed *h* sono la larghezza e l'altezza della sezione. Risolvendo si ottiene

$$\rho_n = \frac{h}{\ln\left(\rho_s/\rho_i\right)} \tag{8.27}$$

Per sezione *a T* si ottiene

$$\rho_n = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1\ln\left(\rho_s/\rho_i\right) + b_2\ln\left(\rho_s/\rho_i\right)} \tag{8.28}$$

nella quale b_1, b_2 ed h_1, h_2 sono la larghezze e le altezze dei rettangoli che costituiscono la sezione, ρ_{si} è il raggio di curvatura della fibra inferiore per il rettangolo superiore ed inferiore per il rettangolo superiore.

Per sezione *trapezoidale* si ottiene

$$\rho_n = \frac{A\,h}{\left(b_i\rho_s - b_s\rho_i\right)\,\ln\left(\rho_s/\rho_i\right) - \left(b_i - b_s\right)h} \tag{8.29}$$

nella quale b_i e b_s ed *h* sono le basi inferiore e superiore e l'altezza della sezione.

Per sezione *triangolare*, si ottiene

$$\rho_n = \frac{A\,h}{b_i\rho_s\ln\left(\rho_s/\rho_i\right) - b_i h} \qquad \rho_n = \frac{A\,h}{-b_s\rho_i\ln\left(\rho_s/\rho_i\right) + b_s h} \tag{8.30}$$

nella quale *b* ed *h* sono base e l'altezza della sezione.

Per sezione *circolare* di diametro *d* si ottiene

$$\rho_n = \frac{d^2}{4\left(2\rho_g - \sqrt{4\rho_g^2 - d^2}\right)} \tag{8.31}$$