

Università degli Studi di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica

Settore scientifico-disciplinare MAT04



TESI DI DOTTORATO

***ANALISI DI PROCESSI DI PIANIFICAZIONE E SVILUPPO DI
STRATEGIE RISOLUTIVE IN PROBLEMI
DI TEORIA DEI GIOCHI***

Francesca Martignone

XVIII ciclo Dottorato in Matematica Pura ed Applicata
Università degli Studi di Genova

Direttore di tesi:

Prof. Paolo Boero

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Genova

INDICE

Sunto.....	7
Premessa sulla natura della ricerca condotta.....	8
Introduzione.....	9
CAPITOLO 1: Teorie di riferimento e strumenti di analisi	11
1.0 Alcune ricerche sul problem solving	11
1.1 Strumenti generali di analisi dei processi legati alle attività di problem solving	13
1.1.1 Frame e schemi	13
1.1.2 Concetti	15
1.1.3 Tempi interni	16
1.2 La Teoria dei Giochi	19
1.3 Modelli proposti dalla Teoria di Giochi	20
1.4 Teorie di riferimento per la Teoria dei Giochi	22
1.4.1 Behavioural Game Theory	22
1.4.2 Ricerche di C. Camerer	23
1.4.3 Cognitive Hierarchy Model	24
1.4.4 Dalle sperimentazioni di Camerer al nostro lavoro di ricerca	25

CAPITOLO 2: Metodologia27

2.1 Scelta del campo di indagine	27
2.2 Domande iniziali di ricerca relative al nuovo campo di indagine	28
2.3 Scelta del metodo di indagine	28
2.4 Scelta iniziale dei soggetti	30
2.5 Scelta iniziale dei problemi	31
2.5.1 Primo nucleo di problemi scelti	31
2.5.2 Possibili soluzioni dei problemi scelti	33
2.5.2.1 Problemi 1 e 2	33
2.5.2.2 Problema 3	35
2.5.2.3 Problema 4	35

CAPITOLO 3: Prime analisi37

Fase 1:

3.1 Prime analisi svolte con i metodi derivati dalla tesi di laurea	37
3.2 L'intervista di Sam: un protocollo significativo	45
3.3 Limiti delle analisi svolte	49

Fase 2:

3.4 Nuova impostazione dell'analisi	50
3.5 Nuova analisi del protocollo di Sam	51
3.6 Nodi di ricerca emersi dall'analisi affinata del protocollo di Sam	65
3.7 Ulteriore affinamento delle domande di ricerca	67
3.8 Informazioni provenienti dagli studi di Camerer	68
3.9 Scelta finale dei problemi	70
3.10 Scelta finale dei soggetti	71

CAPITOLO 4: Affinamento degli strumenti di analisi73

4.1 Relazioni tra le differenti componenti dei processi esplorativi73

4.2 Esplorazioni Temporali: una “nuova” classificazione74

4.2.1 Processi esplorativi riscontrati nei protocolli analizzati74

4.2.2 Componenti dei processi esplorativi strutturate dalle conoscenze provenienti dal background culturale dei soggetti74

4.2.3 Componenti dei processi esplorativi che costruiscono (o ricostruiscono) situazioni temporalizzate76

CAPITOLO 5: Analisi dei dati sperimentali79

5.1 Analisi risoluzioni del Beauty contest game79

5.1.1 Risoluzioni di Matematici che hanno affrontato il Beauty contest game79

5.1.2 Risoluzioni di non-matematici che hanno affrontato il Beauty contest game.....116

5.1.3 Analogie e differenze tra i comportamenti dei soggetti intervistati146

5.2 Comportamenti risolutivi nel secondo problema149

5.2.1 Commenti sulle risoluzioni del problema sulla pubblicità149

5.2.2 Analogie e differenze nelle risoluzioni150

5.2.2.1 Non matematici150

5.2.2.2 Matematici154

CAPITOLO 6: Risultati e conclusioni165

6.1 Conclusioni165

6.2 Ipotesi di ricerca elaborate167

CAPITOLO 7: Prospettive di ricerche ulteriori169

7.1 Allargamento del campo di indagine: primi confronti con un problema di modellizzazione di una situazione di coordinamento di moti169

7.2 Il “tempo” nel problema di coordinamento dei moti175

7.3 Implicazioni didattiche176

Appendici179

I. Sviluppi della teoria di Camerer179

I.1 Esperimenti su altri problemi179

I.2 Neuroeconomia181

I.2.1 La Behavioural Economics e le Neuroscienze181

I.2.2 Neuroeconomia e Teoria dei Giochi184

II. La Teoria di Tulving187

II.1 Memoria episodica e memoria semantica187

II.2 Influenze di questa teoria sulla ricerca189

III. Prime sperimentazioni non completamente sfruttate193

Bibliografia213

Allegati217

Sbobinate delle interviste ed elaborati scritti, prodotti durante queste.

Sunto

In questa ricerca abbiamo studiato come la conoscenza di teorie e strumenti provenienti dalla Matematica possa influenzare le strategie risolutive sviluppate durante attività di problem solving (con particolare attenzione per lo studio dei processi di esplorazione) in Teoria dei Giochi.

Questa ricerca ha portato ai seguenti risultati:

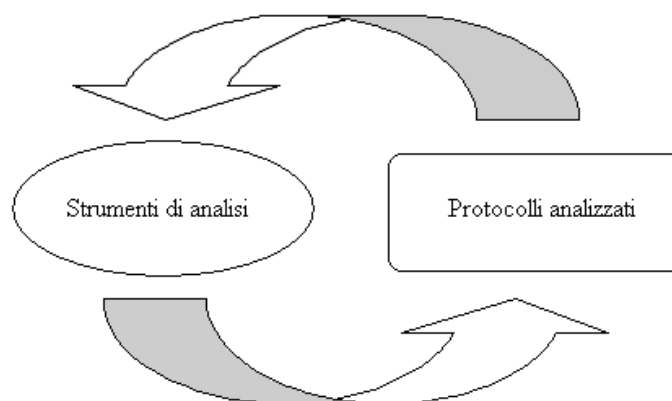
- *un **affinamento degli strumenti di analisi** delle dinamiche mentali nei processi esplorativi, rispetto a quelli usati nella tesi di laurea (Martignone, 2002);*
- ***l'individuazione di comportamenti ricorrenti**, legati alla gestione delle componenti temporali dei processi di esplorazione, riscontrati durante le attività di problem solving analizzate;*
- ***la generazione di ipotesi** (e i primi riscontri sperimentali per esse) su come e perché i modelli matematici influiscono sulla generazione/gestione di tali processi esplorativi.*

*Questo lavoro s'inserisce nell'ambito della **ricerca di base in Didattica della Matematica**: infatti, si collega alla problematica dei cambiamenti dei modi di ragionare e di risolvere problemi indotti dall'apprendimento di specifici contenuti matematici (nello specifico, di modelli matematici). Tale problematica è importante per le ricadute sul rinnovamento dei curricula di matematica, in quanto pone la questione dei contenuti dell'insegnamento e dei modi di insegnarli in relazione alla costruzione dei prerequisiti per attività successive di problem solving.*

Premessa sulla natura della ricerca condotta

Il presente elaborato è organizzato secondo i diversi approfondimenti del tema di ricerca realizzati durante il lavoro di tesi.

Per affrontare questa ricerca (generazione e costruzione di ipotesi in un contesto ancora poco esplorato e studiato come quello indagato in questa tesi), abbiamo scelto un tipo di approccio caratteristico delle indagini sperimentali in diversi settori delle scienze umane (psicologia, sociologia, didattica...) condotte con metodi qualitativi con lo scopo di generare ipotesi di ricerca. Nel corso dell'indagine le domande di ricerca sono state progressivamente affinate attraverso il confronto con la letteratura e con i dati sperimentali raccolti. Questo percorso potrebbe essere sintetizzato rappresentandolo metaforicamente come un processo ciclico: la continua tensione tra l'insieme degli strumenti di analisi costruito (e in costruzione) e l'insieme dei dati raccolti ha portato ad un progressivo affinamento degli elementi appartenenti al primo insieme. Un singolo ciclo del processo sopra descritto è rappresentato nella seguente figura:



Questa impostazione metodologica della ricerca è stata esplicitata nella stesura del lavoro di tesi in quanto elemento caratterizzante e strutturante del lavoro di ricerca svolto.

Introduzione

L'analisi dei processi risolutivi dei problemi matematici (in particolare nel campo delle matematiche applicate) risulta di notevole interesse per le informazioni che fornisce sulle strategie risolutive ricorrenti in certe classi di problemi, sulle ragioni di difficoltà e di blocco, sulle relazioni tra l'esperienza del soggetto in un certo ambito e i suoi modi di affrontare i problemi relativi a tale ambito, ecc. A loro volta, le informazioni raccolte possono essere utilizzate sia per modellizzare i processi risolutivi analizzati (aumentando le conoscenze teoriche sul problem solving matematico in generale, o in specifici ambiti delle matematiche applicate) che per aiutare gli insegnanti nel loro lavoro e rinnovare i curricula di insegnamento al fine di preparare meglio gli studenti alle attività di problem solving in campo matematico.

In questo quadro, la presente tesi di dottorato si occupa di un aspetto particolare del problem solving matematico per un ambito particolare di problemi. Ci siamo occupati delle relazioni tra l'esperienza culturale pregressa del soggetto e i suoi processi risolutivi, con particolare attenzione alla fase di planning e (in essa) ai processi esplorativi. I problemi considerati sono problemi di interazione strategica (di cui si occupa la Teoria dei Giochi) in quanto per essi è possibile distinguere tra risolutori che hanno conoscenze specifiche riguardanti tale teoria e risolutori che non la conoscono, e tra risolutori con background matematico avanzato e risolutori con background matematico di livello scuola secondaria superiore.

Al fine di studiare le relazioni tra l'esperienza culturale pregressa del soggetto e i suoi processi risolutivi nei problemi di interazione strategica è stato necessario mettere a punto progressivamente (attraverso successivi affinamenti delle domande di ricerca e degli strumenti per rispondere a tali domande) un insieme di strumenti coordinati di analisi dei processi risolutivi in grado di evidenziare l'incidenza in essi di determinate conoscenze e comportamenti appresi. Di notevole aiuto per non partire da zero in tale lavoro di messa a punto sono state da un lato alcune teorie e strumenti prodotti dalla ricerca in campo cognitivo e didattico negli ultimi decenni, dall'altro alcuni risultati sperimentali e teorici prodotti in un ambito prossimo alla Teoria dei Giochi classica (l'ambito della Behavioural Game Theory); questi ultimi hanno consentito di distinguere tra varie tipi di comportamenti e di fissare l'attenzione, in particolare, su comportamenti relativamente rari riguardanti persone dotate di propensione ed esperienza di “pensiero analitico”. Nella messa a punto dell'apparato analitico abbiamo quindi dovuto rendere coerenti strumenti e punti di vista provenienti da ambiti disciplinari diversi.

La metodologia di studio qualitativo dei processi risolutivi (basata su risoluzioni ad alta voce intercalate da possibili domande o suggerimenti dell'osservatore: le chiameremo “interviste sul

problem solving” o, più brevemente, “interviste”) ha consentito la costruzione graduale di “lenti” adatte per descrivere e interpretare i processi in modo da evidenziare in essi gli effetti dei fattori appartenenti al background culturale dei soggetti intervistati.

Un primo risultato della tesi consiste proprio nella costruzione di tale apparato analitico e nella “dimostrazione” della sua efficacia per un numero ridotto di risolutori, peraltro significativi per la natura assai diversa dei loro retroterra culturali.

Un secondo risultato riguarda l'individuazione (grazie agli strumenti utilizzati) di comportamenti ricorrenti tra i risolutori, che possono essere messi in relazione con la loro esperienza culturale pregressa. Naturalmente, in relazione al numero ridotto di risolutori considerati, i comportamenti individuati non possono essere ancora considerati come tipici di determinati retroterra culturali; tuttavia la natura di tali comportamenti (in particolare la chiara dipendenza di alcuni loro aspetti dagli strumenti culturali posseduti) suggerisce ipotesi attendibili per successive verifiche su scala più estesa.

Un terzo risultato, connesso al precedente, riguarda la prossimità (ma anche le diversità) tra i comportamenti dei matematici esperti di Teoria dei Giochi e dei matematici che non conoscono tale teoria. Ancora grazie agli strumenti utilizzati è stato possibile individuare taluni comportamenti di questi ultimi soggetti che prefigurano strategie “incorporate” nei modelli della Teoria dei Giochi.

Il secondo e il terzo risultato hanno suggerito di ampliare il campo di indagine ad altri problemi di matematica applicata, diversi da problemi di interazione strategica, per vedere se, e quanto, il retroterra culturale dei risolutori può essere messo in relazione (con l'uso dell'apparato analitico della tesi) con i loro comportamenti risolutivi secondo ipotesi analoghe a quelle elaborate per i problemi di interazione strategica. L'indagine in tal senso è appena agli inizi, tuttavia si sono già ottenuti riscontri interessanti in un problema di coordinamento di moti rettilinei uniformi (di “inseguimento” e “ritorno”).

La tesi, in quanto riguardante una ricerca di base in Didattica della Matematica, non aveva come obiettivo di produrre risultati direttamente utilizzabili dagli insegnanti o nel rinnovamento dei curricula di insegnamento; tuttavia nei risultati ottenuti si possono evidenziare alcuni spunti interessanti sia per l'analisi dei comportamenti degli studenti a vari livelli scolastici (in modo da evidenziare loro risorse e loro difficoltà) che per la costruzione dei prerequisiti per le attività di problem solving in campo matematico-applicativo.

CAPITOLO 1: Teorie di riferimento e strumenti di analisi

1.0 Alcune ricerche sul problem solving

Il presente lavoro, nato in continuità con quello svolto per la tesi di laurea, si inserisce nel filone di ricerca che si occupa dello studio delle attività di problem solving in ambiti matematici. La letteratura su questo argomento, sviluppatasi negli ultimi cinquanta anni, è molto vasta e diversificata. Nello specifico, gli studi di Pólya, (1957) sono stati tra le prime ricerche che si sono concentrate sull'individuazione e l'analisi dei processi attivati nel problem solving. Secondo Pólya l'attività di problem solving può essere suddivisa nelle seguenti fasi: comprensione del problema, progettazione, sviluppo del progetto risolutivo e revisione/discussione.

[First,] we have to see clearly what is required. Second, we have to see how the various items are connected, how the unknown is linked to the data, in order to obtain the idea of the solution, to make a plan. Third, we carry out our plan. Fourth, we look back at the completed solution, we review it and discuss it. (Pólya, 1957, pp. 5–6)

Questo tipo di interpretazione “lineare” del processo risolutivo è stata ripresa e rielaborata in studi successivi, ma in un recente articolo di Carlson e Bloom (2005) si mostra come la sequenza delle fasi affrontate nell'attività di problem solving (Orienting-Planning-Executing-Checking) può spesso presentare uno sviluppo ciclico. In questo articolo Carlson e Bloom, partendo da un'analisi e sistematizzazione di risultati e teorie presenti in letteratura, presentano “an emergent multidimensional problem solving framework” usato per investigare, analizzare e spiegare il possibile comportamento di matematici durante attività di problem solving.

“We observed that once the mathematicians oriented themselves to the problem space, the plan–execute–check cycle was then repeated throughout the remainder of the solution process. We also noticed that, when contemplating various solution approaches during the planning phase of the problem-solving process, the mathematicians were at times engaged in a conjecture – imagine – verify cycle (Figure 1).” (Carlson & Bloom, 2005. p. 53-54)

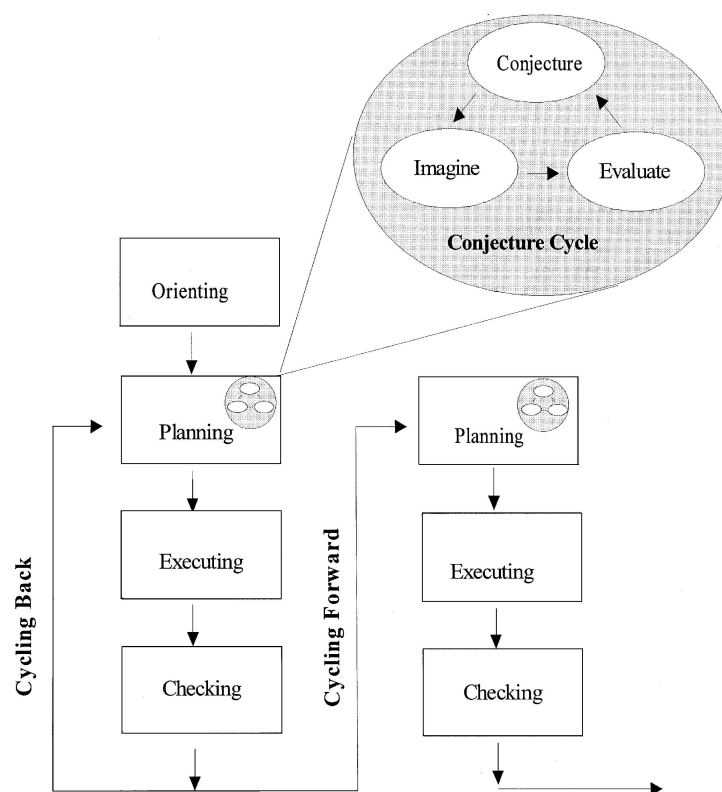


Figure 1. The Problem-Solving Cycle. (Carlson & Bloom, 2005. p. 54)

Nella nostra ricerca abbiamo scelto di indagare soprattutto sui processi attivati nella fase di “Planning”. È in questa fase, infatti, che il soggetto risolutore si trova a dover gestire le immaginazioni delle possibili azioni che costituiranno la strategia risolutiva. Lo sviluppo di tali processi (anticipazione, immaginazione e pianificazione) richiede la gestione di esplorazioni “temporali” (si veda il par. 1.1.3) che vivono e si sviluppano in stretta relazione e dipendenza dalle conoscenze, teoriche e pratiche, possedute dai soggetti risolutori. D’altra parte, l’importanza e la necessità di uno studio più approfondito di tali processi sono sottolineate da diversi ricercatori (partendo dagli studi di Simon (1996) sul *Transformational reasoning*¹ fino ad oggi).

Further explorations of these reasoning patterns [the use of mental imagery to imagine a future situation] in problem solving are needed (Carlson & Bloom, 2005; p. 69).

¹ Transformational reasoning: la rappresentazione mentale e fisica di una operazione o di una serie di operazioni effettuate su un oggetto che permette di immaginare le trasformazioni che questo oggetto subisce e la serie di risultati di queste operazioni. Centro del “transformational reasoning” è l’abilità di considerare non uno stato statico, ma un processo dinamico da cui un nuovo stato o un continuo di stati sono generati. Per Simon il Transformational reasoning può essere supportato sia da immagini trasformazionali riproduttive (cioè riproduzioni di precedenti percezioni) sia da immagini anticipatorie, però il Transformational reasoning non può essere ridotto alla sola visualizzazione mentale delle trasformazioni.

Il nostro lavoro di ricerca si inserisce nella prospettiva ora accennata. In relazione ad essa abbiamo analizzato particolari attività di problem solving (riguardanti problemi di interazione strategica¹) adatte ad uno studio mirato dei processi attivati nella fase di “planning”.(si veda cap. 2).

1.1 Strumenti generali di analisi dei processi legati alle attività di problem solving

Per analizzare i processi risolutivi messi in atto dai soggetti durante le loro attività di problem solving, abbiamo utilizzato differenti strumenti di analisi provenienti sia dalla psicologia cognitiva della seconda metà del secolo scorso, sia da altre ricerche degli anni '90 in campo cognitivo e didattico. In particolare le teorie di riferimento da cui sono stati attinti questi strumenti di analisi sono: la teoria degli *Schemi* di Piaget (1952) e le teorie sulle “strutture di *Frame*” (Minsky (1989) e altri), nel campo della psicologia cognitiva, e la teoria dei *Campi Concettuali* di Vergnaud (1990) e la teoria dei *Tempi interni* nel lavoro matematico (Guala e Boero, 1999), nel campo della didattica.

1.1.1 Frame e schemi

Con il termine *Frame* (Minsky, 1989) si identificano le strutture di aspettative, costruite sulla base di esperienze maturate nel corso della storia di ciascun individuo, che (in un dato ambito di esperienza) consentono di organizzare la conoscenza e prevedere situazioni, relazioni ed interpretazioni, relative alle nuove informazioni che vengono dall'esterno².

“Un frame serve cioè a delimitare e perciò a « incorniciare» un insieme di messaggi ed azioni significative e può essere più o meno riconosciuto coscientemente, ma ha comunque un'esistenza reale. Ha un carattere essenzialmente psicologico, anche se vale per esso l'analogia con la cornice del quadro: serve cioè a includere certi messaggi e a escluderne altri, nel senso del rapporto figura sfondo.” (Pontecorvo, 1984; p 338-339)

² Un frame può essere attivato dal riconoscimento sia di situazioni legate ad un certo concetto, sia di un Task specifico. In questa trattazione l'entrata nella seconda tipologia di frame sarà anche indicata con la parola “approccio”.

...

“Nello studio dell’intelligenza artificiale, il termine “frame” è stato introdotto da Minsky che lo definisce come «una struttura di dati che serve a rappresentare una situazione stereotipata come stare in un certo tipo di soggiorno o andare al compleanno di un bambino»“. (Pontecorvo, 1984; p 340)

Con il termine *Schema*, invece, si identificano i comportamenti invariati in classi di situazioni simili (Vergnaud, 1990). Negli studi delle scienze cognitive (ma anche in didattica) i differenti comportamenti riscontrabili nelle attività di problem solving sono stati interpretati attraverso l’identificazione di schemi e lo studio della loro gestione.

“Con schema ci si riferisce ad un qualsiasi tipo di elemento organizzato, una struttura di informazioni che è il prodotto dell’attività costruttiva della mente e che dà alle successive attività di ricordo, di comprensione, di apprendimento, uno specifico orientamento: nel senso più generale un qualsiasi processo di costruzione, di interpretazione di acquisizione delle conoscenze è determinato, nella sua modalità e nei suoi risultati, dagli schemi già esistenti”. (Pontecorvo, 1984; p. 330-331)

Il concetto di schema assume un ruolo fondamentale nell’analisi dei processi cognitivi. Durante le attività di problem solving, infatti, i soggetti risolutori selezionano dal loro repertorio di schemi disponibili (formati anteriormente nella coscienza individuale attraverso l’esperienza) quelli associati a classi di situazioni che presentano affinità con il problema da affrontare. Il processo di adattamento di uno schema varia secondo le situazioni problematiche: infatti, se il soggetto dispone delle competenze necessarie per un trattamento relativamente immediato di una situazione allora si osservano condotte largamente automatiche organizzate da un solo schema; se invece il soggetto non dispone di tutte le competenze necessarie, oppure in quella specifica situazione falliscono i metodi da lui conosciuti, allora può avvenire l’innescamento successivo di diversi schemi che devono però essere adattati, scomposti e ricomposti per arrivare alla soluzione del problema.

1.1.2 Concetti

Nelle attività di problem solving sia l'apertura di *Frame*, sia l'attivazione di *Schemi*, sono processi legati al riconoscimento e alla messa in atto di conoscenze possedute dal soggetto, e quindi legati ai *concetti* precedentemente appresi.

Il termine *concetto* è spesso molto utilizzato in psicologia (e quindi anche negli studi di Didattica della Matematica), ma il suo significato può assumere connotazioni differenti. La parola “concetto” deriva dal latino “cum capio” che significa “ prendo insieme”. Nel linguaggio comune col termine concetto si indica generalmente l'immagine, l'idea, la percezione concepita dalla mente e quindi il prodotto di un atto di astrazione e generalizzazione col quale la mente, desumendo i dati dell'esperienza sensibile, unifica i caratteri essenziali di una classe di elementi aventi una certa quantità di note comuni.

In questo lavoro non affronteremo uno studio sui diversi modi di intendere i “concetti”, ma ci limiteremo ad esporre la teoria dei concetti che, a nostro parere, meglio si adatta ad essere uno strumento utile per l'individuazione di caratteristiche comuni nella gestione delle conoscenze in attività di problem solving.

Per le analisi avevamo bisogno di utilizzare una definizione pragmatica di concetto che fosse compatibile con gli strumenti di analisi sopra descritti (frame e schemi) e che fosse anche operativa: la definizione di concetto proposta da Vergnaud (1990) soddisfaceva queste necessità. In effetti, secondo Vergnaud, per accertare la padronanza di un concetto occorre verificare la capacità di gestire in modo appropriato la conoscenza di sue situazioni di riferimento, la mobilitazione opportuna delle sue proprietà in atto e l'utilizzo delle rappresentazioni ad esso legate. Più precisamente, un concetto può essere considerato come una terna di insiemi:

$$C=(S, I, R)$$

S: l'insieme delle situazioni di riferimento per il concetto (ossia le situazioni problematiche esperite dal soggetto che restano associate al concetto e sono depositarie del “senso” con cui il concetto viene vissuto dal soggetto)

I: l'insieme degli invarianti operatori (ossia le proprietà del concetto su cui si basano gli schemi che il soggetto mette in opera per risolvere i problemi).

R: l'insieme delle rappresentazioni linguistiche (ossia le parole, i segni geometrici, le formule algebriche etc. che consentono di comunicare, riflettere e utilizzare il concetto nella risoluzione di problemi).

Dalla sua definizione di concetto risulta evidente che Vergnaud condivide le idee di Piaget sul fatto che la conoscenza razionale è operatoria.

“La teoria dei campi concettuali si fonda su un principio di elaborazione pragmatica delle conoscenze. Non si può teorizzare sull’apprendimento della matematica né a partire solo dal simbolismo, né a partire solamente dalle situazioni. Occorre considerare il senso delle situazioni e dei simboli. La chiave è considerare l’azione del soggetto in una situazione, e l’organizzazione del suo comportamento. Di qui l’importanza accordata al concetto di schema” (Vergnaud, 1992, p. 18)

È però importante notare che nella teoria di Vergnaud ritroviamo anche elementi provenienti dalle teorie Vygotskiane, come il riconoscimento del ruolo determinante ricoperto dalle rappresentazioni linguistiche nei processi di concettualizzazione ed azione.

“Il linguaggio ha soprattutto funzioni di comunicazione [...] Ma questa funzione di comunicazione non può utilizzarsi utilmente che appoggiandosi a quell’altra funzione del linguaggio che è la sua funzione di rappresentazione. In relazione a queste due, si osserva un’altra funzione del linguaggio: l’aiuto al pensiero e all’organizzazione dell’azione” (Vergnaud, 1992, p. 19)

1.1.3 Tempi interni

L’attività di problem solving matematico si basa sia sull’utilizzo di “conoscenze”, sia sulla gestione dei processi cognitivi che si appoggiano a queste.

La teoria dei *Tempi Interni* (Guala e Boero, 1999)³, individuando le dinamiche temporali presenti in tali processi, fornisce una chiave di lettura interessante per interpretare i processi mentali di creazione, esplorazione e trasformazione di ambienti spazio temporali (in senso pratico o in senso metaforico) generati durante il problem solving.

Gli autori ritengono che l’analisi di questi tempi sia utile per individuare alcuni processi

³ “ The debate about the physical existence of time suggests the possibility that time could also be considered an intellectual construction in order to “treat” (that is, to describe/order/analyse) the flux of external events; we can speak about “Mind times” metaphors that may help in “treating” mental processes, especially those intervening in complex problem solving” (Guala and Boero, 1999, p. 164)

mentali sui quali si basano molte idee e tecniche matematiche, e per descriverne ed interpretarne le disfunzioni.

“As concerns diagnosis and remedial work on some pupils’ difficulties in the logic-linguistic and mathematics area, “mind times” offer interesting interpretative keys (Boero e al., 1996); Boero & Scali, 1996)” (Guala & Boero, 1999; 165)

A supporto di queste affermazioni, nell’articolo sono riportati episodi e situazioni, riscontrati nei lavori svolti in classe da studenti di scuole elementari e medie, in cui emergono difficoltà nell’ambito delle aree logico-linguistiche e della matematica. Guala e Boero mostrano come la teoria dei “tempi della mente” possa offrire chiavi di lettura interessanti per interpretare queste difficoltà. Nello specifico, le esperienze riportate nell’articolo mostrano come la capacità di “progettare” (o meglio, di muoversi in modo produttivo tra presente passato e futuro) possa essere determinante per acquisire la capacità di risolvere problemi fin dai primi livelli scolari (Guala & Boero, 1999: p. 165-166).

I “tempi” individuati ed analizzati da Guala e Boero sono:

- a) Il “tempo dell’esperienza passata” che è ripercorsa attraverso le informazioni immagazzinate in memoria; esso è supportato dall’attività di ordinamento che la mente svolge su queste tracce. Il modo in cui si svolge questo percorso (velocemente o lentamente, in dettaglio o no) può dipendere dalla percezione involontaria della qualità di un evento (legata all’esperienza del soggetto e all’intensità emozionale ad esso connessa) e/o dalla ricostruzione volontaria dell’esperienza passata (ottenuta focalizzando l’attenzione sugli aspetti rilevanti e tralasciando quelli irrilevanti).
- b) Il “tempo della contemporaneità”, riguardo al quale si può distinguere come l’osservatore registra sulla linea del tempo i comportamenti osservabili del soggetto, e come il soggetto vive gli stessi istanti. Questo tempo, infatti, può essere percepito dal soggetto con velocità ed estensioni differenti secondo le azioni e le sensazioni (desideri, aspettative, paure) che vengono ad innescarsi nel corso dell’attività svolta.
- c) Il “tempo dell’esplorazione” è presente nei problemi “aperti” in cui è richiesto al soggetto di trovare e concatenare operazioni aritmetiche adatte, pianificare una costruzione geometrica, costruire una dimostrazione e così via: esso è articolato in

proiezioni nel tempo che possono essere realizzate dal passato in avanti o nel futuro e poi verso il passato, ecc.⁴

- d) Il “tempo della connessione sincrona” che consiste nella percezione del funzionamento istantaneo coordinato delle componenti di un sistema (reale o virtuale) o la scoperta dei legami tra le variabili di un problema. Questo tempo può innestarsi nel tempo dell’esplorazione come momento risolutivo.

È importante notare che, durante la risoluzione di problemi, i confini tra i tempi cronologici (passato, presente e futuro) non sono netti: il soggetto pensante si può muovere attraverso questi con estrema facilità connettendo diverse esperienze avvenute, o immaginate, in tempi differenti, creando così nuove conoscenze.

Nel lavoro di tesi di laurea (Martignone, 2002) era stata messa a punto una modalità di analisi in cui i differenti strumenti interpretativi citati in precedenza (frame, schemi e dinamiche temporali) venivano utilizzati in modo sinergico per interpretare attività di problem solving⁵. L’utilizzo di questi sistemi interpretativi aveva consentito l’individuazione e la successiva interpretazione di comportamenti simili (di soggetti diversi nel risolvere lo stesso problema e dello stesso soggetto nel risolvere problemi diversi). Dalle analisi svolte era inoltre emerso il ruolo determinante ricoperto dalle attività di anticipazione nella costruzione e gestione di strategie risolutive. Partendo da queste considerazioni, si è scelto di approfondire lo studio dei processi di esplorazione focalizzando l’attenzione sui processi di anticipazione.

⁴ Quando si svolge un compito “aperto” ci si proietta nel futuro alla ricerca di una soluzione, ma ci si sposta anche nel passato per esplorare le proprie conoscenze ed utilizzarle o per giustificare le proprie intuizioni o per fare delle congetture.

⁵ Nella tesi di laurea sono state analizzate risoluzioni di problemi aperti di congettura e dimostrazione nel campo della geometria analitica, effettuate da dottorandi in matematica.

1.2 La Teoria dei Giochi

Come accennato nell'introduzione, per approfondire lo studio della gestione dei processi di esplorazione⁶, abbiamo scelto di analizzare problemi di interazione strategica (*giochi*).

“A game is a description of strategic interaction that includes the constraints on the actions that the players can take and the players' interests, but does not specify the actions that the players do take” (Osborne & Rubinstein, 1994: p. 2)

Il linguaggio matematico usato per modellare situazioni di interazione strategica dove più decisori (persone, aziende, Stati...) si trovano a controllare ciascuno una o più variabili che influiscono sul successo proprio e degli altri è la Teoria dei Giochi.

“Game theory is a bag of analytical tools designed to help us understand the phenomena that we observe when decision makers interact” (Osborne & Rubinstein, 1994: p. 1)

Questa teoria offre modelli di comportamento per la scelta di strategie volte ad assicurarsi maggiori vantaggi possibili dalla situazione presa in considerazione (*gioco*) ed è diventata uno strumento importante nelle scienze sociali (economia, scienze politiche, biologia, antropologia, intelligenza artificiale...). In questa teoria i giocatori sono supposti razionali, desiderosi di massimizzare i loro guadagni (in senso esteso) e capaci di anticipare le mosse degli altri giocatori che avranno i loro stessi fini. Conoscere come pensa un'altra persona, e come un'altra persona pensa che tu pensi, infatti, è basilare per predirne il comportamento e quindi per pianificare una strategia d'azione che possa portare alla “vittoria”. Un giocatore immagina cosa farà l'altro che a sua volta immaginerà cosa farà il primo e così via: questo ragionamento è ripetuto finché non si raggiunge una decisione reciprocamente coerente.

“A solution (of a game) is a systematic description of the outcomes that may emerge in a family of games. Game Theory suggests reasonable solutions for classes of games and examines their properties” (Osborne & Rubinstein, 1994: p 2)

⁶ In particolare studierò le differenze, in termini di sviluppo dei processi anticipazione, tra risoluzioni di *giochi* effettuate da soggetti che conoscono (e quindi possono applicare) modelli d'azione costruiti all'interno di teorie matematiche, e quelle svolte da soggetti che non li conoscono.

1.3 Modelli proposti dalla Teoria di Giochi

In questo paragrafo proporremo una brevissima introduzione a due modelli proposti dalla Teoria dei Giochi per affrontare problemi di interazione strategica (non cooperativi⁷).

“Esistono due forme o tipi fondamentali di modelli impiegati per rappresentare giochi non cooperativi. Il primo e più semplice viene definito forma strategica ovvero gioco in forma normale” (Kreps, 1992; p. 16)

La rappresentazione canonica dei giochi in *forma normale* (rappresentazione in forma di matrice), è resa possibile dalla interpretazione del concetto di strategia quale piano d'azione completo stabilito a priori da un agente razionale⁸.

*“A strategic game is a model of interactive decision-making in which each decision-maker chooses his plan of action once and for all, and these choices are made simultaneously. The mode consists of a finite set N of **players** and, for each player i , a set A_i of **actions** and a **preference relation** on the set of action profiles. We refer to an action profile $a=(a_i)_{i \in N}$ as an **outcome**, and denote the set $\times_{i \in N} A_i$ of outcomes by A . The requirement that the preferences of each players i be defined over A , rather than A_i , is the feature that distinguishes a strategic game from a decision problem: each player may care not only about his own action but also about the action taken by the other players.”* (Osborne & Rubinstein, 1994; p 11)

I giochi in *forma strategica* si possono rappresentare attraverso matrici. Questo modello di situazioni di interazione strategica proposto dalla Teoria dei Giochi consente di stabilire una serie di concetti importanti per la teoria dei giochi, come ad esempio il concetto di “strategia dominante”, di “equilibrio”...(si veda par.2.5.2)

⁷ “La teoria dei giochi si può suddividere in due rami principali: la teoria dei giochi cooperativi e la teoria dei giochi non cooperativi. Questa distinzione non è sempre chiara ma, essenzialmente, nella teoria dei giochi non cooperativi l'unità di analisi è il singolo partecipante al gioco, che cerca di ottenere il meglio per sé dato un insieme ben definito di regole e vincoli. Se si verifica che gli individui scelgono dei comportamenti che nel linguaggio comune sarebbero definiti «cooperativi» [...] allora ciò accade perché questo comportamento cooperativo riflette l'interesse di ogni individuo preso separatamente; ognuno di essi teme infatti la ritorsione degli altri nel caso in cui venisse a interrompersi la cooperazione. Al contrario, nella teoria dei giochi cooperativi l'unità di analisi è il gruppo ovvero, nel gergo usuale della teoria dei giochi, la coalizione” (Kreps, 1992; p.15)

⁸ Le mosse, e l'aspetto intrinsecamente temporale che le caratterizza, scompaiono a tutti gli effetti dall'orizzonte della teoria. Il concetto di strategia utilizzato dalla teoria dei giochi è così sostanzialmente diverso dall'uso comune del termine, in quanto non si riferisce ad una serie di principi generali che guidano il giocatore durante le fasi della partita, ma alla congiunzione di tutte le scelte effettivamente compiute.

“A finite strategic game in which there are two players can be described conveniently in a table like that in the figure 13.1

	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	w_1, w_2	x_1, x_2
<i>B</i>	y_1, y_2	z_1, z_2

Figure 13.1 A convenient representation of a two-player strategic game in which each player has two strategies.

One player’s actions are identified with the rows and the other player’s with the columns. The two numbers in the box formed by row *r* and column *c* are the players’ **payoff**⁹ when the row player chooses *r* and the column player chooses *c*, the first component being the payoff of the row player”. (Osborne & Rubinstein, 1994; p 13)

Il modello sopra descritto incorpora le mosse e l’aspetto intrinsecamente temporale che le caratterizza. In un gioco in *forma estesa* invece la componente temporale data dalla sequenzialità delle azioni possibili è resa evidente¹⁰.

“An extensive game is a detailed description of the sequential structure of the decision problems encountered by the players in strategic interaction” (Osborne & Rubinstein, 1994; p 89)

La rappresentazione usata per descrivere la struttura sequenziale dei processi decisionali è un grafo ad albero¹¹ in cui ad ogni nodo si associa una possibile situazione del gioco, agli archi uscenti da ciascun nodo si associano le possibili mosse del giocatore che è chiamato

⁹ Si chiama funzione dei payoff (pagamenti), o funzione di utilità, una funzione che assegna ad ogni giocatore la sua vincita (payoff) per ogni possibile terminazione del gioco. Il valore associato dalla funzione a ciascuna scelta deve rispettare l’ordine dato dalle preferenze dei giocatori.

¹⁰ Questo tipo di rappresentazione è necessaria nei giochi dinamici (per la definizione di questo tipo di gioco si veda la nota 20 a p. 24) dove la componente temporale (data dalla successione delle mosse) e le informazioni possedute ad ogni stadio del gioco non sono trascurabili ai fini della costruzione di una strategia.

¹¹ “We define [...] a topological tree or game tree as a finite collection of nodes, called vertices, connected by lines, called arcs, so as to form a connected figure which includes no simple closed curves. Thus it follows that given any two vertices *A* and *B*, there is a unique sequence of arcs and nodes joining *A* to *B*” (Owen, 1995; p.2)

a muovere in quella situazione e ai nodi terminali si associano i valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore¹².

Questi brevi cenni sulle rappresentazioni di giochi non cooperativi sono stati introdotti in questa parte del lavoro perché la conoscenza di tali modelli potrà aiutare il lettore (che non conosce la teoria dei giochi) a comprendere più a fondo le analisi a priori condotte sui problemi (si veda par. 2.5) e le considerazioni sui comportamenti riscontrati nei protocolli analizzati. Questa panoramica quindi non può e non vuole essere intesa come una trattazione completa di tali argomenti¹³.

1.4 Teorie di riferimento per la Teoria dei Giochi

1.4.1 Behavioural Game Theory

La “Behavioural Game Theory” nasce come branca della Behavioural Economics¹⁴ con lo scopo di legare la Teoria dei Giochi alle scienze cognitive. Più precisamente, gli studi in Behavioural Game Theory vogliono estendere la Teoria dei Giochi attraverso l’uso di teorie provenienti dalle scienze cognitive, traducendo tutto questo in modelli matematici. Uno degli obiettivi di queste ricerche è la formalizzazione dei limiti del pensiero strategico e la costruzione di modelli per spiegare le evidenze sperimentali e per predire in modo più accurato le evoluzioni di situazioni strategiche¹⁵. Dato che l’obiettivo della nostra ricerca è studiare i meccanismi di sviluppo di determinati processi risolutivi in problemi di Teoria dei Giochi, ci siamo avvicinati a tali ricerche cercando di capire se le sperimentazioni ed i risultati lì ottenuti potessero essere compatibili e reinvestibili nella nostra ricerca.

¹² Presentazioni dettagliate sulle rappresentazioni di giochi in forma estesa si possono trovare in (Gibbons, 1994; pp.122-128; Myerson, 1991; pp. 35-46)

¹³ Per una trattazione completa di tali argomenti si rimanda a Osborne e Rubinstein (1994) o ad altri libri di testo di teoria dei giochi.

¹⁴ La “Behavioural Economics” (Camerer e Loewenstein, 2003) è un campo di ricerca in economia che trae profitto dai progressi effettuati in psicologia e in neuroscienza per proporre nuove ipotesi e modelli per le situazioni di interazione strategica che siano confermati dai dati sperimentali. In particolare i risultati sperimentali ottenuti sottolineano come esistano molti e differenti fattori che influenzano la capacità di prendere decisioni di un soggetto in tali situazioni.

¹⁵ “...rational game theory, useful for modeling firms and countries that pool cognitive resources and hire consultants to analyze games carefully (for example, bidding for telecommunications spectrum in auctions); behavioral game theory, useful for explaining what normal people do and how they learn, which is important for explaining strikes, divorces, incentive contracts, and litigation” (Camerer, 2003b;p.1674)

1.4.2 Ricerche di C. Camerer

Colin Camerer è una delle figure principali nel campo della Behavioural Game theory. Egli usa elementi tratti dal campo della psicologia e dati provenienti da esperimenti statistici su larga scala per sviluppare modelli matematici che predicano il comportamento di soggetti che affrontano problemi di Teoria dei Giochi. Camerer ha quindi costruito nuovi modelli matematici che tenessero conto dei limiti dei modelli classici di Teoria dei Giochi nel predire comportamenti reali (ossia registrati a livello sperimentale). Anche se l'interesse generale delle ricerche nella Behavioural Economics è volto all'elaborazione di modelli sui **prodotti** e non, come nel nostro caso, all'analisi dello sviluppo dei **processi** a monte di essi, le ricerche di Camerer sembrano avvicinarsi ai miei interessi di ricerca: Camerer, infatti, interpreta i risultati raccolti sulle decisioni di differenti campioni di soggetti in termini di differenti gestioni dei processi di anticipazione. In particolare, la sua teoria si basa sull'assunto che i processi di anticipazione siano sviluppati e gestiti efficacemente solo da pochi soggetti, mentre il comportamento standard delle persone non prevede lo sviluppo di tali processi protratto nel tempo. I risultati raccolti da Camerer sono quindi stati utilizzati come indicazione sulla possibilità di individuare comportamenti differenti, dipendenti (o comunque interpretati come dipendenti) dalla gestione di processi di anticipazione.

Le ricerche di Camerer in questi ultimi anni si sono rivolte all'indagine dei fattori che influenzano i processi decisionali e, per far questo, sono state utilizzate tecniche di ricerca provenienti dalle neuroscienze (vedi appendice I). Gli obiettivi di tali ricerche sono sintetizzati nelle seguenti domande:

Box 5. Questions for Future Research

- What neural mechanisms correspond to aspects of strategic thinking?
- Are ultimatum rejections and other apparent expressions of social preference due to emotions, learned heuristics, evolved modules, or combinations of these and other mechanisms?

(Camerer , 2003)

1.4.3 Cognitive Hierarchy Model

Il Cognitive Hierarchy Model (CH) è un modello che è stato concepito per predire i comportamenti di soggetti che si trovano ad affrontare per la prima volta un particolare “gioco”, e quindi nei *one-shot game* o nelle fasi iniziali di giochi ripetuti¹⁶ (Camerer, Ho & Chong, 2002).

“Limited strategic reasoning results from constraints on the human brain; the CH model takes that constraint seriously, and embodies it precisely, to out-predict equilibrium”. (Camerer e al., 2003; p 193)

In questo modello i giocatori che scelgono a caso tra le strategie senza cercare di analizzare lo sviluppo del gioco sono chiamati 0-step players; gli altri giocatori, che invece cercano di anticipare i passi di pensiero futuri (propri e degli altri), sono indicati con il nome k-step players (dove k rappresenta in numero di “passi futuri” pensati e quindi $k \geq 1$). Questi giocatori immaginano k passi dello svolgimento supponendo però che gli altri giocatori ne possano immaginare al più k-1.

La frequenza dei giocatori che anticipano k passi è indicata con $f(k)$. Si assume che, essendo sempre più difficile portare avanti un numero crescente di passi di pensiero,

$\frac{f(k)}{f(k-1)}$ sia proporzionale a $1/k$. La funzione che fornisce la proporzione di giocatori

che si fermano dopo ciascun passo è identificata con la distribuzione di Poisson

$f(k) = \frac{e^{-\tau} \tau^k}{k!}$ (dove il parametro τ rappresenta il numero medio di passi di pensiero).

“Working memory constraints (and doubts about rationality of others) suggest that more and more thinking steps are increasingly rare, expressed by $f(k)/f(k-1)$ proportional to $1/k$. This assumption implies that $f(k) = e^{-\tau} \tau^k / k!$, the Poisson distribution, where τ is the mean and variance of the number of thinking steps. Axioms

¹⁶ Un gioco è detto *one-shot* quando viene affrontato una sola volta; un gioco è detto ripetuto quando è affrontato più volte in successione.

and data from more than 80 games¹⁷ suggest τ is between 1 and 2. Assuming $\tau=1.5$ makes the model just as precise as Nash equilibrium (in fact, it is more precise in games with multiple equilibria). We conjecture that $\tau=1.5$ will never predict one-shot or first-period experimental data worse than Nash equilibrium (correcting for chance), and will almost always predict more accurately”. (Camerer e al., 2003; p 192)

Questo modello, nato dall’assunzione che i processi di anticipazione siano difficili da portare avanti, soprattutto se è richiesto che questi si prolunghino troppo nel tempo, sembra quindi predire con maggior precisione, rispetto ai modelli proposti dalla teoria dei giochi, il reale comportamento dei giocatori.

1.4.4 Dalle sperimentazioni di Camerer al nostro lavoro di ricerca

Dalle ricerche di Camerer si sono avute sia conferme della difficoltà di gestione dei processi di anticipazione (come visto nel paragrafo precedente), sia informazioni importanti sulle possibili risoluzioni di un particolare problema (p-beauty contest game¹⁸) adatto allo studio di tali processi.

“The ‘p-beauty contest (pBC) game’ is a good tool for measuring steps of thinking (Camerer et al., 2003)” (Camerer, 2003a p 225)

Questo gioco modella situazioni come l’entrata in un’industria in rapida crescita, una gara politica, una vendita a minor (ma non troppo) prezzo rispetto a quello di un altro competitore riguardo a beni simili, la vendita di un prodotto prima di un anticipato crollo dei mercati... In ciascun caso il fine è di essere in anticipo sul gruppo, ma non troppo in anticipo.

Nella versione del “p-beauty contest game” (p-Bc) scelta da Camerer per i suoi esperimenti ai giocatori è richiesto di scegliere simultaneamente un numero tra 0 e 100. Il giocatore che avrà scelto il numero più vicino ai 2/3 della media dei numeri scelti vince una cifra fissata.

¹⁷ Il beauty contest game non è infatti l’unico gioco utilizzato da Camerer nelle sue ricerche: un altro esempio di gioco studiato da Camerer si può trovare in appendice (I).

¹⁸ Il p-BC game prende il suo nome da una metafora usata dall’economista John Maynard Keynes che paragonò il mercato finanziario ad una gara di bellezza in cui i giudici si interessano di più a quali delle concorrenti le altre persone considerano belle piuttosto che a scegliere quale di queste sia veramente la più bella.

La soluzione proposta dalla Teoria dei Giochi per questo gioco è zero¹⁹. Questa soluzione, se si interpreta attraverso il modello proposto da Camerer, è ottenibile solo dopo una lunga sequenza di passi di pensiero e per questo difficilmente “raggiungibile”.

“Rational game theory predicts an equilibrium in which choices are mutually consistent (leading to 0), but in experiments many players assume that others are making random choices, and choose 33, or believe that others are responding to random choices, and choose 22. Models of this cognitive hierarchy organize regularity from many games and show that one or two steps of thinking are typical, although three or four steps are used by analytically skilled undergraduates and game theorists” (Camerer, 2003b; p.1674)

Negli esperimenti condotti da Camerer e dai suoi collaboratori, infatti, si è costatato che il numero medio scelto è nell’intorno tra 20 e 40 (tale risultato si mantiene se si analizzano soggetti di diversi paesi e di diverse età).

Applicando il CH-model a questo gioco ci saranno i giocatori 0-step che sceglieranno a caso tra tutti i numeri; i giocatori 1-step che, pensando di giocare con dei giocatori che non anticipano, si aspettano che la media dei numeri scelti sia 50 e quindi sceglieranno il numero 33. I giocatori che s’immaginano due mosse si aspettano di giocare con persone che al massimo anticiperanno una mossa e quindi giocheranno 22 e così via.

Assumendo $\tau=1.5$ (vedi paragrafo precedente), la loro risposta migliore secondo il modello della CH sarà 26, dato che è confermato dagli esperimenti (Camerer e al. 2002) Nelle interviste dai noi raccolte i risultati di Camerer sono confermati, ma non è questo il fine della nostra ricerca: nel nostro lavoro ci siamo occupati di analizzare il modo in cui alcuni soggetti arrivano a formulare tali scelte. Camerer ipotizza un certo percorso dato da successioni di anticipazioni che spesso ritroviamo nelle interviste, ma questo scheletro di passaggi ha una storia e uno sviluppo diversi in ogni soggetto; per noi era quindi importante analizzare i momenti di blocco, o sblocco, e gli strumenti utilizzati dai differenti soggetti per superare tali momenti e per impostare i processi di anticipazione.

¹⁹ Le differenti tipologie di soluzioni proposte per il beauty contest game saranno trattate nel par.2.5.2.2.

CAPITOLO 2: Metodologia

2.1 Scelta del campo di indagine

Nel lavoro di tesi di laurea si erano analizzate attività di problem solving in Analisi e in Algebra con l'obiettivo di individuare e, ove possibile, modellare alcuni aspetti salienti dei processi dimostrativi ricorrenti. Da questi studi era emerso che l'attivazione e lo sviluppo di processi di anticipazione ricoprivano un ruolo importante per il raggiungimento del successo. Non tutti i soggetti esaminati, però, avevano mostrato un'attitudine a sviluppare tali processi: l'attivazione di questi infatti era spesso sostituita con l'applicazione di modelli matematici conosciuti. Partendo da queste constatazioni, inizialmente abbiamo formulato le seguenti domande di ricerca:

- In che misura la conoscenza e la scelta di un modello ²⁰ modifica l'organizzazione del pensiero nel problem solving?
- Essendo i modelli matematici prodotti dell'uomo elaborati per affrontare determinate classi di problemi, cosa rivelano sui suoi modi di ragionare?
- Possiamo individuare delle analogie nelle condizioni che hanno portato al successo modelli matematici in ambiti diversi?

Domande di ricerca così generali sono evidentemente difficili da affrontare con qualche speranza di successo se si considera l'intero campo del problem solving. Per questo motivo abbiamo deciso di restringere il campo di indagine individuando un settore particolare della matematica applicata che sembra prestarsi a condurre indagini sulle questioni sopra elencate: la Teoria dei Giochi

La scelta di proporre problemi di interazione strategica è stata motivata dalle seguenti ragioni:

- questo tipo di problemi risulta essere adatto ad attivare processi di esplorazione temporale;

²⁰ "...the model as a simplified representation of a portion of reality (of interest in a certain problem) used for: improving the 'visualization' of some aspects (using a scale reproduction instead of the original diagram), generalising properties (grammar rules), allowing comparisons (comparing different regions using population density in stead of population and area), etc." (Dapueto & Parenti, 1999)

- esiste una teoria matematica (la Teoria dei Giochi) che studia e modella questo tipo di situazioni, anche se esse possono essere affrontate senza possedere conoscenze specifiche di Matematica avanzata;
- essendo la Teoria dei Giochi un settore della Matematica recente e ben delimitato, è possibile distinguere tra chi non possiede conoscenze riguardanti i modelli proposti dalla Teoria dei Giochi (anche avendo una buona preparazione matematica) e chi invece sa utilizzare questi strumenti.

2.2 Domande iniziali di ricerca relative al nuovo campo di indagine

Le domande di ricerca esposte nel paragrafo precedente sono state riformulate nel nuovo campo di indagine ed affinate nella prospettiva di indagare soprattutto sull'influenza del sapere (matematico e non) nella generazione e gestione dei processi di esplorazione temporale in attività di problem solving.

Un prima riformulazione delle domande di ricerca è stata la seguente:

- Quali sono le difficoltà da superare nell'affrontare problemi di interazione strategica? Quali strumenti provenienti dalla Matematica possono aiutare a superarli?
- Più in dettaglio, come cambia la gestione dei processi temporali durante le attività di problem solving relative a problemi di interazione strategica (pensiero strategico), se si usano/non si usano strumenti provenienti dalla Teoria dei Giochi?

2.3 Scelta del metodo di indagine

L'analisi condotta in questo lavoro è di tipo qualitativo, basata sullo studio dei processi che supportano la generazione delle strategie risolutive individuate nei protocolli raccolti. Lo scopo della nostra ricerca non è stato dunque quello di raccogliere dati quantitativi riguardo alla frequenza di particolari risultati, ma piuttosto di identificare e studiare i processi che producono questi risultati.

La metodologia scelta consiste nell'analisi di interviste (audio-registrate in presenza di un osservatore) di risoluzioni di problemi aperti. Questo tipo di metodologia è condivisa dalla

maggior parte delle ricerche che si occupano di analisi dei processi risolutivi di problemi (Ericsson & Simon, 1980) e sembra rimanere la miglior tipologia di raccolta dati per indagare sulla generazione/gestione delle dinamiche temporali (anche se altri metodi di indagine più efficaci potrebbero in futuro provenire dalle ricerche nelle neuroscienze²¹).

Ogni protocollo è stato analizzato in una doppia prospettiva:

- come portatore di nuove informazioni sui processi di esplorazione possibili
- come evidenza dell'esistenza di particolari processi di esplorazione.

Questo tipo di approccio è di uso comune nelle ricerche nel campo delle scienze umane, che hanno come obiettivo la generazione di ipotesi o la costruzione di quadri teorici²².

Il lavoro svolto sui problemi considerati ricalca la preparazione dell'intervista clinica di Piaget e si articola nelle seguenti fasi:

- A) Problematizzazione e scelta esercizio.
- B) Analisi a priori delle possibili reazioni dei soggetti che lo affrontano.
- C) Messa alla prova di tali analisi su numero ridotto di soggetti.
- D) Analisi documenti relativi alla fase C).
- E) Proposta definitiva dell'esercizio.
- F) Interviste di problem solving sul campione definitivo.
- G) Analisi elaborati raccolti.

I soggetti scelti sono volontari che si sono prestati ad essere (audio)registrati durante le loro attività di problem solving e a cui è stato richiesto di scrivere o verbalizzare (a voce alta) i passaggi solitamente effettuati a mente.

Le analisi si basano principalmente sulla trascrizione delle interviste e quindi sullo studio delle tracce, nel linguaggio verbale e nel linguaggio simbolico, di processi mentali attivati e sviluppati nel corso dell'elaborazione delle strategie risolutive.

²¹ In economia infatti si stanno già sfruttando evidenze sperimentali provenienti dalla neuroscienza per cercare di capire se e come le componenti affettive e sociali influiscano sul processo decisionale. Lo studio da parte dei ricercatori in economia di tali fattori è un campo ancora in crescita perché necessita dell'integrazione di nuove teorie provenienti da altre discipline come la psicologia (vedi appendice I).

²² Anche nel lavoro precedentemente citato di Carlson e Bloom (2005) l'approccio e la metodologia usate sono assimilabili a quelle utilizzate nel mio lavoro.

2.4 Scelta iniziale dei soggetti

Come già accennato nel paragrafo precedente, i soggetti scelti sono volontari che si sono prestati ad essere (audio)registrati durante le loro attività di problem solving, cercando di seguire la regola di esporre all'osservatore le motivazioni ed i pensieri alla base delle loro scelte risolutive. La richiesta di scrivere, o esporre ad alta voce, anche passaggi solitamente effettuati mentalmente è necessaria per poter effettuare successivamente l'analisi dei processi da me studiati. Tale scelta metodologica potrebbe essere criticata perché ritenuta una "forzatura" sui soggetti, visto che questo non è un comportamento che solitamente si segue durante le risoluzioni di problemi. Questo tipo di obiezione è fondata, ma deve essere rapportata al campione di soggetti scelti. Nei casi da me presi in considerazione, infatti, queste obiezioni (come la presenza di falsificazioni intenzionali dei processi risolutivi esposti rispetto a quelli effettivamente pensati e l'inibizione dovuta all'essere oggetto di questo tipo di intervista) perdono parte della loro consistenza visto che i soggetti esaminati si sono sottoposti all'intervista coscienti degli scopi per cui sarebbe stata usata (non è né un compito che verrà valutato, né una prova di intelligenza) e decidendo quindi di condividere i propri "ragionamenti" con l'osservatore (alcuni sono soggetti che avevo già utilizzato per il mio lavoro di tesi, altri sono persone con cui l'intervista è stata svolta come un dialogo semi-informale sulla situazione problematica). Nei protocolli analizzati nella tesi di laurea, appartenenti per la maggior parte a laureandi e dottorandi in matematica, era già emerso come l'utilizzo di diversi strumenti e teorie matematiche modellasse in modo rilevante i processi esplorativi durante attività di problem solving in ambienti di geometria analitica. Partendo da tali osservazioni, ho scelto di approfondire lo studio di queste influenze. Per far questo ho cercato, come già detto in precedenza, situazioni problematiche in cui fossero presenti strutture temporali "latenti" o "congelate" che il soggetto risolutore dovesse esplorare e gestire durante la risoluzione del problema. Ho inoltre voluto che questi problemi fossero affrontabili sia da soggetti in possesso di tecniche provenienti dalla matematica, sia da soggetti privi di queste competenze specifiche.

Inizialmente, in continuità con il lavoro di tesi di laurea, si era scelto di analizzare solo Matematici²³ (conoscitori e non conoscitori della Teoria dei Giochi) perché si voleva analizzare il loro comportamento in relazione alla loro conoscenza degli strumenti di teoria

²³ Con il termine "matematici" intendiamo dottorandi o ricercatori in matematica. Questa scelta era motivata dal fatto che il nostro interesse era volto all'individuazione e all'analisi di processi che s'innescano in soggetti che oltre a conoscere le teorie matematiche, le sapessero mettere in atto.

dei giochi. All'inizio della ricerca si erano quindi selezionati matematici che avessero differenti livelli di conoscenza sulle tecniche appartenenti a questa specifica area della matematica. La scelta di proporre problemi di interazione strategica è stata fatta quindi sia perché, come detto in precedenza, in quest'ambito i processi di anticipazione svolgono un ruolo determinante per l'elaborazione di strategie risolutive, sia perché si trattava di un ambito abbastanza ben circoscritto in cui era possibile distinguere tra i matematici che non possedevano conoscenze riguardanti i modelli proposti dalla teoria dei giochi e i matematici che invece sapevano utilizzare questi strumenti.

2.5 Scelta iniziale dei problemi

Per cercare di rispondere alle domande di ricerca precedentemente esposte (vedi par. 2.2) abbiamo scelto problemi adatti a far emergere possibili analogie e differenze nei percorsi mentali di soggetti che si trovano a dover risolvere problemi di elaborazione di strategie d'azione. Per questo i problemi scelti sono:

- affrontabili da soggetti che non possiedono competenze specifiche in Teoria dei Giochi
- facilmente risolvibili utilizzando conoscenze e strumenti provenienti dalla Teoria dei Giochi
- non troppo lunghi e complessi (non troppe variabili in gioco)

I problemi sono stati scelti perché dovevano rivelare eventuali differenti gestioni delle dinamiche temporali.

2.5.1 Primo nucleo di problemi scelti

I seguenti problemi sono *one-shot game non cooperativi*²⁴. I primi tre problemi sono *statici ad informazione completa*, mentre l'ultimo è *dinamico ad informazione completa*²⁵.

²⁴ Nei giochi *non cooperativi* scelti i giocatori scelgono le loro strategie **indipendentemente** e **simultaneamente** (la contemporaneità non deve essere interpretata come strettamente temporale, infatti, basta che ciascun giocatore non conosca la decisione degli avversari prima di aver formulato la sua) e non sono consentiti accordi vincolanti o, in modo più restrittivo, comunicazioni di ogni tipo. I giochi scelti inoltre sono detti *one-shot* perché vengono affrontati una sola volta e quindi non esiste la possibilità di affinare le proprie strategie giocando ripetutamente allo stesso gioco.

Problema 1

Due compagnie aeree offrono entrambe un volo giornaliero diretto da Milano Malpensa a Hong Kong allo stesso prezzo. Una ricerca di mercato ha mostrato che il 70% dei passeggeri preferisce partire per Hong Kong la sera mentre il 30% preferisce partire la mattina. Dalle informazioni raccolte risulta inoltre che, essendo il prezzo del biglietto uguale, se i voli delle due compagnie avverranno entrambi di mattina o entrambi di sera le due compagnie si divideranno a metà gli utenti (entrambe le compagnie conoscono tale distribuzione delle preferenze della popolazione).

Le due compagnie dovranno decidere, entro la stessa data, l'orario di partenza del volo senza sapere quale sarà la scelta dell'altra. Una volta che avranno effettuato la scelta poi non potranno cambiarla per un lungo periodo di tempo (gli slot da Malpensa vengono assegnati una volta l'anno).

Se tu fossi uno dei dirigenti di una delle due compagnie, cosa proporresti di fare? (motivare adeguatamente la risposta)

Problema 2

Due differenti compagnie vendono lo stesso prodotto in un certo mercato. Supponiamo che né il prezzo di vendita del prodotto, né le vendite totali combinate di entrambe le compagnie varino di anno in anno e che vari solo la fetta di mercato che ciascuna compagnia riesce a catturare attraverso la pubblicità. Il budget stanziato per la pubblicità determina quindi la divisione del mercato, nell'ipotesi di messaggi pubblicitari di efficacia di diffusione proporzionale al costo.

Per semplicità supponiamo che ciascuna delle due compagnie abbia solo due scelte: spendere 6 milioni di Euro o spendere 10 milioni di Euro. I profitti di ciascuna compagnia dipenderanno dalla cifra scelta e dalla decisione dell'avversario:

- Se entrambe le compagnie spenderanno 6 milioni di Euro, ciascuna raggiungerà 5 milioni di Euro di profitto.
- Se una compagnia investirà 10 milioni di Euro quando la sua avversaria ne spende solo 6, allora i suoi profitti saranno di 8 milioni di Euro a spese della sua avversaria che quindi perderà 2 milioni di Euro.
- Se entrambe decidono di investire 10 milioni di Euro lo sforzo in eccesso viene sprecato e quindi le posizioni di ciascuna compagnia sul mercato rimangono le stesse e il profitto di ciascuna compagnia scende a 1 milione di Euro.

Dato che sono concorrenti, le due compagnie non lasceranno trapelare le loro scelte e quindi non ci saranno contatti o accordi tra queste.

Se tu fossi il responsabile per la pubblicità di una delle due compagnie come decideresti di comportarti? (motiva la tua risposta)

²⁵Un gioco è statico se i giocatori scelgono il loro piano d'azione una volta per tutte e simultaneamente. In un gioco dinamico invece i giocatori possono effettuare le scelte più volte durante lo svolgimento del gioco (anche dopo aver osservato le mosse degli altri giocatori). I giochi ad informazione completa sono quei giochi in cui i giocatori conoscono sia le mosse a disposizione, sia le possibili relative vincite di tutti i giocatori.

Problema 3

Consideriamo il seguente gioco: ci sono n giocatori e ciascuno deve scegliere un numero naturale tra 0 e 100. Vincerà € 1000 chi ha scelto il numero più vicino ai $2/3$ della media dei numeri scelti da tutti i giocatori. Non è concessa nessuna forma di comunicazione o discussione tra i giocatori. Quale potrebbe essere una buona scelta? (motivare la risposta)

Problema 4

Consideriamo un gioco in cui tu e una persona che non conosci dovete dividervi € 500 in biglietti da € 100. Le regole del gioco sono le seguenti: il tuo avversario ti farà una proposta di divisione e tu puoi accettare o rifiutare. Se accetti i 500 Euro saranno divisi nel modo proposto dal tuo avversario e il gioco finisce, mentre se non accetti dovrai fare tu una proposta di divisione, ma questa volta la cifra da dividere scenderà a € 200. Se l'altro giocatore accetta, allora il denaro sarà diviso come hai proposto, altrimenti nessuno otterrà nulla.

Non è concessa nessuna forma di comunicazione o discussione.

Quali potrebbero essere le tue scelte? (motiva la tua risposta)

2.5.2 Possibili soluzioni dei problemi scelti

2.5.2.1 Problemi 1 e 2

I primi due problemi sono facilmente affrontabili sia attraverso l'anticipazione delle possibili mosse (senza quindi fare intervenire conoscenze specifiche), sia utilizzando i diversi modelli proposti dalla teoria.

Il problema 1 può essere rappresentato in forma strategica²⁶ ed interpretato nei seguenti modi:

- I passeggeri in partenza alla sera (s) sono il 70% e quelli in partenza al mattino (m) sono il 30% , così se entrambi i voli partissero o di sera o di mattino le due compagnie si dovrebbero dividere nel primo caso il 70% dei passeggeri, e nel secondo il 30% dei passeggeri.

	s	m
s	35 35	70 30
m	30 70	15 15

²⁶ Si veda par.1.3

- Il 70% dei passeggeri preferisce partire alla sera (s) e il 30% al mattino (m), ma se questa possibilità non ci fosse allora possono partire o tutti al mattino o tutti alla sera (in questo modo il 100% dei passeggeri si dividerebbe a metà tra le due compagnie).

	s	m
s	50 50	70 30
m	30 70	50 50

In entrambe le versioni sia per la prima compagnia, sia per la seconda, la strategia s “domina” la strategia m : ossia se una compagnia sceglie s si assicura sempre un guadagno più elevato rispetto a quello che otterrebbe con m . Questa soluzione (s,s) è anche un equilibrio di Nash perché nessun giocatore trae vantaggio dal deviare da questa strategia²⁷.

Questo problema è stato proposto ad un solo soggetto perché, dopo aver analizzato tale protocollo²⁸, ci si è resi conto che la scelta era troppo immediata: la strategia “scegliere la sera” è infatti palesemente la migliore (qualsiasi sia la scelta dell’avversario) perché porta in ogni caso ad entrambe un guadagno maggiore.

Il problema 2 è una versione modificata del famoso dilemma del prigioniero²⁹ (uno dei problemi più studiato e testato). Le strategie possibili erano quindi prevedibili sulla base di studi sperimentali già effettuati e presenti in letteratura³⁰.

²⁷ Una coppia di strategie è un equilibrio di Nash se nessuno dei due giocatori ha interesse a deviare unilateralmente, quindi, nei casi sopra esposti, una coppia (X,Y) è un equilibrio di Nash se:

$(X,Y) \geq (X,y) \forall y \in \{\text{strategie del giocatore "colonna"}\}$

$(X,Y) \geq (x,Y) \forall x \in \{\text{strategie del giocatore "riga"}\}$

²⁸ L’analisi della risoluzione di questo problema effettuata da una dottoranda in matematica è riportata in appendice (IV).

²⁹ Una possibile formulazione del dilemma del prigioniero è riportata nella nota numero 59 a pag. 63

³⁰ “A familiar game is the prisoners’ dilemma (PD) In a PD, players are collectively better off if they all ‘cooperate’, but players privately prefer to ‘defect’, whether others cooperate or not. [] Many experiments have shown that players cooperate in a one-shot PD about half the time and contribute about half of their endowment in public resources games (Ledyard, J. (1995) In Handbook of Experimental Economics (Kagel, J. and Roth, A., eds) Princeton University Press; Sally, D. (1995) Conversations and cooperation in social dilemmas: a meta-analysis of experiments from 1958 to 1992. Rationality and Society 7, 58–92). Players who cooperate typically say they expect others to cooperate, which is consistent with the idea that cooperation is reciprocal (or ‘conditional’) rather than simply altruistic or rooted in moral principle” (Camerer, 2003a: p.227)

Questo problema può essere rappresentato in forma strategica nel seguente modo:

	6	10
6	5 5	-2 8
10	8 -2	1 1

Anche in questo caso la strategia 10 domina la strategia 6 per entrambi i giocatori e l'equilibrio di Nash è : 10,10³¹.

2.5.2.2 Problema 3

Il problema 3 (“beauty contest game”) è più difficile da gestire a livello cognitivo rispetto ai primi due problemi: le possibili tecniche utilizzabili nei primi due problemi infatti si complicano molto ed entrano in gioco processi esplorativi più articolati. Le possibili risposte date a questo problema da campioni eterogenei di persone sono stata studiate in molte ricerche³². La soluzione proposta dalla Teoria dei Giochi è “giocare il numero più piccolo possibile”: questa soluzione si può ottenere o applicando l'*eliminazione iterata delle strategie dominate*³³ o trovando l'equilibrio di Nash³⁴.

2.5.2.3 Problema 4:

All'inizio avevamo previsto di utilizzare anche il problema 4 perché è un gioco dinamico e quindi diverso dai precedenti, ma, dagli esperimenti condotti da Camerer³⁵ (oltre che dai miei primi test³⁶), era emerso che i risultati potevano essere troppo influenzati da convenzioni sociali o fattori affettivi. Questo fatto ha portato all'eliminazione quasi immediata del problema 4.

³¹ In questo gioco è interessante notare che se le compagnie decidessero **insieme** di cambiare le proprie scelte, migliorerebbero entrambe i propri guadagni.

³² Una ricca esposizione di risultati e ricerche su questo problema è stata esposta, oltre che in Camerer (2002,2003) anche in Bosch-Domenech e al. (2002).

³³ Supponendo che tutti i giocatori siano egualmente razionali allora tutti non sceglieranno un numero superiore a 66 (2/3 di 100); in questo modo la media non supererà 66 e quindi nessuno sceglierà un numero superiore ai 2/3 di 66 e così via. Iterando questo ragionamento, l'unico numero che rimane da scegliere è il più basso possibile dell'intervallo preso in considerazione (ossia zero).

³⁴ “ *if only integer are allowed there are several equilibria: in the case of $p=2/3$, in addition to the equilibrium “all choosing 0”, there is an equilibrium “all choosing 1” [quando $n \geq 4$]. This is a minor modification that does not change the game in a important way... (see Rafael Lopez, 2001)*” (Bosch-Domenech e al., 2002).

³⁵ Si veda: Appendice I

³⁶ Si veda: Appendice III

CAPITOLO 3: Prime analisi

Fase 1:

3.1 Prime analisi svolte con i metodi derivati dalla tesi di laurea

I primi protocolli sono stati analizzati mantenendo gli strumenti ed i criteri di analisi scelti nel lavoro di tesi di laurea: l'analisi è stata svolta utilizzando una tabella a due colonne, in cui in una colonna rimaneva la trascrizione dell'intervista e nell'altra appunto l'analisi.

Soggetto intervistato:

F: (dottoranda in Matematica che ha una conoscenza superficiale di teoria dei giochi)

PROBLEMA 2:

<ol style="list-style-type: none">1. F: (<i>Legge il testo fino al secondo punto</i>) cioè tutti gli anni c'è un certo prodotto ...che ha il 100% di quanto si vende (<i>scrive 100%</i>) cioè...eh (<i>guarda il testo</i>) le “vendite totali combinate” vuol dire quello, tutto il prodotto... non è che un anno se ne vende di più o di meno però si distribuiscono diversamente la fetta di mercato.2. O: sì.3. F: ok perfetto. Il prezzo di vendita del prodotto è lo stesso per le due?4. O: sì5. F: o forse è il seguito, non lo so...6. O: (le indico la seconda riga del testo e rileggo la parte in questione)7. F: ok, quindi è il prezzo di vendita per entrambe le compagnie cioè non si fanno concorrenza sul prezzo non è quello che devo arrivare...8. O: no	<ul style="list-style-type: none">• <i>Fino alla battuta 21 troviamo essenzialmente le reazioni del soggetto al testo proposto e la conseguente interpretazione dei dati forniti da quest'ultimo. Queste informazioni mi sono state utili per affinare la formulazione del testo per renderlo maggiormente chiaro³⁷.</i>
--	---

³⁷ Dopo questa intervista il testo del problema è stato modificato(si veda par.3.9):

- La parola “profitto” è stata sostituita da “guadagno” (concetto di più immediata comprensione)
- Sono stati eliminati i valori negativi (di perdita) perché influenzano i processi decisionali attivando reazioni emotive di disturbo: la situazione di perdita è stata sostituita con una di guadagno nullo.

Sono state inoltre sostituire alcune parole che davano una connotazione negativa alla situazione proposta con altre più “neutre”: ad esempio “scende” è stata sostituita con “si limita a”...

<p>9. F: ok, va bene. <i>(riprende a leggere il testo dalla terza riga e infine si ferma sulla parola pubblicità cerchiandola e dicendo:)</i> ok, immagino che sia questo il seguito. <i>(ricomincia a leggere e si ferma alla settima riga)</i> Ok, quindi o...faccio il bivio: o sei milioni o dieci milioni <i>(scrive le due possibilità e poi riprende a leggere fino all'ottava riga)</i> ah ok! Tra l'altro tu mi dici che il budget stanziato determina la divisione quindi immagino che più spendi più hai quota di mercato?</p> <p>10. O: sì</p> <p>11. F: però me lo spieghi bene poi...</p> <p>12. O: sì</p> <p>13. F: <i>(riprende a leggere fino al secondo punto)</i> ...e la sua avversaria ne prenderà solo due perché abbiamo detto che il totale è 10 milioni, ok...quindi è...eh...tra sei e dieci milioni quanto spendere...ah è più complicato dell'altro perché devi anche sottrarci quanto hanno speso per la pubblicità non è mattino e sera che non mi comporta...ma no, forse no, non lo so...va beh <i>(rilegge il secondo punto)</i>. Quando dici profitto non è già detratta la spesa della pubblicità...</p> <p>14. O: Nel profitto è già detratta.</p> <p>15. F: Non è solo la spesa di produzione.</p> <p>16. O: No</p> <p>17. F: Quindi non tengo conto poi effettivamente di questo sei e dieci è solo per individuare la scelta?</p> <p>18. O: sì</p> <p>19. F: ok sto anticipando troppo...<i>(comincia a leggere da dove aveva lasciato)</i>. Il profitto di ciascuna compagnia scende ad un milione di Euro? Ma no! Mi hai detto che...è costante!</p> <p>20. O: No, il profitto...quanto ci guadagnano...</p> <p>21. F: ah...allora...questo è difficile perché non mi tornano i conti. Adesso riprovo. Mi faccio una tabellina, c'è poco da fare. Ho di nuovo...ah scusami <i>(deve finire di</i></p>	<p>21. <i>Per il soggetto le difficoltà nel chiarirsi la situazione problematica proposta sembrano poter essere superabili attraverso una riscrittura delle varie</i></p>
--	---

<p><i>leggere il testo e lo fa ad alta voce).</i> ok. Qui non sono sicura di aver chiaro quindi ci sono sempre le due compagnie A e B (<i>scrive A e B</i>) e le due...quattro possibilità sono: sei e dieci, sei e sei, dieci - dieci e dieci - sei (<i>mentre parla scrive i numeri nella tabella</i>). Se vuoi puoi fare uno studio su come metto i casi...no veramente non ci capisco niente...scusa lo faccio nell'ordine che è lì se no impazzisco (<i>cancella la tabella e la riscrive seguendo il testo</i>). Se entrambe le compagnie spendono sei milioni ciascuna guadagnerà ..quindi facciamo profitto di A e profitto di B ...guadagnerà cinque milioni (<i>aggiunge alla tabella altre due colonne: P(A) e P(B) mettendo i profitti rispettivi</i>) che non vuol dire che vanno in meno uno...</p> <p>22. O: no</p> <p>23. F: questo cinque è... cinque più sei undici è il ricavato...</p> <p>24. O: se ne spende sei ne guadagna cinque</p> <p>25. F: guadagno, ricavo?</p> <p>26. O: no, non importa pensa che ne guadagna cinque, di quanti ne ha spesi non ce ne facciamo niente nel senso che se tutte spendono sei tutte e due guadagnano cinque</p> <p>27. F: vuol dire che ricavano di più ma poi tolti i sei della pubblicità gliene restano cinque</p> <p>28. O: Sì gliene restano cinque</p> <p>29. F: Ok... perché prima leggendo precisamente credo un certo dato...(<i>lo ricerca nel testo</i>) no forse leggendo il primo...no detto così è ovvio credo(<i>parte discussione sulla formulazione del testo</i>) ...(<i>ricomincia a scrivere la tabella</i>) Se una compagnia investe dieci e l'altra sei: il caso dieci-sei e il caso sei-dieci quella che ha speso dieci ne ricava otto e quella che ne ha spesi sei ne ricava due (<i>scrive otto e due e poi si ferma a rileggere il</i></p>	<p><i>possibilità proposte sotto forma di tabella numerica. La confusione sembra, infatti, venire dalla formulazione verbale del testo e quindi l'interpretazione corretta sembra poter emergere soltanto "ripulendo il testo" e riformulandolo usando una rappresentazione simbolico-numerica. Visto che questo soggetto ha seguito in passato un modulo di corso di teoria dei giochi, non possiamo affermare se questo atteggiamento nasca in lei come esigenza "istintiva" o solamente come reminiscenza dei modelli d'azione studiati ("reminiscenza" perché le rappresentazioni usate in teoria dei giochi sono leggermente diverse, anche se il fine per cui sono costruite è lo stesso).</i></p> <p>22-28...<i>dubbi e chiarimenti sul testo seguiti dalla costruzione di una tabella...</i></p>
---	--

<p>testo)...”<u>perderà</u> due milioni di Euro” cosa vuol dire “perderà”?</p> <p>30. O: che li perde</p> <p>31. F: Quindi meno due?</p> <p>32. O: sì</p> <p>33. F: ...ah... (<i>mette un meno davanti al due nella tabella</i>)</p> <p>34. O: ...vuol dire che ti batte e che vai in passivo</p> <p>35. F: Allora non bisognerà mai spenderne solo sei...aspetta però io qui ho dei problemi sul testo...(comincia a rileggere l'ultimo punto) quindi vuol dire che è (<i>scrive sulla tabella</i>) uno e uno, non è col negativo qua. Ok?</p> <p>36. O: ok</p> <p>37. F:</p> <ul style="list-style-type: none"> • quindi le situazioni sono queste (<i>guarda la tabella che ha scritto e commenta</i>): alla peggio perdono due milioni di Euro alla meglio se ne guadagnano otto (<i>pausa di qualche secondo</i>)... <p>• perché non dovrebbe essere meglio comunque provare col dieci?</p>	<p><i>La parola “perderà” mette “in allarme” il soggetto che, dopo aver avuto conferma di come tradurre in valore numerico questa espressione, esprime la sua intenzione di evitare in ogni modo l’avverarsi di tale prospettiva (35). Il rendersi conto dell’esistenza di questa possibilità (ossia di perdere del denaro) innesca una reazione immediata che produce una decisione che sembra non tenere conto dei fattori di interazione strategica (le possibili decisioni dell’avversario), ma essere solo guidata dal tentativo di sfuggire al valore negativo.</i></p> <p>37.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>La tabella diventa il testo di riferimento e quindi la situazione problematica stessa su cui ragionare. Questa è la traduzione del problema da un linguaggio verbale ad uno grafico-simbolico (tabelle e numeri). La tabella costruita ha quindi lo scopo di rappresentare e “congelare” nel presente tutte le situazioni possibili attraverso una disposizione visiva che mettesse in relazione i diversi valori numerici presentati. Il quadro delle situazioni possibili è analizzabile nella sua completezza attraverso la tabella e quindi la sua analisi comincia a prendere forma: individuare la situazione migliore e quella peggiore avendo però come obiettivo evitare il negativo. Le sue preferenze sono tradotte nell’ordine di grandezza dei valori scritti sulla tabella e la sua strategia non è massimizzare il suo guadagno, ma perdere il meno possibile.</i> • <i>Da ora in poi cercherà di capire se la sua intuizione espressa nella (35) è stata corretta (esplorazione goal-oriented) e per far questo parte analizzando le conseguenze della scelta “da scartare”.</i>
---	---

<ul style="list-style-type: none"> • <i>(pensa guardando la tabella) ...in fondo se io sono...per comodità mi metto sulla colonna B perché sono messi in ordine meglio...</i> • perché non dovrei...ho capito perché non dovrei...perché non dovrei dire sempre dieci? • Con dieci non rischio mai il negativo... • Ora sto lavorando molto nel confronto con il (problema) precedente in realtà non so se è una cosa che ti devo dire...che volevi o...non so se è previsto per tutti che li facciano a distanza ravvicinata <p>38. O: no</p> <p>39. F: ok però sono profondamente influenzata</p> <p>40. O: sono due problemi diversi...</p> <p>41. F: io vedo questo come la versione complicata del precedente</p> <p>42. O: in che senso?</p> <p>43. F: nel senso che è meno evidente la scelta anche perché non c'è quell'ordinamento bello che c'era nelle utilità...nell'altra c'era comunque una situazione per cui i due valori...le scelte per le due</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Si può notare che il soggetto risolutore sia nella fase di elaborazione sia in quella di giustificazione delle sue scelte appoggia e struttura le sue argomentazioni attraverso l'uso della tabella. Questa quindi non solo svolge la funzione di rappresentare tutte le possibili eventualità proposte dal problema, ma diventa la struttura, lo scheletro, su cui lavorare per esplorare, e successivamente controllare, le diverse strategie possibili.</i> • <i>Partendo appunto dalla visualizzazione dei dati presenti nella tabella si cominciano a vedere i germogli dei tentativi di esplorazione introdotti verbalmente attraverso la formulazione di domande "aperte".</i> • <i>Queste esplorazioni non vengono però esplicitate verbalmente, ma sembra comunque che queste siano di carattere visivo (tempo presente) sulla tabella: la visualizzazione che la scelta "sei" può portare al valore negativo.</i> • <i>Il soggetto continua a pensare in silenzio, ma poco dopo svela che stava cercando di lavorare ricalcando le scelte fatte nel problema proposto in precedenza (problema 1). Purtroppo questi condizionamenti (rumori) non dovrebbero verificarsi in modo così accentuato, ma in questo caso specifico l'estrema vicinanza delle due risoluzioni ha portato a questa situazione. Bisogna però notare che questo tentativo di ricondursi ad una situazione già esperita rimarca la tendenza del soggetto, già osservata in precedenza, di privilegiare l'esplorazione ambienti spazio-temporali presenti e passati.</i> <p>43.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>In questa battuta il soggetto esprime, stimolato dalla richiesta, parte dei ragionamenti, probabilmente già effettuati mentalmente, per trovare delle similitudini tra i due problemi.</i>
---	--

<p>aziende sono due no? nell'altro caso la scelta sconveniente portava sicuramente in entrambi i casi indipendentemente dalla scelta dell'altra compagnia ad avere risultati minori rispetto alle due scelte convenienti quindi non c'era effettivamente ragione per scegliere la scelta sconveniente, giusto? Cioè in sostanza il problema è che non sono ordinati bene questi valori...</p> <p>44. O: cioè la simmetria c'è, ma non c'è...</p> <p>45. F:</p> <ul style="list-style-type: none"> • non c'è la simmetria dei casi estremi...mentre prima con dieci e dieci avrei avuto cinque e cinque e quindi non ci sarebbe stato motivo per non scegliere il dieci adesso hai una cosa che è sensibilmente minore rispetto a tirare a sei e sei ... <p>• alla luce di tutto questo...</p>	<p><i>Il parallelo inizia rievocando la situazione problematica precedente non entrando però nei particolari ossia ripercorrendo solo il ragionamento generale effettuato probabilmente senza ricordare i dati numerici in gioco. Nell'ultima frase però sembra intervenire il ricordo visivo dei dati nella tabella che, non essendo sovrapponibile a quelli sotto osservazione, la porterà ad un'analisi più fine del parallelo tra i problemi.</i></p> <p>45.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Questa serie di osservazioni sembrano essere elaborate sul momento dal confronto tra parallelo tra i dati nella tabella osservata (presente della risoluzione) e la rievocazione (mentale) dei dati appartenenti alla tabella costruita per l'altro problema (passato). Questo tipo di attività, sempre basata su immagini visive (reali o rievocate), è possibile perché in entrambi i casi il soggetto si è appoggiato allo stesso tipo di rappresentazione che in questo caso presenta una struttura simile e, per questo, confrontabile. Dal punto di vista delle dinamiche temporali questo processo che si svolge tra presente e "passato ricordato" è interessante perché non può essere classificato né come rievocazione di eventi passati, né come applicazione di schemi comportamentali acquisiti, né come semplice controllo di azioni svolte. Questa attività di controllo in parallelo su due piani temporali diversi fa quindi parte di un altro tipo di gestione del tempo interno che in questo caso è stimolata e supportata dalla presenza di una rappresentazione grafica che ne facilita la gestione: la tabella.</i> • <i>La sovrapposizione però fallisce: questo porta all'abbandono del confronto con il problema precedente e quindi ad un ritorno alla situazione</i>
--	--

<ul style="list-style-type: none"> • sapendo sempre che l'altro ragiona come me... (<i>guarda la tabella</i>) • il problema è sempre che se io dico "no va beh spen..." (<i>si ferma a pensare per qualche secondo</i>) • mi dà l'idea che a meno di un accordo non ci sarà mai altro se non la situazione dieci-dieci • sì perché la situazione dieci/dieci...mettiamoci sulla colonna B la situazione dieci-dieci, la scelta di dieci mi dà la sicurezza di evitare il meno due...però adesso sto ragionando in maniera molto intuitiva...la cosa che voglio veramente evitare è il meno due, non voglio mai il negativo. Quindi questo mi consente almeno quello... • ovviamente però anche l'altra compagnia farà lo stesso ragionamento e quindi probabilmente ci troveremo con uno. In quel senso ti ho detto che secondo me sarà sempre uno-uno ... • però d'altra parte cosa faccio se io dico "no magari tutti e due facciamo questo ragionamento...giochiamo sei"...poi l'altro può dire ma io...cioè non potendo controllare l'avversario io sceglierei dieci per essere sicura di non ...di non andare in perdita. <p>46. O: ok</p>	<p><i>problematica presente.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Frase chiave per l'innesco di esplorazioni dei possibili futuri possibili determinati dalle decisioni congiunte dei due giocatori.</i> • <i>Anticipazione non completamente espressa a parole che però denota una costruzione ipotetica delle azioni come se fossero vissute come in prima persona</i> • <i>Esponde solo conclusione senza spiegare esplicitamente il ragionamento che ha seguito. La conclusione è però probabilmente influenzata (in modo più o meno conscio) dai ricordi che il soggetto possiede della teoria dei giochi.</i> • <i>Ora è sicura della sua scelta e la argomenta servendosi naturalmente della tabella (anche qui ritroviamo un comportamento molto probabilmente acquisito nel corso di Teoria dei Giochi, ma che sembra essere stato assimilato come proprio).</i> • <i>Continua la sua argomentazione spostando il suo ragionamento per simmetria "visiva" sull'altra colonna e quindi sull'altra compagnia (bisogna notare che anche in questo caso i ragionamenti si articolano nel presente della risoluzione appoggiandosi alla tabella).</i> • <i>A questo punto ricontra il suo ragionamento complessivo: questa volta però ricostruisce il suo ragionamento attraverso la simulazione congiunta dei possibili ragionamenti suoi e dell'avversario quasi come in una rappresentazione teatrale. Rimane in questa battuta la traccia della costruzione di un futuro virtuale ("scegliere sei") che però viene subito abbandonato perché il risultato finale non è completamente controllabile dal soggetto e che</i>
---	--

<p>47. F: ma qui interviene anche un qualcosa di personale? Cioè non c'è una scelta giusta o sbagliata?</p> <p>48. O: Infatti...</p> <p>49. F: ..ci sono scelte più o meno rischiose.</p> <p>50. O: sì, non c'è una soluzione...</p> <p>51. F: A te interessano le motivazioni?</p> <p>52. O: sì</p> <p>53. F:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Qui ti dico chiaramente che interviene un mio fattore personale per cui a me non piace il rischio, io piuttosto che rischiare il negativo rinuncio ad un grande guadagno • consapevole del fatto che magari un altro potrebbe...però così perlomeno...sai perché ...anche perché io dico va beh io sono fifona voglio fare la scelta dieci nella migliore delle ipotesi l'altro è uno che se la rischia e sceglie sei e per me va molto bene, se invece l'altro è un fifone come me sceglie dieci e va beh no ci ho perso niente. <p>54. O: ok</p> <p>55. F: ho evitato la situazione meno due che ti dicevo prima.</p>	<p><i>quindi presenta la possibilità di cadere nel “futuro vietato” della perdita. L'unico futuro permesso è dato dalla scelta rimanente.</i></p> <p>47-51</p> <p><i>Cerca di avere conferma del fatto che la sua sia una scelta “corretta” e, appurato questo, si sente libera di condividere con me le sue riflessioni sulle sue scelte.</i></p> <p>53.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Ri-analizza la sua decisione producendo delle giustificazioni di carattere affettivo affiancate però alla consapevolezza dei limiti di questo tipo di azione.</i> • <i>Sa però che la formulazione della sua scelta pur avendo radici nella sua “visione del rischio” è anche condivisibile e giustificabile: Per questo motivo ricostruisce di nuovo i possibili esiti della sua scelta (questa volta parte dalla sua scelta ed esplora il “futuro”) questa volta modulando la costruzione delle possibili azioni e reazioni dell'avversario non solo attraverso una valutazione del guadagno finale, ma aggiungendo le possibili motivazioni “emotive” che dovrebbero governarne le azioni.</i> • <i>Ribadisce la motivazione della sua scelta</i>
---	---

3.2 L'intervista di Sam: un protocollo significativo

In questo paragrafo riporteremo la prima parte (lo sviluppo della risoluzione nel caso $n=2$)³⁸ dell'analisi dell'intervista realizzata con un dottore di ricerca in Matematica (Sam) alle prese con il "beauty contest game". Tale intervista è stata determinante nel nostro lavoro perché i tentativi di analisi svolti per interpretare i comportamenti di Sam durante la risoluzione del problema hanno contribuito ad affinare i criteri e gli strumenti interpretativi precedentemente utilizzati.

Soggetto intervistato:

Sam (Matematico, non conoscitore della Teoria dei Giochi, già intervistato ed analizzato per il mio lavoro di tesi di laurea)

<p>2) S: (<i>legge il testo ad alta voce fermandosi quando incontra l'intervallo numerico da considerare</i>) posso scrivere direttamente qui? (<i>indica la parte bianca del foglio sotto il testo</i>).</p> <p>3) O: dove vuoi tu.</p> <p>4) S:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tra zero e cento ... n giocatori (<i>scrive "n"</i>) ... tra zero e cento compresi? (<i>scrive "0-100"</i>) • boh, leggiamo (<i>ricomincia a leggere il testo</i>) ...bello...(continua a leggere) non è concesso...bello perché non ho la più pallida idea di come si risolve (<i>legge il testo fino alla fine</i>). 	<ul style="list-style-type: none"> • Riconoscimento dei "dati del problema": si attiva subito lo schema di comportamento appreso che consiste nell'isolare e trascrivere subito questi dati numerici (atteggiamento culturale). Questo primo approccio al problema risulterà determinate per l'impostazione di tutta la strategia risolutiva perché il concetto di intervallo dei numeri, che qui è evocato, sarà alla base di tutti i processi esplorativi innescati dal soggetto. • Non riconosce nel testo tipologie simili di problemi già incontrati, quindi in questo passaggio mentre legge il testo probabilmente effettua in parallelo continue ricerche in memoria di situazioni problematiche simili. L'attività di lettura/comprendimento del testo svolta nel presente è affiancata da istantanei tentativi
---	--

³⁸ L'analisi completa dell'intero protocollo è riportata nel par. 3.5.

<ul style="list-style-type: none"> • S: Quale potrebbe essere una buona scelta per vincere? Allora vince (<i>guarda il testo</i>) chi ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media dei numeri scelti da tutti ... quindi da tutti compreso lui? <p>5) O. sì. 6) S:</p> <ul style="list-style-type: none"> • da tutti compreso lui...(<i>rilegge il testo</i>) vince colui che ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media...e ci sono enne giocatori...enne... <ul style="list-style-type: none"> • quindi <u>potrebbero</u> anche sceglierlo tutti uguali perché non c'è nessuna forma di accordo...uh...boh... <ul style="list-style-type: none"> • niente devo fare una cosa semplice non vedo soluzioni...proviamo con $n=2$, due giocatori (<i>scrive "n=2"</i>) 	<p>di collegare questa nuova situazione problematica ad una già vissuta. Questo modus operandi rispecchia l'atteggiamento comune nell'uomo di tentare come prima cosa di non spendere troppe nuove energie cognitive per svolgere compiti già affrontati. Il primo "istinto" è di cercare di accomodare schemi d'uso precedentemente elaborati in frame simili.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Riprende il testo guidato dall'intenzione di trovare la regola che determina la richiesta del testo. La seconda lettura del testo è fatta per analizzare le parti non approfondite in precedenza a causa della forte attenzione verso i dati numerici. Questo tipo di attività potrebbe essere paragonata allo spostamento di un cursore su un array di dati effettuato per salti guidati dalla ricerca di parole chiave (come in questo caso la parola "vince"). • Continua l'elaborazione/comprendimento del testo e quindi della situazione problematica. Ripete spesso "n" perché probabilmente è questo lo scoglio che gli impedisce di immaginare la situazione problematica nei suoi sviluppi. Questa apparente non determinatezza del numero dei giocatori infatti non sembra permettergli di sviluppare mentalmente i conti necessari per arrivare a determinare la media. • Aggira l'ostacolo prendendo in considerazione il caso in cui il numero dei giocatori è ininfluenza per la determinazione della media: ossia il caso in cui tutti i giocatori scelgono lo stesso numero. Da questo passaggio quindi risulta chiaro che è proprio la generalità del numero dei giocatori l'ostacolo che non gli permette di elaborare una strategia. • Sceglie di eliminare questa variabile "scomoda" fissando un valore di "n" partendo con ordine dal caso più semplice. È interessante notare le parole usate da Sam: "non vedo soluzioni". Come vedremo in seguito, e come si poteva già
---	--

<ul style="list-style-type: none"> • due giocatori...due giocatori...eh?due giocatori (<i>pensa guardando in alto</i>) mi sta venendo in mente...dunque, due giocatori <u>sono</u> tutti e due equidistanti dalla media, il primo gioca diciamo a_1 (<i>scrive "a₁"</i>) e l'altro a_2 (<i>scrive "a₂"</i>) la media è $\frac{a_1 + a_2}{2}$ (<i>scrive mentre parla</i>) ...eh... • (<i>riguarda il testo</i>) più vicino ai due terzi della media... • i due terzi della media, i due terzi della media è <u>...dove sta?</u> Tra... • cioè è più piccolo della media, due terzi... 	<p>intuire da questi primi passaggi, il risolutore sta cercando di immaginare/vedere una possibile modellizzazione della situazione problematica presentata.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dopo aver fissato il numero dei giocatori finalmente può costruire un suo modello della situazione problematica. Questo sarà lo scheletro su cui potrà appoggiare e quindi sviluppare le sue dinamiche mentali. Anche se fissa i passaggi che sta affrontando usando il linguaggio algebrico, continua però a ragionare sul modello grafico: mentre spiega infatti usa termini "visivi" (ad esempio "distante" o la domanda successiva "dove sta?"). La rappresentazione algebrica è "vuota" slegata dalla semantica del concetto di media da lui scelta (equilibrio/simmetria su una retta di numeri) e per questo viene abbandonata. Lui ha fissato nella sua mente un modello della situazione problematica su cui sta lavorando in modo più o meno esplicito mediante un'esplorazione ascendente dai dati forniti dal problema verso la soluzione possibile di questo. La scelta del modello in questione è stata probabilmente favorita dal risalto dato all'intervallo numeri in cui si potevano scegliere i numeri, ma, è anche probabilmente legata ad una predisposizione personale del soggetto: anche in altri problemi (quelli proposti nella tesi di laurea) infatti ha preferito l'approccio grafico ed una "interpretazione dinamica" dei dati. • Il testo continua però ad essere il riferimento concreto (nel presente della risoluzione) a cui rivolgersi visto che non ha ancora scritto molto. • Traduzione di dati del testo nel suo modello mentale (questo ormai è presente e stabile nella sua immaginazione come il testo scritto lo è nel presente condiviso). • Arriva a visualizzare la traduzione del fatto che $\frac{2}{3}$ di un numero è inferiore al numero stesso: passaggio tra aritmetica e
--	--

<ul style="list-style-type: none"> • loro sono equidistanti dalla media, due terzi è più piccolo della media quindi vince chi ha dato il numero più basso. • Dovrei fare i conti però mi pare evidente. • Allora abbiamo due numeri, chi dà il numero più vicino ai due terzi della media...due terzi della media è più basso della media, loro sono equidistanti...se vuoi ti faccio una rappresentazione grafica (<i>comincia a disegnare</i>) qui abbiamo a_1, qui a_2 e questa è la media (<i>scrive quello che dice disegnando i punti nell'ordine dato dal pedice come se appartenessero ad una retta, anche se non la traccia esplicitamente, ed in mezzo mette il "punto media" M</i>) due terzi della media sta di qua (<i>fa un segno che parte da M e va indietro verso sinistra verso a_1 e quindi suppone che il primo sia un numero inferiore al secondo</i>) e quindi vince a_1. • A meno che a_1 sia uguale ad a_2 e allora vincono tutti e due e qui va beh spartiscono...qui non c'è scritto cosa succede...a questo punto qual è la strategia vincente se ci sono due giocatori? • A parte che non c'è scritto se loro sanno quanti giocatori sono... 	<p>rappresentazione grafica dei numeri.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sintetizza i passaggi salienti della sua risoluzione (ricordo ascendente del processo) e li lega in modo chiaro la richiesta del testo. • Il suo ragionamento si basa sulla rappresentazione delle possibili scelte come punti appartenenti ad un segmento di punti ordinati (modello matematico della retta dei numeri reali) e non sui conti aritmetici quindi sottolinea il fatto che per certificare la sua risposta dovrebbe affidarsi all'algebra. Per questo motivo ci ripensa e sceglie di controllare il suo ragionamento. • Effettua un controllo ascendente (presente e passato prossimo vengono quindi a sovrapporsi nella sua mente) sul suo ragionamento cercando di condividere in modo esplicito sia le strutture che ha utilizzato, sia il ragionamento seguito. (dinamica interno-esterno con funzione di controllo). Bisogna notare che solo adesso esplicita il modello che ha utilizzato proponendolo solo come rappresentazione grafica. • Durante il controllo strutturato e ragionato del suo ragionamento, si rende conto dell'esistenza di casi limite da analizzare (rifinisce la strategia). In questo caso la sistematizzazione di un modello, che è servito per sostenere la messa in atto di processi esplorativi, mette in luce aspetti della situazione problematica lasciati in ombra precedentemente. (c'è quindi un affinamento dell'analisi del problema). • Sempre nella fase di rifinitura della strategia si innesca una fase di rielaborazione critica del testo in cui ci si
---	--

<p>7) O: sì lo sanno. 8) S: non c'è scritto, potrebbero non saperlo...</p> <ul style="list-style-type: none"> • allora mettiamo che lo sappiamo...se lo sanno conviene puntare il minimo numero. Zero non so se è possibile... <p>9) O: sì, sono compresi gli estremi. Possono essere compresi come no, ma tanto è uguale... 10)S: allora se sono due conviene puntare zero.</p>	<p>assicura di non aver lasciato “casi scoperti”.</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Salto</u> cognitivo in avanti: ora che la situazione problematica è chiarita e sotto controllo attraverso la sua rielaborazione in un modello grafico-numerico, generalizza il suo ragionamento. Il tutto si palesa con la comparsa della parola “minimo” che ha sostituito espressioni come “il più basso” (tra i due). • Enunciazione definitiva della sua strategia
---	--

3.3 Limiti delle analisi svolte

Il metodo di analisi su due colonne si è rivelato limitante: la complessità dei processi esplorativi coinvolti risultava infatti “appiattita” da un’analisi complessiva del processo risolutivo. Per analizzare lo sviluppo delle diverse componenti dei processi esplorativi messi in atto da Sam, era necessario individuarne e studiarne le caratteristiche specifiche: per far questo ci siamo avvalsi degli strumenti interpretativi esposti nel par. 1.1 (Frame, schemi e tempi interni).

L’analisi di questa intervista ha fatto quindi scaturire l’esigenza di portare avanti un’analisi dei comportamenti di Sam separata per tipologie di “lenti” interpretative: apertura di frame, attivazione di schemi e sviluppo di dinamiche temporali. Tale necessità è stata generata da diversi fattori in parte dovuti alla tipologia del problema, il beauty contest implica infatti una produzione di esplorazioni più complessa rispetto ai problemi 1 e 2 (già parzialmente strutturati nella formulazione del testo), e in parte alla particolare risoluzione messa in atto da Sam. Per affrontare le difficoltà insite nel problema (costruzione di un modello della situazione problematica e gestione della situazione di interazione strategica), infatti, Sam ha utilizzato le conoscenze ed abilità acquisite in campo matematico (in particolare nell’attività di problem solving), mostrando come queste potessero strutturare lo sviluppo di processi esplorativi complessi.

Fase 2:

3.11 Nuova impostazione dell'analisi

Come sottolineato nel paragrafo precedente, le nuove analisi dovevano dare la possibilità di isolare le interpretazioni legate ai diversi strumenti di analisi in nostro possesso (*frame*, *schemi* e *dinamiche temporali*). In questo modo potevano essere messe in luce quelle particolarità dei processi che nelle prime analisi erano rimaste nascoste o poco evidenziate. La nuova analisi del protocollo di Sam si è così svolta individuando prima separatamente le attività di apertura di *frame*, attivazione di *schemi* e gestione dei *processi temporali*, e poi effettuando un'interpretazione dei processi risolutivi che tenesse conto contemporaneamente di questi differenti, ma interconnessi, processi. Per effettuare tutto questo abbiamo utilizzato la seguente tabella a quattro colonne (compilando le diverse colonne come specificato nei titoli di ciascuna):

Frame e schemi attivati	Gestione dei tempi interni	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
--------------------------------	-----------------------------------	--	--------------------------

La tabella permette un'analisi fine attraverso gli strumenti interpretativi scelti delle differenti componenti dei processi di pianificazione e sviluppo delle strategie risolutive messe in atto dai soggetti. Questo tipo di sistemazione dell'analisi ha inoltre facilitato il confronto tra le risoluzioni dei diversi soggetti in base alla tipologia di dinamiche temporali sviluppate e alle conoscenze utilizzate.

3.12 Nuova analisi del protocollo di Sam

Strumenti di analisi: Frame , Schemi e Tempi Interni.

L'analisi si svolge dalle Macro alle Micro strutture attivate: prima viene individuata l'apertura dei frame collegati ai concetti (ri)conosciuti dal soggetto risolutore, poi l'innescio degli schemi d'azione ad essi collegati ed, infine, è analizzata la loro gestione attraverso lo sviluppo complesso di processi di anticipazione e ricordo (analisi tempi interni).

Frame e schemi attivati	Gestione dei tempi interni	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
Apertura del FRAME collegata al ricordo del concetto di "Intervallo di numeri".	Comprensione del testo nel <u>presente</u> su cui si innesta in parallelo un <u>comportamento appreso</u> . (dinamica esterno-interno che lega presente e memoria)	<p>11) S: <i>(legge il testo ad alta voce fermandosi quando incontra l'intervallo numerico da considerare)</i> posso scrivere direttamente qui? <i>(indica la parte bianca del foglio sotto il testo).</i> O: dove vuoi tu. 12) S:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tra zero e cento ... n giocatori <i>(scrive "n")</i> ... tra zero e cento compresi? <i>(scrive "0 - 100")</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • I dati numerici o comunque variabili indicanti quantità precise sono le cose che inizialmente attraggono l'attenzione del risolutore. Questo passaggio può essere scomposto in una dinamica esterno-interno dal testo scritto (numeri, parole e simboli) al passato interno del soggetto (concetti "appresi") e nel successivo innescio del frame "intervallo di numeri". Il numero dei giocatori e le possibili scelte sono dati "riconosciuti" come importanti: per questo si attiva subito lo schema di comportamento che consiste nell'isolare e trascrivere subito queste informazioni (atteggiamento culturale probabilmente legato alla pratica nella risoluzione di problemi aritmetico/geometrici). È da notare che l'aver focalizzato l'attenzione sull'intervallo dei numeri risulterà

<p>Fallimento ricerca di schema conosciuto da adattare alla situazione problematica</p>	<p>Probabili scambi biunivoci tra situazione problematica presente e background culturale che però non portano all'individuazione di schemi d'azione simili memorizzati. Questo passaggio tra presente e passato remoto si è innescato attraverso l'apertura di un frame, ma si interrompe quando il risolutore non trova all'interno di quest'ultimo un sotto frame o degli schemi specifici collegabili a questa particolare situazione problematica.</p> <p>La domanda del problema innesca un processo di esplorazione guidato dall'algoritmo di operazioni numeriche spiegato nel testo. Questo processo esplorativo proiettato nel futuro però non sembra ricostruire l'evoluzione di una possibile situazione di gioco (dalle scelte al risultato), ma parte con l'analisi della situazione finale: chi vince. S. quindi comincia a ragionare sulla situazione problematica partendo dallo stato finale per poi forse cercare di costruire a ritroso i passaggi che la hanno determinata (esplorazione discendente). L'esplorazione è bloccata probabilmente per la mancanza di dati o schemi su cui innestare tale processo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • boh, leggiamo (<i>ricomincia a leggere il testo</i>) ...bello... (<i>continua a leggere</i>) non è concesso...bello perché non ho la più pallida idea di come si risolve (<i>legge il testo fino alla fine</i>). • Quale potrebbe essere una buona scelta per vincere? Allora vince (<i>guarda il testo</i>) chi ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media dei numeri scelti da tutti ... quindi da tutti compreso lui? 	<p>poi determinate per l'impostazione di tutta la successiva strategia risolutiva.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Non riconosce nel testo tipologie simili di problemi precedentemente affrontati e, per questo, mentre legge il testo, effettua in parallelo continue ricerche in memoria di situazioni problematiche simili (attività di lettura/comprendimento del testo svolta nel presente e affiancata da istantanei tentativi di collegare questa nuova situazione problematica ad una già vissuta). Questo modus operandi è comune quando si affrontano problemi nuovi: il primo "istinto" è infatti di cercare di accomodare schemi d'uso precedentemente elaborati in frame simili per non spendere troppe nuove energie cognitive per svolgere compiti già affrontati. • Riprende il testo guidato dall'intenzione di trovare la regola che determina la richiesta del testo. La seconda lettura del testo è fatta per analizzare le parti non approfondite in precedenza a causa della forte attenzione verso i dati numerici. Questo tipo di attività potrebbe essere paragonata allo spostamento di un cursore su un array di dati: gli spostamenti sono guidati dalla ricerca di parole chiave che, in questo caso, identifichiamo con la parola "vince".
---	--	--	--

<p>Apertura del frame legato al concetto di media che si interseca con il frame precedentemente aperto. Al suo interno si attiva lo schema “media di numeri”</p>	<p>Ritorna la testo (presente) per cercare informazioni da sfruttare per strutturare una strategia; mentre rilegge il testo si ferma sulla parola “media”: questa apre il frame media (dinamica esterno- interno). S. inizia un'altra fase esplorativa proiettata nel futuro cambiando strategia: questa volta sembra voler applicare l'algoritmo media. L'esplorazione però è bloccata dalla difficoltà del soggetto a svolgere mentalmente i passaggi legati all'attuazione dello schema “media di numeri” per un numero non specificato di addendi (infatti si ferma e ripete più volte “n”). Ci sono quindi troppi possibili futuri virtuali dati dalla generalità della variabile “n”.</p> <p>Continua processo di esplorazione_ solo dopo aver scelto uno specifico futuro virtuale: il caso in cui la variabile “n” non influisce sul calcolo della media (conoscenza dell'algoritmo di calcolo “elimina” l'esplorazione di un caso). Il tempo verbale utilizzato dal soggetto (condizionale) conferma la fase di generazione della congettura immersa nel futuro episodico che però non progredisce perché il caso particolare scelto non permette una generalizzazione sulla variabile “n”.</p> <p>Ritorno al Presente della risoluzione: comportamento scaturito dalla necessità di superare</p>	<p>O: sì. 13) S:</p> <ul style="list-style-type: none"> • da tutti compreso lui... <i>(rilegge il testo)</i> vince colui che ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media...e ci sono <i>enne</i> giocatori...enne... • quindi <u>potrebbero</u> anche sceglierlo tutti uguali perché non c'è nessuna forma d'accordo...uh...boh... • niente devo fare una cosa semplice non vedo soluzioni...proviamo con <i>n=2</i> due giocatori <i>(continua)</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Continua l'elaborazione/comprendimento del testo e quindi della situazione problematica. S sta cercando di immaginare come svolgere il calcolo richiesto per determinare il vincitore. Ripete spesso “n” perché probabilmente è questo lo “scoglio” che gli impedisce di immaginare la situazione problematica nei suoi sviluppi. Questa “apparente” non determinatezza del numero dei giocatori non gli permette infatti di sviluppare mentalmente i passaggi necessari per arrivare a determinare la media (troppe variabili diverse da gestire contemporaneamente). • Aggira l'ostacolo (numero non precisato di giocatori) prendendo in considerazione il caso in cui il numero dei giocatori è ininfluente per la determinazione della media: ossia il caso in cui tutti i giocatori scelgono lo stesso numero. Da questo passaggio quindi risulta chiaro che l'ostacolo che non gli permette di portare avanti la sua esplorazione è proprio la generalità del numero dei giocatori. • Sceglie di eliminare questa variabile fissando un valore di “n” partendo con ordine dal caso più semplice: $n=2$. È interessante notare
--	--	---	---

<p>Come espliciterà in modo chiaro nelle seguenti battute, S., rimanendo sempre nel frame “intervallo di numeri”, sceglie di utilizzare la rappresentazione delle due possibili scelte sulla “retta di numeri reali”. Il concetto di media viene trattato mentalmente attraverso lo schema del bilanciamento sulla retta, anche se inizialmente viene esplicitato su foglio attraverso la rappresentazione algebrica.</p>	<p>un momento di blocco nell’esplorazione e guidato dall’esperienza nell’approccio a problemi matematici di congettura e dimostrazione in algebra. Si elimina la confusione generata dalla presenza di troppi futuri possibili indagandone uno solo: il caso in cui ci sono due giocatori.</p> <p>S. “costruisce” il suo modello della situazione problematica nel frame intervallo di numeri e nello specifico caso $n=2$ (quindi immagina una coppia di numeri appartenente all’intervallo $[0,100]$ e la loro media sulla retta). Il processo di anticipazione rimane nascosto (dato che non è esplicitato attraverso il linguaggio), ma la sua presenza è rilevabile sia dall’atteggiamento durante il silenzio, sia dalla produzione successiva. È interessante notare che una volta immaginato il modello S. lo terrà continuamente presente nella sua mente come se fosse sotto i suoi occhi scritto su foglio. (presente interno-presente condiviso).</p> <p>Continua il processo di interpretazione delle richieste del problema nel modello di rappresentazione scelto si traduce nell’analisi del</p>	<p>$n=2$, due giocatori (<i>scrive “$n=2$”</i>)</p> <ul style="list-style-type: none"> • due giocatori...due giocatori...eh?due giocatori (<i>pensa guardando in alto</i>) mi sta venendo in mente... • dunque, due giocatori <u>sono</u> tutti e due equidistanti dalla media, 	<p>semplice: $n=2$. È interessante notare che le parole “non vedo soluzioni” rivelano il riconoscimento del motivo del blocco da parte di S. ed infatti sono seguite dalla successiva ricerca di un altro schema da applicare. Per far questo S. deve immaginare una possibile modellizzazione della situazione problematica presentata. Non ricordando schemi conosciuti da applicare, S. deve costruirne uno nuovo adatto per la manipolazione dei dati forniti dal problema. S. sente il bisogno di fissare un dato numerico per concretizzare i possibili passaggi da effettuare e scegliere gli strumenti interpretativi a lui più congeniali per trattare il problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dopo aver fissato il numero dei giocatori finalmente può costruire un suo modello della situazione problematica. Questo sarà lo scheletro su cui potrà appoggiare e quindi sviluppare le sue dinamiche mentali. Il fatto che i numeri da gestire siano due dà a S. la possibilità di vedere delle relazioni tra questi che per ora non esplicita ancora (simmetria). • A questo punto fissa i passaggi che sta affrontando usando il linguaggio algebrico anche se sta ragionando su un altro modello di tipo grafico: infatti, mentre spiega, usa termini
---	--	---	---

	<p>parallelo tra le relazioni date dal testo sui numeri scelti e le corrispondenti relazioni tra i punti della retta. Il tempo verbale usato da S. da qui in poi sarà il presente, ma è importante notare che questo tempo verbale non indica sempre lo stesso tipo di tempo presente: vi è infatti un continuo interscambio e sovrapposizione tra il presente concreto della lettura del testo e il presente immaginato del modello</p> <p>Ha visualizzato (presente immaginato) la posizione della “media” sulla retta e ora, come per fissare questo suo primo passo, decide di scriverlo (presente condiviso). È interessante notare però che, per far questo, non trascrive su foglio ciò che ha immaginato, ma la sua traduzione algebrica sentita forse dal soggetto come il linguaggio “più adatto” da esternare.</p> <p>Risolve la condizione “media” S. deve passare alla seconda richiesta del testo (ritorno al presente del testo)</p> <p>Passaggio dal presente del testo al presente del modello. Su quest’ultimo si innesca l’esplorazione.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • il primo gioca diciamo a_1 (<i>scrive “a_1”</i>) e l’altro a_2 (<i>scrive “a_2”</i>) la media è $\frac{a_1 + a_2}{2}$ (<i>scrive mentre parla</i>) ...eh... • (<i>riguarda il testo</i>) più vicino ai due terzi della media... • i due terzi della media, i due terzi della media è <u>...dove sta?</u> Tra... 	<p>infatti, mentre spiega, usa termini “visivi” come ad esempio “distante” (o la domanda successiva “dove sta?”).</p> <ul style="list-style-type: none"> • La rappresentazione algebrica è “vuota”, ha solo lo scopo illustrativo di definire il concetto di media attraverso lo schema che porta alla determinazione del valore numerico della media di due numeri. S ha fissato nella sua mente un modello della situazione problematica su cui sta lavorando in modo più o meno esplicito mediante un’esplorazione ascendente dai dati forniti dal problema verso la soluzione possibile di questo. La scelta del modello in questione è stata probabilmente favorita dal risalto dato all’intervallo numeri in cui si potevano scegliere i numeri, ma, è anche sicuramente legata ad una predisposizione personale del soggetto (posso affermare questo perché anche nei problemi che ho esaminato per la tesi di laurea S. ha sempre preferito l’approccio “grafico/visivo”). • Il testo continua ad essere il riferimento concreto (nel presente della risoluzione) cui rivolgersi e appoggiarsi per intraprendere nuove esplorazioni (visto che non ha ancora scritto molto e quello che ha scritto non sono parti del modello da lui usato). • Traccia verbale del processo di traduzione dei dati del testo nel modello grafico-mentale (questo infatti, come già osservato, è ormai presente e stabile nella sua immaginazione) e costruzione della
--	---	--	--

	<p>La conoscenza del fatto che due terzi di un numero è minore del numero stesso lo portano alla conclusione esplorazione.</p> <p>S. si sposta nel Passato prossimo per effettuare un controllo ascendente su quello che ha trovato</p> <p>formulazione congettura nel presente</p> <p>Scarta il progetto di svolgere i calcoli per avere delle ulteriori conferme</p> <p>Ricostruzione del suo ragionamento: le dinamiche temporali coinvolte vano dal passato prossimo al Presente condiviso (dinamica interno-esterno con funzione di controllo)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • cioè è più piccolo della media, due terzi... • loro sono equidistanti dalla media, due terzi è più piccolo della media • quindi vince chi ha dato il numero più basso. • Dovrei fare i conti però mi pare evidente. • Allora abbiamo due numeri, chi dà il numero più vicino ai due terzi della media...due terzi della media è più basso della media, loro sono equidistanti...se vuoi ti faccio una rappresentazione grafica (<i>comincia a disegnare</i>) qui abbiamo a_1, qui a_2 e questa è la media (<i>scrive quello che dice disegnando i punti nell'ordine dato dal pedice come se</i> 	<p>immaginazione) e costruzione della relazione “parallelo tra numeri e punti sulla retta”. La componente visiva della sua esplorazione (posizione e possibili movimenti dei punti nell’intervallo) emerge in modo chiaro attraverso la domanda che si pone che traduce la richiesta del testo nel suo modello.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Arriva ora a visualizzare la traduzione del fatto che $2/3$ di un numero è inferiore al numero stesso: passaggio da aritmetica a posizione dei punti su una retta (questo passaggio è naturalmente guidato da conoscenze matematiche e abitudini d’azione possedute del soggetto) • Sintetizza i passaggi salienti della sua risoluzione (ricordo ascendente del processo): la posizione dei due numeri e della soluzione. • Lega in modo chiaro la richiesta del testo alle premesse da lui elaborate esplicitando in modo chiaro la sua risposta (funzione ordinatrice del linguaggio). • Il suo ragionamento si basa su una rappresentazione delle possibili scelte come punti appartenenti ad un segmento di punti ordinati (modello matematico della retta dei numeri reali), ma si rende conto che per strutturarla e soprattutto condividerlo dovrà scriverlo sul foglio (dimostrazione). • Vuole costruire in modo esplicito la sua dimostrazione e per far questo effettua un controllo ascendente sul suo ragionamento (presente e passato prossimo vengono quindi a sovrapporsi nella sua mente) cercando di condividere in modo esplicito sia le strutture che ha utilizzato, sia il ragionamento seguito. (dinamica interno-esterno con funzione di controllo). Per far questo finalmente esplicita in modo chiaro il modello che ha utilizzato.
--	---	---	--

<p>La scelta di definire la strategia introducendo la parola minimo come sinonimo di il più piccolo tra due, apre il frame minimo</p>	<p>Anticipazione di situazioni possibili particolari guidata sia dal modello sia dalle passate considerazioni: il caso generale in cui tutti scelgono lo stesso numero.</p> <p>Domanda fatta nel con lo scopo di formulare una risposta completa per tutti i casi possibili se ci sono due giocatori; non è quindi domanda rivolta al futuro, ma piuttosto al passato</p> <p>Analisi del testo nel presente: è nella fase di controllo delle informazioni usate</p> <p>Dal presente (conferma di ipotesi già implicitamente usate) all'anticipazione della scelta "migliore": avviene una sintesi di tutto il ragionamento svolto attraverso l'introduzione di un concetto (quello di minimo). Questo concetto</p>	<p><i>appartenessero ad una retta, anche se non la traccia esplicitamente, ed in mezzo mette il "punto medio" M) due terzi della media sta di qua (fa un segno che parte da M e va indietro verso sinistra verso a_1 e quindi suppone che il primo sia un numero inferiore al secondo) e quindi vince a_1.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • A meno che a_1 sia uguale ad a_2 e allora vincono tutti e due e qui va beh spartiscono...qui non c'è scritto cosa succede... • a questo punto qual è la strategia vincente se ci sono due giocatori? • A parte che non c'è scritto se loro sanno quanti giocatori sono... <p>O: sì lo sanno. 14) S: non c'è scritto, potrebbero non saperlo...</p> <ul style="list-style-type: none"> • allora mettiamo che lo sappiano...se lo sanno conviene puntare il <u>minimo</u> numero. 	<ul style="list-style-type: none"> • Durante il controllo puntuale della struttura del suo ragionamento, si rende conto dell'esistenza di casi limite da analizzare. In questo caso la sistematizzazione di un modello mette in luce aspetti della situazione problematica lasciati in ombra precedentemente e quindi stimola la messa in atto di processi esplorativi. (la ricostruzione del ragionamento stimola un affinamento dell'analisi del problema). • S. sente il bisogno di esporre in modo completo e nello stesso tempo riordinare la sua strategia. • Sempre nella fase di rifinitura della strategia si innesca una fase di rielaborazione critica del testo in cui ci si assicura di non aver lasciato "casi scoperti". • Ora che la situazione problematica è chiarita e sotto controllo (grazie al suo modello grafico-numerico), avviene la formulazione definitiva della strategia: la miglior scelta è il minimo numero. È molto importante sottolineare la comparsa della parola "minimo" che ha sostituito le espressioni usate fino a questo punto della risoluzione: come ad esempio "il più basso" e "il più piccolo" (tra i
---	--	--	--

<p>legato appunto al Concetto generale di minimo.</p>	<p>(dinamica interno-esterno) sembra inizialmente essere solo una sistemazione/formalizzazione di un processo già costruito, ma vedremo porterà delle conseguenze molto importanti esplicitate nella frase successiva.</p>		<p>“il più basso” o il più piccolo (tra i due). Questa scelta, apparentemente linguistica, porterà ad un’importante evoluzione del suo ragionamento espressa appunto dal cambiamento del genere degli aggettivi scelti: vi è infatti un passaggio dal relativo all’assoluto.</p>
<p>Schema “estremo inferiore di un intervallo”</p>	<p>Salto cognitivo: Anticipazione “complessa” probabilmente guidata (e prodotta in modo quasi automatico) da familiarità acquisita con strutture di evoluzione di processi provenienti dalla matematica³⁹ (passaggio al limite, punto di accumulazione e semiretta densa dei reali positivi)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Zero non so se è possibile... <p>O: sì, sono compresi gli estremi. Possono essere compresi come no, ma tanto è uguale...</p> <p>15) S:</p> <ul style="list-style-type: none"> • allora se sono due conviene puntare zero 	<ul style="list-style-type: none"> • S. conclude la sua analisi individuando un numero particolare che racchiude la caratteristica enunciata nella battuta precedente (ossia essere “il minimo numero”): lo zero. S. generalizza la sua scelta da coppie qualsiasi di numeri verso una scelta assoluta all’interno di un intervallo particolare attraverso l’introduzione del concetto di minimo. Si passa quindi dal confronto tra due numeri (traducibile con una disuguaglianza aritmetica) al minimo dei numeri che si trovano nell’intervallo $[0,100]$ (traducibile attraverso l’iterazione del confronto). Questo processo è supportato probabilmente dalla rappresentazione grafica dell’intervallo in cui il concetto di minimo si sintetizza attraverso un banale “spostamento” verso sinistra del numero da scegliere. • A questo punto per S. l’ovvietà della sua scelta non necessita di ulteriori approfondimenti e per questo conclude.
<p>-</p>	<p>Sintesi nel presente</p>	<p><i>Qui si conclude la parte della risoluzione per $n=2$ (analizzata anche in precedenza). Nella parte successiva il soggetto cercherà elaborare una strategia vincente per il caso $n=3$</i></p>	

<p>Rimanendo sempre nel frame “intervallo di numeri”, si innesca un tentativo di adattamento dello schema bilanciamento che però fallisce</p>	<p>Esplorazione discendente</p> <p>Esplorazione “visiva” sul modello</p>	<ul style="list-style-type: none"> • A questo punto mi chiedo se vale ...se si può ... eh, no perché forse aumentando il numero dei giocatori, potrebbe essere che la media non sia così... • sia un po’ più in là, più vicino cioè i due terzi della media sia più vicino alla media e forse un numero troppo basso è troppo distante dai due terzi della media. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tentativo di generalizzazione della sua strategia per il caso $n=3$ a causa della mancanza di un del fattore determinante con cui S. ha gestito il caso $n=2$: “la simmetria” del bilanciamento. • Tracce nel parlato della sua esplorazione della possibile traduzione nel modello grafico della nuova variante del problema.
<p>Frame generalizzazione per adattamento</p>	<p>Comincia esplorazione nel caso $n=3$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Vediamo cosa succede con due giocatori perché con uno conviene zero...sempre, con tre giocatori...con tre giocatori...(<i>scrive “n=3”</i>)... 	<ul style="list-style-type: none"> • Dice “uno” al posto di “due” e “due” al posto di “tre” perché probabilmente ripercorre la sua strategia precedente fissando uno dei giocatori e pensa di adattarla al caso successivo fissando uno e facendo variare gli altri due (comportamento appreso e qui riprodotto come abitudine d’azione).
<p>Schema casi limite</p>	<p>Esplorazione numerica</p>	<ul style="list-style-type: none"> • sto pensando (<i>riflette in silenzio</i>)...stavo portando i casi limite: se due giocatori puntano cento e l’altro zero (<i>scrive questi casi limite</i>) cioè non è una congettura ancora, diciamo che sto cercando di verificare se lo zero potrebbe funzionare ancora. 	<ul style="list-style-type: none"> • Deve riportarsi ad degli esempi numerici perché in questo caso, mancando al simmetria, non riesce ad immaginare il bilanciamento. Deve cambiare schema, ma per farlo ha bisogno di ricever nuovi spunti ed idee sulle diverse possibilità che non riesce a focalizzare. È importante notare che gli esempi che sceglie non sono casuali, infatti S segue coscientemente un’impostazione tipica delle risoluzioni di problemi matematici: studia se la sua congettura “regge” ai casi limite.
<p>Schema media</p>	<p>Esplorazione guidata dal algoritmo di calcolo e tradotta sul modello</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Allora penso: il caso peggiore è quando gli altri puntano alti così due terzi della media diventa più grande e lo zero più distante; 	<ul style="list-style-type: none"> • Sempre all’interno dello stesso frame e utilizzando mentalmente lo stesso modello esplora le conseguenze delle scelte sopra indicate (esplorazione guidata da obiettivo già determinato).
<p>Algoritmo media aritmetica di tre numeri Algoritmo proposto dal problema</p>	<p>Applicazione algoritmi di calcolo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • allora se due giocatori puntano cento e l’altro zero la media è (<i>scrive $M=200/3$</i>) $200/3$ e i due terzi della media è (<i>scrive mentre parla</i>) $400/9$ che è circa...quanto è $400/9$? ...più piccolo di quaranta, 	<ul style="list-style-type: none"> • Svolge i calcoli per trovare il valore numerico che determina quale scelta è la migliore (tra quelle selezionate)

<p>Frame numeri su intervallo Schemi media e minimo</p>	<p>Esplorazione su intervallo guidate da schemi precedenti</p>	<p>no è più grande di quaranta, però è minore di cinquanta perché cinquanta per nove è quarantacinque...quindi questo è non so quanto, ma è minore di cinquanta (scrive "<50")</p> <ul style="list-style-type: none"> • quindi più vicino ci è andato lo zero... • da qui dovrei dimostrare adesso...però...che anche se non scelgo il cento funziona lo stesso perché forse se si abbassano loro vanno più distanti...può essere? Può essere? Allora a questo punto direi che per tre giocatori potrei andare, mi sembra in termini ...adeguato al contesto, la congettura che lo zero funzioni sempre nel caso di tre giocatori. • Allora per dimostrarlo dovrei dire... 	<ul style="list-style-type: none"> • Analisi del risultato in relazione alla sua ipotesi • Si allontana dai casi limite ed esplora cosa accade. Imposta il ragionamento come: conferma della congettura e tentativo di dimostrazione
<p>Frame media numeri</p>	<p>Esplorazione: postulata la propria scelta si controlla se porta alla vittoria attraverso l'applicazione di schemi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • allora uno punta zero, l'altro punta a e l'altro punta b (<i>da adesso in poi scrive i passaggi che esprime anche a parole</i>) allora la media è $\frac{a+b}{3}$ e i 	<ul style="list-style-type: none"> • La congettura generata nel caso n=2 deve essere dimostrata ossia si devono trovare delle regole che la supportino • La dimostrazione per lui è trasformare in linguaggio algebrico la situazione problematica e verificare che la sua scelta porta alla vittoria. Mentre produce passaggi algebrici mantiene sempre un controllo semantico sulle formule
<p>Algoritmi di calcolo algebrico</p>	<p>Controlli su formula e tentativi di traduzione sul modello</p>	<p>due terzi della media è a più b fratto...no...due per a più b fratto tre che è più vicino a $\frac{2(a+b)}{3}$ beh ...questo cos'è... $\frac{2a+2b}{3}$ ah...</p>	
<p>Schema applicare strategia precedente</p>	<p>Esplorazioni sulla formula</p>	<ul style="list-style-type: none"> • dovrei fare...dunque questo è più grande o più piccolo? Questo è chiaramente più piccolo sia di a sia di b ...stavo pensando che la media è più piccola no non si 	<ul style="list-style-type: none"> • Non riesce a trovare conferma delle relazioni che cerca

<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazioni sul modello</p> <p>Applicazione calcoli algebrici</p>	<p>più piccola...no...non si sa...è più piccola del più grande, no! Ma l'altro ha puntato zero!</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uno punta zero, uno a e l'altro b, la media dove sta? ...è più piccola del più grande di sicuro, o di tutti e due? • Uffa....cioè dovrei verificare se questo qui ...va beh senti ...<i>(comincia a scrivere: " $a - \frac{2a+2b}{3}$ ")</i> quanto fa? <i>(fa minimo comune multiplo e scrive: " $\frac{1}{3}(3a - 2a - 2b)$ ")</i>, svolge i passaggi algebrici successivi e scrive "$\frac{1}{3}(a - 2b)$ ")e qui mi interessa il valore assoluto e vattelapesca! Chi è il più piccolo? Questo o $\frac{2a+2b}{3}$? Dunque...chi è il più piccolo... 	<ul style="list-style-type: none"> • Ritorna al modello, ma non ha successo. • Si butta sull'algebra: non riuscendo ad anticipare deve svolgere i calcoli. Anche dopo aver svolto tutti i passaggi però non trova una formula che lo aiuti
<p>Frame intervallo e frame bilanciamento</p>	<p>Controllo</p> <p>Esplorazione su modello guidata da schema</p>	<ul style="list-style-type: none"> • no...penserei una strategia migliore perché non ho voglia di fare i conti...ah...<i>(a bassa voce)</i> dovrei vedere se questo o questo ...dove è minore ...uffa...<i>(si blocca e pensa un po' e poi ripercorre in silenzio le cose che ha scritto)</i>. • Il problema che la media con tre è un disastro...no stavo pensando: se a è abbastanza in mezzo...forse riesce ad essere più vicino alla media; 	<ul style="list-style-type: none"> • Cambia strategie: vuole uscire dal frame algebrico- numerico • Vuole riapplicare la strategia risolutiva usata nel caso n=2 e per far questo parte dal risultato che vorrebbe ottenere per cercare di esplorare quali casi potrebbero generarlo (esplorazione discendente)
<p>schema media aritmetica e algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione empirica su numeri guidata da schemi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • tipo se noi proviamo zero, dieci, venti <i>(scrive i numeri)</i> cosa succede? La media è dieci <i>(scrive $M=10$)</i> giusto? Perché 	<ul style="list-style-type: none"> • Controlla attraverso la generazione di esempi numerici, selezionati in base al suo ragionamento precedente, il risultato dell'algoritmo: trova un controesempio

<p>schema media aritmetica e algoritmo di calcolo</p>	<p>Controllo</p>	<p>trenta diviso 3, la media è dieci e i due terzi di dieci (<i>scrive</i> $2/3 * 10$) è venti terzi. Ecco lì il controesempio!</p> <ul style="list-style-type: none"> • ...zero non funziona perché due terzi di dieci fa..è maggiore di sei (<i>scrive</i> >6) e quindi in questo caso vincerebbe il 10 • ... però no funziona in questo caso...(pensa in silenzio) allora ripartiamo: a, b, c (<i>scrive le lettere e</i> $\frac{a+b+c}{3}$) è la media, due terzi di questo ... (<i>esegue i passaggi algebrici e scrive</i> $\frac{2a+2b+2c}{9}$) 	<p>controesempio</p> <ul style="list-style-type: none"> • Controlla accuratamente se ha realmente trovato un controesempio svolgendo i calcoli • Cerca di trovare in generale cosa fa saltare la sua strategia nel procedimento algebrico
<p>Schema: trovare i bound</p>	<p>Applicazione formula in casi estremi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • dunque questa roba può essere zero e al massimo a, b, c possono essere cento quindi sarebbe trecento fratto tre..due terzi di cento (<i>scrive</i> $273*100=200/3$) che è ...66? Sì $66.\bar{6}$ (<i>lo scrive</i>) • qui quindi la media...quindi questi due terzi stavano lì...quindi tenderei a non ...a non stare lì dentro più o meno...(scrive "0 - 66")...sessantasette anche (<i>cancella 66 e scrive 67</i>) • ...(rimane fisso a pensare sulle ultime cose scritte, cerchia il 67 e continua a pensare in silenzio per qualche secondo; infine comincia a riguardare tutto quello che ha scritto fino a quel momento) stavo pensando che potrebbe essere questo...però nel caso di due non era quella lì...(pensa) nel caso di due...era zero. 	<ul style="list-style-type: none"> • Vuole trovare delle condizioni da imporre sulle possibili scelte per delimitare l'insieme di scelta (approccio matematico) • Le considerazioni numeriche sono trasferite sul modello grafico • Affronta un momento blocco effettuando dei controlli sulle cose prodotte • Non riesce a generare dei paralleli tra il caso $n=2$ ed $n=3$
	<p>Esplorazione su modello</p>		
	<p>Controllo</p>		

<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione discendente su modello</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>.(riguarda le cose scritte)</i> ...perché era il più piccolo, qui potrebbe essere quello in mezzo sempre..no, non è detto però...non è detto, io come faccio a puntare quello in mezzo? Non so quanto mettono gli altri...<i>(pensa)</i>... <p>O: Non c'è una soluzione vera...nel senso che..<i>(mi interrompe)</i></p> <p>16) S: No, d'accordo, ma magari mi conviene...</p> <p>O: sì, ce ne è una che magari...</p> <p>17) S: ...tra venti e quaranta...</p> <p>O: sì, un range in cui,,ma non è neanche detto...</p> <p>18) S: <i>(pensa)</i> e...dovrei studiare la probabilità: fissati b e c, dato a, la probabilità che a sia più vicino ai due terzi della media in funzione di a <i>(pensa)</i> per esempio se a è più grande, non va bene ...<i>(pensa)</i></p> <p>19) O. su questo hai ragione, però pensa che in realtà se usi la probabilità... devi pensare che le altre scelte sono fatte da persone...</p> <p>20) S: sì, certo. Presuppongo che le facciano a caso...se gli altri lo fanno a caso...<i>(pensa)</i></p> <p>21) O: ...che gli altri giocatori vadano a caso... è possibile però...</p> <p>22) S. No, certo è un'ipotesi che metto; allora supponendo che vadano a caso...e trovo qualcosa.</p> <p>23) O: ok.</p> <p>24) S: dopo di che da lì forse posso aggiustare dicendo che...va beh supponiamo che anche loro usino la stessa strategia...per raggiungere strategie più raffinate, ma va beh...<i>(si blocca)</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tentativi di portare a termine esplorazioni sul modello
<p>Frame probabilità</p>	<p>Programmazione azioni guidata da adattamento di conoscenze</p>	<p>18) S: <i>(pensa)</i> e...dovrei studiare la probabilità: fissati b e c, dato a, la probabilità che a sia più vicino ai due terzi della media in funzione di a <i>(pensa)</i> per esempio se a è più grande, non va bene ...<i>(pensa)</i></p> <p>19) O. su questo hai ragione, però pensa che in realtà se usi la probabilità... devi pensare che le altre scelte sono fatte da persone...</p> <p>20) S: sì, certo. Presuppongo che le facciano a caso...se gli altri lo fanno a caso...<i>(pensa)</i></p> <p>21) O: ...che gli altri giocatori vadano a caso... è possibile però...</p> <p>22) S. No, certo è un'ipotesi che metto; allora supponendo che vadano a caso...e trovo qualcosa.</p> <p>23) O: ok.</p> <p>24) S: dopo di che da lì forse posso aggiustare dicendo che...va beh supponiamo che anche loro usino la stessa strategia...per raggiungere strategie più raffinate, ma va beh...<i>(si blocca)</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Dà una previsione sul possibile range di numeri in cui scegliere senza però giustificarla • Il fallimento delle esplorazioni sul modello grafico lo inducono a cercare di trovare degli altri schemi conosciuti
<p>Frame numeri casuali</p>	<p>Esplorazione svolta partendo da assunzioni legate a modelli d'azione</p>	<p>18) S: <i>(pensa)</i> e...dovrei studiare la probabilità: fissati b e c, dato a, la probabilità che a sia più vicino ai due terzi della media in funzione di a <i>(pensa)</i> per esempio se a è più grande, non va bene ...<i>(pensa)</i></p> <p>19) O. su questo hai ragione, però pensa che in realtà se usi la probabilità... devi pensare che le altre scelte sono fatte da persone...</p> <p>20) S: sì, certo. Presuppongo che le facciano a caso...se gli altri lo fanno a caso...<i>(pensa)</i></p> <p>21) O: ...che gli altri giocatori vadano a caso... è possibile però...</p> <p>22) S. No, certo è un'ipotesi che metto; allora supponendo che vadano a caso...e trovo qualcosa.</p> <p>23) O: ok.</p> <p>24) S: dopo di che da lì forse posso aggiustare dicendo che...va beh supponiamo che anche loro usino la stessa strategia...per raggiungere strategie più raffinate, ma va beh...<i>(si blocca)</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Mette delle ipotesi per poter applicare gli schemi conosciuti • Si rende conto che l'assunzione fatta esce dal frame interazione strategica e quindi la abbandona

<p>Frame intervallo di numeri</p> <p>Frame: azione dell'algoritmo</p>	<p>Anticipazione sul risultato algoritmo generata da esplorazioni precedenti</p> <p>Applicazione dell'algoritmo di calcolo nel caso limite</p>	<p>beh ...si forse...(si blocca)</p> <p>25) O: Ok, non avevo capito, scusa.</p> <p>26) S: (<i>pensa su quello che ha scritto</i>) no, mi sono bloccato...allora (<i>pensa in silenzio guardando le ultime cose scritte</i>) mettiamo che tutti e tre prendano un numero tra 0 e 67...però a questo punto due terzi della media viene più basso...quindi al massimo sarebbe due terzi della media che è 67...ossia (<i>scrive $\frac{2}{3} \cdot 67$</i>) ossia faccio 66 che è circa ventidue per due (<i>scrive 44</i>), ma adesso lo stesso discorso...stesso discorso per qui (<i>scrive serie di punti in verticale sotto per indicare la continuazione</i>) a questo punto mi verrebbe da puntare zero. A questo punto vediamo se riesco a fregarli perché so che gli altri due fanno questo ragionamento quindi puntano zero, non è che se io punto qualcosa di più alto riesco a vincere io? No perché $0,0,n$ viene n diviso tre che è già più vicino a zero che a n. no se tutti fanno questo ragionamento conviene puntare zero. Quindi io punto zero con la speranza però che anche gli altri...abbiano fatto questo altrimenti se uno mi punta dieci e uno venti...però forse mi basta che uno solo mi faccia questo ragionamento...e sì mi basta uno solo perché se gli altri fanno (<i>scrive "0 0 a $\frac{a}{3}$"</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ritorna all'ultima cosa scritta e applica l'algoritmo di calcolo nel caso limite 67.
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione compressa di sequenze di patagi simili ed anticipazione del risultato finale</p>	<p>perché se gli altri due fanno questo ragionamento quindi puntano zero, non è che se io punto qualcosa di più alto riesco a vincere io? No perché $0,0,n$ viene n diviso tre che è già più vicino a zero che a n. no se tutti fanno questo ragionamento conviene puntare zero. Quindi io punto zero con la speranza però che anche gli altri...abbiano fatto questo altrimenti se uno mi punta dieci e uno venti...però forse mi basta che uno solo mi faccia questo ragionamento...e sì mi basta uno solo perché se gli altri fanno (<i>scrive "0 0 a $\frac{a}{3}$"</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Iterazione sui possibili risultati dati dall'algoritmo applicato ai casi estremi: l'unico numero che sopravvive è zero (eliminazione iterata delle strategie dominate) • Ora che ha immaginato le possibili mosse degli avversari elabora la sua strategia
<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione della propria strategia postulate le altre</p>	<p>perché se gli altri due fanno questo ragionamento quindi puntano zero, non è che se io punto qualcosa di più alto riesco a vincere io? No perché $0,0,n$ viene n diviso tre che è già più vicino a zero che a n. no se tutti fanno questo ragionamento conviene puntare zero. Quindi io punto zero con la speranza però che anche gli altri...abbiano fatto questo altrimenti se uno mi punta dieci e uno venti...però forse mi basta che uno solo mi faccia questo ragionamento...e sì mi basta uno solo perché se gli altri fanno (<i>scrive "0 0 a $\frac{a}{3}$"</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Fissa le scelte degli altri e vede come far variare la sua. • Individuazione della scelta migliore
<p>Algoritmo</p>	<p>Esplorazione del caso $0,0,n$</p> <p>Esplorazione guidata da algoritmo di calcolo</p>	<p>perché se gli altri due fanno questo ragionamento quindi puntano zero, non è che se io punto qualcosa di più alto riesco a vincere io? No perché $0,0,n$ viene n diviso tre che è già più vicino a zero che a n. no se tutti fanno questo ragionamento conviene puntare zero. Quindi io punto zero con la speranza però che anche gli altri...abbiano fatto questo altrimenti se uno mi punta dieci e uno venti...però forse mi basta che uno solo mi faccia questo ragionamento...e sì mi basta uno solo perché se gli altri fanno (<i>scrive "0 0 a $\frac{a}{3}$"</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ribadisce di trovarsi nel frame interazione strategica affinché la sua ipotesi valga • Controlla se la sua strategia è robusta anche se si indeboliscono le ipotesi
<p>Algoritmo</p>	<p>Ritorno al controesempio</p> <p>Applicazione ai calcoli algebrici</p>	<p>perché se gli altri due fanno (<i>scrive "0 0 a $\frac{a}{3}$"</i></p> <p>“$\frac{2a}{3}$” che è (<i>scrive " $\frac{2a}{9}$ "</i>) che è più vicino a zero che ad altro.</p> <p>27) O: ok.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Verifica algebrica

		28) S: mi fermo? 29) O: se vuoi. 30) S: Ah perché non è finito? 31) O: No...se hai bisogno di scrivere altro...vedevo che stavi scrivendo. 32) S: No...non credo di avere altro...se vuoi... O: No. Ok.	
--	--	--	--

3.6 Nodi di ricerca emersi dall'analisi affinata di questo protocollo

Le conseguenze principali dell'analisi di questo particolare protocollo sono state:

1. L'esigenza di produrre un'analisi più fine dei processi esplorativi presenti nelle risoluzioni di questi problemi di interazione strategica (in particolare si è approfondita l'indagine su come le conoscenze possedute da diversi soggetti possano influire sulla generazione dei processi esplorativi).
2. Una rilettura delle ricerche di Camerer focalizzando l'attenzione su come erano state classificate e giustificate le risposte al beauty contest game vicine a quelle predette dalla Teoria dei Giochi.

Nel protocollo di Sam la produzione della risoluzione del problema è svolta con consapevolezza dei passaggi ed impostata in modo strutturato perché supportata dalle conoscenze e dalle abitudini d'azione del soggetto: sia le macro-scelte riguardanti l'ipostazione della risoluzione, sia il modo in cui vengono superati i diversi blocchi nell'esplorazione infatti sono guidate dalla sua esperienza in matematica e, in particolare, rivelano le capacità acquisite dal soggetto nel campo del problem solving matematico. Un esempio di ciò lo si può trovare nella prima parte del protocollo: Sam, non riuscendo ad anticipare l'evoluzione della situazione problematica quando il numero dei giocatori potrebbe essere qualsiasi, passa a considerare un caso particolare e lo fa partendo dal più semplice possibile, $n=2$ (con l'intenzione poi di salire in complessità). Per comprendere quali effetti ha sulle scelte l'applicazione dell'algoritmo proposto nel testo, Sam non intraprende quindi un'attività euristica (ossia non comincia con l'analizzare esempi

concreti di possibili scelte), ma sceglie solo di ridurre le variabili in gioco per mantenere la generalità del suo ragionamento. Questo tipo di approccio è riconducibile ad un atteggiamento acquisito con la pratica nell'affrontare problemi di generazioni di congetture in matematica: si parte dai casi più semplici per poi cercare di generalizzare i risultati ottenuti.

Naturalmente anche la scelta degli schemi d'azione rivela le competenze in campo matematico possedute dal soggetto: nell'intervista, infatti, il raggiungimento del risultato finale (formulazione della strategia "giocare zero") non è solo da imputarsi alle doti personali del solutore (che certamente influiscono), ma avviene grazie anche alla possibilità, e soprattutto alla capacità acquisita dal soggetto, di utilizzare modelli d'azione provenienti dalle sue conoscenze.

Riassumendo possiamo affermare che la particolarità di Sam consiste nel fatto che non affronta il problema cercando di anticipare le possibili mosse degli avversari (step by step come teorizzato da Camerer), ma tenta come prima cosa di tradurre la situazione problematica in un modello su cui appoggiare successivamente le sue esplorazioni. Nello specifico, la possibilità di usufruire della rappresentazione delle scelte numeriche su cui innescare schemi d'azione conosciuti e quindi strutturare le proprie strategie, porta S. al raggiungimento della stessa soluzione al beauty contest game proposta dalla teoria dei giochi (scegliere il numero più basso possibile) che non rientra però nel range delle risposte solitamente date a questo problema (si veda par.1.8 e 3.4). Questo protocollo ci suggerisce che forse una delle motivazioni di tale "analogia rara" tra la soluzione proposta da Sam e quelle appartenenti alla teoria dei giochi sia imputabile al processo di modellizzazione della situazione problematica messo in atto da Sam. Il soggetto si appoggia infatti a diverse conoscenze matematiche che gli permettono di gestire molti possibili futuri senza immaginarli tutti: la sequenzialità scelta-conseguenza è tradotta in un algoritmo di calcolo numerico i cui risultati sono punti su una retta e quindi la gestione dei possibili futuri si riduce alla visualizzazione/ manipolazione di punti in un intervallo chiuso (le possibili evoluzioni del problema e quindi i possibili futuri diventano movimenti visivi, guidati da schemi, sull'intervallo di numeri⁴⁰).

Dall'analisi del protocollo risulta evidente che gli strumenti scelti da Sam per modellare la situazione problematica, influenzano l'evoluzione dei processi di esplorazione (indirizzando e supportando tali processi), e quindi la gestione dei tempi interni; oltre a

⁴⁰ Sam elaborata la strategia per una coppia di punti (scegliere il più basso tra i due) che poi generalizza trasformando le esplorazioni dei futuri possibili (movimenti temporali) in un movimento concreto grafico-visivo su un modello (scegliere il numero più basso dell'intervallo)

questo è interessante notare che la risoluzione di Sam, pur non utilizzando tecniche appartenenti alla teoria dei giochi (visto che il soggetto non conosce questa teoria), potrebbe trovare una formalizzazione in uno degli schemi d'azione proposti appunto dalla teoria dei giochi (l'eliminazione iterata di tutte le strategie strettamente dominate che porta alla determinazione dell'equilibrio di Nash⁴¹). Tutto ciò ha portato ad avanzare l'ipotesi che nei modelli di teoria dei giochi si possano ritrovare gli schemi d'azione e i processi che si potrebbero/dovrebbero attivare partendo da modellazioni che sfruttano rappresentazioni e schemi provenienti dal campo matematico.

3.7 Ulteriore affinamento delle domande di ricerca

Le considerazioni fatte partendo dalle prime analisi svolte hanno portato ad una messa a fuoco delle problematiche di ricerca da affrontare e quindi ad un conseguente affinamento delle domande di ricerca iniziali:

- In che modo le conoscenze possedute dai soggetti esaminati influiscono sulla generazione e sviluppo di differenti esplorazioni durante le risoluzioni di problemi di interazione strategica?
- In particolare, in che modo i modelli matematici (sia che siano appartenenti alla Teoria dei Giochi, sia che non lo siano) supportano processi di anticipazione che altrimenti sarebbero difficili da portare avanti?

La trattazione delle questioni di ricerca sollevate da tali domande sarà svolta nel capitolo 6 dopo aver presentato il quadro completo delle analisi svolte.

⁴¹ Si veda il par. 2.5.2.2.

3.8 Informazioni provenienti dagli studi di Camerer

Camerer ha interpretato le diverse tipologie di risposte al Beauty contest game come prodotti di differenti stadi evolutivi di processi di anticipazione di un soggetto sulle possibili mosse degli avversari⁴².

“The pBC game has been run with many subject pools. The average number chosen is usually 25–40 with a large standard deviation (around 20) (Fig. I). This result is robust across countries (Germany, US, Singapore) and ages (high-school students to 70-year-old, well-functioning adults). The lowest averages, 15–20, come from subject pools with unusual analytical skill (Caltech students), training in game theory, and from people entering newspaper contests who are self-selected for their motivation and knowledge”.

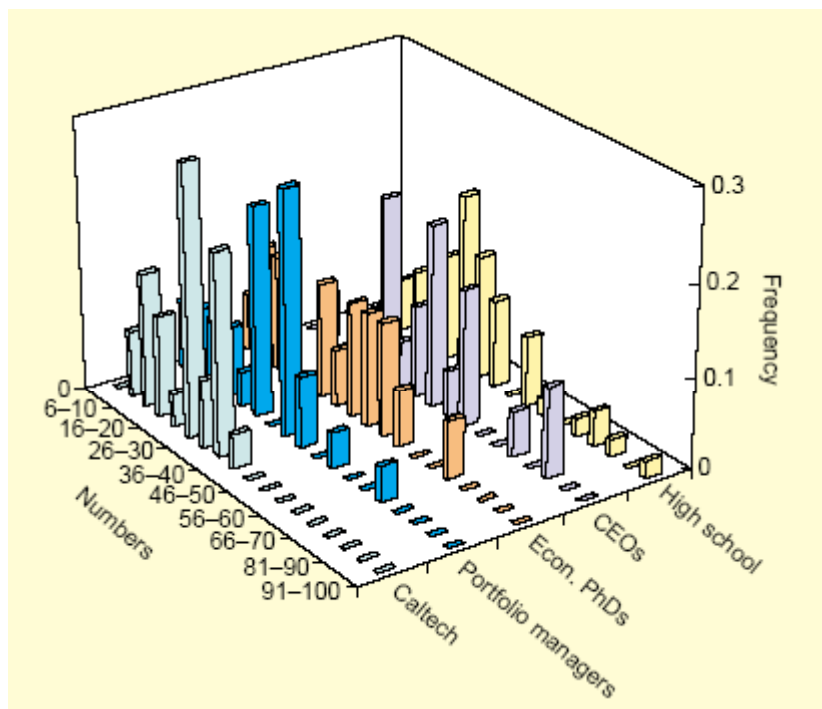


Fig. I. Numbers (front left axis) are choices from 0 to 100 in pBC games (number bins are 0, intervals of five numbers beginning 1–5, and intervals of ten numbers above 70, beginning 71–100). Frequencies of different number choices are on the vertical axis. The number closest to 2/3 times the average wins \$20. The equilibrium prediction is to zero, but most subject pools average 20–35. Subject pools are (left to right): Caltech undergraduates, stock market portfolio managers, economics PhD students, CEOs, and high school Students. Different subject pools have different patterns of choices, with lower averages in subject pools with greater analytical skill.” (Camerer, 2003a p 226)

⁴² Nel Beauty contest game, ad esempio, i numeri scelti dalla percentuale maggiore della popolazione sono compresi tra 20 e 40 (Camerer, 2003a); questo, secondo l'interpretazione di Camerer, sarebbe il risultato delle seguenti possibili sequenze di pensiero: “many players assume that others are making random choices, and choose 33, or believe that others are responding to random choices, and chose 22” (Camerer, 2003b; p 1674).

Camerer, sulla base delle indagini sperimentali effettuate, sostiene che, nella maggioranza dei casi, un soggetto non effettua una sequenza di *passi di pensiero* superiore a due⁴³ (ossia vi è una forte difficoltà nella gestione di successive anticipazioni delle possibili mosse degli avversari). Dai dati sperimentali emerge però che vi è anche una minoranza di soggetti che si avvicina alla soluzione predetta dalla Teoria dei Giochi e che quindi, mantenendo l'interpretazione di Camerer, effettua più di due passi di pensiero. Camerer, descrivendo questa tipologia di soggetti, specifica che spesso sono conoscitori della Teoria dei Giochi, ma anche economisti, dottorandi o, in generale, persone con “unusual analytical skill” (Camerer, 2003).

Subjects	Mean	Steps of Thinking
Computer scientists	18	3.8
Game theorists	19	3.7
Caltech students	23	3.0
Portfolio managers	24	2.8
Economics Ph.D. class	27	2.3
High school	33	1.6
70-years-olds	37	1.1

Table 2 Some data and estimates of τ in p-Beauty contest Game (Equilibrium=0) (from Camerer e al. 2003)

La presenza di queste specifiche categorie di soggetti, accomunate da comportamenti “simili”, ha sollevato i seguenti interrogativi: quali potevano essere le analogie tra i soggetti appartenenti a quella piccola fetta di popolazione che effettua scelte “vicine” a quelle predette dalla Teoria dei Giochi? Come tali soggetti superano la difficoltà di gestire successive anticipazioni delle possibili mosse degli avversari? Il fatto che un matematico (Sam) rientri in questa porzione di soggetti, può essere un dato significativo?

⁴³ Si veda par. 1.4.3

3.9 Scelta finale dei problemi

Partendo dalle considerazioni esposte nel paragrafo precedente, il “beauty contest game” è diventato il problema principale su cui indagare, mantenendo comunque anche il problema 2 (con piccole modifiche nel testo apportate dopo i primi test⁴⁴).

La scelta di mantenere almeno due problemi è stata motivata dal fatto che la differenza tra i processi risolutivi attuabili poteva anche consentire confronti tra le risoluzioni di uno stesso soggetto in contesti differenti.

Problema 2 (nella versione definitiva):

Due differenti compagnie vendono lo stesso prodotto in un certo mercato. Supponiamo che né il prezzo di vendita del prodotto, né le vendite totali combinate di entrambe le compagnie varino di anno in anno e vari solo la fetta di mercato che ciascuna compagnia riesce a catturare attraverso la pubblicità. Il budget stanziato per la pubblicità determina quindi la divisione del mercato.

Per semplicità supponiamo che ciascuna delle due compagnie abbia solo due scelte: spendere 6 milioni di Euro o spendere 10 milioni di Euro. I profitti di ciascuna compagnia dipenderanno dalla cifra scelta e dalla decisione dell'avversario:

- Se entrambe le compagnie spenderanno 6 milioni di Euro, ciascuna raggiungerà 5 milioni di Euro di guadagno.
- Se una compagnia investirà 10 milioni di Euro quando la sua avversaria ne spende solo 6, allora il suo guadagno sarà di 8 milioni di Euro a spese della sua avversaria che quindi non guadagnerà nulla.
- Se entrambe decidono di investire 10 milioni di Euro lo sforzo in eccesso viene sprecato il guadagno finale di ciascuna compagnia si limiterà a 1 milione di Euro.

Le due compagnie sono avversarie e quindi non ci saranno contatti o accordi tra queste.

Se tu fossi il responsabile per la pubblicità di una delle due compagnie, come decideresti di comportarti? (motiva la tua risposta)

Problema 3 (Beauty contest Game)

Consideriamo il seguente gioco: ci sono n giocatori e ciascuno deve scegliere un numero naturale tra 0 e 100. Vincerà € 1000 chi ha scelto il numero più vicino ai $2/3$ della media dei numeri scelti da tutti i giocatori. Non è concessa nessuna forma di comunicazione o discussione tra i giocatori. Quale potrebbe essere una buona scelta per vincere? (motivare la risposta)

⁴⁴ Le modifiche in questione sono state le seguenti: sostituire la parola profitto con guadagno, eliminare l'indicazione di perdita che portava una connotazione negativa alla strategia corrispondente e semplificare la prima parte del testo che risultava essere sovrabbondante e poco chiara. Anche se sono variati i valori numerici, questo gioco rimane sempre un “Dilemma del prigioniero” e quindi le possibili strategie risolutive sono le stesse descritte nel paragrafo 2.5.2.1.

3.10 Scelta finale dei soggetti

I risultati provenienti dalle nostre prime analisi e il loro confronto con i dati statistici riportati da Camerer (par. 3.8) hanno quindi portato ad una modifica nella scelta dei soggetti da intervistare. La scelta iniziale di analizzare solo matematici infatti limitava i possibili comportamenti osservabili. L'influenza delle pratiche matematiche sull'approccio al problema riscontrato era un punto che doveva essere maggiormente indagato. Per questo motivo, si è deciso di indagare sulle possibili diversità, in termini di gestione di esplorazioni, anche in soggetti non matematici. Questo allargamento del campione è stato possibile perché i problemi scelti, per essere affrontati, non richiedono competenze specifiche.

I soggetti intervistati sono quindi stati selezionati con background e conoscenze differenti⁴⁵.

- Un esperto di Teoria dei Giochi;
- Un matematico non conoscitore della Teoria dei Giochi;
- Un matematico con una conoscenza superficiale di questa teoria
- Un matematico applicato, non conoscitore della teoria dei giochi, ma con esperienza nel campo della costruzione di modelli matematici di situazioni reali
- Un appassionato a tutta quella tipologia di problemi che solitamente è indicata con la parola "gioco" (giochi matematici, indovinelli...), non conoscitore però della Teoria dei Giochi e con una discreta preparazione matematica di tipo scolastico (il soggetto si è diplomato in un istituto tecnico per periti elettrotecnici);
- Un laureato in Economia (non conoscitore della Teoria dei Giochi);
- Un laureato in Medicina;
- Un Laureato in Ingegneria esperto di finanza.

Totale dei protocolli: 16⁴⁶.

⁴⁵ Le differenze e le analogie nei comportamenti risolutivi (in particolare generazione e gestione dei processi di anticipazione) dei soggetti appartenenti alle diverse categorie elencate verranno analizzate attraverso lo studio dell'influenza delle particolari conoscenze o abilità possedute dai soggetti.

⁴⁶ Tutti, (tranne l'economista che ha affrontato solo il beauty contest) hanno affrontato entrambi i problemi e F. ha svolto anche il problema 1 (analisi in appendice III).

CAPITOLO 4: Affinamento degli strumenti di analisi

4.1 Relazioni tra le differenti componenti dei processi esplorativi

L'utilizzo di problemi che includessero variabili temporali da gestire ha dato la possibilità di distinguere tra processi immersi nel piano temporale della situazione descritta nel problema e processi che ne manipolano le diverse fasi senza seguire la scansione data dalla simulazione del flusso temporale. Questa condizione favorevole ha aperto un'ulteriore prospettiva di analisi sulle dinamiche mentali che consiste appunto nell'individuazione di processi che gestiscono il rapporto tra il "tempo interno" (creato e manipolato liberamente dal soggetto) e il "tempo del problema" (costituito dai vincoli e variabili temporali presenti nella situazione problematica descritta⁴⁷). Nelle attività di problem solving raccolte è stato quindi analizzato anche quando e come questi piani temporali si sovrappongono, separano o si intrecciano in relazione ai processi esplorativi e ai modelli d'azione messi in atto dai soggetti.

Nel corso delle analisi svolte si è constatato, come già sottolineato da Guala e Boero (1999), che non era possibile definire confini precisi che separassero le attività di esplorazione. Alcune componenti esplorative ad esempio nascono e vivono sempre in relazione ad altre: quando si attivano delle strutture di aspettative (frame e schemi) la conoscenza che affiora nella mente rimane poi nei processi di anticipazione come struttura o guida.

Nelle stesse battute possono essere quindi presenti processi differenti⁴⁸, ma interconnessi e non separabili e per questo motivo i processi di esplorazione sono stati studiati (e poi classificati) come componenti interconnesse di un unico sistema.

⁴⁷ Una descrizione più precisa sarà fornita nel par. 7.2 .

⁴⁸ Un'altra relazione individuata tra i differenti processi sviluppati nel corso delle attività analizzate è stata quella tra la costruzione di esplorazioni e l'attivazione dei processi di controllo. Nei protocolli si può notare l'alternanza nella generazione e gestione di tali processi con la produzione di esplorazioni: queste infatti sono spesso generate e "puntellate" da processi di controllo. Essendo il focus della nostra ricerca l'analisi dei processi esplorativi rapportati all'attivazione di frame e schemi, nelle analisi svolte ci siamo quindi limitati a segnalare la presenza di tali processi in relazione alla produzione di esplorazioni senza approfondirne l'analisi (vi sono molti studi riguardanti i processi di controllo; una panoramica su questi si trova nell'articolo Carlson e Bloom (2005))

4.2 Esplorazioni Temporalì: una “nuova” classificazione.

In questo capitolo esporremo la “classificazione” dei processi esplorativi prodotta dalla continua relazione di interscambio, svolta nel corso della ricerca, tra le attività di analisi dei protocolli e l’affinamento degli strumenti interpretativi.

Le diverse componenti dei processi esplorativi sono state classificate a seconda che fossero strutturate attraverso le conoscenze provenienti dal background culturale o che costruissero (o ricostruissero) situazioni temporalizzate.

4.2.1 Processi esplorativi riscontrati nei protocolli analizzati

Il focus della nostra ricerca è studiare i processi esplorativi che si sviluppano durante attività di problem solving svolte da soggetti con background culturali differenti. Per far questo abbiamo utilizzato come strumenti di analisi i tempi interni⁴⁹. Questi mi hanno fornito una lente interpretativa capace di mettere in luce il ruolo determinante svolto dalla gestione dei processi di ricordo di concetti, di ricostruzione di episodi passati, di pianificazione di azioni e di immaginazione di situazioni future, nella generazione di strategie risolutive in problemi di interazione strategica proposti. I processi esplorativi riscontrati nei protocolli sono stati distinti ed interpretati in relazione ai piani temporalì coinvolti (dinamiche temporalì) e alle conoscenze utilizzate⁵⁰.

4.2.2 Componenti dei processi esplorativi strutturate dalle conoscenze provenienti dal background culturale dei soggetti

Il ricordo di concetti (Vergnaud) struttura le esplorazioni che abbiamo classificato a seconda che siano guidate da:

A) Situazioni di riferimento (“riconosciute”) e Schemi:

In questo caso i processi, attivati dal il ricordo di concetti, si sviluppano all’interno delle corrispondenti strutture di aspettative (frame). Dopo aver individuato i frame aperti,

⁴⁹ È importante specificare ancora una volta che l’analisi svolta riguarda lo studio delle componenti temporalì dei processi esplorativi che si innescano durante le attività di problem solving e non le relazioni tra questi e il tempo cronologico “esterno”.

⁵⁰ In questo lavoro per “conoscenze” intendiamo i concetti e le “strutture di aspettative” che ne indirizzano l’uso (si vedano i par. 1.1.1 e 1.1.2).

sono identificati ed analizzati i processi che si attivano all'interno di questi; tali processi si distinguono a seconda che siano:

1) applicazioni di schemi: pianificazione di azioni eseguita seguendo una traccia d'azione "appresa".

Sam: "il primo gioca diciamo a_1 e l'altro a_2 la media è $\frac{a_1 + a_2}{2}$ "

2) anticipazioni "modellate": l'esperienza acquisita in situazioni analoghe modella le aspettative e fornisce informazioni sulle possibili evoluzioni della situazione sotto esame.

Sam: "due giocatori...due giocatori...eh? due giocatori (pensa guardando in alto) mi sta venendo in mente...dunque, due giocatori sono tutti e due equidistanti dalla media"

All'interno del frame "media" si attiva lo schema "bilanciamento" e quindi si anticipa la posizione sull'intervallo del risultato dell'algoritmo di calcolo della media aritmetica.

B) Rappresentazioni (grafiche o simboliche)

Il ricordo di concetti legati alla presenza o all'utilizzo di particolari tipi di rappresentazioni grafico-simboliche innescano o supportano le esplorazioni. Le strutture "fissate", presenti visivamente, diventano il "nuovo" ambiente di lavoro e, in un certo senso, ingabbiano ed incanalano le possibili esplorazioni come nel seguente esempio:

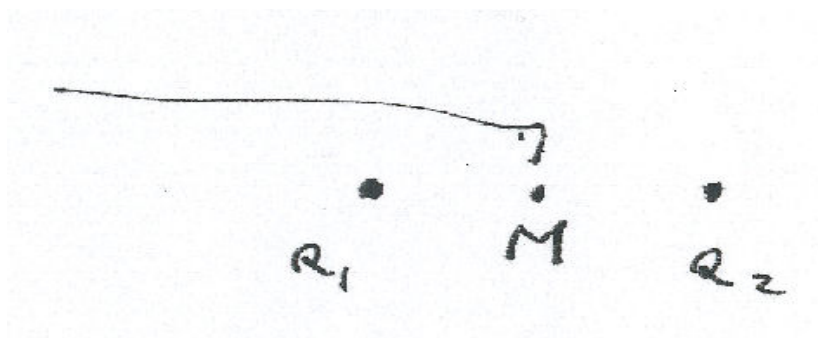


Figura A

Guardando il grafico che ha prodotto (figura A) Sam dice:

Sam: “[] conviene puntare il minimo numero. Zero non so se è possibile...”

Osservatore: “sì, sono compresi gli estremi. Possono essere compresi come no, ma tanto è uguale...”

Sam : “allora se sono due conviene puntare zero.”

Sam nella prima battuta effettua un salto cognitivo ossia un’anticipazione “complessa”: partendo dall’analisi della scelta migliore tra due numeri qualsiasi appartenenti all’intervallo, individua la scelta migliore tra tutte le possibili. Tale anticipazione è supportata sia da familiarità acquisita con strutture di evoluzione di concetti provenienti dalla matematica (vedere punto precedente), sia dalla rappresentazione grafica prodotta (lavorando sull’intervallo, il concetto di minimo si sintetizza attraverso uno “spostamento” verso sinistra del numero da scegliere).

4.2.3 Componenti dei processi esplorativi che costruiscono (o ricostruiscono) situazioni temporalizzate

I processi esplorativi che gestiscono situazioni temporalizzate si appoggiano sempre alle conoscenze possedute dal soggetto, ma, a differenza dei processi sopra elencati, gestiscono qualcosa in più: la costruzione/ricostruzione di episodi immersi in un flusso temporale. Questi processi si possono dividere in due tipologie a seconda che siano legati al passato o al futuro:

a) (passato) Ricordi di episodi vissuti in passato e ricostruiti nel presente (memoria episodica⁵¹): questi processi consistono nella ricostruzione di eventi esperiti dal soggetto che mantengano informazioni e strutture temporali⁵².

b) (futuro) Anticipazioni episodiche: processi esplorativi che consistono nell’immaginazione di eventi possibili. Questi si possono ulteriormente suddividere in:

b1) Simulazioni mentali di possibili futuri che seguono la traccia temporale della situazione “reale” esplorata (tempo del problema) e che quindi cercano di rispettare le regole del flusso temporale “esterno” (in questo caso gli eventi sono spesso concatenati seguendo la regola di causa-effetto e quindi l’evoluzione dell’anticipazione si svolgerà step by step come modellato da Camerer).

⁵¹ La definizione di memoria episodica si deve a Tulving (2002). Nel nostro studio, partendo dalla definizione di “episodico” data da Tulving per caratterizzare i processi di ricordo che ricostruiscono eventi esperiti personalmente (si veda appendice II), si è scelto di utilizzare l’aggettivo “episodico” per caratterizzare tutti quei processi esplorativi che supportano la costruzione/ricostruzione di possibili azioni immerse in un flusso temporale.

⁵² Un esempio di tali esplorazioni potrebbe presentarsi nella seguente forma: “mi ricordo che avevo fatto così e così...” oppure “mi ricordo che in esercizio simile mi ero comportato...”.

Sam: “[] proviamo con $n=2$, due giocatori (scrive “ $n=2$ ”) due giocatori...due giocatori...eh?due giocatori (pensa guardando in alto) mi sta venendo in mente...dunque, due giocatori sono tutti e due distanti dalla media, il primo gioca diciamo a_1 e l'altro a_2 la media è $\frac{a_1 + a_2}{2}$...eh... più vicino ai due terzi della media...i due terzi della media, i due terzi della media è ...dove sta? Tra... cioè è più piccolo della media, due terzi...loro sono equidistanti dalla media, due terzi è più piccolo della media, quindi vince chi ha dato il numero più basso”

Le parti sottolineate indicano la scansione degli eventi simulati da Sam mantenendo il flusso temporale: ossia lo svolgimento progressivo delle possibili azioni.

b2) Creazione e manipolazione di flussi temporali: in questi casi il soggetto risolutore non segue le regole del tempo “esterno”, ma si muove liberamente (avanti o indietro) attraverso piani temporali differenti. A differenza delle esplorazioni descritte in precedenza, il soggetto non simula lo svolgimento di azioni, ma gestisce le relazioni tra gli eventi senza rispettare la continuità del flusso temporale in cui sono immersi. In questo modo si perde il controllo sul legame di continuità tra le singole fasi, ma si acquista la possibilità di manipolare le relazioni tra i possibili eventi. Questo tipo di operazione implica un rottura tra l’immaginazione degli eventi possibili e la manipolazione di questi; probabilmente è per questo motivo che essa è raramente riscontrata e, quando ciò avviene, è solitamente supportata da schemi o rappresentazioni.

Sam: “*il problema della media con tre è un disastro...no stavo pensando: se a è abbastanza in mezzo...forse riesce ad essere più vicino alla media; tipo se noi proviamo zero, dieci, venti, cosa succede?* “

Immaginare le scelte come numeri su un intervallo e la possibilità di usare lo schema bilanciamento per individuare la media tra questi, permettono a Sam di costruire la sua esplorazione partendo dalla media per poi esplorare le possibili combinazioni di numeri che la possono generare.

CAPITOLO 5: Analisi dei dati sperimentali

In questo capitolo riporteremo le analisi delle interviste raccolte. Queste sono state prodotte attraverso gli strumenti di analisi elaborati nel corso della presente ricerca (si veda cap. 4). Tali strumenti di analisi hanno permesso l'individuazione e lo studio delle relazioni tra le componenti culturali attivate (frame e schemi) e la generazione e sviluppo di processi di esplorazione (anticipazioni, pianificazioni...).

Dopo una panoramica sui comportamenti esibiti dai soggetti intervistati (l'analisi completa di ciascun protocollo è preceduta da una sintesi delle fasi principali che hanno caratterizzato la risoluzione), saranno analizzate le analogie e le differenze tra gli sviluppi dei processi di esplorazione prodotti.

Le evidenze sperimentali riscontrate saranno poi utilizzate come base per la generazione di nuove ipotesi di ricerca (si veda cap. 6) e per la possibile progettazione di future ricerche (si veda cap. 7).

5.1 Analisi risoluzioni del Beauty contest game

5.1.1 Risoluzioni di matematici che hanno affrontato il Beauty contest game

Esperto di teoria dei giochi:

Per questo soggetto la risoluzione del beauty contest game è qualcosa a metà tra esercizio e problema⁵³. L'esperto inquadra subito la situazione problematica nei modelli proposti dalla Teoria dei Giochi: il suo approccio è quindi completamente strutturato dalle conoscenze. L'esperto prima modella e poi esplora: non si chiede subito cosa faranno i giocatori, ma lo fa solo dopo aver strutturato le possibili scelte in uno schema. Il modello diventa la situazione problematica che quindi viene esplorata attraverso questo. Le esplorazioni temporali non sono eliminabili, ma sono gestite attraverso il modello che le ordina, le struttura (ecco perché a volte diremo che il modello in un certo senso le ingloba): si sviluppano quindi "anticipazioni modellate" o esplorazioni guidate da schemi.

⁵³ "A problem is only a problem (as mathematicians use the word) if you don't know how to go about solving it. A problem that has no 'surprises' in store, and can be solved comfortably by routine or familiar procedures (no matter how difficult!) is an exercise". (Schoenfeld, 1983, p. 41)

Le fasi che attraversa l'esperto nel corso della risoluzione di questo problema sono le seguenti:

- Riconosce la tipologia di problema e attiva le sue conoscenze operatorie per modellarlo (forma strategica);
- fin dalle prime battute ha già mente sia il piano d'azione per portare avanti la strategia, sia gli strumenti per farlo
- parte dal caso $n=2$ non solo perché è il più semplice, ma soprattutto perché vuole applicare il modello (tabella a doppia entrata);
- esplora questo primo caso con il progetto di utilizzarlo poi per trarre informazioni sugli altri casi e quindi generalizzare;
- costruisce la matrice a doppia entrata per le prime coppie di scelte (da 0 a 3 per entrambi i giocatori) lasciando la possibilità di continuare la costruzione;
- la gestione della combinazione di righe e colonne gli permette di non manipolare le azioni immerse in un flusso temporale: la simulazione delle mosse e delle contromosse in fase di esplorazione è infatti svolta seguendo la struttura della tabella (e quindi l'esplorazione si riduce alla generazione di un'applicazione che a una coppia di numeri ne associa un altro⁵⁴);
- le esplorazioni si svolgono sui numeri prodotti per compilare la tabella (questa infatti permette la scomposizione e l'ordinamento delle possibili coppie di strategie);
- le regolarità riscontrate localmente sono generalizzate sfruttando la sistematizzazione dei dati (simmetria, crescita...);
- applica uno schema conosciuto: equilibrio di Nash (quindi per lui la soluzione è zero);
- generalizza la strategia per un numero n di giocatori seguendo sempre la definizione di equilibrio di Nash;
- il modello infine gli permette di sviluppare controlli che innescano esplorazioni discendenti e per assurdo (infatti si può muovere liberamente avanti o indietro nel tempo solo spostandosi nelle caselle della tabella prodotta).

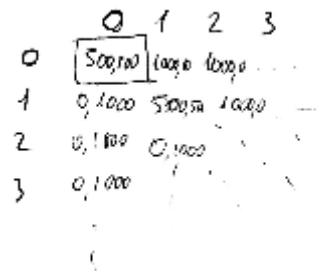
⁵⁴ Funzione dei payoff (si veda par. 1.3)

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata (con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)	Analisi integrata
<p>Frame “gioco non cooperativo ad informazione completa”: rappresentabile quindi in forma strategica</p>	<p>Esplorazione guidata dall'applicazione di schemi conosciuti (A1): fissare una variabile nel caso più semplice. Utilizzo di rappresentazioni grafiche conosciute della situazione problematica (B).</p>	<p>1.E: (legge il testo) si dunque, questo qua è un gioco abbastanza... standard, ne trovi anche una trattazione su sulla pagina web di ...eh...Ariel Rubinstein</p> <p>2.O: si lo so...</p> <p>3. E: ah sei già andata a vedere, basta. Perfetto. Dunque... non mi ricordo assolutamente cosa diceva Ariel Rubinstein ...ovviamente, che da un certo punto di vista è meglio...</p> <p>a) dunque beh, tanto proverei a cominciare a vedere cosa succede con due giocatori,</p> <p>b) farmi proprio lo schemino</p> <p>c) e veder cosa conviene tra due, per vedere se il discorso si può espandere a più di due giocatori in maniera abbastanza decente.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Approccio pre-formato che porta con se traccia di successive tappe di azione (vedi 3b) • Essendo un esperto di Teoria dei Giochi, può utilizzare i modelli d'azione proposti da questa teoria (identificazione del problema come gioco rappresentabile in forma strategica).. • Pianificazione di tappe successive (che poi verrà rispettata). L'entrata nel problema è fortemente strutturata e guidata dal riconoscimento di situazioni problematiche conosciute.
<p>Modello di gioco in forma strategica</p>	<p>Adattamento modelli conosciuti</p>	<p>d) Allora...diciamo (<i>comincia a scrivere una tabella a doppia entrata con le righe e colonne date dai numeri che pronuncia</i>) 0,1,2,3 ...0,1,2,3</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Costruzione della rappresentazione della situazione problematica attraverso una tabella a doppia entrata

<p>Schema “compilazione e di tabella a doppia entrata”</p> <p>Algoritmi dettati dal problema.</p>	<p>Esplorazione supportata da tabella (B)</p> <p>Applicazione algoritmi di calcolo</p> <p>Interpretazione dati</p> <p>Immaginazione modellata (A2) che si trasforma in assunzione</p> <p>Applicazione algoritmo di calcolo e compilazione</p>	<p>e) allora...in questo caso qui (<i>indica la prima casella data dalle scelte 0,0</i>)</p> <p>f) la media è zero</p> <p>g) quindi in teoria vincono tutti e due</p> <p>h) ...supponiamo che se lo dividano a metà: 500 e 500 (<i>riempie la caselle con questi due numeri</i>).</p> <p>4.O: sì. 5.E:</p> <p>a) tanto per dare l'idea. Se invece scelgono 0 e 1 è il secondo il più vicino ai due terzi...no...sì è il secondo perché la media è...no perché la media è 0,5 i due terzi sono al disotto</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Inizio della compilazione della tabella casella per casella: il problema ora è ridotto a dei calcoli fatti partendo da coppie specifiche di numeri. • Interpretazione in termini di vittoria del risultato relativo alla coppia di mosse. • Si può notare che anche se il testo non specifica cosa succede se i giocatori dicono lo stesso numero, visto che le caselle si devono riempire tutte per applicare gli algoritmi di risoluzione, il soggetto decide di scegliere lui cosa può accadere adottando un comportamento convenzionale: dividere la posta. La costruzione del modello lo induce quindi a fare delle supposizioni che permettano la sua formazione. • Continua compilazione della tabella: le scelte sono esaminate a coppie, numero per numero. Applica algoritmo di calcolo ed individua il vincitore. Il problema è diventato solo una constatazione della casistica possibile e l'individuazione del vincitore in ciascun caso preso in considerazione.
---	--	--	--

<p style="text-align: center;">Schema dominanza</p>	<p>Interpretazione dati</p> <p>Anticipazione modellata (A2)</p> <p>Anticipazione guidata da evidenza e da abitudine a gestire il modello</p>	<p>b) e quindi chi ha scelto zero vince...</p> <p>c) quindi diciamo (<i>compila la tabella</i>) 1000, 0</p> <p>d) con due la media è uno, i due terzi si avvicina a zero</p> <p>e) quindi vince comunque sempre chi sceglie il più basso</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizza le indicazioni sulle vincite per indicare a quale casella va la vittoria. • Compila la tabella • Si sposta sulla stessa riga, cambiando casella e svolgendo i calcoli per capire a chi andrebbe la vittoria (fissa una possibile giocata (strategia) ed esplora, al variare delle possibili scelte dell'avversario, cosa potrebbe succedere): applicazione di schema non ancora esplicitato in modo formale. • Dopo aver visto cosa succede nella casella successiva, intuisce cosa succede per le altre e quindi generalizza sulla riga il miglior comportamento. La tabella quindi non deve essere compilata in tutte le sue parti.
<p style="text-align: center;">Schema simmetria</p>	<p>Compilazione tabella</p> <p>Anticipazione Modellata (A2) supportata dalla rappresentazione (B)</p>	<p>f) (<i>compila la tabella mettendo 1000, 0 nell'altra casella e mettendo i puntini di sospensione sotto le ipotetiche altre colonne che non ha neanche esplicitato</i>)</p> <p>g) niente in questi casi qua (<i>indica la prima colonna</i>) è l'opposto (<i>scrive 0, 1000 e poi puntini di sospensione come per la prima riga</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La compilazione della tabella non avviene casella per casella come prima, ma, sfruttando la simmetria della situazione descritta e, di conseguenza della tabella: non c'è esplorazione ma compilazione "per righe". • Sfruttata la simmetria ora si deve ritornare alla compilazione per caselle, ma si rende conto che può compilare anche la diagonale visto che suppone il dividersi equo della somma per giocate uguali.

<p align="center">Schema: Equilibrio di Nash</p>	<p>Esplorazione empirica su tabella in un caso particolare (B)</p>	<p>h) bisogna vedere gli altri, dunque $1\ 1$ ovviamente 500 e 500 (lo mette nella tabella)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ha già compilato tutta la prima riga, la prima colonna e la diagonale, ha compreso che la tabella è simmetrica. Comincia dalla prima casella il cui risultato non può essere dedotto da quelli appena visti.
	<p>Esplorazione modellata e supportata da rappresentazione</p>	<p>i) quindi sulla diagonale si suppone che ci sia sempre la stessa cosa chiaramente (mette puntini per indicare questo).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Generalizzazione prodotta sul modello.
	<p>Esplorazione in un altro caso particolare: applicazione algoritmi di calcolo</p>	<p>j) Dunque 2 e 1, la media è $1,5$...i due terzi è uno quindi...</p> <p>k) sì in generale vince sempre chi sceglie il più basso dei due,</p> <p>l) con due giocatori deve stare al di sotto</p> <p>m) quindi in generale avremo 1000 e 0 sotto tutto questo eventuale triangolo (indica le celle della tabella le celle da $1,2$ in poi sopra la diagonale) e $0\ 1000$ (indica le celle da $2,1$ in giù sotto la diagonale).</p> <p>n) Allora ...eh...ma direi che questo (riquadra la prima casella corrispondente a $0,0$)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Continua la compilazione della tabella: le esplorazioni sono guidate dal modello e sono limitate a comprendere cosa accade per ogni coppia • Generalizzazione della strategia inferita dai dati • Elaborazione strategia vincente nel caso delle singole coppie • Traduzione della l) sulla tabella
			<ul style="list-style-type: none"> • Lo schema d'azione conosciuto (equilibrio di Nash) applicato sulla tabella porta all'individuazione e all'identificazione della soluzione.

<p align="center">Schema equilibrio di Nash</p>	<p>Controllo discendente su tabella: da soluzione a motivi che la hanno prodotta</p>	 <p>o) è un equilibrio di Nash perché comunque uno si sposta ci perde soltanto.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Viene data un'etichetta che identifichi il tipo di soluzione trovata e successivamente viene anche spiegato il suo legame con il tipo di procedimento seguito.
	<p>Controllo che innesca un'esplorazione discendente su tabella che sfrutta definizione di equilibrio di Nash</p>	<p>6.O: quindi il 500, 500</p> <p>7.E:</p> <p>a) si bisognerebbe giocare zero, zero ufficialmente e quindi sarebbero 500 ciascuno perché in tutti...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Controllo che innesca esplorazione che si espliciterà in 7b)
	<p>Esplorazione discendente (b2)</p>	<p>b) questo qui è l'unico caso in cui se un giocatore invece di giocare zero cambia, fa vincere l'altro e viceversa e quindi gli conviene,</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Parte dalla soluzione negata e verifica la validità della sua scelta. (tipo procedimento per assurdo).
	<p>Esplorazione/controllo ascendente (b1)</p>	<p>c) mentre in tutti gli altri casi, cambiando tu puoi vincere o di più o di meno, ma soprattutto puoi vincere di più e questa è la cosa interessante, quindi esiste un equilibrio di Nash che è 0,0</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplorazione/controllo su tabella
	<p>Fine prima parte di esplorazioni: caso n=2</p> <p>Esplorazione modellata da caso precedente</p> <p>Esplorazione discendente sul processo: partendo dalla soluzione ipotetica vede risultato</p>	<p>d) quindi la cosa più conveniente sarebbe giocare 0,0</p> <p>e) eh...(...) beh la stessa cosa dovrebbe valere anche per più di due giocatori perché,</p> <p>f) dunque se tutti i giocatori giocano zero si dividono la posta in parti uguali,</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ribadisce la soluzione • Esplorazione generalizzata al caso n>2. • Per n giocatori non può più usare la rappresentazione grafica, ma ormai ha in mente il "processo" e la

<p>Schema “per assurdo”</p>	<p>Esplorazione “per assurdo” (b2) (fino alla battuta i)</p>	<p>g) se uno cambia la sua giocata, quindi evidentemente gioca di più, alza la media</p>	<p>possibile soluzione: parte quindi da questi per esplorare.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Usa la definizione di equilibrio di Nash⁵⁵ per impostare un procedimento per assurdo fissandolo su un unico giocatore. Bisogna notare che, mentre parla, guarda la tabella come se stesse immaginando il gioco in cui un giocatore gioca contro tutti altri gli enne.
<p>Schema media aritmetica e applicazione regola “vince il più basso”</p>	<p>Esplorazione guidata da modello costruito</p>	<p>h) e quindi lui è sicuro di non vincere perché la alza ma non a sufficienza da far sì che lui vinca</p> <p>i) e quindi comunque vincono ...gli altri si dividono il risultato.</p> <p>j) La scelta zero è sempre quella più vicina.</p> <p>k) Quindi non conviene alzare la propria giocata quindi in teoria conviene giocare zero.</p> <p>l) Il risultato ...n giocatori portano al risultato (0,0) (lo scrive)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Risultato esplorazione su caso che “esce dalla soluzione prevista”. Qui le assunzioni fatte sono forti: infatti i giocatori sono tutti considerati compatti e omogenei nella formulazione della strategia (tranne al massimo uno che tanto non cambia la situazione) e il modello della forma strategica induce a considerare il problema come dicotomico. • Conclusione dell’esplorazione/controllo • Conferma dell’ipotesi • Descrizione della strategia e controllo • Dichiarazione della strategia

⁵⁵ Nessuno può più migliorare il proprio risultato modificando solo la propria strategia, ed è quindi vincolato alle scelte degli altri. Poiché questo vale per tutti i giocatori, è evidente che se esiste un equilibrio di Nash ed è unico, esso rappresenta la soluzione del gioco, in quanto nessuno dei giocatori ha interesse a cambiare strategia.

F: dottoranda in matematica

F. sceglie come strumento di analisi il linguaggio algebrico: il tentativo di modellizzazione svolto attraverso questo linguaggio si riduce però ad una rappresentazione formale della media che, abbandonata e ripresa più volte, alla fine, risulta essere sterile (ossia non porta al soggetto informazioni utili per elaborare una strategia “vincente”).

Il suo approccio rispecchia un’abitudine ad affrontare problemi aperti in matematica: esplora i casi limite, tenta di generalizzare etc. F. fatica però ad entrare nel frame interazione strategica⁵⁶: anche se a parole definisce le scelte come prodotto di strategie di giocatori, in realtà quando le manipola le considera solo come valori numerici.

I punti nodali attraverso cui si è svolta la sua risoluzione sono i seguenti:

- È subito bloccata dal fatto di non poter gestire la media senza sapere il valore di n ;
- esplora i casi limite;
- vuole evitare le esplorazioni numeriche e quindi usa il linguaggio algebrico per dare generalità alle sue esplorazioni;
- il fatto di non poter governare tutte le variabili in gioco (influenzate dalle scelte degli altri giocatori) la mette in difficoltà;
- cerca di eliminare il problema dato dalla presenza di n generico fissando $n=4$ (probabilmente sceglie questo numero perché vuole caso generico, ma non troppo);
- anche se ha fissato n , la rappresentazione della media (indicando i numeri scelti come variabili) non le dà informazioni sul possibile valore da scegliere;
- sotto suggerimento dell’osservatore cambia rappresentazione: costruisce un grafico;
- non riesce a modellare la situazione utilizzando la rappresentazione grafica perché è necessario trovare prima la relazione tra i numeri scelti e la loro media;
- la consapevolezza di non riuscire a posizionare la media di quei quattro numeri generici sul segmento, le fa abbandonare il caso $n=4$;
- comincia con l’esplorare il caso in cui sa posizionare la media rispetto ai numeri scelti: esplora il caso $n=2$ (punto medio di segmento);

⁵⁶ In questa intervista l’osservatore è intervenuto più volte per aiutare F. a superare i momenti di blocco dovuti alla scelta della rappresentazione e alle difficoltà a gestire una situazione di interazione strategica con n giocatori.

- l'ambiente grafico non le è congeniale e quindi durante l'esplorazione cerca sempre di ricondursi ad usare il linguaggio algebrico (che però continua a non darle informazioni);
- riesce a costruire una strategia per $n=2$: scegliere il numero più basso e quindi scegliere zero che è il più basso possibile;
- cerca di generalizzare questa strategia per $n=3$, ma non ci riesce perché la costruzione della sua strategia si basa su un assunto che in questo caso non vale (trovare il punto medio di un segmento i cui estremi sono le scelte);
- abbandona sia l'algebra, sia il grafico e, per testare la sua ipotesi sulla scelta maturata per $n=2$ potrebbe valere anche per $n=3$, cerca controesempi;
- alla fine abbandona perché si rende conto che non può generalizzare la strategia elaborata con due giocatori (come Sam).

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
<p>Frame problem solving</p> <p>Schema media di numeri</p>		<p>1. F:</p> <p>a) (<i>legge il testo</i>) allora sono n giocatori (<i>scrive n</i>) e ciascuno sceglie un numero tra zero e cento (<i>scrive "0...100"</i>), ok... e vince chi prende il numero più vicino ai $\frac{2}{3}$ della media dei numeri scelti, ok; quindi di chi si avvicina ai $\frac{2}{3}$ della media,</p> <p>(m) 0... 100</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Entra nell'attività di problem solving: individuazione e scrittura dei dati, delle formule e delle richieste.
<p>Algoritmo media aritmetica</p> <p>Frame scelta "casuale" di numeri</p>	<p>Fallimento del tentativo di traduzione dei dati attraverso l'algoritmo di calcolo della media aritmetica e conseguente ritorno al testo</p>	<p>b) (<i>scrive "2/3 media"</i>) scrivo media perché in questo momento non mi viene in mente altro modo per dirlo, ok?</p> <p>c) Quindi intanto questa media qui è la media tra n valori che non sono necessariamente distinti</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Subito emerge la difficoltà a formalizzare in modo immediato la media di numeri di cui non si sa la quantità. • Considerazioni sui valori possibili su cui fare la media

<p>Schema: indagare sui numeri estremi</p>	<p>Applicazione di schemi d'azione conosciuti</p> <p>Inizio esplorazioni</p> <p>Continuano esplorazioni non completamente esplicitate e poi bloccate</p> <p>Esplorazione episodica (a)</p>	<p>distinti...</p> <p>2. O: sì possono scegliere il numero che vogliono.</p> <p>3. F:</p> <p>a) ok...stavo pensando se ci sono per così dire delle situazioni estreme qualcosa tipo se tutti scelgono (<i>fa due frecce che indicano lo zero e il cento che ha scritto</i>)...</p> <p>b) perché è strano perché ...parlo a ruota libera?</p> <p>4. O: sì certo.</p> <p>5. F:</p> <p>a) sembra una media in due tempi perché è media sulle scelte...e quindi mi verrebbe da dire...però...ok, no. Niente...no</p> <p>b) mi è venuto subito da pensare ...i due casi estremi e io per casi estremi ho pensato quando la media è più vicina allo zero e quando la media è più vicina la cento, ok? In realtà c'è anche un altro, in realtà questo non è un vero caso estremo, il caso estremo è quando tutti scelgono la stessa cosa o se tutti la scelgono diversa, ok? va bene?</p> <p>6. O: perfetto.</p> <p>7. F:</p> <p>a) però questa cosa qui del numero molto basso o del numero molto alto, cioè somma molto alta, somma molto bassa chissà perché mi sembra che sia una</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Oltre all'entrata nel problema troviamo qui uno schema tipico applicato durante le fasi esplorative in attività di problem solving: cercare di capire cosa succede nei casi estremi. • Problemi nel gestire la richiesta del testo e quindi gli algoritmi di calcolo: le scelte proprie e dell'avversario influiscono entrambe sulla determinazione della media • Ricostruzione di un'esplorazione avvenuta nella parte 5 a). Questa innesca un'esplorazione in cui avviene un passaggio dall'analisi dei casi estremi dell'intervallo, all'analisi dei casi estremi delle scelte.
<p>Schema casi estremi nel caso della scelta</p> <p>Esplorazione (A1)</p>			<ul style="list-style-type: none"> • Considerazioni sui numeri legata all'attivazione precedente del frame "scelta casuale dei numeri" che a sua volta innesca il frame giochi d'azzardo.
<p>Frame giochi d'azzardo</p>			

<p>Schema: delimitare il valore delle variabili</p>	<p>Esplorazione sui dati che innesca ricordo di schemi d'azione</p> <p>Esplorazione bloccata</p> <p>Esplorazione guidata da schema</p>	<p>sembra che sia una cosa che...che può in qualche modo influire e così molto a senso però sembra una di quelle cose tipo le scommesse,</p> <p>b) ti direi che non sceglierei mai un numero troppo vicino allo zero o troppo vicino al cento</p> <p>c) e in tutto questo mi sono anche resa conto che questo n non so assolutamente quanto valga,</p> <p>d) spero di poter considerare che sia minore di 100.</p> <p>8. O: sì, sì n può essere il numero che vuoi.</p> <p>9. F: diciamo che per il momento...</p> <p>10. O: n può essere il numero che ti piace di più, se vuoi puoi anche fissarlo.</p> <p>11. F: posso fissarlo eventualmente. Magari per fissare le idee ad un certo punto ti dirò che n è...quattro... una cosa molto bassa... stavo pensando se influisce...</p> <p>12. O: sul risultato?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Applicazione schemi di comportamento ricordati, ma non giustificati • Affiora in modo evidente il problema della gestione della non determinatezza del numero dei giocatori • Ha bisogno di ipotesi sul valore di n
<p>Schema fissare una variabile</p>	<p>Pianificazione di un'esplorazione semi- empirica (A1)</p> <p>Ritorna la testo</p>	<p>13. F: sì, sicuramente sì quindi...va bene...allora (<i>rileggendo parte del testo</i>) "quale potrebbe essere una buona scelta per vincere" allora si fisso</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Eliminazione dell'ostacolo che non le permette di applicare l'algoritmo di calcolo della media: fissa un numero n quasi a caso (probabilmente sceglie un numero non troppo alto per facilitare i calcoli e non troppo basso per non entrare in casi particolari). Questa scelta non porterà però a dei miglioramenti nella gestione della media perché le difficoltà nell'esplorazione sono dovute alla scelta del linguaggio algebrico per manipolare il concetto di media. • Inizia esplorazione come se riaffrontasse il problema dall'inizio.

<p>Frame manipolazioni algebriche</p>	<p>Esplorazione nel caso n=4 e adattamento schema media aritmetica nel caso scelto</p>	<p>vincere”...allora...sì fisso veramente n uguale... in questo momento a quattro (<i>scrive n=4</i>) non so bene per quale motivo...allora se ci sono ...quattro scelte diverse ci saranno quattro numeri che chiamo n_1 n_2 n_3 n_4 (<i>lo scrive</i>) la media...è media...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Modella la situazione problematica utilizzando il linguaggio algebrico: in questo modo può esplicitare l’algoritmo di calcolo della media senza utilizzare particolari valori per le scelte
<p>Schema media aritmetica di quattro numeri</p>	<p>Applicazione algoritmo di calcolo</p>	<p>14. O: è una media normale. 15. F: a) è una media aritmetica...quindi bisogna avvicinarsi ai due terzi di $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ su quattro (<i>lo scrive</i>) quindi a $\frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4}$ sesti...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Dopo aver scritto la formula della media di quattro numeri qualsiasi, innesca esplorazione sulla formula che è trattata come un esempio generico.
<p>Schema induzione non sviluppato</p>	<p>Fallimento anticipazione su formula (B)</p>	<p>b) che non credo...non credo possa significare qualcosa c) anche perché come mi hai fatto notare...cioè come ho notato a partire da ciò che ci siamo dette prima in qualche modo questa scelta sarà dipendente da n, quindi non so nemmeno se ha molto senso prendere degli n particolari...va beh è uguale... d) eh...per due minuti ho avuto la tentazione di fare per n uguale a 5, a 6, a 7 per cercare di fare una cosa induttiva per darti la</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La scelta di dare un valore particolare ad n non la aiuta a ricavare informazioni dalla formula della media: ritorna quindi a considerazioni sul valore di n • Abbandona la scelta di n=4
<p>Schema induzione non sviluppato</p>	<p>Esplorazione episodica nel passato prossimo (a)</p>	<p>14. O: è una media normale. 15. F: a) è una media aritmetica...quindi bisogna avvicinarsi ai due terzi di $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ su quattro (<i>lo scrive</i>) quindi a $\frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4}$ sesti...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Comunica una strategia che ha esplorato mentalmente, ma che ha scartato.

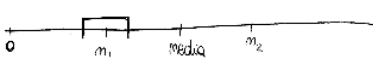
<p>Schema “estremi” nel caso stessa scelta</p> <p>Frame problemi di probabilità</p>	<p>Ritorno al testo</p> <p>Esplorazioni che seguono schemi accennati in precedenza</p>	<p>gioia di un matematico che lo fa, però non mi è sembrato particolarmente intelligente come cosa ...va bene.</p> <p>e) Non ho un granché di idee...allora...tra l'altro è i 2/3 della media...allora banalmente, ora ti dico delle cose banali...</p> <p>16. O: tu dimmi tutto quello che pensi.</p> <p>17. F: banalmente alla peggio tutti quanti i giocatori scelgono zero perché ho questa cosa fissa del...del numero ...tutti uguale... delle cose in cui tutti sono d'accordo che immagino tra l'altro che non sia assolutamente la cosa più probabile quindi ...mi disturba un pochino il fatto che ci sia un...che sembra che ci sia un po' di calcolo delle probabilità infilato dentro...</p> <p>18. O: non c'è la probabilità...cioè non sai niente perché ognuno di loro è chiuso nella stanzetta...</p> <p>19. F: quindi teoricamente è equi-probabile la cosa di tutti uguali o tutti diversi...</p> <p>20. O: loro dicono...è una scelta, ma non solo...</p> <p>21. F: sì però è una scelta...non è solo ti metto in una cabina e ti dico dimmi un numero.</p> <p>22. O: no.</p> <p>23. F: è scegli un numero cercando di vincere i mille euro.</p> <p>24. O: sì, sì non è a caso.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Momento di blocco • Ritorna a schemi d'azione generali che aveva introdotto in precedenza: fissa però l'attenzione sulle scelte dei numeri non sui processi che le generano e quindi pensa alla probabilità.
---	--	---	---

<p>Frame interazione strategica? In realtà non viene aperto ma si resta nel frame casi estremi</p> <p>Schema media</p> <p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione episodica (b1)</p> <p>Applicazione algoritmo</p> <p>Inizio esplorazione episodica sui numeri (b1)</p>	<p>25. F: devono avere delle strategie, fanno dei ragionamenti...</p> <p>26. O. sì non è casuale, cioè loro non vanno a caso.</p> <p>27. F: va bene. Il caso più stupido potrebbe essere: tutti scelgono zero, quindi la media è zero, a quel punto però cosa succede? Succede che i due terzi di zero è ancora zero e cosa fanno? Hanno vinto tutti.</p> <p>28. O: sì, se vincono tutti si dividono la somma.</p> <p>29. F:</p> <p>a) si dividono la somma, ok. ...No perché stavo cercando di vedere se c'è una condizione che è così palesemente la migliore per tutti...direi di no.</p> <p>b) Se tutti scelgono 1...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sposta la sua attenzione sul processo • Siamo sempre nel frame casi estremi: applica algoritmo di calcolo perché ha bisogno di vedere un risultato concreto • Possibili esplorazioni non esplicitate, ma che non portano a risultati • Cerca di andare per casi aumentando il valore scelto: approccio empirico, ma strutturato. Probabilmente sta cercando delle regolarità indipendenti dal valore della scelta.
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Applicazione algoritmo di calcolo</p> <p>Controllo</p>	<p>30. O: ecco se tutti scelgono uno è uguale.</p> <p>31. F: se tutti scelgono uno è uguale nel senso che viene ...media 1, tutti hanno scelto uno, sto iniziando a capire che non conta la scelta del numero, ma quante persone lo scelgono.</p> <p>32. O: sì.</p> <p>33. F: e no non mi era chiaro questo pensavo che ci fosse anche differenza a seconda se tutti scelgono lo zero piuttosto che il 50, non so per quale motivo...</p> <p>34. O: il numero effettivamente è diverso, cioè i 2/3 di quel numero lì, però</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Applicazione algoritmo di calcolo • Ritorna ad vedere come punto nodale il ruolo del numero n. • Controllo e analisi del procedimento fino ad ora condotto seguiti da chiarificazione richieste del testo • Conclusione esplorazioni precedenti

	<p>Controllo su ciò che ha scritto che innesca esplorazione sulla formula che si blocca</p> <p>Ripresa esplorazione sulla formula (B) che si blocca</p>	<p>però...</p> <p>35. F: cioè nell'ipotesi che tutti scelgano lo stesso non cambia assolutamente niente.</p> <p>36. O: no, infatti.</p> <p>37. F: ok, sarà una cosa lunga e dolorosa.</p> <p>38. O: no, tu vedila... cioè proprio come se fossi lì e dovessi giocare.</p> <p>39. F: sì, se fossi io che cosa giocherei.</p> <p>40. O: sì cosa giocheresti...non c'è una soluzione...</p> <p>41. F: no infatti è vero.</p> <p>42. O: non essendoci una soluzione...non si può dire: è vero questa è al strategia migliore, la strategia migliore non è proprio vero che ci sia...</p> <p>43. F: no, infatti.</p> <p>44. O: non puoi dire sono sicura che facendo quello vinco.</p> <p>45. F:</p> <p>a) stavo pensando se nel mio caso dell'enne uguale a 4 è possibile capire...dal fatto che la media è questa...</p> <p>b) (<i>pensa</i>) non mi fare prendere anche dei valori particolari...</p> <p>c) cioè il problema è secondo me che non avendo...cioè tipo da questo coso qua (<i>indica il risultato dei 2/3 della media</i>) $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ non ti so nemmeno dire ovviamente chi vincerebbe dei quattro perché sono generici e quindi non mi serve a niente in effetti essermi ricondotta al solo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Blocco • il ruolo di n deve essere in qualche modo fissato e quindi ritorna al caso precedentemente selezionato • non vuole svolgere esplorazioni empiriche "cieche" su scelte particolari • analisi delle difficoltà e delle motivazione del blocco: abbandona la scelta di fissare n=4
--	---	--	---

<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione su componenti algoritmo</p> <p>Esplorazioni non completamente esplicitate che rivelano però tentativo di legare valori numerici a produzione di strategie</p>	<p>ricondotta al solo caso di $n=4$.</p> <p>46. O: no penso di no...ma sono tutti simili...</p> <p>47. F:</p> <p>a) ...in tutto questo sto anche pensando se ricondurmi cioè se ignorare i due terzi mi cambia drasticamente la strategia oppure no...</p> <p>b) (<i>pensa</i>) nel senso ci sarebbe comunque una scelta...cioè la scelta cambia se anziché premiare...</p> <p>48. O: sì cambia.</p> <p>49. F: se anziché premiare...sì ...però se loro lo fanno allo stesso modo in effetti per loro non cambia niente...</p> <p>50. O: cioè il fatto che sia $2/3$ cambia il valore che vincerà ...però la regola...</p> <p>51. F: sì cambia ovviamente il valore che vincerà però il tipo di ragionamento sarebbe uguale ... sia che ci fosse $2/3$ che se ci fosse $3/4$ ecc..</p> <p>52. O: sì, la frazione è solo per il valore...</p> <p>53. F:</p> <p>a) sto pensando, il fatto che c'è proprio $2/3$ però mi fa escludere sicuramente dei ...mi dava l'idea di poter escludere dei valori troppo grandi e dei valori troppo piccoli...</p> <p>54. O: ...quello sì, $2/3$ è un numero particolare quindi sicuramente lui escluderà qualcosa.</p> <p>55. F: infatti...(<i>si blocca per un po' in silenzio a guardare ciò che ha scritto</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • analisi dell'influenza delle componenti dell'algoritmo di calcolo sul valore finale prodotto da questo. Vista la difficoltà a gestire la variabile n, si rivolge al valore numerico $2/3$. • Ha difficoltà ad entrare nel frame interazione strategica e a svolgere esplorazioni in questo. • Continuano esplorazioni non completamente esplicitate • Considerazioni sulla relazione tra risultati e processi di calcolo
<p>Schema limitazione campo d'azione</p>	<p>Applicazione schema d'azione</p>	<p>a) sto pensando, il fatto che c'è proprio $2/3$ però mi fa escludere sicuramente dei ...mi dava l'idea di poter escludere dei valori troppo grandi e dei valori troppo piccoli...</p> <p>54. O: ...quello sì, $2/3$ è un numero particolare quindi sicuramente lui escluderà qualcosa.</p> <p>55. F: infatti...(<i>si blocca per un po' in silenzio a guardare ciò che ha scritto</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Cerca di applicare schemi d'azione conosciuti per eliminare le troppe variabili in gioco • Fallimento di esplorazioni e successivo blocco

<p>Frame intervallo</p>		<p><i>scritto</i>)</p> <p>56. O. potrei...vuoi che ti dica qualcosa?</p> <p>57. F: sì, perché sono un po'...</p> <p>58. O: il discorso è che secondo mela rappresentazione algebrica così, fatta così ...è vuota nel senso che...</p> <p>59. F: e sì...non serve a niente. Io sarei tentata di farmi un ...un grafichino...cioè una retta dei numeri, però...</p> <p>60. O: ok, prova a fare quello che vuoi.</p> <p>61. F: sì però non ... non sono così sicura che mi aiuti.</p> <p>62. O: ok che la retta possa essere un modello che ti può piacere...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • L'osservatore interviene per aiutare il soggetto a superare il blocco
<p>Schema media di quattro numeri</p>	<p>Fallimento esplorazione</p>	<p>63. F: ...ma essenzialmente perché non credo di saperti bene piazzare la media rispetto quattro numeri...</p> <p>64. O: sì ho capito...rispetto a quattro numeri infatti è difficile...</p> <p>65. F: ok, non è facile.</p> <p>66. O: siamo d'accordo.</p> <p>67. F:</p> <p>a) Allora posso farla tra due numeri?</p> <p>b) Faccio "spontaneamente" una retta (<i>disegna una retta</i>) da n_1 e n_2 (<i>mette due tacche e le nomina</i>) chissà</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Cambia rappresentazione: disegna un segmento • E' diffidente sulle potenzialità di questo nuovo ambiente di lavoro • Cerca di rappresentare su questo il caso $n=4$: anche il nuovo modello non può risolvere il problema della determinazione della media in questo caso. Il grafico è solo rappresentazione. • L'obiettivo di rappresentare sull'intervallo la media la porta a scendere di complessità. Va a rappresentare il caso in cui sa come posizionare la media rispetto ai numeri che la determinano: caso $n=2$ • Costruisce la rappresentazione

<p>Schema punto medio</p>	<p>Esplorazione guidata da schema media=punto medio su rappresentazione (A1-B)</p> <p>Esplorazione su rappresentazione (B)</p> <p>Controllo sul grafico</p>	<p><i>nomina)...chissà perché sono partita da quattro...</i></p>  <p>c) <i>(pensa guardando il grafico e mette una tacca a metà tra n1 e n2)...sta lì la media...ah!</i></p> <p>d) <i>I 2/3 dove sta? (guarda il grafico) chissà perché a questo punto devo fare lo zero (mette all'estrema sinistra sulla retta lo zero)</i></p> <p>e) <i>...questa è la media...vengono fuori tutte le mie...ah...se questa (scrive sotto la tacca della media) è</i></p> $\frac{n_1 + n_2}{2}$	<ul style="list-style-type: none"> • Traduce l'algoritmo di calcolo sul grafico • Compila il grafico etichettando i punti
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Pianificazione guidata da algoritmo che si blocca perché salta la traduzione sul modello</p>	<p>f) <i>i due terzi di questo, va beh divido in tre parti e prendo due terzi (non lo fa sul disegno lo dice solo)...però non mi sembra molto carina come cosa perché non so come sta rispetto ad n1,</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Il disegno è solo una rappresentazione da compilare: le esplorazioni quindi non si appoggiano a questo.
<p>Frame disequazioni</p>	<p>Pianificazione guidata da conoscenza (A1)</p>	<p>g) <i>ma posso saperlo come sta rispetto ad n1 a patto di aver voglia di risolvere una facile disequazione...però non credo che sia particolarmente interessante...hai capito cosa potrei voler fare?</i></p> <p>68. O: <i>sì ho capito, vuoi guardare due terzi...</i></p> <p>69. F: <i>sì vorrei fare 2/3 rispetto ad n1 però...</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • I momenti di blocco nelle esplorazioni cercano di essere risolti attraverso l'algebra. Vi è una continua traduzione dalla disposizione spaziale sul segmento alle relazioni algebriche. L'esplorazione in questo capo però necessita la produzione scritta • Blocco dovuto alla difficoltà di svolgere l'algoritmo sia

<p>Frame scelta di numeri</p> <p>Schema estremo inferiore</p>	<p>Esplorazione su grafico (B)</p> <p>Controllo seguito da esplorazione</p> <p>Esplorazione su rappresentazione (B+A1): ricerca estremo inferiore</p>	<p>prendendo i due terzi di una cosa positiva arretro rispetto alla media...</p> <p>b) va bene...quindi di sicuro tra n_1 e n_2 vince chi ha scelto n_1</p> <p>c) che significa che se giocano in due è sempre bene tirare in basso rispetto...cioè è sempre bene essere quello che ha preso il...il numero più basso,</p> <p>d) però non sapendo quello che prende l'altro, io a questo punto non...(guarda il grafico) beh, se fossimo due io a quel punto prenderei zero</p>	<p>concentra sulla traduzione del processo che decreta il numero vincitore</p> <ul style="list-style-type: none"> • Individuazione del numero vincente tra due • Costruzione strategia
<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione episodica discendente (b2) dei vari possibili casi, fissa la sua strategia e vede i possibili risultati</p>	<p>e) perché mal che vada anche lui ha preso zero e se lui ha preso qualcosa di più grande di zero, ho sicuramente vinto.</p> <p>82. O: sì, questo va bene.</p> <p>83. F: questo va bene?</p> <p>84. O: ma sì, tu dici che se prendo zero sicuramente, sicuramente più piccolo di zero non c'è nient'altro?</p> <p>85. F: sì, un cosa di quel genere.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Generalizzazione della strategia: da numero relativo a numero assoluto. Non è ancora entrata nel frame interazione strategica, ma solo in quello scelta di numeri. La scelta dello zero è fatta per generalizzazione della proprietà esser il più piccolo • Attraverso l'esplorazione episodica controlla l'efficacia della sua strategia
<p>Frame generalizzazione di proprietà</p> <p>Frame numeri di intervallo</p>	<p>Esplorazione episodica su esempi</p>	<p>a) Sto chiedendomi quanto... questa cosa qui è una cosa vera in assoluto,</p> <p>b) a sto punto mi verrebbe quasi da dirti...prendo zero sempre, ma no! Perché se io prendo zero e altre due persone prendono 100, la media è 200</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Vuole generalizzare la sua strategia ossia controllare se vale anche con un numero di giocatori maggiore, ma non apre il frame interazione strategica
<p>Frame media e schema</p>			<ul style="list-style-type: none"> • Pensa che la sua strategia non funziona e allora genera controesempi: blocco

<p>casi estremi</p> <p>Frame intervallo di numeri Schema punto medio</p> <p>Algoritmo media aritmetica di numeri</p> <p>Schema "ricondursi al caso precedente": determinazione punto medio</p>	<p>Controllo</p> <p>Esplorazione bloccata</p> <p>Anticipazione di possibili applicazioni di algoritmi di calcolo guidata dallo schema d'azione (A1)</p> <p>Esplorazioni/controlli confusi</p>	<p>100, la media è 200 diviso tre...</p> <p>c) hai una calcolatrice? (<i>le passo la calcolatrice</i>) è 66 e 66 è più vicino a cento che a zero.</p> <p>d) La cosa che ho detto io non vale, ma ovviamente non vale perché come dicevamo prima la media tra due numeri so esattamente dove è,</p> <p>e) già la media tra tre...non so se è un mio problema, ma</p> <p>f) ...anche perché non la puoi fare mica in modo ...associativo la media...</p> <p>86. O: in che senso?</p> <p>87. F: non puoi mica fare la media tra i primi due e poi così fare la media con il terzo? Sì puoi farlo, no!</p> <p>88. O: no, infatti la media dipende dal numero di addendi...</p> <p>89. F: mi sto chiedendo un sacco di cose strane...</p> <p>90. O: effettivamente la media con tre è più difficile infatti come hai detto tu già nel caso estremo 100 100 0 non è vero che è a metà da qualche parte...</p> <p>91. F: no non è vero ...perché tre non c'è il punto medio...ho preso un caso molto estremo quindi ...va beh ...ok quindi già non posso dirti che prenderei sempre lo zero...quanto hai ancora voglia di tenermi?</p> <p>92. O: quanto tu hai voglia di continuare...</p> <p>93. F: mi piace questo esercizio, ma non vedo...non sono ancora in</p>	<p>esplorazione dovuto a necessità di svolgere i calcoli</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conferma dai calcoli • Ritorna a rappresentazione grafica: probabilmente cerca di capire la relazione tra la media di tre numeri trovata e le posizioni di questi • Cerca algoritmi di calcolo che la aiutino • Cerca di esplorare la "formula della media": vuole scomporla per ricondurla a media tra due numeri. • Momento di blocco • Cerca sempre di ricondursi a trovare il punto medio o qualcosa di simile, ma non riesce a capire come costruire una nuova strategia (visto che la sua fallisce per dei punti particolari). Decide di abbandonare
---	---	---	--

		<p>grado di pronunciarmi...dovrei fare un sacco di...</p> <p>94. O: ok, allora tu diresti per due...</p> <p>95. F: per due prenderei lo zero.</p> <p>96. O: per tre hai trovato un caso estremo...</p> <p>97. F: esatto per tre già non vale la considerazione dello zero...spero che valga almeno per due, ma quello mi sentirei di dire di sì...</p> <p>98. O: sì, sì.</p>	
--	--	--	--

M: ricercatore in matematica applicata

Questa intervista ha ulteriormente confermato la possibilità di poter mettere in evidenza e studiare le differenze esistenti nelle risoluzioni di problemi aperti attraverso l'analisi del rapporto tra la gestione dei processi di esplorazione temporale e le conoscenze messe in atto dai differenti soggetti. M. infatti è stato selezionato perché portatore non solo di conoscenze in campo matematico, ma anche di abilità nel confrontarsi con possibili modellizzazioni di situazioni reali attraverso strumenti provenienti dalla matematica.

L'approccio al problema è differente da quello riscontrato negli altri matematici: sfrutta la sua capacità di portare avanti esplorazioni temporali, in particolare episodiche, che sono costruite e strutturate innestando man mano processi e assunzioni che le sostengano. In particolare, affina le sue esplorazioni strutturandole attraverso l'innesto di assunzioni che permettono di suddividere il possibile campione a seconda delle possibili capacità anticipatorie dei giocatori (gestisce non solo i comportamenti possibili, ma anche la distribuzione di tali comportamenti)

Le fasi attraversate nel corso della sua risoluzione sono le seguenti:

- Comincia con la simulazione dei possibili comportamenti di interazione strategica (come supposto da Camerer) seguendo il tempo del problema;
- gli schemi d'azione vengono scelti per strutturare le esplorazioni episodiche (ad esempio passando da distribuzione uniforme a media pesata);

- per governare le possibili scelte, divide gli n giocatori in gruppi secondo le possibili strategie. Ordina le strategie in base alla difficoltà dei processi che le hanno prodotte: in questo modo cristallizza le simulazioni dei processi;
- la strutturazione dell'esplorazione viene fissata attraverso la scrittura in linguaggio semi-formale;
- aggira l'ostacolo del calcolo formale per gestire la media di n numeri facendo la media di sottoinsiemi di n ;
- le manipolazioni che presuppongono l'uso dell'algoritmo della media pesata sono svolte su foglio perché non gestibili a mente;
- la situazione è rappresentata attraverso l'interpretazione delle possibili abilità dei giocatori nel predire il comportamento degli avversari⁵⁷;
- dopo averlo prodotto, il modello sarà l'ambiente di lavoro;
- avvengono continui controlli alla fine di ogni passaggio di calcolo numerico o algebrico per verificare l'accettabilità del risultato;
- riformula la suddivisione dei giocatori passando da termini algebrici a percentuali numeriche (probabilmente per una questione di gestione dell'algoritmo di calcolo e dell'analisi del risultato in base a questo);
- fa considerazioni sulle differenze nelle scelte dovute alla tipologia di giocatori (per lui l'intelligenza è riuscire ad anticipare ed analizzare le possibili mosse degli avversari);
- le sue esplorazioni mantengono sempre una componente episodica che è strutturata da assunzioni sul campione e che viene poi fissata in tabelle;
- gli algoritmi di calcolo sono svolti con controlli semantici continui per non perdere il contatto con la situazione problematica;
- la sua scelta finale è il prodotto di una strategia costruita passo, passo attraverso la manipolazione di dati numerici e schemi d'azione costruiti ed iterati: classificazione dei giocatori, relativa individuazione delle scelte possibili per ogni gruppo, applicazione di algoritmi di calcolo ed interpretazione dei dati

⁵⁷ Bounded rationality (Simon, 1955; Rubinstein, 1998; Camerer e al., 2002)

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata (con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)	Analisi integrata
<p>Frame problem solving</p> <p>Schema individuazioni e dati</p> <p>Frame distribuzione uniforme</p> <p>schema media</p> <p>Algoritmo di calcolo</p> <p>Frame interazione strategica</p> <p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Anticipazione modellata (A2)</p> <p>Esplorazione guidata da algoritmo (A1)</p> <p>Applicazione dell'algoritmo di calcolo</p>	<p>1. M:</p> <p>a) (<i>legge il testo</i>) dunque...dunque...il numero più vicino ai due terzi (<i>alza la voce quando pronuncia 2/3</i>) della media dei numeri scelti da tutti i giocatori...ai due terzi della media...</p> <p>b) uno cosa potrebbe dire ad esempio...la prima cosa che uno dice è: se io prendo cento numeri a caso dentro, tra zero e cento, la media credo che per quel poco che mi ricordo dovrebbe attestarsi attorno ai 50, qualcosa del genere,</p> <p>c) quindi uno dovrebbe scegliere i due terzi di 50,</p> <p>d) però si presuppone che siano esseri umani intelligenti e che facciano lo stesso ragionamento...</p> <p>e) intanto i due terzi di 50...vent...no dic...tre, fa diciassette per due trentaquattro...trentaquattro...</p> <p>f) è un po' un circolo vizioso perché ammesso di avere 100 persone intelligenti no (va</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Si concentra sulla parte del testo in cui è espresso l'algoritmo di calcolo che permette l'individuazione del vincitore. • Il suo processo di esplorazione parte con l'applicazione di un modello conosciuto alla situazione problematica. Per far questo deve inserire delle assunzioni: i numeri sono presi a caso. • Pianificazione di azioni: prodotto della sua anticipazione e dell'applicazione del calcolo proposto nel testo • Considerazioni sui giocatori: c'è un controllo sull'assunzione della scelta a caso fatta in precedenza che porta ad un blocco dell'esplorazione. • Cerca il valore numerico prodotto dalla sua esplorazione precedente • Dover gestire le scelte degli altri giocatori lo mette in difficoltà. Nel frame interazione strategica non possiede infatti schemi

<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione episodica nel tempo del problema (b1)</p>	<p>intelligenti, no (va rileggere il testo) n giocatori e un numero tra 0 e 100, ammesso di avere n giocatori intelligenti</p>	<p>preformati per costruire una strategia. Ritorna al testo nella speranza di trovare altre informazioni.</p>
<p>Frame popolazione varia</p> <p>Schema divisione del campione</p>	<p>Applicazione schema</p>	<p>g) ...uno dice se tutti scelgono 34, io che sono più furbo scelgo i 2/3 di 34 e vado a dire 22...</p> <p>h) allora quindi ...bah...una possibile scelta quale potrebbe essere di dire allora ...supponiamo che mediamente ci siano i deficienti, quelli normali e quelli un po' più astuti,</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Iterazione della strategia prodotta precedentemente che si blocca. • Ha bisogno di strutturare il suo ragionamento. La variabile "giocatori intelligenti" (che inserisce il problema in un capo dove no ha conoscenze) deve essere in qualche modo gestita: sceglie quindi di dividere i giocatori a seconda della loro "intelligenza".
<p>Schemi: strategie possibili</p>	<p>Esplorazione guidata da schemi d'azione elaborati in precedenza (A1)</p>	<p>i) i deficienti dicono un numero a caso, quelli normali che riescono ad arrivare fin dove ho detto io adesso dicono 34 e quelli un po' più astuti dicono 22 ...e poi ci sono io, che vengo dopo quelli più astuti che quindi dico...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • L'intelligenza è definita in termini di capacità di entrare in un problema di interazione strategica e quindi di anticipare le possibili mosse degli avversari. Lui si pone al di sopra di tutti i giocatori cerche riesce ad analizzare tutte le possibilità.
<p>Schema individuazione e intervallo di numeri in cui scegliere</p>	<p>Esplorazione sui dati numerici guidata da schemi (A1)</p>	<p>j) allora mettiamo che... sì...quale potrebbe essere una buona scelta per vincere... sicuramente dire un numero tra 22 e 34</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Analizza i dati che ha prodotto e comincia ad elaborare la sua strategia ponendo delle limitazioni alla sua scelta
<p>Schema quantificazione delle variabili</p>	<p>Esplorazione guidata da schemi (A1)</p> <p>Controllo</p>	<p>k) ...allora ammesso ...dividiamo in tre parti uguali queste categorie,</p> <p>l) quindi vorrà dire che la media degli uni sarà 50, la media degli altri sarà 34, la media degli ultimi sarà i due terzi di</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Per portare avanti la sua strategia (trovare una buona scelta tra 22 e 34) deve quantificare numericamente le categorie rispetto al numero totale dei giocatori. • Sta cominciando a schematizzare il suo ragionamento ossia a modellare la situazione problematica

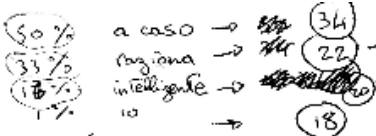
<p>Frame bounded rationality</p> <p>Schema media pesata</p> <p>Schema divisione del campione</p>	<p>Esplorazione guidata da schemi (A1)</p> <p>Esplorazione guidata da schemi (A1)</p> <p>Costruzione del modello</p>	<p>sarà ...i due terzi di 34 che abbiamo detto essere 22, io che...</p> <p>m) però è anche vero che probabilmente se noi facciamo questo test a livello assoluto le persone astute sono sicuramente meno delle persone incaute</p> <p>n) quindi si potrebbe fare una sorta di media pesata tra le tre cose e dire...</p> <p>o) cosa possiamo fare come scelta ...50%...50, 30, 20...50...metti che n sia 100, va beh, teniamo n</p> <p>p) <i>(adesso comincia a scrivere: elenca i casi possibili dividendoli come parti di n e associando a ciascun gruppo un scelta media)</i> n/2 dicono qualcosa che avrà come media 50 e degli altri n/2...2/3 diranno...abbiamo detto 34 e l'altro terzo si suppone che dica 22...</p> $\frac{n}{2} \approx 50$ $\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{n}{3} \approx 34$ $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{6} \approx 22$	<ul style="list-style-type: none"> • Per costruire un modello deve fare delle assunzioni precise • Progetto di azioni guidato da schemi conosciuti che per essere applicato necessita la scrittura • Quantifica la sua divisione, la sua esplorazione si blocca perché vuole tenere n • Per mantenere la generalità, sceglie quindi di indicare le porzioni di giocatori in relazione ad n. costruisce il modello della situazione problematica tenendo conto delle esplorazioni fatte in precedenza
<p>Schema media</p>	<p>Esplorazione sul modello</p>	<p>q) quindi io che sono astuto cosa dico? Come faccio a fare sto conto? Adesso cado sulle cose più facili...se n/2 dicono 50 ...la media cos'è?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sul modello riprende l'esplorazione riguardante il suo possibile comportamento (fino ad ora ha modellato la situazione come se la analizzasse dall'esterno)

<p>Frame sondaggio</p>	<p>Controllo sul risultato</p>	<p>fosse più alta...</p> <p>5. M:</p> <p>a) no io mi immagino un sondaggio nazionale con vecchietti, bambini...e sono stato anche abbastanza generoso...</p> <p>b) però effettivamente mi aspettavo di trovare un numero un po' più basso, 40 è molto alto cioè presuppone che veramente la gente tiri giù a caso...</p> <p>c) quindi eh...sì ovviamente cose banalissime: molto dipende da chi sono gli altri giocatori, tutto dipende da chi sono i giocatori e dall'ambito in cui si è inseriti, se ci sono n giocatori che sanno giocare allora il discorso cambia, se sono n persone perse a caso per la strada...e allora ...allora no. Prendiamo che chi gioca sa, sa come avvengono le regole del gioco, sa se è stato preso per la strada mentre fa la spesa oppure è in tavolo insieme ad altra gente...</p> <p>6. O: facciamo due casi?</p> <p>7. M: facciamo due casi.</p> <p>8. O: puoi fare un caso in cui tu giochi insieme ai ...tuoi simili e il caso...</p> <p>9. M: caso sondaggio...</p> <p>10. O: effettivamente la scelta è davvero diversa</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Fonda le sue assunzioni facendo considerazioni sul campione • Analizza la sua scelta in relazione alle assunzioni • Ulteriori considerazioni sui giocatori: deve vedere se il suo modello può essere valido. Mette delle ipotesi sui giocatori nel suo modello • Ricomincia modellizzazione della situazione problematica alla luce delle nuove ipotesi sui giocatori
-------------------------------	---------------------------------------	---	--

<p>Frame giocatori intelligenti</p>	<p>Applicazione strategia sul modello</p>	<p>diversa 11. M: a) caso sondaggio (<i>lo scrive</i>), io dico, risposta mia essere intelligente ...(<i>guarda ciò che ha scritto</i>) 1% e via (<i>aggiunge un 1% alle percentuali precedentemente scritte etichettandolo con la parola io</i>) essere più che intelligente ...40,</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Definisce la situazione problematica che ha modellizzato in precedenza come “sondaggio”. Inserisce la sua presenza e la sua scelta
<p>Schema Iterazione di strategia</p>	<p>Esplorazione guidata da schema (A1)</p>	<p>b) caso gioco serio (<i>lo scrive</i>) nel caso gioco serio secondo me bisogna un attimo fare un ragionamento più fine, ovviamente come dicevi tu prima non c’è una soluzione cioè bisogna vedere fino a che punto...si potrebbe andare avanti all’infinito...e vedere fino a che punto uno si ferma...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Inizia modellizzazione di un’altra situazione possibile data da ipotesi differenti sui giocatori
	<p>Esplorazione supportata da modello costruito</p>	<p>c) ovviamente non c’è nessuno in un gioco serio, oppure molto bassi, che tirano a caso quindi quanto meno al primo step ci arrivano ...di dire...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tenta di adattare il modello che ha costruito alle nuove ipotesi sul campione
	<p>Esplorazione guidata da algoritmo</p>	<p>d) ma comunque la gente non tirerà un numero alto perché è stupido dire un numero alto essendoci i 2/3, sto facendo giusti i conti...sì i 2/3 ok...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le scelte sono influenzate sia dalle capacità anticipatorie, sia dall’algoritmo che determina chi vince: bisogna quindi controllare entrambe le condizioni
	<p>Esplorazione supportata da strategie e dati prodotti</p>	<p>e) i 2/3 quindi...uno dice...uno dice sopra i 34 è difficile che si vada...34 veniva da questo 2/3 no? Ok 34 è giusto, se tiri a caso i 2/3 viene 34...però la gente lo sa e dice metti che la gente</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Rende episodica la sua esplorazione anche se è svolta su dati già prodotti

<p>Schema media aritmetica</p> <p>Schema divisione del campione</p> <p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Controllo sul modello</p> <p>Esplorazione sul modello sondaggio (B)</p> <p>Applicazione algoritmi di calcolo: media e 2/3 della media</p>	<p>intelligente cosa dico?</p> <p>l) Ammet. ...innanzi tutto ammetto di essere l'unico intelligente che riesce arrivare al passo due, e quindi secondo me c'è almeno un 50%...e no facciamo così, così mi piace di più...io suppongo (<i>rilegge ciò che ha scritto</i>) che ci sia il 50% di gente a caso, il 33% che ragiona, il 17% intelligente e 1 io, facciamo 16% intelligente (<i>corregge 17% con 16%</i>) e 1 io, ora abbiamo detto (<i>ad ogni gruppo associa una scelta e la scrive accanto</i>) questo dice 50, questo dice 34, questo dice, tutti questi dicono ...</p> <p>m) tutti questi che sono intelligenti, ma non tanto quanto me dicono: gli altri hanno detto o 50 o 34 quindi ammettendo che l'uno per cento più o meno non c'entri niente, tirano fuori un 47, dicono la gente o tira a caso o ha fatto il primo step, io arrivo ...ad essere così intelligente da dire che...50% meno mezzo hanno votato 50 e 50% meno mezzo hanno votato 34, la media è 47, i 2/3 di 47 sono ...48 diviso tre fa...no 16, diviso tre per due trentadue, incredibile, venti ...e no ...no sto dicendo stupidate 48</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Riprende la classificazione che ha scritto • Riprende la sua strategia
---	--	--	---

<p style="text-align: center;">Frame giocatori intelligenti</p> <p style="text-align: center;">Schemi d'azione elaborati in</p>	<p style="text-align: center;">Esplorazione sul modello (B) guidate da schemi (A1)</p>	<p>dicendo stupidate, 48 diviso 3 fa 16...32...e no, no, ti sto facendo perder un po' di tempo, però...</p> <p>n) e no! E no, vedi è il punto di partenza che sbaglio, ho capito che la gente è scarsa però almeno a fare i 2/3 di 50 ci deve arrivare...cioè uno dice...non può dire un numero a caso, se no non gioca la gente...sottile la cosa...potrebbe durare in eterno...</p> <p>12. O: no, però è vero che ci sono dei ragionamenti lungheggianti che si possono fare...</p> <p>13. M: (<i>rilegge a bassa voce il testo del problema</i>) ...allora abbandoniamo il sondaggio che non mi piace (<i>cancella la scritta "caso sondaggio" e la scelta relativa</i>), cioè non voglio la gente scarsa, uccidiamo la gente scarsa.</p> <p>14. O: ok, togliamoli.</p> <p>15. M: tattica un po' nazista però...una selezione naturale della specie, no artificiale della specie.</p> <p>a) Non c'è gente che tira un numero a caso, perché se no è triste la cosa, quindi a questo punto la gente che arriva allo step uno almeno dice allora...il 50% dice...tra zero e cento la media è 50 io</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Si rende conto di lavorare ancora nelle ipotesi "sondaggio" • Ritorna a ipotesi "gioco serio" • Ricostruisce un modello sovrapponendolo al precedente cambiando le ipotesi iniziali: mantiene quindi la struttura (tabella) della classificazione, ma modifica le scelte perché la popolazione ha caratteristiche differenti.
---	---	---	---

<p>precedenza</p> <p>Schema distribuzione 50-50</p> <p>Algoritmo media e 2/3 media</p>	<p>Controllo</p> <p>Esplorazione guidata da schemi</p> <p>Applicazione algoritmi</p> <p>Controllo</p>	<p>la media è 50 io metto i 2/3 della media che è ...sempre 34, assumiamo che il primo step sia 34, mi piace di più (<i>cancella dallo schema precedente 50 e mette 34 e farà così anche per gli altri valori</i>)...allora c'è sempre il super uomo di Nietzsche dietro che dice che tutti hanno detto 34, ma io sono più furbo e dico i 2/3 di 34 che fa 22 più o meno, questo è quello che ragiona,</p> <p>b) quello che dice a caso comunque non dice a caso, dice questo (<i>indica 34 sul foglio</i>), quello che ragiona dice questo (<i>indica 22 sul foglio</i>)...</p> <p>c) e quello intelligente ...questo era lo step un po' più delicato, quello intelligente cosa dice? ...supponiamo che io sia ancora più intelligente, ci sarà il 50% di gente che ci ha dato a caso e il 50% di gente che ragiona...</p> <p>d) quindi la media si attesterà attorno ai ...28 io dico i 2/3 di 28, dico 18</p>  <p>e) e adesso io che vedo tutto dal di fuori e</p>	<p>Questa esplorazione è resa episodica anche se preformata sul modello.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Per applicare la media pesata deve usare delle quantità: per semplicità e per ricondursi a calcolare una media aritmetica, invece di una pesata, suppone che le risposte siano date metà in un modo e metà nell'altro. • Trova il risultato numerico della sua strategia • Controlla il suo ragionamento e decide di
--	---	---	---

<p>Frame bounded rationality</p>	<p>Controllo</p> <p>Esplorazione episodica (b1)</p> <p>esplorazioni guidate da schemi</p> <p>Applicazione schema</p> <p>Esplorazione guidata da schemi</p> <p>Applicazione schema</p>	<p>tutto dal di fuori e sono forte ...che non so perché mi devo fermare al terzo step, ma sono sufficientemente arrogante per dire che nessuno arriva fin al terzo step, dico ...allora...</p> <p>f) secondo me ...no. Togliamo il 18 perché quello intelligente sa già, è intelligente per dire che non ci sono...(indica la "colonna delle percentuali") è questa, è la percen, è questa l'intelligenza fondamentale</p> <p>...(<i>parla guardando la "tabella" che ha scritto</i>) allora questo dice tutti tranne me hanno scelto 34 e quindi io prendo i 2/3 di 34,</p> <p>g) questo già deve fare una distinzione e dice secondo me abbiamo un...30% di persone quindi ...aspetta passo questo qui (<i>comincia a scrivere</i>) 100% , 99% ammesso che siano 100 di a caso + 1% che risponde,</p> <p>h) qui abbiamo sempre 1% che risponde, ma che dice che secondo lui ci sarà 70% di gente che ci darà a caso più 29% di gente che ragiona ...quindi (<i>scrive in una parte sottostante del foglio</i>) la media in questo caso sarebbe ...(<i>svolge i calcoli sul foglio</i>) 30</p>	<p>ragionamento e decide di fermate l'iterazione possibile delle anticipazioni</p> <ul style="list-style-type: none"> • Riconsidera la sua assunzione sulle percentuali delle risposte • Costruisce un altro modello e quindi deve calcolare le scelte degli altri giocatori • Ripete gli schemi d'azione elaborati per la modellizzazione della situazione problematica
---	---	---	---

	<p>di calcolo</p> <p>Controlli sui risultati</p> <p>Svolge i calcoli</p>	<p>è 17 più 7 più... aspetta perché poi devo farci i 2/3...e la peppa...cosa sto combinando...(fa i calcoli a mente) ..oh mi piace perché viene anche divisibile per tre, no, sì che viene divisibile per tre, è 30, non è possibile non può fare di nuovo 20...o sì? Se fa di nuovo 20 devo ammettere di non essere così intelligente, di non essere più intelligente degli altri...però potrebbe essere una riprova del fatto che io metto 20...ammesso di non aver sbagliato i conti (<i>controlla i primi passaggi</i>) la calcolatrice è ammessa in questo genere di gioco?</p> <p>16. O: sì era già disponibile da prima, sei tu che sei l'uomo del calcolo...</p> <p>17. M: (<i>rifà i calcoli con la calcolatrice</i>) 27,46...oh, mi piace già di più, 27 diviso tre fa nove per due: diciotto (<i>compila la tabella mettendo come sua scelta 18</i>)</p> <p>18. O: ok, questo è il responso del super uomo?</p> <p>19. M. il super uomo dice 18 con tutte le riserve ...chiaramente bisognerebbe guardare in faccia i giocatori.</p>	<p>• Arriva alla determinazione della scelta</p>
--	---	--	---

Sam: ricercatore in didattica della matematica (si veda par. 3.5-3.6)

5.1.2 Risoluzioni di non-matematici che hanno affrontato il Beauty contest game

A: medico

Il suo approccio alla situazione problematica rispecchia quello ipotizzato da Camerer nel suo modello (CH): infatti effettua il primo passo di pensiero supponendo che gli altri giocatori possano scegliere a caso e quindi che la media dei numeri si aggiri nell'intorno di 50. Il suo secondo "passo di pensiero" poi è influenzato dalla relazione tra il concetto di media aritmetica e quello di distribuzione uniforme di numeri appartenenti ad un intervallo.

Le fasi principali attraversate da A. nel corso della sua risoluzione sono:

- Attiva processi esplorativi cercando di ricostruire una situazione possibile immaginando le possibili strategie degli altri giocatori: fa il "primo passo di pensiero" supponendo una distribuzione uniforme dei numeri (adottando questa tecnica si elimina la difficoltà data dal non sapere il numero dei giocatori).
- L'esplorazione delle possibili contro-mosse alla scelta dei $2/3$ di 50 si blocca probabilmente perché deve svolgere il calcolo.
- Dopo aver calcolato $2/3$ di 50, ricomincia un'esplorazione, sempre mantenendosi nel frame distribuzione uniforme, però ora decide di rappresentare la situazione dei numeri attraverso il disegno dell'intervallo dei numeri (probabilmente fa questo perché sente il bisogno di avere una visualizzazione delle scelte, e questo gli consente di capire quale influenza ha il $2/3$ sulla media e, quindi, sulla determinazione del numero da scegliere⁵⁸).
- Partendo dal prodotto di questa prima parte delle esplorazioni (33,3), itera il procedimento di scelta elaborato partendo, non più da 50 (la probabile media se tutti scegliessero a caso), ma dal numero che tutti scelgono secondo la sua esplorazione (fino a questo punto quindi si comporta come un 1-step player).

⁵⁸ All'inizio questo disegno sembra essere solo una rappresentazione grafica, ma in seguito influenzerà la gestione dei processi esplorativi.

- Applica di nuovo l’algoritmo per trovare la media non pensando alle scelte numeriche, ma ai punti distribuiti sull’intervallo (0-33). Il concetto di media si riduce quindi all’applicazione dello schema “punto medio su un intervallo”⁵⁹.
- Ferma il suo processo di esplorazione scegliendo 11: “...quindi 11 o nell’intorno di 11” (se questa scelta fosse interpretata secondo il modello proposto da Camerer dovrebbe essere il risultato di due passi di pensiero, ma da questo protocollo si nota come questo risultato è il prodotto di processi esplorativi che coinvolgono anche gli strumenti per modellare la situazione problematica⁶⁰).

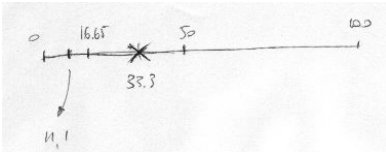
Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell’intervista registrata <i>(con l’aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
Frame scelte di numeri	Esplorazione della situazione problematica al fine di comprendere il testo, La componente episodica (b1) del processo esplorativo si riferisce ad un caso particolare.	<ol style="list-style-type: none"> 1. A: <i>(legge il testo e si ferma quando legge due terzi poi riprende fino alla fine)</i> ...allora se ci sono n giocatori, allora loro devono scegliere dei numeri tra 0 e 100 abbiamo detto, no? 2. O: sì. 3. A: ...<u>quindi</u> se ci sono... n giocatori in realtà potrebbero scegliere numeri cioè ...potrebbero anche scegliere lo stesso numero, tutti lo stesso numero. 4. O: sì, anche tutti, perché è come se fossero messi tutti in una stanzetta da soli, nessuno sa cosa sceglieranno gli altri, sa 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensione della situazione problematica: parte da i casi particolari. (Bisogna notare che la parola “quindi” è sempre un marcatore che indica l’inizio o la fine di esplorazioni).

⁵⁹ A questo punto ci si potrebbe chiedere se è il grafico che ha influenzato la seconda esplorazione e lo svolgimento della media riducendoli alla determinazione visiva del punto medio su un intervallo, o questo processo è in realtà solo l’iterazione del primo. La cosa certa che in entrambi i casi abbiamo un’anticipazione modellata (legata alla rappresentazione) che sostituisce la simulazione di possibili futuri e quindi un’esplorazione episodica.

⁶⁰ Questo tipo di osservazioni può essere condotto solo avendo la possibilità di analizzare la produzione della scelta; l’analisi qualitativa mostra quindi il modo in cui si sviluppa il pensiero strategico: dove si bloccano i processi, il ruolo degli strumenti utilizzati per costruirli, la loro influenza sul processo di risoluzione etc.

<p>Schema media Algoritmo di calcolo</p> <p>Frame distribuzione uniforme</p>	<p>Immaginazione modellata (A2)</p> <p>Primo passo nell'esplorazione guidato da algoritmo di calcolo (b1)</p> <p>La fase esplorativa si blocca e vi è un ritorno al testo (presente)</p> <p>Esplorazione modellata (A2) legata al concetto di media su un insieme di numeri e alla sua rappresentazione (B)</p>	<p>che ci sono tutti gli altri...</p> <p>5. A: a) ok. Allora vince chi va più vicino ai due terzi della media dei numeri sceltiai due terzi...</p> <p>b) <u>quindi</u> se per esempio loro si distribuissero equamente, la media sarebbe cinquanta, no?</p> <p>6. O: perfetto.</p> <p>7. A: ecco però...allora i 2/3...quindi vincerebbe chi si avvicina di più ai 2/3 di 50...</p> <p>8. O: sì.</p> <p>9. A: a) ok...però...(guarda il testo del problema) beh allora qua "quale potrebbe essere una buona scelta per vincere", cioè allora ...cioè una cosa...</p> <p>b) (<i>disegna un segmento dove pone a metà una tacca che etichetta con il numero 50</i>) una distribuzione normale dovrebbe essere che i giocatori scelgono tanto numeri sotto i 50 che sopra il 50</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Rimane sul testo per focalizzare l'attenzione sull'algoritmo di calcolo da svolgere. • Effettua un primo passo nell'anticipazione episodica all'interno del tempo del problema guidato dalle sue conoscenze sulla possibile distribuzione casuale dei numeri. • Vuole avviare il secondo passo nella simulazione, ma si blocca. • La fase esplorativa iniziata nella battuta precedente si arresta e vi è un ritorno al presente in cui si legge il testo. L'esplorazione non può continuare perché, non avendo svolto i calcoli, non sa quantificare il risultato della sua strategia. La domanda innesca un tentativo di esplorazione che però non è esplicitato. Si capirà in seguito che le difficoltà nel gestire i processi esplorativi saranno superate appoggiandosi ad una rappresentazione grafica. • Rappresenta e giustifica la sua affermazione precedente (5b) sulla rappresentazione. L'ottica della simmetria e la terminologia abbastanza tecnica usata fanno emergere il fatto che probabilmente il soggetto possiede nozioni di
---	---	--	--

<p>Frame intervallo di numeri</p>		<p>50 che sopra il 50 quindi se la distribuzione fosse normale la media dovrebbe essere proprio 50</p>	<p>statistica (essendo un medico ha infatti familiarità con questo tipo di dati).</p>
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Ripresa del processo: controllo e poi inizio esplorazione</p>	<p>c) (<i>scrive agli estremi del segmento 0 e 100</i>)</p> <p>d) e <u>quindi</u> una buona scelta sarebbe ...allora... scegliere il numero vicino proprio ai 2/3 di 50...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplicita la sua visualizzazione della situazione come intervallo di numeri. Questa, per ora, è solo una rappresentazione grafica, poi però si vedrà come influenzerà il processo di costruzione di strategie. • Appurato il valore della media, prima di riprendere la fase esplorativa, deve riappropriarsi della situazione problematica: applicazione dell'algoritmo numerico per determinare il vincitore.
<p>Frame interazione strategica Schema: media aritmetica tra due numeri</p>	<p>Secondo step dell'esplorazione episodica (b1).</p> <p>Esplorazione guidata da schema (A1) e da iterazione procedimento appena elaborato: progetto.</p>	<p>e) però se tutti poi scelgono quel numero lì alla fine non è più la media ...cioè non lo so allora un'idea potrebbe essere visto che tutti potrebbero scegliere appunto i due terzi di 50 per cercare di vincere</p> <p>f) invece scegliere proprio la metà, la media, cioè la metà di questi due terzi di 50, fare ancora i due terzi e vedere quel numero lì però non so se ...</p> <p>10. O: questa è una buona strategia e quindi che numero sceglieresti? Puoi farli i calcoli se vuoi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Itera il procedimento seguendo le fasi esplorative prodotte in precedenza: determinazione di un possibile media e algoritmo di calcolo. • Il processo è guidato dallo schema "media aritmetica tra due numeri", ma si blocca perché uno dei due numeri non è stato determinato in modo esplicito.

<p>Riapplica l'algoritmo di calcolo all'interno dello schema d'azione relativo alla determinazione della media aritmetica tra due numeri</p> <p>Schema media</p>	<p>Presente.</p> <p>Fissa nel presente (sul grafico) il prodotto della sua esplorazione</p> <p>Applicazione sia del procedimento elaborato, sia l'algoritmo di calcolo.</p>	<p>farli i calcoli se vuoi.</p> <p>11. A: allora 50 diviso tre per due...</p> <p>12. O: 33,3 circa.</p> <p>13. A: questo è 33,3 (<i>mette una tacca tra 0 e 50 più vicino a 50</i>) quindi la media dovrebbe essere...</p> <p>14. O: ti do la calcolatrice</p> <p>15. A:</p> <p>a) (<i>fa i calcoli</i>) $33,3 : 2$... la media dovrebbe essere 16,65</p> <p>b) perché tutti dovrebbero scegliere intorno a questo numero qua,</p> <p>c) la media è 16,65 ancora i due terzi di 16,65 (<i>fa calcoli</i>)... 11,1 (<i>lo indica sul grafico</i>). Però non so è una cosa...</p> <p>16. O: quindi tu sceglieresti...</p> <p>17. A: 11,1.</p> <p>18. O: quindi 11 o nell'intorno di 11...</p> <p>19. A: sì vicino a 11.</p> <p>20. O: ok.</p> <p>(<i>Il grafico prodotto da A.</i>)</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • C'è necessità di produrre qualcosa di manipolabile per poi procedere nell'esplorazione. • Vuole riapplicare il piano d'azione elaborato in precedenza: faccio la media. Il procedimento "fare la media" non è però riferito a numeri, ma alla posizione centrale su un intervallo. • Avviene la traduzione in numeri del processo di media svolto dall'intervallo • La giustificazione è svolta sul grafico perché è lì che è stata prodotta la congettura. • Svolge algoritmo di calcolo e "rappresenta" la sua scelta. • Dichiarazione della scelta
--	---	---	--

I: laureata in economia

Il suo approccio è empirico. Simula vari possibili casi di scelta, selezionati con più o meno coscienza (numeri la cui media sia 50, numeri appartenenti a particolari intervalli...), e ne analizza i risultati. Da questi cerca di trarre indicazioni sulla possibile miglior scelta, ma questa rimane legata alle specifiche situazioni analizzate. Le difficoltà nel gestire i processi di esplorazione episodica, in situazioni di interazione strategica in cui è richiesta l'iterazione di questi, non vengono superate.

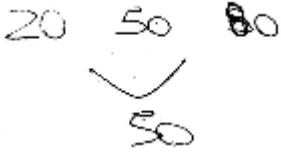
Le fasi principali attraversate da I. nel corso della sua risoluzione sono:


- Cerca di applicare degli schemi appresi (nei suoi studi ha infatti seguito corsi di probabilità e statistica) legati all'individuazione di intervalli di numeri in cui scegliere. Sempre in quest'ottica, tenta anche di trovare degli estremi in cui effettuare la scelta, ma rimane sempre legata alla necessità di dover lavorare su numeri: il numero dei giocatori, le scelte fatte...
- Le sue esplorazioni si riducono a manipolazioni di numeri che quindi non sono interpretati come prodotto di scelte di decisori razionali (probabilmente non è abituata a modellare situazioni nuove, ma solo ad esplorare le situazioni attraverso modelli pre-costruiti. Questo è forse uno di motivi per cui non produce rappresentazioni, ma lavora solo su esempi numerici).
- Congettura una possibile generica linea d'azione: scegliere il numero più basso. Questa strategia però è generata su casi numerici e basata sulle specifiche relazioni tra essi.
- La sua esplorazione rimane a livello di analisi di casi particolari: non produce quindi una strategia in cui le scelte dei giocatori non siano specificate.

Frame schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
Frame problemi di probabilità/statistica		1. I: (<i>legge il testo</i>) ma sei sicura che non c'entra niente probabilità ... 2. O: perché ti e' venuta in mente la probabilità? 3. I :	• Riconoscimento nella situazione problematica di caratteristiche tipiche dei problemi di probabilità/statistica.

<p>Frame "scelta casuale di numeri"</p>	<p>Esplorazione empirica bloccata dalla mancanza di informazioni sulle scelte degli altri giocatori</p>	<p>a) perché quando ci sono questo discorso di numeri... cioè mi viene...e' una mia associazione di... ma sarà più una paura di...va beh... reminescenze....</p> <p>b) (<i>ricomincia a rileggere il testo ma sottovoce</i>) due terzi della media scelta da tutti i giocatori (<i>pensa in silenzio e poi dice sottovoce</i>) quindi tra zero e cento...</p> <p>4. O: ti e' chiaro il testo?</p> <p>5. I:</p> <p>a) sì, sì (<i>pensa in silenzio</i>) scegliere un numero ...io partirei con un esempio...cioè io scelgo 50 (<i>scrive 50</i>) il numero più vicino ai due terzi...ai due terzi della media dei numeri</p> <p>b) ...mettiamo che come media venga fuori 50 i due terzi di 50 sarebbe?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Focalizzazione dell'attenzione sulla presenza di numeri da scegliere. • Ora si concentra sull'algoritmo di calcolo per poi tornare sui numeri. • Approccio empirico (provare a dare dei numeri). Inizialmente parte dalla sua scelta, ma non può fare la media perché non conosce quelle degli altri.
<p>Frame distribuzione uniforme di numeri su intervallo</p>	<p>Anticipazione modellata (A2): media su distribuzione uniforme</p>	<p>6. O: sì.</p> <p>7. I:</p> <p>a) due terzi di 50...quale potrebbe essere una buona scelta per vincere...aiuto...</p> <p>b) (<i>pensa</i>) che vincerà mille euro non c'entra</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Per applicare l'algoritmo della media ha bisogno di sapere le scelte degli altri giocatori e, non conoscendole, fa delle supposizioni che le permettano di determinare la media; tali ipotesi provengono dalle sue conoscenze: si innesca quindi un'esplorazione modellata. • Segue il testo perché vuole applicare l'algoritmo, ma si blocca perché probabilmente si rende conto che la sua scelta non consiste solo nell'estrazione di un numero. • Analizza nuovamente il testo forse cercando nuove

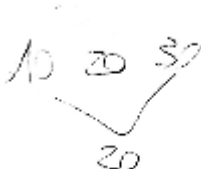
<p>Probabile ricordo di schemi possibili da applicare in distribuzioni di numeri</p>	<p>Controllo</p> <p>Fallimento nell'inesco di processi di esplorazione</p> <p>Esplorazione (empirica) episodica (b1)</p>	<p>c'entra...</p> <p>8. O: si poteva essere anche 2000 o un milione...</p> <p>9. I: e' tanto grave non avere nessuna idea...</p> <p>10. O: assolutamente no...ok ti e' chiaro che cosa ti si richiede?</p> <p>11. I: sì</p> <p>12. O: le regole del gioco ti sono chiare. Ci sono tot persone ...</p> <p>13. I: sì ognuna deve scegliere questo numero, poi si fa la media e chi più si avvicina, cioè chi rientra nel ...sì chi più si e' avvicinato ai due terzi di quel numero comunque vince. Tra questi uno comunque e' il vincitore.</p> <p>14. O: sì quindi sapendo che il gioco è questo se tu dovessi giocare quale numero sceglieresti e perché?</p> <p>15. I: eh...quale numero sceglierei, (<i>pensa</i>) non saprei dire quale numero sceglierei...</p> <p>16. O: tranquilla non c'e' una soluzione, non c'e' un numero che è bene assolutamente giocare..</p> <p>17. I:</p> <p>a) essendo n giocatori cioè può essere...(pensa)</p> <p>b) metti che uno sceglie...20, uno sceglie 50 e uno sceglie... 90 (<i>scrive questi tre numeri</i>) ok? La media intesa proprio come ...media?</p> <p>18. O: media aritmetica diciamo...() esatto quella</p>	<p>informazioni e "sfonda" i dati non utili per la determinazione della scelta.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Blocco: non riesce ad entrare nel frame interazione strategica • Processo di rilettura e controllo che innesca un probabile ricordo di schemi d'azione attuabili nel frame aperto. • Non ritrova schemi d'azione adatti ad affrontare questo tipo di problema • Il numero non precisato dei giocatori è un problema anche per l'applicazione dello schema media aritmetica. • Decide di partire con un esempio con numeri scelti "a caso" (in realtà ne sceglie uno basso, uno centrale e uno alto). Approccio empirico.
--	--	--	--

<p>Applicazione schema media aritmetica tra tre numeri</p>	<p>Applicazione algoritmo</p>	<p>19. I: diviso tre... 50 e qualcosa ...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Avendo finalmente dei dati numerici può fare i calcoli
<p>Algoritmo di calcolo</p>		<p>20. O: vuoi la calcolatrice?</p> <p>21. I:</p> <p>a) facciamo che facciamo ottanta (<i>cambia il 90 scrivendoci sopra 80</i>)...me lo faccio venire, la media è 50 (<i>lo scrive sotto</i>) e fin qua ci siamo ok? ...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ora manipola i dati numerici per arrivare alla situazione predetta in precedenza: è come un'esplorazione in parte ascendente (dai numeri al risultato) in parte discendente (dal risultato atteso ai numeri da scegliere)
	<p>Applicazione algoritmo manipolando i valori numerici</p>	<p style="text-align: center;">  </p> <p>b) ...2/3 di 50...eh...quanto fa i 2/3 di 50...viene un numero con la virgola...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Applica algoritmo di calcolo dato dal problema
	<p>Comportamento guidato da schemi</p>	<p>22. O: però tanto è chi ci si avvicina di più, non deve venire un numero intero.</p> <p>23. I: (<i>usa la calcolatrice</i>) ah, è 33,33. Quindi chi tra 33,33 e chi tra 83,33 (<i>scrive 33,33 e poco distante sulla stessa riga 83,33</i>)...giusto? In questo...chi più si avvicina ai 2/3?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Si innesca in modo immediato una probabile abitudine d'uso (già accennata alla battuta 14).
<p>Schema "scelta in un intervallo"</p>	<p>Controllo</p>	<p>24. O: sì, aspetta, cosa stai scrivendo ora?</p> <p>25. I: no i 2/3 di 50, cioè la media sarebbe 50 in questo caso quindi i 2/3 di 50 è 33,33...ah ma solo i 2/3...quindi io calcolavo anche...lo spostamento.</p> <p>26. O: cos'era quell'ottantatré e trentatré?</p> <p>27. I: 83,33 sarebbe...</p> <p>28. O: 50 più 33,33...no solamente il 33...in questo caso...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Il controllo è indotto dalla domanda dell'osservatore.

<p>Schema media</p> <p>Schema d'azione: delimitare l'insieme delle scelte</p>	<p>Tentativo di esplorazione partendo da risultato ottenuto</p> <p>Esplorazione guidata da evidenze empiriche</p> <p>Esplorazione interrotta perché non fondata su schema d'azione, ma solo su risultato di un esempio</p> <p>Esplorazione empirica (b1) non su numeri specifici, ma su intervalli</p>	<p>29. I: quindi se io avessi scelto un numero da 33,33 a 50...</p> <p>30. O: no diciamo che se le tre persone scelgono tra 20, 50 e 80, la media è 50, i 2/3 della media è 33,33...</p> <p>31. I: ah ok! (cancella 83,33)</p>  <p>32. O: tra i tre in questo caso vince...</p> <p>33. I: 20 giusto?</p> <p>34. O: sì, esatto.</p> <p>35. I: ...quindi se è così sceglierei un numero comunque basso.</p> <p>36. O: perché?</p> <p>37. I:</p> <p>a) beh, un numero comunque basso perché...eh...perché deve essere comunque un numero... più basso della media (<i>fa un gesto con la mano verso sinistra</i>)... perché mi viene da dire che difficilmente potrà essere un numero...</p> <p>b) non lo so a meno che si scelga un numero da...che so da 60 in su, 60, 70 in su...quello che può essere, ma mi viene da dire...cioè più basso..non troppo alto...ora da qui a dire in quale...in quale fascia un numero...</p> <p>38. O: però questa è già un'idea.</p> <p>39. I: (<i>pensa</i>) quindi poi comunque devo dirti che</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La sua interpretazione del testo rivela in suo inquadramento iniziale ossia il fatto di aver abbinato la problematica proposta a un problema di “statistica” • Dall’esempio inferisce una possibile strategia. • La giustificazione non ha fondamento se non nell’esempio. • Sembra manifestarsi una sua rappresentazione mentale grafica dell’intervallo. • Cerca conferma in un altro esempio manipolando le sue assunzioni sulla media: esplora i caso in cui la media non è 50
---	--	--	--

<p>Schema: controllare assunzioni</p>	<p>Controllo /Esplorazione empirica (b1)</p>	<p>53. I: non lo so mi viene da dire questa cosa qua...che non direi un numero più alto di 60, di questa cosa qua...però io dico 60 e gli altri dicono 100...anche se dico 80 e gli altri dicono cento in realtà...vale fino and un certo punto.</p> <p>54. O: perché vale fino ad un certo punto?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Partendo dal risultato ottenuto (66) cerca di andare avanti, ma è bloccata dalla non determinatezza dei risultati supposti. Per questo ritorna ad esempi
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione (b1) empirica</p> <p>Applicazione algoritmo</p>	<p>55. I: se tu dici 80 e gli altri dicono 100, la media è comunque sempre...ah, beh la media metti cento...280 diviso tre...93...</p> <p>56. O: i 2/3 di 93...</p> <p>57. I: i 2/3 è comunque...</p> <p>58. O: chi vince?</p> <p>59. I: vinco comunque io quindi dire più basso di 66 non è detto...è bello perché prima avevo magari i lampi...i lampi di genio poi...</p> <p>60. O: però quello che tu dici era il caso in cui gli altri scelgono tutti 100.</p> <p>61. I: sì perché ero partita dall'idea, da comunque il trovare...cioè il fatto che fosse comunque i 2/3 di un numero e la media al massimo può essere 100 e i 2/3 mi veniva quel numero però in realtà...<i>(pensa in silenzio e poi riprende a bassa voce)</i> e invece prendendoli all'altro modo...niente...se fosse un numero basso...tra zero e cento...potrei anche avere zero...</p> <p>62. O: se tutti dicono zero...</p> <p>63. I: se tutti dicono zero due terzi di zero è zero e quindi è la stessa cosa di</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Non può continuare l'esplorazione perché ha bisogno di svolgere i calcoli • La sua assunzione sembra cadere perché sembra vincere chi non sta nell'intervallo che ha scelto, ma non si rende conto che se avesse scelto 66 avrebbe vinto. Questa apparente incongruenza tra dati e previsioni la blocca • Ceca conferme e smentite dai numeri • Ritorna a ragionamento svolto in precedenza

<p style="text-align: center;">Ritorno al frame distribuzione uniforme su intervallo</p>	<p>Controllo/esplorazione</p>	<p>quindi è la stessa cosa di 100...(<i>pensa</i>)...come è difficile...(<i>pensa</i>) come faccio a dire...le informazioni sono...</p> <p>64. O: non c'è una scelta che ti garantisce la vittoria.</p> <p>65. I: sì però se dovessi dire...cioè (<i>legge il testo</i>) "quale numero sceglieresti" ...mi verrebbe da dire un numero abbastanza vicino al 50 semplicemente perché è una via di mezzo tra lo zero e il cento, non perché ci sia una vera e propria...</p>	
	<p>Esplorazione modellata</p>	<p>66. O: quindi tu dici una cosa vicino al 50?</p> <p>67. I: una cosa vicina al 50 però...anche perché cioè voglio dire anche i giocatori possono essere...i giocatori possono essere anche un milione quindi alla fine il numero...magari la media si può avvicinare al 50.</p> <p>68. O: dipende ovviamente da quello che scelgono gli altri e che fanno lo stesso tuo ragionamento...tutti quanti contemporaneamente invitati a scegliere questo numero...</p> <p>69. I:...(<i>rilegge il testo in silenzio</i>) sono bloccata...(<i>pensa ancora in silenzio</i>) mi viene da dire...nessun numero perché mi viene da contraddirmi in continuazione.</p> <p>70. O: in che senso?</p> <p>71. I: ma nel senso che ora ero spostata sul "se tutti dicono cento" e allora va beh allora abbiamo detto questa cosa (<i>indica la parte di scritto fatta in</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Torna al testo per cercare informazioni ulteriori • Si innescano scelte non giustificate in rapporto alla situazione problematica • La non definizione del numero dei giocatori le dà la possibilità di far rientrare in gioco la sua ipotesi iniziale sul valore della media • Blocco e successivi controlli sui ragionamento svolti
	<p style="text-align: center;">Controllo</p>		

<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione empirica (b1)</p> <p>Applicazione algoritmo di calcolo</p> <p>Controllo ed esplorazione bloccata</p>	<p><i>parte di scritto fatta in precedenza)</i></p> <p>72. O: del 66.</p> <p>73. I: se dicono tutti che ne so 20 allora il più basso è...e no...(comincia a scrivere) 10, 20,30 ...in questo caso... 20 (<i>scrive 20 sotto i tre numeri come ha fatto per la media precedente</i>) allora i $\frac{2}{3}$...6 e qualcosa...</p> <p>74. O: i due terzi di 20...</p> <p>75. I: sono dodici e qualcosa, tredici.</p> <p>76. O: sì. Ecco in quel caso chi vince tra 10,20 e 30...</p>  <p>77. I: sarebbe 10...(guarda il foglio su cui ha scritto) mi verrebbe da dire che però è sempre il numero più basso.</p> <p>78. O: ok ...perché ora stai guardando sia quello di prima con 20, 50 e 80...</p> <p>79. I: ...che questo.</p> <p>80. O: ok. E questo perché?</p> <p>81. I: perché vince il più basso? Beh, per il fatto che stiamo dicendo...cioè se comunque è ...chi ha scelto il numero più vicino ai due terzi, due terzi quindi è minore di quello che è la media...però più basso è relativo...cioè più basso rispetto a cosa?</p> <p>82. O: sì tu dici: quando devo scegliere come faccio a sapere ... più basso</p> <p>83. I: rispetto a cosa? (<i>pensa in silenzio</i>)</p> <p>84. O: a cosa stai pensando?</p> <p>85. I:</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplora i casi: numeri bassi • Ha conferma della regolarità nella vincita però rimane sempre un risultato relativo. • Si rende conto che le sue deduzioni sono di carattere relativo e per diventare assolute hanno bisogno di trovare un valore della media
-----------------------------	--	---	--

Mittu: appassionato di indovinelli diplomato in istituto tecnico

M. ha difficoltà a portare avanti le esplorazioni episodiche in cui deve simulare anche il comportamento di altri decisori razionali. La sua scelta iniziale, se non ci fosse stato il mio intervento volto a farlo continuare, sarebbe stata 33. Le esplorazioni successive sono varie ed in diverse direzioni, ma il suo ragionamento non è strutturato da abitudini d'uso.

Le fasi principali attraversate da M. nel corso della sua risoluzione sono:

- La sua scelta iniziale (33) è elaborata seguendo il processo ipotizzato da Camerer: 1-step.
- Il soggetto poi si sforza di elaborare una strategia dove si suppongono gli altri giocatori come degli altri “se stessi”, ma ha difficoltà a strutturare un ragionamento solido.
- M. cerca di portare avanti le esplorazioni episodiche in cui deve simulare anche il comportamento di altri decisori razionali e per questo cerca degli strumenti su cui appoggiarsi: costruisce quindi una rappresentazione grafica dell'intervallo di numeri (questa diventerà l'ambiente di lavoro su cui appoggiare le proprie esplorazioni).
- Dopo aver fissato la media trovata con la sua prima esplorazione sul segmento, prende coscienza del ruolo del numero 2/3 sulla determinazione del risultato finale: abbassare la media. Questo lo aiuterà a generare la sua strategia: influenzare la determinazione della media attraverso la sua scelta.
- Decide di scegliere un numero basso.
- La sua scelta finale, “zero”, non è dovuta all'iterazione di un processo di eliminazione delle strategie dominate, ma al desiderio di fare qualcosa di diverso dagli altri che lo porti a gestire dove saranno i due terzi della media.

Frame e schemi attivati	Gestione dei tempi interni	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
		1.M: <i>(legge il testo a mente)</i> Secondo me, qui, questi 100 “beoti”... 2.O: non è detto che siano 100.	<ul style="list-style-type: none">• Assunzione sui giocatori

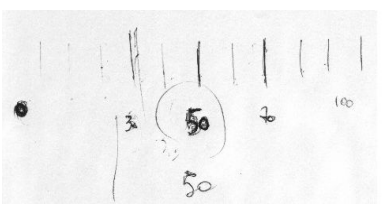
<p>Frame distribuzione uniforme di numeri su un intervallo Schema media</p>	<p>Anticipazione modellata (A1)</p>	<p>3.M: ah...(<i>rilegge il testo</i>) ah, ci sono enne giocatori, che devono scegliere un numero tra zero e cento...va beh possono anche essere 1000, sì va bene, ce ne sarà un po'. Secondo me per un'idea che ho in testa, più sono e più la media dei numeri che sceglieranno loro sarà cinquanta secondo me...si avvicinerà a cinquanta perché...secondo me, secondo me.</p> <p>4.O: sì ok.</p> <p>5.M: e allora io per vincere i mille euro mi scelgo...(<i>ritorna a leggere il testo</i>) scelgo... "il numero più vicino ai due terzi della media"...quindi i due terzi di 50...non so devo fare il conto?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Assumendo che i giocatori giochino a caso, entra nel frame distribuzione uniforme di numeri e questo gli permette di anticipare il possibile valore della media
<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Applicazione algoritmo</p>	<p>6.O: quello che vuoi.</p> <p>7.M: posso anche non farlo? Più o meno sarà...due terzi sarà più o meno sui 37...non so..</p> <p>8.O: sì 33 e qualcosa</p> <p>9.M: 33. io sceglierei così.</p> <p>10. O: quindi tu sceglieresti ... il tuo ragionamento me lo ridici bene.</p> <p>11. M: praticamente, mettiamo che ce ne siano tanti di questi giocatori, mettiamo giusto che ce ne siano un centinaio o duecento</p> <p>12. O: Ok puoi scegliere quelli che vuoi, n è a tua scelta.</p> <p>13. M: mettiamo che siano duecento, ce ne sarà una parte che sceglierà numeri sotto il 50 e una parte che sceglierà numeri sopra il 50, giusto o no?</p> <p>14. O: è vero..</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Torna al testo per trovare l'algoritmo di calcolo che dalla media determina il numero vincente • Per lui in problema finirebbe qua (1-step di Camerer), ma io lo induco a continuare • Per giustificare la sua strategia, ripercorre, integrando con giustificazioni più accurate, le scelte fatte (11-17)
	<p>Controlli</p>		

<p>Frame interazione strategica in giochi non cooperativi</p>	<p>Inizio esplorazione che si blocca per mancanza di informazioni sul comportamento degli avversari</p> <p>Tentativi di esplorazione in embrione</p> <p>Tentativi di anticipazioni falliti sempre a causa della mancanza di uno schema che dia informazioni sui comportamenti degli avversari</p>	<p>15. M: e quindi se facciamo la media dei numeri sotto il 50 e la media dei numeri sopra il 50 e poi facciamo la media dei due risultati probabilmente si avvicinerà a cinquanta.</p> <p>16. O: ok, sono d'accordo e quindi tu hai deciso di scegliere i due terzi di 50.</p> <p>17. M: sì.</p> <p>18. O: e se tutti ragionassero come te?</p> <p>19. M: ah...loro sanno che io so...eh beh io a questo non ci ho pensato...sì ma io ho detto che sono 100 beoti!</p> <p>20. O: sì la premessa era questa, però invece pensa che in realtà sono 100 Mittu che più o meno pensano come te.</p> <p>21. M: se tutti...se ci fossero 100 Mittu...il mondo stia attento...cosa succederebbe se ci fossero 100 Mittu...sceglierebbero... però non c'è forma di comunicazione tra di loro...</p> <p>22. O: no sono tutti in una stanzetta.</p> <p>23. M: potrebbe secondo me...boh... probabilmente sceglierebbero in tanti un numero improbabile.</p> <p>24. O: perché?</p> <p>25. M: perché...ah però un momento no..se sono cento Mittu non so cosa succederebbe...se ci fossero cento Mittu che facessero un ragionamento di questo genere, ho capito...diciamo, se tutti fossero 100 Mittu, ma nessuno di loro sa che anche l'altro è un Mittu perché comunque non c'è una forma di</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Introduco un cambiamento nelle sue assunzioni • Questo tipo di situazione non rientra nelle sue previsioni • Non poter predire le possibili scelte degli avversari lo blocca • Cerca di costruirsi delle assunzioni sul possibile comportamento degli avversari • Non sa come catalogare gli avversari
--	--	---	--

	<p>Esplorazione che parte dalla negazione del prodotto dell'anticipazione nel caso distribuzione uniforme</p>	<p>una forma di comunicazione e loro non si conoscono...</p> <p>26. O: quello è verissimo però tu supponi che abbiano selezionato per fare questo gioco un tot di persone che anche tu riterresti particolarmente intelligenti, cioè hanno detto mettiamo nelle stanzette, ma anche tre o quattro solo, persone intelligentissime e vediamo cosa scelgono...queste persone sono particolarmente intelligenti quindi tu sai che il tuo avversario, non sai chi è, non lo conosci, però sai che è intelligente.</p> <p>27. M: intelligente...quindi cioè tutti questi giocatori, intelligenti, dovrebbero scegliere dei numeri...che poi alla fine la media non sia un numero che si avvicina al 50. però...cioè va a discapito di tutti, nessuno ...però nessuno sa...mi metti in difficoltà.</p> <p>28. O: la tua prima risposta è corretta, ed è quello che ...che in realtà poi quando tu fai giocare le persone, giocano così; però io ti ho dato in più, dato che tu avevi detta subito, quello che ti ho detto. Un'altra situazione in cui...</p> <p>29. M: Aspetta un attimo che ci ragiono un momento...cento Mittu...tutti sanno che hanno un Mittu di fronte...quindi una persona particolarmente intelligente...ah, ah</p> <p>30. O: ah, ah sì...</p> <p>31. M: a) (<i>pensa in silenzio</i>) io non so, potrei</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Cerca di entrare nel nuovo frame partendo dalla negazione del risultato proveniente dall'interpretazione precedente. Tale esplorazione fallisce perché con queste assunzioni non sa quale possa essere il risultato della media. • Momento di blocco
--	--	---	---

<p>Schema Sbilanciamen-to</p>	<p>Riprende esplorazione partendo da anticipazione svolta in precedenza e cercando di modificare lo sviluppo dell'algoritmo</p>	<p>io non so ...potrei dato che comunque la media secondo me se l'insieme di questi numeri, di queste scelte, fosse casuale si avvicinerrebbe comunque al 50...io proverei dal canto mio o ad abbassarla scegliendo un numero bassissimo o ad alzarla scegliendo un numero altissimo...</p> <p>b) però voglio dire...tra zero e cento...cioè potrei avere la fortuna che tutti scelgono dal trenta il su e tutti scelgono dal 70 in su e la media ...e dal 70 in giù scusa, e la media verrebbe 50...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Cambia la sua strategia, vuole influire sul valore della media attraverso la sua scelta e quindi, supponendo sempre che la distribuzione degli altri sia uniforme, pianifica possibili azioni • Controllo su intervallo
<p>Schema elaborato: abbassare la media</p>	<p>Esplorazione guidata da schemi</p>	<p>c) io la abbasso dicendo zero e poi faccio i due terzi di un numero più basso di quella che si suppone che sia la media.</p> <p>32 O : ok e cosa verrebbe?</p> <p>33 M:</p> <p>a) però sarebbe troppo casuale capito? Se avessi questo genere di fortuna qua..capito?</p> <p><i>(comincia, per la prima volta dall'inizio della risoluzione, a scrivere qualcosa e lo fa su un foglio bianco, non sotto il testo del problema: prima disegna delle tacche consecutive</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sceglie il numero più piccolo in assoluto per abbassare la media (in realtà la sua scelta influirebbe pochissimo se il numero dei giocatori fosse alto) • Non è ancora convinto delle sue assunzioni • Sente il bisogno di controllare il suo ragionamento attraverso una rappresentazione

	<p>Esplorazioni (b1) che si traducono sul grafico</p>	<p>no?... e devi frenare di colpo...se tu guardi l'ostacolo probabilmente ci picchi dentro. Tu devi guardare dove c'è la via d'uscita, non l'ostacolo, e lo stesso qua (<i>indica il "righello disegnato</i>) gli altri hanno già questo 50 in testa (<i>fa un cerchi sul numero 50</i>) e quindi, non so, per una deviazione mentale, per una loro auto suggestione magari sono portati a scegliere numeri comunque intorno al cinquanta (<i>segna sul disegno un intervallo intorno al cinquanta</i>)</p> <p>e) diciamo dal trenta in giù, dal trenta in su e dal 70 in giù ok? (<i>scrive sotto due tacche simmetriche al 50 i numeri 30 e 70 indicando con la penna l'intervallo tra queste due tacche</i>). La media verrebbe sicuramente 50 (<i>riscrive sotto 50 e la sua tacca corrispondente di nuovo 50</i>),</p>	<p>giustificare la scelta del 50 non solo come media di numeri distribuiti uniformemente, ma anche come scelta fatta da giocatori</p> <ul style="list-style-type: none"> • Individua intervallo delle scelte possibili che nasce come intorno di 50
--	--	--	--



		<p>verrebbe sui 35 e poi mi faccio i due terzi di 35 e mi vinco i mille euro.</p> <p>40 O: ok. Ho capito.</p> <p>41 M: perché tutti non superano...staranno intorno al 50 perché hanno in testa il 50 rimangono propensi a dire un numero intorno a 50 capito? A scegliere un numero, quando uno si sceglie il suo numero, intorno al 50 perché hanno sta insegna che gli lampeggia in testa (<i>indica il 50 sul disegno</i>) con scritto 50.</p> <p>42 O: perché la media è 50...</p> <p>43 M: sì.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ribadisce la sua giustificazione “psicologica” per la supposizione che la media sia 50, rimanendo sempre dell’idea che gli altri giocatori non possano fare il suo stesso ragionamento: rimane quindi nel primo step come sviluppo della strategia anche se sceglie il numero zero.
--	--	--	---

G.: laureato in ingegneria che lavora nel campo della finanza

In questa risoluzione, come in quella di M., è presente la consapevolezza e la possibilità di usare strumenti e modelli della matematica, che sono però selezionati a seconda delle assunzioni: questi infatti sono introdotti basandosi su considerazioni sulla specifica situazione problematica, non applicando ipotesi pre-formate adatti alla loro applicazione.

Le sue conoscenze entrano nella costruzione della strategia a diversi livelli:

- Inquadramento e modellizzazione della situazione problematica
- Gestione dei dati numerici
- Assunzioni su comportamento di agenti reali (bounded rationality)

Le prime due “capacità” si possono imputare alla sua formazione, mentre l’ultima proviene dalla sua “conoscenza dell’uomo”⁶¹.

⁶¹ Questa fa parte di quei fattori che influiscono sulla non predittività dei modelli di teoria dei giochi in one.-shot game: fattori di conoscenza sociale e psicologica.

Si può infine notare che, anche se non è esplicitato l'uso di rappresentazioni grafico-visive, le esplorazioni eseguite presuppongono una sistematizzazione dei dati numerici su un intervallo.

Le fasi principali attraversate da G. nel corso della sua risoluzione sono:

- Inizialmente la situazione problematica viene affrontata intendendo erroneamente le regole del gioco.
- Dopo aver compreso le regole del gioco, struttura la strategia risolutiva seguendo il processo predetto da Camerer (si arriva al secondo passo di pensiero)
- La sua familiarità con la manipolazione di dati numerici e di schemi (come quello della media aritmetica) lo aiuta a concentrare le sue esplorazioni sui processi decisionali, mentre quelli di calcolo sono svolti quasi automaticamente (anticipazioni modellate).
- Successivamente, l'iterazione delle possibili contromosse subisce un salto che porta all'individuazione di zero come miglior scelta (perché bound inferiore di un processo che presuppone la scelta del numero più basso della media).
- Questa possibilità di scelta viene scartata perché le assunzioni da effettuare affinché questa avvenga sono ritenute non verificabili.
- La scelta finale, fatta selezionando la simulazione dei processi di interazione strategica più probabili, ricade su 25 (risultato che rientra nelle statistiche di Camerer).

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
		<ol style="list-style-type: none"> 1. G: <i>(legge il testo a mente)</i> Una buona scelta per vincere? 2. O: sì. 3. G: ovviamente ti arriverà un risposta ingegneristica, ne hai paura? 4. O: no,no. 5. G: allora <i>(pensa in silenzio)</i>, stavo pensando alla strategia. 	

<p>Frame scelta dei numeri</p>		<p>6. O: mi dici cosa pensi? 7. G: ... che il gioco è un po' fallato 8. O: ossia? 9. G: ossia ...visto che ci sono n giocatori che devono scegliere un numero in un range di medie dimensioni, tutti cercheranno ovviamente di avvicinarsi ai 2/3 della media 10. O: sì</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Entrata nella situazione problematica: messa a fuoco dei dati e delle richieste. Esplorazione sull'algoritmo di calcolo dato dal problema
<p>Algoritmo del problema</p>	<p>Esplorazione delle strategie seguendo algoritmo del testo</p>	<p>11. G: a) quindi non avendo nessun altro...(<i>guarda il testo</i>) b) nessun'altra base da cui partire tutti andranno a puntare alla media, ai due terzi della media</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Controllo dati • Questa esplorazione si blocca perché c'è bisogno ancora di chiarificare la possibile dinamica delle azioni dei giocatori.
<p>Frame intervallo di numeri</p>	<p>Esplorazione ascendente episodica che simula le tappe da seguire secondo le istruzioni del testo (b1)</p>	<p>c) cioè provo ad indovinare... prendono i numeri da zero a cento, fanno una media, i due terzi e giocano quel numero</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Riparte con un'esplorazione ascendente sul tempo del problema (più facile da portare avanti perché in parte data dal problema e perché è una simulazione)
<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione (b1) interrotta</p>	<p>d) ...però è ovvio che se tutti fanno lo stesso ragionamento lo scopo del gioco salta. 12. O: sì, cioè se tutti fanno lo stesso ragionamento? 13. G: perché andranno a scegliere quasi tutti i numeri compresi in un certo intervallo. 14. O: sì, è questa l'idea; ecco, se tutti facessero la stessa scelta allora si dividerebbero la somma. Comunque quindi il gioco... 15. G: quindi, qua non c'è scritto però l'obiettivo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Passa al secondo step di pensiero: entra nella situazione di interazione strategica. • Non può dire quale numero sceglieranno perché sta solo esplorando le possibili evoluzioni del gioco senza prendere in considerazione i valori numerici e quindi parla in modo generico di intervalli di numeri. • Ritorna alle richieste del

<p>Algoritmo di calcolo</p>	<p>Esplorazione (b1) nel caso "n piccolo"</p> <p>Pianificazione di azioni discendente (b2)</p> <p>Esplorazione discendente (b2) che parte dalla definizione della strategia</p> <p>Inizio applicazione algoritmo</p>	<p>scritto, però l'obiettivo sarebbe anche vincere ...possibilmente una somma molto alta?</p> <p>16. O: sì, cioè, se tu giocassi, punteresti a vincere...</p> <p>17. G:</p> <p>a) allora l'unica strategia che, con un numero di giocatori n sufficientemente basso, potrebbe essere vincente...</p> <p>b) sarebbe creare da se stessi uno scostamento dalla media magari dicendo, proprio scegliendo il numero zero</p> <p>c) e scegliere un numero leggermente più basso di quello che potrebbe essere la media effettiva dei cento numeri,</p> <p>d) se la media è 66...</p> <p>18. O: ecco mi dici, perché non ho capito.</p> <p>19. G:</p> <p>a) mettiamo che la media sia 66 che è i due terzi di</p>	<p>problema: chiarificazione obiettivi</p> <ul style="list-style-type: none"> • Per avviare un'esplorazione in cui poter gestire in concetto di media (fino ad ora solo nominato) ha bisogno di produrre delle ipotesi sul numero n. Entra in una modellizzazione del problema. • Dopo aver immaginato nelle battute precedenti le possibili scelte degli altri giocatori, si genera la propria strategia: in questo modo lui gestisce le variabile del problema dall'esterno. Le scelte sono diventate numeri da manipolare. • Qui entra in gioco, anche se non è espresso in modo corretto, il ruolo dei 2/3: abbassare la media. • Comincia esplorazione partendo con lo svolgimento dell'algoritmo come se tutti scegliessero 100. Probabilmente sente il bisogno di manipolare dei numeri per capire come agisce l'algoritmo, ma fa confusione e prende inspiegabilmente il numero 100. • Lo fermo per farmi spiegare perché 66. • La scelta di 66 è dovuta
-----------------------------	--	---	---

<p>Schema d'azione elaborato: scegliere un numero più basso</p>	<p>Controllo partendo dal risultato ottenuto</p> <p>Applicazione schema</p> <p>Controllo/esplorazione (b1)</p>	<p>66, che è i due terzi di 100...facendo finta che i giocatori abbiano scelto più o meno uniformemente, se ho cento giocatori e ognuno ha scelto un numero, la media viene 66...</p> <p>b) io dico in teoria a me verrebbe da scegliere il 54...che più o meno...</p> <p>20. O: non sai</p> <p>21. G: sì non so assolutamente cosa fanno gli altri però se la media è 66 io anziché scegliere un numero qualsiasi scelgo lo zero così magari la media viene 66...io anziché la media, scelgo proprio il 64 che è un po' più bassa e vinco.</p> <p>22. O: no aspettami.</p> <p>23. G: Abbasso volutamente la media.</p> <p>24. O: quello l'ho capito, ma il problema è che se tu abbassi la media...l'abbassi in che modo?</p> <p>25. G: cerco...scegliendo un numero bassissimo: zero. Il più basso possibile.</p> <p>26. O: e tu dici che zero?</p> <p>27. G: Se però n supera un certo livello è ovvio che la mia scelta viene a pesare sempre meno, se siamo in tre pesa molto, se n= 3 pesa molto, se n=1000...</p> <p>28. O: certo, questo è vero.</p> <p>29. G: altre strategie valide ...non le vedo.</p> <p>30. O: quindi tu sceglieresti? Quale numero sceglieresti? Non è che ognuno deve scegliere un numero diverso...</p> <p>31. G: sì possono scegliere anche lo stesso numero. Io sceglierei così a occhio un</p>	<p>all'applicazione dell'algoritmo, ma invece di partire dalla media è partito da 100 e non sembra rendersene conto.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Anche se si mette quello che dice però rivela la sua strategia (scegliere un numero più basso dei 2/3 della media). • Controllo (cambia il numero scelto perché probabilmente, non avendolo scritto si è già dimenticato di aver detto 54, tanto a lui interessa dire che sceglie un numero più basso della media) • Sintesi della sua strategia • Spiegazione dei passaggi in termini numerici scaturita dalla richiesta dell'osservatore. • Giustificazione delle sue assunzioni che denota una sua familiarità con in concetto di media aritmetica e consapevolezza dei limiti della sua scelta.
<p>Schema media</p>	<p>Esplorazione (A2)</p>	<p>66, che è i due terzi di 100...facendo finta che i giocatori abbiano scelto più o meno uniformemente, se ho cento giocatori e ognuno ha scelto un numero, la media viene 66...</p> <p>b) io dico in teoria a me verrebbe da scegliere il 54...che più o meno...</p> <p>20. O: non sai</p> <p>21. G: sì non so assolutamente cosa fanno gli altri però se la media è 66 io anziché scegliere un numero qualsiasi scelgo lo zero così magari la media viene 66...io anziché la media, scelgo proprio il 64 che è un po' più bassa e vinco.</p> <p>22. O: no aspettami.</p> <p>23. G: Abbasso volutamente la media.</p> <p>24. O: quello l'ho capito, ma il problema è che se tu abbassi la media...l'abbassi in che modo?</p> <p>25. G: cerco...scegliendo un numero bassissimo: zero. Il più basso possibile.</p> <p>26. O: e tu dici che zero?</p> <p>27. G: Se però n supera un certo livello è ovvio che la mia scelta viene a pesare sempre meno, se siamo in tre pesa molto, se n= 3 pesa molto, se n=1000...</p> <p>28. O: certo, questo è vero.</p> <p>29. G: altre strategie valide ...non le vedo.</p> <p>30. O: quindi tu sceglieresti? Quale numero sceglieresti? Non è che ognuno deve scegliere un numero diverso...</p> <p>31. G: sì possono scegliere anche lo stesso numero. Io sceglierei così a occhio un</p>	<p>all'applicazione dell'algoritmo, ma invece di partire dalla media è partito da 100 e non sembra rendersene conto.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Qui espone completamente la sua

<p>Frame scelte casuali Frame distribuzione uniforme</p>	<p>Anticipazione Modellata (A2) Anticipazione guidata da algoritmo</p>	<p>sceglierei così a occhio un 64 mettendo come mio numero zero.</p> <p>32. O: però non capisco, se tu metti un numero zero e dici che verrà 64? No perché vince quello che ...</p> <p>33. G: ci si avvicina di più al numero</p> <p>34. O: e quindi se tu scegli zero vuol dire che è zero quello che ci si deve avvicinare di più ai due terzi della media.</p> <p>35. G: ah, no io devo scegliere un numero...ah non avevo capito! Ah, no, no, allora la mia strategia non vale niente.</p> <p>36. O: tu devi scegliere un numero e poi tra tutti i numeri scelti fanno la media e vince (<i>mi interrompe</i>)</p> <p>37. G: sì ho capito, avevo consideratocome due eventi diversi la scelta del numero e poi dire quanto verrà.</p> <p>38. O: ho capito</p> <p>39. G:</p> <p>a) invece è lo stesso evento. Quello che ho detto non ha senso. Ho interpretato male il problema.</p> <p>b) (<i>pensa in silenzio</i>) Uso l'unico metodo statistico valido,</p> <p>c) la media di tutti i numeri sarà ...50 indipendentemente dal numero dei giocatori,</p> <p>d) prendo i due terzi e gioco quel numero.</p>	<p>strategia rivelando anche in modo esplicito il suo fraintendimento della situazione problematica. Fino alla battuta 37 c'è la chiarificazione della situazione problematica</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analizza il suo fraintendimento usando termini tecnici provenienti dal campo della probabilità e quindi mostra la sua familiarità con quel tipo di problematiche • Deve riformulare la sua strategia cercando di scegliere il numero vincente e non manipolando i dati per poi agire (come aveva fatto in precedenza). Si appoggia a sue conoscenze in statistica riguardanti le scelte casuali. • Effettua il primo step • Progetta azioni seguendo algoritmo di calcolo dato
--	---	--	--

<p>Frame bounded rationality</p>	<p>Sintesi strategia</p>	<p>44. O: eh, ok... 45. G: però parto dal presupposto che non tutti facciano... 46. O: facciamo... 47. G: ...facciano un'iterazione troppo lunga, mi fermo al secondo step: $i=2$ (25 è l'unica cosa che scrive)</p>	<p>causa dei suoi studi?)</p> <ul style="list-style-type: none"> • La possibilità che le scelte scaturiscano da un tipo di ragionamento iterato sono scartate: questo tipo di scelta è dovuto a fattori di "conoscenza" del comportamento (finita l'intervista infatti mi ha detto che iterare per troppo volte un ragionamento è un tipo di azione troppo sofisticata e quindi non attuabile da tutti i soggetti) • Esprime la sua scelta motivandola
---	---------------------------------	--	---

5.1.3 Analogie e differenze tra i comportamenti dei soggetti intervistati

Le analisi condotte hanno messo in luce il rapporto esistente tra la gestione delle variabili temporali e utilizzo di modelli. Nello specifico si sono analizzate le difficoltà nel produrre esplorazioni temporali e il loro superamento (parziale o totale) in relazione al tipo di strumenti utilizzati.

I momenti delle risoluzioni dove si sente più forte l'influenza del background culturale sulle dinamiche temporali, e quindi dove si evidenziano le differenze tra i vari soggetti, sono principalmente due: l'entrata nel problema e la generazione delle esplorazioni.

Per quanto riguarda l'entrata nel problema (indicata attraverso attivazione di frame e schemi) possiamo dire che:

- l'ingegnere e i matematici hanno dimostrato la loro abitudine a confrontarsi ed affrontare problemi aperti, generando le loro esplorazioni in modo strutturato: ciò non dipende solo dalle nozioni possedute in campo matematico, ma dalle abitudini d'azione nate dalla pratica acquisita nell'affrontare situazioni di problem solving. In particolare i matematici sentono il bisogno di lavorare su modellazioni della situazione problematica.

- Tra i matematici è notevole la differenza nell'entrata nel problema tra l'esperto e in non conoscitori della teoria dei giochi: per l'esperto si tratta di svolgere un problema di cui si conosce un possibile modello, mentre per gli altri è necessaria un'esplorazione della situazione problematica che permetta la costruzione di un possibile modello di questa. Le dinamiche di esplorazione dell'esperto sono quindi anticipazioni modellate o esplorazioni guidate da schemi perché il modello incorpora e struttura le possibili esplorazioni nel tempo del problema.
- Per i matematici non conoscitori della teoria dei giochi la difficoltà di trovare un modello della situazione problematica attraverso cui strutturare le proprie esplorazioni è affrontata in diversi modi: o fissando il numero dei giocatori (Sam e F.) con l'obiettivo di generalizzare la strategia in seguito, o modellando la situazione problematica con la suddivisione dei giocatori a seconda delle loro possibili strategie (M).
- Tutti i non-matematici entrano nella situazione problematica cercando di simulare le possibili azioni degli avversari: partono quindi con l'esplorazione episodica nel tempo del problema. Per far questo entrano nel frame "distribuzione uniforme" perché per seguire il possibile svolgimento delle azioni è necessario applicare l'algoritmo di calcolo dato dal problema, e quindi la media. Considerare la distribuzione uniforme consente infatti di ottenere un valore numerico per la media dei numeri anche se non si conosce il numero dei giocatori.
- Attivare e lavorare all'interno del frame interazione strategica è un passaggio delicato in tutte le risoluzioni analizzate: è infatti complesso riuscire a coordinare i processi legati all'anticipazione delle possibili strategie degli avversari, all'applicazione di algoritmi di calcolo e alla generazione di una propria strategia.

Per quanto riguarda la gestione delle esplorazioni (anticipazioni, pianificazioni ...) possiamo affermare che:

- come predetto da Camerer, le difficoltà maggiori riscontrate dai soggetti sono dovute principalmente alla complessità di gestire le dinamiche esplorative. Queste infatti si sviluppano su un intreccio di piani temporali differenti (tempi interni e tempo del problema) relativi alle possibili strategie degli giocatori (le strategie elaborate da un giocatore devono infatti tener conto delle possibili strategie pensate dagli altri giocatori);

- le difficoltà nel gestire anticipazioni ed esplorazioni temporali sono superate attraverso l'uso di rappresentazioni e di modelli (la costruzione dei quali è sentita come un'esigenza soprattutto nei matematici)⁶². Le conoscenze quindi influiscono in modo determinante nella gestione dei processi di anticipazione: in particolare i modelli possono incorporare o supportare le esplorazioni. Le esplorazioni episodiche da gestire si fanno infatti sempre più rare quando si posseggono le tecniche per modellizzare la situazione problematica;
- come sottolineato in precedenza, il matematico applicato con esperienza nel campo della modellizzazione (in fisica e in altri campi) ha un approccio simile a quello dell'ingegnere e quindi diverso da quello dei matematici non applicati. Non solo però l'entrata nel problema è differente, ma anche le esplorazioni successive si sviluppando in modo diverso. M. infatti esegue esplorazioni episodiche che seguono il tempo del problema, ma, nello stesso tempo, struttura tali esplorazioni attraverso l'innesto di assunzioni sui possibili comportamenti dei giocatori. Sam, F. e l'esperto invece hanno affrontato il problema, non simulando le possibili azioni degli avversari, ma impostando un'attività di modellizzazione della situazione problematica che permettesse un utilizzo degli strumenti in loro possesso (in questo caso strumenti provenienti dalla matematica). Il fatto che siano portati ad usare le conoscenze matematiche che possiedono (limiti, iterazione all'infinito, la formalizzazione algebrica) è naturale e banalmente giustificabile, ma la cosa interessante è stata analizzare le conseguenze di tale approccio: questi soggetti non immergono il problema nella "realtà" (anche se il problema si riferisce ad una situazione possibile nella realtà), ma in una dimensione astratta dove poter utilizzare gli strumenti in loro possesso. In un certo senso non studiano veramente il problema, ma il modello di questo fatto attraverso linguaggi e tecniche provenienti dalla matematica (questo comporta quindi una selezione ed interpretazione delle variabili del problema in modo che siano applicabili i loro strumenti).
- Un'altra caratteristica interessante che si distingue nei comportamenti dei soggetti analizzati è il ricorso ad esplorazioni su particolari scelte numeriche: per i matematici l'introduzione e la manipolazione di specifici valori numerici servono solo per produrre contro-esempi, per analizzare i casi limite (F. e Sam) o, come ne caso

⁶² Questo fatto pone le basi per affermare che lo sviluppo di esplorazioni episodiche complesse (evento raro secondo i dati riportati da Camerer e al) può essere portato avanti con successo se si dispone di strumenti e conoscenze che permettano di strutturarle.

dell'esperto, all'interno di un modello, per l'economista invece sono il punto di partenza per produrre una strategia.

5.2 Comportamenti risolutivi nel secondo problema

5.2.1 Commenti sulle risoluzioni del problema 2

Le soluzioni proposte a questo problema rispecchiano le previsioni fornite dagli studi sul dilemma del prigioniero⁶³: l'individuazione della strategia dominante (investire 10 milioni di euro) è seguita da considerazioni sulla possibilità di cooperare per ottenere un guadagno maggiore per entrambi.

Nell'affrontare questo problema i soggetti che avevano già affrontato il beauty contest game non hanno incontrato le difficoltà riscontrate nella risoluzione di tale problema: ossia la costruzione delle esplorazioni all'interno del frame interazione strategica e lo sviluppo di processi di anticipazione complessi. Questo perché la formulazione del testo presenta una struttura pre-formata (un elenco ordinato delle coppie di strategie possibili con i rispettivi risultati) che immerge direttamente il soggetto nel frame interazione strategica e gli fornisce anche una presentazione schematica delle possibili situazioni. Oltre a questo, le anticipazioni da svolgere per simulare le possibili strategie dei giocatori sono meno articolate di quelle richieste nel beauty contest game (perché consistono solo nell'esplorazione di quattro possibili coppie di scelte) e quindi non necessitano l'attivazione di strutture atte a sostenerle (si veda par. 5.1).

Le analisi prodotte delle risoluzioni di questo problema hanno avuto la funzione di permettere un'analisi delle analogie e delle differenze nella produzione di esplorazioni tra differenti soggetti e di verificare quali comportamenti erano mantenuti dai soggetti in entrambi i problemi

Nel paragrafo successivo riporteremo alcune parti significative delle interviste raccolte⁶⁴ che permetteranno lo studio degli aspetti sopra elencati.

⁶³ Nota 26 pag.28

⁶⁴ Le sbobinate complete delle interviste e gli elaborati scritti, prodotti durante queste sono raccolti negli allegati.

5.2.2 Analogie e differenze nelle risoluzioni

Nonostante la maggiore omogeneità dei comportamenti risolutivi riscontrati, dovuta principalmente alle caratteristiche del problema scelto, si sono mantenute delle differenze “caratteristiche” tra i diversi soggetti. Nello specifico abbiamo ritrovato comportamenti ricorrenti tra i matematici⁶⁵ per quanto riguarda l’approccio al problema, che non sono presenti tra i non-matematici. Per mettere in risalto le analogie e le differenze riscontrate nelle risoluzioni, riporteremo le parti di intervista che mostrano tali elementi distintivi attraverso l’analisi dei frame, degli schemi e delle esplorazioni attivati. Tali analisi sono state divise in due categorie: quelle dei matematici e quelle dei non matematici.

5.2.2.1 Non matematici

Come nel beauty contest game, i non matematici affrontano il problema esplorando la situazione problematica simulando le possibili mosse dei giocatori. Nello specifico prima esaminano i risultati di ciascuna coppia (perché seguono la traccia data al testo) e poi, fissando una strategia alla volta, esplorano i possibili esiti di questa in relazione alle diverse scelte dell’avversario. La presenza nel testo di una strutturazione che definisce sia le strategie sia i relativi risultati per ciascuna di queste, ha fatto sì che questi soggetti potessero sviluppare i processi di esplorazione episodica senza dover costruire altre strutture a cui appoggiarsi.

Un’altra caratteristica importante che accomuna questi soggetti consiste nell’attivazione di frame e di schemi simili.

A: medico

A. non scrive niente sul foglio: il linguaggio verbale orale e il testo scritto gli sono sufficienti per portare avanti le sue esplorazioni (queste infatti simulano i possibili avvenimenti seguendo le tracce date dal testo).

⁶⁵ Come detto in precedenza, quando usiamo questo aggettivo ci riferiamo sia ai laureati in matematica, sia al laureato in ingegneria

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata (con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)	Analisi integrata
<p>Frame: problema di guadagno</p> <p>Frame interazione strategica (non cooperativa) Schema strategia dominante</p> <p>Frame cooperazione</p>	<p>Esplorazione focalizzata sui guadagni riportati nel testo. Questo diventa l'ambiente di lavoro su cui sviluppare le proprie esplorazioni (b1) volte alla ricerca della strategia dominante</p> <p>Esplorazione episodica (b1) svolta per simmetria con quella elaborata per se in precedenza</p> <p>Esplorazione (b2): partendo dai possibili guadagni decide la scelta</p> <p>Controllo</p>	<p>....</p> <p>3) A: ...(<i>guardando il testo</i>) se entrambi 10 milioni ...entrambi solo 1, se una dieci e l'altra sei una otto e l'altra zero, se tutte e due 6, tutte e due 5...allora ...ma allora se spendo 10 milioni di € comunque sono sicuro di guadagnarci cioè o uno o otto milioni comunque ci guadagno sempre, se ne spendo 6 invece ne posso guadagnare, cioè o non ci guadagno niente o ne guadagno solo 5 quindi forse come cosa ne investirei 10 perché comunque cioè in pratica vinco sempre...</p> <p>4) O: vincere vinci sempre, c'è una differenza di guadagno ecco.</p> <p>5) A: sì c'è una differenza di guadagno però...eh.....mi dirai se però ne spendo 10 magari l'altra farà il mio stesso discorso e ne vorrà spendere 10 anche lei perché dice almeno ci guadagno 1 e tutte e due guadagnano solo 1... allora se considero il mio avversario intelligente ne spendo solo 6 perché così almeno ne guadagniamo tutti e due 5, se considero...se non lo considero intelligente ne dovrei spendere... 10 però...cioè no... forse alla fine ne spenderei solo 6 sperando che anche gli altri facciano il mio stesso ragionamento.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Partendo dall'analisi dei valori numerici, sceglie la strategia che gli porta un guadagno sicuro ossia quella che "domina". Effettua poi un controllo per verificare se effettivamente questa scelta porta guadagni maggiori. Fissa una scelta ed esplora i possibili risultati a seconda delle scelte dell'avversario. A. quindi passa da un'esplorazione per coppie (data dal problema) ad un'esplorazione per strategie (partendo da una scelta analizza le possibili conseguenze a questa). • Entra in gioco anche la possibile strategia dell'altro giocatore: non ci sono solo guadagni numerici possibili, ma anche scelte influenzate dalla presenza di un altro decisore. L'esplorazione è condotta per simmetria e, identificando "arrivare al miglior profitto per entrambe" come il desiderio condivisibile dai giocatori, cambia la sua strategia: scegliere 6. In questo modo agisce come se si accordassero.

Mittu: diplomato

Mittu, similmente ad A., prima individua la strategia dominante, poi analizza anche le altre possibilità. La sua scelta è travagliata: a differenza di A., anche se esamina la possibilità di arrivare ad un guadagno migliore confidando nella “cooperazione” dell’altro giocatore, preferisce non rischiare e quindi sceglie la strategia dominante (che porta all’individuazione dell’equilibrio di Nash).

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell’intervista registrata <i>(con l’aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
<p data-bbox="159 996 300 1086">Frame problema di guadagno</p> <p data-bbox="159 1395 300 1541">Frame interazione strategica (non cooperativa)</p>	<p data-bbox="335 1025 603 1294">Esplorazione focalizzata sui guadagni riportati nel testo . Questo diventa l’ambiente di lavoro su cui sviluppare le proprie esplorazioni (non esplicitate) volte alla ricerca della strategia dominante</p> <p data-bbox="335 1821 603 1933">Esplorazione (b2): partendo dai possibili guadagni decide la scelta</p>	<p data-bbox="630 784 1018 925"><i>Dopo aver chiarito i dati e le richieste del testo comincia ad analizzare la situazione problematica</i></p> <p data-bbox="630 969 1018 1765">25) M: così di primo acchito io...forse dirò una stupidaggine, ma conoscendo questi numeri qua ...però...sì...e no, come faccio? <i>(pensa in silenzio guardando il testo)</i> allora il guadagno sicuro ce l’ho se spendo 10 milioni...cosa faccio se non posso mettermi d’accordo con quelli là e poi non li conosco neanche come persone...allora qua bisognerebbe sapere anche chi c’è di là nella compagnia, come ragiona, come... cioè come si fa?</p> <p data-bbox="630 1776 1018 2056">26) O: non sai come ragiona però sai che bene o male sono dei professionisti, gente che ci ragiona su ecco. Pensa che ci ragionano su...non è che vanno a caso...</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="1037 969 1441 1070">• Comincia la risoluzione: per prima cosa analizza i guadagni <li data-bbox="1037 1160 1441 1261">• Comprende che il ragionamento sui numeri non basta <li data-bbox="1037 1305 1329 1339">• Strategia dominante <li data-bbox="1037 1384 1441 1451">• Entra nel problema di interazione strategica. <li data-bbox="1037 1496 1441 1630">• Meta considerazioni sulla situazione problematica che gli impediscono di predire un risultato.

	<p>Esplorazione volta la controllo dei possibili risultati della scelta 6</p>	<p>27) M: beh, la cosa migliore sarebbe: io spendo 6 milioni e basta. Se l'altro spende 6 milioni ci guadagniamo una bella cifra tutti e due; se però io mi fido del buon senso dell'altro ne spendo 6 e quello mi frega e invece di spenderne 6 ne spende 10 mi manda in mezzo ad una strada. Allora la cosa migliore sarebbe investirne 10 (<i>indica il punto del testo che riassume le conseguenze di questa scelta e sottolinea "1 milione"</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplorazione discendente dal guadagno maggiore per entrambe alle scelte che lo determinano • Controllo sulla scelta: esplorazione fatta fissando la propria scelta ed esplorando i possibili esiti (tipo teoria dei giochi) La possibilità di sperare in una sorta di cooperazione è scartata.
--	--	---	---

5.2.2.2 Matematici

I soggetti “matematici”⁶⁶, come già rilevato nel problema precedente, affrontano il problema tentando di costruire delle rappresentazioni che mettano in evidenza i dati per poi sviluppare delle esplorazioni su questi. In questo caso però l’esigenza di costruire una rappresentazione della situazione problematica nasce da un’abitudine nell’impostare attività di problem solving⁶⁷, più che dalla necessità di avere un supporto per portare avanti processi esplorativi complessi (che infatti in questo problema non sono necessari).

In questo problema inoltre emerge, in modo ancora più netto rispetto al problema precedente, la differenza nella costruzione della risoluzione tra esperto di teoria dei giochi e gli altri soggetti: per il primo infatti non si tratta di risolvere un problema, ma di svolgere un semplice esercizio⁶⁸.

Anche all’interno di questa categoria abbiamo quindi ritrovato alcune delle analogie e delle differenze che erano state individuate nelle risoluzioni del Beauty contest game.

Esperto di teoria dei giochi

L’esperto, dopo aver portato la situazione problematica in *forma strategica* (applicazione di modelli conosciuti), riconosce immediatamente nel problema una struttura familiare (dilemma del prigioniero) di cui conosce anche la soluzione: attraverso la costruzione della tabella avviene quindi un’astrazione dalla situazione reale descritta nel problema, che si trasforma in una particolare combinazione di numeri.

Le esplorazioni sulle possibili reti di strategie dei giocatori sono inglobate nella costruzione della tabella a doppia entrata. In questo caso non avvengono neanche le esplorazioni sul modello (come avviene invece nel caso del Beauty contest) perché il riconoscimento della struttura del gioco (avvenuto attraverso l’individuazione della relazione tra i valori numerici nelle caselle della tabella), fornisce anche la soluzione del gioco (anticipazione modellata). La risoluzione svolta dall’esperto si svolge in pochi passaggi che riportiamo interamente.

⁶⁶ Il laureato in economia è stato inserito nel gruppo dei matematici.

⁶⁷ Attivazione del frame problem solving

⁶⁸ Si veda nota 48 pag.66

Esperto:

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata									
<p>Frame gioco non cooperativo Schema gioco in forma strategica</p>	<p>Modellizzazione della situazione problematica attraverso la costruzione di un tabella a doppia entrata: seguendo il tempo del problema, compila la tabella. Le sue esplorazioni sono quindi strutturate dall'applicazione di un modello conosciuto</p>	<p>1. E: a) <i>(legge il testo e quando arriva a leggere la parte riguardante le possibili conseguenze delle scelte comincia a scrivere una tabella a doppia entrata) sei, dieci, sei dieci ... se tutte e due spendono sei guadagnano cinque (scrive nella casella 6,6 5,5 e poi riprende a leggere il testo) questo gioca sei, l'altro gioca dieci il suo, di quello che gioca dieci e' otto (lo inserisce nella tabella) a spese della sua avversaria che quindi non guadagnerà nulla quindi zero otto (mette lo zero nella tabella) e qui otto zero (mette 8,0 nella cella corrispondente alla situazione simmetrica) se entrambe 10 (legge) ok uno e uno (inserisce 1,1 e finisce di leggere il testo)...</i></p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">6</td> <td style="padding: 0 10px;">10</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">6</td> <td style="padding: 0 10px;">5,5</td> <td style="padding: 0 10px;">0,8</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;">10</td> <td style="padding: 0 10px;">8,0</td> <td style="padding: 0 10px; border: 1px solid black; text-align: center;">1,1</td> </tr> </table> </div>		6	10	6	5,5	0,8	10	8,0	1,1	<ul style="list-style-type: none"> • Applicazione di schemi d'azione conosciuti e costruzione della forma strategica del gioco (uso degli strumenti forniti dalla teoria dei giochi). Sistemazione dei dati del testo nella tabella.
	6	10										
6	5,5	0,8										
10	8,0	1,1										
<p>Frame dilemma del prigioniero</p>	<p>Riconoscimento di situazione standard</p>	<p>b) va bene, eh...<i>(guarda la tabella)</i> beh il solito dilemma del prigioniero in fin dei</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Analisi della tabella costruita: riconoscimento della struttura tipica di un gioco famoso: il dilemma 									

<p>Schema equilibrio di Nash</p>	<p>Anticipazione modellata</p>	<p>conti nient'altro</p> <p>c) che dire e' chiaro che, per quanto sembri una cosa assurda, bisogna giocare 10 e 10 e basta (<i>riquadra la casella 1,1</i>), no ci sono altre scelte per quanto...</p>	<p>gioco famoso: il dilemma del prigioniero.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Espone la soluzione proposta dalla teoria dei giochi manifestando anche la sua conoscenza del fatto che non è la soluzione che porta al guadagno maggiore. La soluzione è incorporata nella situazione problematica e per questo non ci sono esplorazioni temporalizzate.
<p>Schema: dominanza</p>	<p>Controllo</p>	<p>2. O: sempre perché e un equilibrio di Nash?</p> <p>3. E: in questo caso anche perché sono strategie dominate c'è un rafforzativo in più se vuoi</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Controllo sulla soluzione supportato da schemi conosciuti

Sam, ricercatore in matematica, G. ingegnere e M. matematico applicato:

Questi soggetti, a differenza dei non matematici, prima di intraprendere delle esplorazioni, cercano di modellare la situazione problematica costruendo delle tabelle: si costruiscono quindi una rappresentazione della situazione problematica seguendo la struttura proposta dal testo. Tali rappresentazioni hanno la funzione di mettere in evidenza i dati e le relazioni tra questi e sono utilizzate come supporto per le esplorazioni⁶⁹.

Per mostrare le similitudini tra i comportamenti di G, Sam e M. attraverso l'analisi delle dinamiche esplorative in relazione ai frame e schemi attivati, riportiamo le analisi di alcune parti delle loro interviste⁷⁰.

G:

<p>Frame e schemi attivati</p>	<p>Processi di esplorazione</p>	<p>Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i></p>	<p>Analisi integrata</p>
<p>Frame: problema di guadagno</p>		<p>1. G: (<i>legge il testo</i>) guadagno si intende profitto rispetto alla spesa pubblicitaria?</p>	

⁶⁹ In questi soggetti quindi le esplorazioni si svilupperanno sulle rappresentazioni (B).

⁷⁰ Le sbobinate e i protocolli scritti da tutti i soggetti sono riportati in allegato

<p>Frame problem solving</p> <p>Schema d'azione: trascrizione dei dati e "sistemazione di questi in una tabella"</p>	<p>Applicazione di comportamento appreso: individuare ed trovare le relazioni tra i dati</p>	<p>2. O: sì, cioè quello che effettivamente ...ti metti in tasca</p> <p>3. G:</p> <p>a) ti rimane in tasca (<i>pensa e comincia a scrivere in silenzio una tabella a due colonne che riassume. a seconda della coppia di scelte. i possibili guadagni come descritto nel testo. Poi scrive da una parte 6 dicendo</i>)</p> <p style="text-align: center;"> 6 n° pezzi 6 → 5 10 → 8 6 → 5 6 → ∅ 10 → 1 10 → 1 </p>	<ul style="list-style-type: none"> • Per prima cosa costruisce una "tabella" dove riassume i dati forniti dal testo.
<p>Frame: equiprobabilità</p> <p>Schema: guadagno medio</p>	<p>Esplorazione (B+A1)</p>	<p>b) ...vediamo con sei, a questo punto ci sono due possibilità (<i>guarda la tabella che ha prodotto</i>): o guadagno 5 o guadagno 0, quindi due e mezzo (<i>scrive 6 → 2,5</i>)</p> <p>4. O. non ho capito scusami</p> <p>5. G:</p> <p>a) se io investo sei o guadagno 5, se fa come me la mia avversaria, o guadagno zero se la mia avversaria fa dieci, se io metto 10, o guadagno 1 o guadagno 8 (<i>scrive sempre da una parte sotto quello scritto in precedenza, 10</i>)...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplorazione sulla tabella: la situazione problematica si riduce ad un confronto tra numeri. • Spiegazione indotta dalla richiesta dell'osservatore. Continuazione del processo di esplorazione sulla tabella.
<p>Schema: guadagno medio</p>	<p>Applicazione dello schema</p>	<p>b) la media è quattro e mezzo (<i>scrive 10 → 4,5</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ripete le operazioni sui guadagni nell'altra situazione

<p>Frame interazione strategica</p>	<p>Esplorazione “per simmetria” supportata dalla tabella (B)</p>	<p>c) quindi sicuramente sarebbe più conveniente mettere 10,</p> <p>d) ma questo a parità di probabilità di mosse del mio avversario, 50%, 50%...</p> <p>e) però non penso di essere l'unico essere pensante...il responsabile della pubblicità...è responsabile anche dall'altra parte, penserà la stessa cosa...(pensa in silenzio per un po')...quindi metterei 10.</p> <p><i>Poi la risoluzione continua cercando una strategia che gli permetta di guadagnare di più, ma dopo diverse considerazioni sui possibili comportamenti dell'avversario sceglie la strategia dominata</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Analisi dei dati ed individuazione del “guadagno medio” maggiore • Controllo e messa in evidenza del frame in cui ha immerso la situazione • Il comportamento dell'avversario è prodotto per simmetria al suo.
--	---	---	--

Sam:

<p>Frame e schemi attivati</p>	<p>Processi di esplorazione</p>	<p>Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i></p>	<p>Analisi integrata</p>
<p>Frame problem solving</p> <p>Schema d'azione: trascrizione dei dati e sistemazione</p>	<p>Applicazione di comportamento appreso: individuare ed trovare le relazioni tra i dati</p>	<p>1. S: <i>(legge il testo e quando arriva a scandire le due possibilità di investimento le trascrive immediatamente su foglio)</i></p> <p>a) compagnia A <i>(scrive “Com A”)</i> compagnia B <i>(scrive “Com B” di fianco)</i> “se entrambe spenderanno sei milioni ciascuna raggiungerà un guadagno di cinque milioni”...dove lo metto?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Individuazione e trascrizione dei dati: primo tentativo di costruzione di una tabella in cui siano presenti i legami tra questi.

<p>di questi in una tabella</p>	<p>Esplorazione (B)</p>	<p>Non so dove metterlo se a destra o sotto (<i>scrive sotto</i>) Allora lo mettiamo sotto, allora facciamo così. Spese, guadagno...cinque, cinque (<i>scrive sotto le spese i rispettivi guadagni e costruisce quindi una tabella a doppia entrata partendo dalle indicazioni delle compagnie combinandole con le diverse situazioni di spesa-guadagno: ricomincia poi la leggere</i>) “se uno investe 10 quando la sua avversaria spende sei...”</p> <p>b) allora quindi dovrei rifare la tabellina (<i>tira una linea di separazione con quello scritto in precedenza e riprende le voci spese-guadagno mantenendo la convenzione di scrivere sotto le colonne individuate dalle due compagnie: arriva a costruire tre tabelle che non sono altro che la trascrizione, ripulita dalle parole, dei tre punti descritti nel testo e poi pensa in silenzio</i>) ...</p> <table border="1" data-bbox="635 1518 1008 1926"> <thead> <tr> <th></th> <th>Com A</th> <th>Com B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>spese</td> <td>6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>guadagno</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td colspan="3"><hr/></td> </tr> <tr> <td>spese</td> <td>10</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>guad.</td> <td>8</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td colspan="3"><hr/></td> </tr> <tr> <td>spese</td> <td>10</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>guadagno</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>c) io sono il responsabile di una delle due e devo decidere cosa fare</p>		Com A	Com B	spese	6	6	guadagno	5	5	<hr/>			spese	10	6	guad.	8	—	<hr/>			spese	10	10	guadagno	1	1	<ul style="list-style-type: none"> • Prima ha scritto le possibili strategie per entrambe le compagnie, mentre ora trascrive i risultati di queste: costruzione del modello • Esplorazione non verbalizzata che si appoggia sulla tabella
	Com A	Com B																												
spese	6	6																												
guadagno	5	5																												
<hr/>																														
spese	10	6																												
guad.	8	—																												
<hr/>																														
spese	10	10																												
guadagno	1	1																												

<p>Frame: “problema di guadagni”</p>	<p>Esplorazione (b1+B)</p>	<p>decidere cosa fare... cercando di...quindi di guadagnare il più possibile ... (<i>guarda i numeri scritti da lui nelle tabelle e mentre descrive i suoi ragionamenti gestisce i numeri che ha scritto indicandoli con la penna ogni volta che li nomina</i>)</p>	<p>sulla tabella.</p>
<p>Frame: interazione strategica</p>	<p>Esplorazione (B)</p>	<p>d) e qui è un problema perché il guadagno massimo è otto</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Analisi dei dati numerici nella tabella: individuazione guadagno massimo.
<p>Schema strategia dominante</p>	<p>Esplorazione discendente (b2) supportata dalla tabella (B)</p>	<p>e) quindi se io investo 10 <u>potrei</u> (<i>alza la voce su questa parola chiave</i>) avere otto, ma il mio avversario potrebbe anche pensare la stessa cosa e quindi alla fine guadagnano tutti e due uno...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Partendo dal risultato “guadagno massimo” comincia ad esplorare: per simmetria imposta anticipa le possibili mosse dell’avversario. Queste esplorazioni vanno avanti e indietro nel tempo perché si appoggiano sulla tabella.
	<p>Esplorazione (b1+B)</p>	<p>f) dunque ...d'altronde se io investo sei e l'altro investe dieci io perdo tutto...uh,uh....</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplorazione che segue il tempo del problema e che quindi simula possibili comportamenti.
	<p>Esplorazione (b2+B)</p>	<p>g) ho la sensazione che...che qui ci siano dei fattori...di conoscenza ...sociale e psicologica del mio avversario perché ...eh...</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Considerazioni meta sulle possibili variabili che influenzano questo tipo di scelte.
	<p>Esplorazione (b2+B)</p>	<p>h) dunque io non so cosa fa l'altro se devo minimizzare la perdita ...eh mi conviene spendere 10</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esplorazione discendente su tabella guidata di dati e dalle considerazioni precedenti. Questo tipo di strategia assomiglia molto a quella suggerita dalla teoria dei giochi.
	<p>Controllo/esplorazione su tabella (B)</p>	<p>i) ...perché se io spendo 10 mal che vada guadagno 1 benché vada guadagno otto (<i>fa tutti questi ragionamenti guardando la tabella e spostandosi con la penna per indicare</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Controllo su numeri della tabella

		<p><i>le situazioni che prende in considerazione) se io investo 6 benché vada guadagno 5 mal che vada non guadagno niente (anche se le tabelle sono state costruite separatamente nella sua argomentazione le gestisce come un'unica tabella in cui le situazioni possibili sono discriminate dalle sole due possibilità di investimento : 6 e 10)</i></p> <p><i>La risoluzione continua con considerazioni sulla possibilità di effettuare una scelta basandosi sugli effetti prolungati nel tempo dell'attuazione della strategia dominata.</i></p>	
--	--	---	--

M:

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
<p>Frame problem solving</p> <p>Schema d'azione: trascrizione dei dati e sistemazione di questi in una tabella</p>	<p>Applicazione di comportamento appreso: individuare ed trovare le relazioni tra i dati</p>	<p><i>Dopo ave letto e chiarito i punti oscuri nel testo...</i></p> <p>M:</p> <p>a) allora io responsabile della mia azienda... <i>(comincia a scrivere: costruisce una specie di diagramma ad albero)</i> io spendo 6....se l'altro spende 10 non mene importa nulla di quello che guadagna l'altro... perché io so che...non guadagno niente...se l'altro ne spende 6 io ho 5 se io ne spendo 10....se l'altro ne spende 10....1, se</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Trascrive i dati del testo partendo da ciascuna delle due strategie per una compagnia e trascrivendo i possibili risultati a seconda delle scelte dell'altra.

<p>Frame quiprobabilità Schema guadagno medio</p>	<p>Esplorazione (B)</p>	<p>l'altro ne spende 6...5...no, è 8, è 8.</p> <p> $\begin{array}{l} 6 \begin{cases} / 10 \rightsquigarrow 0 \\ \backslash 6 \rightsquigarrow 5 \end{cases} \\ 10 \begin{cases} / 10 \rightsquigarrow 1 \\ \backslash 6 \rightsquigarrow 8 \end{cases} \end{array}$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> • Inizia la fase esplorativa sul modello costruito: comincia con la prima situazione scritta e si accorge che è la peggiore • Considera le coppie di risultati possibili a seconda della scelta e cerca un criterio di scelta trovando il guadagno medio. • Il risultato dell'algoritmo di calcolo gli indica la scelta che porta il guadagno medio maggiore
<p>Schema strategia dominante</p>	<p>Applicazione schema</p> <p>Analisi dati</p> <p>Controllo</p> <p>Esplorazione (B)</p>	<p>b) Se io metto 6 e l'altro 10 io vengo licenziato e mi darebbe fastidio...</p> <p>c) se io ne spendo 6... il guadagno medio è 2,5 se io ne spendo 10 il guadagno medio è di 4,5....</p> <p>d) uno dice, perché non spenderne 10....</p> <p>e) ne spendo 10 e comunque qualcosa guadagno...se mi va bene ne guadagno 8, se mi va male ne guadagno 1... comunque il dato di fatto è che non perdi niente quindi in questo sei facilitato nella scelta...e comunque qualcosa ci guadagno quindi non c'è nessun motivo per non metterne 10</p> <p>f) ...non trovo nessun motivo per non metterne 10...un motivo è dire...no, se l'avversario ne mette 6, comunque ne guadagno di più...se l'avversario ne mette 10 comunque ne guadagni di più quindi direi se ho</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Controllo sulla tabella dei valori specifici relativi a alla scelta 10. • Partendo da una possibile scelta passa ad esaminare i guadagni relativi alle possibili mosse dell'avversario: la presenza della tabella permette al soggetto di fissare e quindi seguire le possibili sequenze di azioni andando cioè avanti ed indietro nel tempo

CAPITOLO 6: Risultati e conclusioni

Partendo da un primo nucleo di strumenti di analisi testati nella tesi di laurea (par. 1.1), nel presente lavoro ne abbiamo costruiti di nuovi (cap.4): questi sono nati da una rielaborazione degli strumenti di analisi in nostro possesso nella prospettiva di sviluppare un affinamento progressivo degli obiettivi di ricerca. Nello specifico, questo lavoro ha portato alla costruzione di strumenti di analisi che permettono di individuare e studiare le analogie e le differenze tra soggetti con background culturale diverso nello sviluppo dei processi di costruzione di strategie risolutive in problemi di interazione strategica, in termini di gestione di processi di esplorazione in relazione alle conoscenze mobilitate (frame, schemi e rappresentazioni).

Dalle analisi condotte (cap. 5) sono emersi comportamenti ricorrenti interpretabili appunto attraverso lo studio del rapporto tra frame, schemi, rappresentazioni e sviluppo di dinamiche esplorative. In particolare si è indagato su come alcuni soggetti riescano a superare le difficoltà nello svolgere successioni di anticipazioni di azioni e su come nei singoli soggetti l'esperienza modelli le esplorazioni temporali prodotte. I risultati ottenuti hanno successivamente portato all'elaborazione di alcune ipotesi di ricerca, prodotte in risposta alle domande di ricerca iniziali.

Oltre ai risultati specifici prodotti e illustrati nei successivi due paragrafi, questo studio pone anche le basi per la costruzione di un quadro teorico che struttura le possibili indagini future sui processi di esplorazione nelle attività di problem solving (cap. 7).

6.1 Conclusioni

In questo paragrafo metteremo a confronto, in forma sintetica, le questioni di ricerca sollevate nel presente lavoro di tesi di dottorato e le “risposte” elaborate nel corso della ricerca svolta.

Le questioni di ricerca esaminate sono messe in sequenza seguendo l'ordine progressivo in cui sono state affrontate:

- a) La prima questione affrontata é stata la seguente: essendo emersa dagli studi condotti nella tesi di laurea la difficoltà nel portare avanti i processi di anticipazione in attività di problem solving, si può trovare un campo di indagine in cui tali processi svolgano un ruolo determinante e quindi possano essere studiati in modo approfondito?

La scelta del nuovo campo d'indagine (problemi di interazione strategica) ha consentito di trovare conferme sul fatto che i processi di anticipazione complessi sono difficili da portare avanti (anche nel caso di risolutori con buon background matematico): si vedano i risultati provenienti da ricerche svolte nel campo della Behavioural Game Theory (par. 1.4 e par 3.8) e i dati da noi raccolti (par. 3.1, par. 3.2, par 3.5; par 5.1.1, par. 5.1.2, par. 5.2.2.1 e par. 5.2.2.2).

b) Con quali strumenti si può affrontare uno studio dei processi di esplorazione temporale?

Inizialmente sono stati utilizzati diversi strumenti di analisi provenienti da ricerche sviluppate in campo cognitivo e didattico negli ultimi dieci anni (cap. 1). La necessità di avviare un'indagine più approfondita sui processi di esplorazione ha portato successivamente alla costruzione di un apparato analitico adatto a tale scopo (par.3.4 e soprattutto il cap.4). In particolare l'identificazione di differenti componenti dei processi esplorativi messi in atto durante le risoluzioni dei problemi di interazione strategica ha consentito di rispondere alle domande di ricerca esposte nel par. 3.7:

c) In che modo le conoscenze possedute dai soggetti analizzati influiscono sulla generazione e sullo sviluppo dei processi di esplorazione durante le risoluzioni di problemi di interazione strategica?

L'analisi dei protocolli svolta con l'ausilio dei nuovi strumenti di analisi ha messo in evidenza come le conoscenze matematiche e i comportamenti appresi relativi al loro uso, influenzino la gestione dei processi esplorativi nei problemi di interazione strategica strutturando le esplorazioni, e quindi riducendo la necessità di ricorrere ad esplorazioni episodiche nel caso dei soggetti con adeguato retroterra culturale (par. 3.5, par.3.6, par. 5.1.1 e par. 5.2.2.2). Dai protocolli analizzati risulta inoltre che le esplorazioni che non possono essere realizzate seguendo una progressione di eventi concatenati in modo lineare sono le più difficili da portare avanti: nello specifico queste sembrano svilupparsi in modo completo solo quando sono supportate da schemi o rappresentazioni adeguati (cap. 5).

d) In che modo i modelli matematici (sia che siano appartenenti alla Teoria dei Giochi, sia che non lo siano) supportano i processi di esplorazione che altrimenti sarebbero difficili da portare avanti?

Le analisi svolte mostrano come i modelli matematici ordinano, strutturano, e quindi in un certo senso guidano, le esplorazioni consentendo in questo modo il superamento, o l'eliminazione, delle difficoltà nel gestire anticipazioni complesse e prolungate (cap.5). Dalle analisi è emerso come parte delle componenti dei processi esplorativi è "scaricata" sul modello, consentendo così il passaggio dalle esplorazioni episodiche⁷¹ alle esplorazioni strutturate⁷² e lo sviluppo di esplorazioni che non seguono il flusso temporale lineare⁷³. In particolare, i modelli della Teoria dei Giochi incorporano le variabili temporali e supportano schemi d'azione che sostituiscono le esplorazioni episodiche che seguono il tempo del problema⁷⁴.

Come si può notare, alcuni dei risultati ottenuti ed espressi come risposte ai quesiti di ricerca sopra elencati, hanno la caratteristica di conclusioni sufficientemente sostenute da evidenze sperimentali (vedi a, b), altri (c,d) sono invece ancora allo stato di ipotesi, per il numero ridotto di soggetti intervistati, pur essendo suffragate da coerenti riscontri nei casi esaminati. Ad esse dedicheremo il successivo paragrafo.

6.2 Ipotesi di ricerca elaborate (e parzialmente validate)

Nel corso di questo lavoro, passando attraverso un progressivo affinamento delle domande di ricerca e la costruzione di strumenti di analisi adatti ad indagare le problematiche proposte in tali domande (cap.4) e la successiva applicazione di questi strumenti nelle analisi dei protocolli selezionati (cap.5), si è arrivati, in particolare, alla generazione delle seguenti ipotesi:

⁷¹ Queste componenti dei processi esplorativi nella classificazione riportata nel par. 4.2.3 sono identificate con la sigla "b".

⁷² Nella classificazione riportata nei par. 4.2.2 queste esplorazioni sono identificate con le lettere "A" e "B", secondo siano rispettivamente guidate da frame/schemi o da rappresentazioni.

⁷³ Queste componenti dei processi esplorativi nella classificazione riportata nel par. 4.2.3 sono identificate con la sigla "b2".

⁷⁴ Queste componenti dei processi esplorativi nella classificazione riportata nel par. 4.2.3 sono identificate con la sigla "b1".

- I processi di *planning* in attività di problem solving possono essere differenziati, e successivamente analizzati, interpretando lo sviluppo dei processi esplorativi in termini di generazione di anticipazioni strutturate/non strutturate da conoscenze.
- Tra le diverse componenti dei processi di esplorazione, quelle più difficili da gestire sono quelle episodiche, anche se possono sembrare quelle più “naturalmente” da generare: questa difficoltà risiede nella manipolazione di processi che, immersi in un flusso temporale, devono essere svolti, scomposti e analizzati spesso “interrompendo”, “invertendo” e “ripercorrendo” tale flusso.
- Per portare avanti con successo esplorazioni complesse, in cui sia richiesta la gestione di variabili temporali o la simulazione di sequenze di azioni combinate, è necessario disporre di strumenti che supportino tale sviluppo cristallizzando parte delle componenti dei processi di esplorazione da manipolare⁷⁵.
- Nello specifico, la Teoria dei Giochi offre modelli che strutturano le esplorazioni temporali attraverso rappresentazioni grafiche e schemi.

⁷⁵ Si noti che nei protocolli analizzati la possibilità di utilizzare modelli conosciuti modifica la generazione e gestione delle esplorazioni episodiche che sono supportate o addirittura sostituite con esplorazioni strutturate dalle conoscenze (frame e schemi) o dalle rappresentazioni.

CAPITOLO 7: Prospettive di ricerche ulteriori

7.1 Allargamento del campo di indagine: primi confronti con un problema di modellizzazione di una situazione di coordinamento di moti.

Le nostre prospettive di ricerche future sono volte all'individuazione di altri campi della matematica applicata in cui si possano trovare conferme delle ipotesi di ricerca precedentemente esposte (in particolare per quanto riguarda l'importanza dei processi esplorativi "strutturati" e le funzioni di rappresentazioni adeguate, apprese "in situazione", per sostenere le attività di esplorazione e di planning). Abbiamo quindi cercato altre attività di problem solving, dove una buona gestione dei processi esplorativi, legati alla gestione e alla rappresentazione di variabili temporali, potesse risultare determinante per la corretta risoluzione del problema. A questo scopo sono state prese in considerazione risoluzioni scritte di un problema di coordinamento di moti svolto sia da studenti di matematica⁷⁶, sia da studenti (tra i 16 e i 17 anni) di un liceo di Budapest⁷⁷.

Il testo del problema⁷⁸ (che chiameremo "problema della sonda") è il seguente:

Una sonda spaziale, raggiunta la sua velocità di crociera di 100.000 Km/sec, ripassa vicinissimo alla Terra e si dirige verso Alpha Centauri. Dopo 1 minuto dal passaggio vicino alla Terra la sonda invia alla terra, per controllo, i dati sulla rotta e lo stato delle attrezzature a bordo, ricevuti i dati, immediatamente dalla Terra parte un segnale che raggiunge la sonda, e tale segnale a sua volta attiva immediatamente un nuovo invio di dati alla Terra e così via.

Sapendo che i segnali elettromagnetici viaggiano alla velocità di 300.000 Km/sec, a quale distanza dalla Terra il primo messaggio incontra la sonda? E il secondo?...E l'ennesimo? E se la velocità della sonda fosse v ?

⁷⁶ Questo problema è stato svolto durante il corso di Matematiche Complementari II (quarto anno del vecchio ordinamento) nell'anno accademico '97/'98. I protocolli esaminati sono stati 14. Sono disponibili protocolli di una trentina di studenti di anni precedenti e successivi, con comportamenti simili a quelli del gruppo considerato.

⁷⁷ Tali protocolli esaminati sono 7, rappresentativi di un gruppo di 19, ed appartengono ad una classe di studenti del liceo italiano di Budapest che, studiando in italiano la matematica e le altre materie, hanno svolto i problemi scrivendo i commenti appunto in italiano.

⁷⁸ Questo testo è una rivisitazione del problema "del principe e del messaggero": una ricerca recente su questo problema si può trovare in (Barbero e al., 2006).

Questo problema necessita della capacità di coordinare ed analizzare una serie di moti di andata e ritorno verso un oggetto in movimento, e quindi non si tratta solo di individuare l'intersezione tra due moti, ma anche di gestire lo spostamento relativo tra questi. La difficoltà maggiore riscontrata nei protocolli consiste nell'analizzare contemporaneamente moti strutturalmente differenti (quello di andata e ritorno del segnale e il moto rettilineo uniforme della sonda): l'inscindibilità dei due moti coordinati e il loro diverso sviluppo infatti comporta (se si vuole utilizzare l'algebra) la generazione di un sistema di formule da costruirsi in parallelo mantenendo però separate le due identità dei moti.

Non è stato possibile effettuare un'analisi di questi protocolli comparabile con quella svolta per i problemi di interazione strategica a causa della diversa metodologia di raccolta del materiale: siamo infatti in possesso solo delle produzioni scritte dei processi risolutivi svolti dai soggetti sopra citati⁷⁹. Questi protocolli quindi non possono essere considerati come parte del lavoro di ricerca svolto secondo la metodologia della tesi di dottorato (basata sulle "interviste"), ma offrono comunque un'evidenza sperimentale ulteriore in altre attività di problem solving per i nostri risultati. D'altra parte tali attività potrebbero diventare un campo interessante in cui utilizzare in futuro in modo coerente con questa tesi, in una sperimentazione che segua la sua metodologia di ricerca, gli strumenti di analisi elaborati in essa.

Nei protocolli sul problema della sonda, non potendo analizzare i processi esplorativi attraverso la produzione orale, abbiamo inferito dalla produzione scritta alcune delle caratteristiche che distinguono i comportamenti dei soggetti in analogia con quanto visto per i problemi di Teoria dei Giochi (in particolare si sono ritrovate evidenze interessanti riguardo al ruolo delle rappresentazioni grafiche nella trattazione delle variabili temporali e all'importanza di una efficiente strutturazione dell'attività esplorativa).

Nello specifico, nei protocolli ungheresi si nota l'abitudine⁸⁰ ad integrare strumenti di modellizzazione differenti (in questo caso l'algebra e i grafici cartesiani) ed ad utilizzare i grafici cartesiani per scaricare la "fatica" generata dalla gestione della variabile temporale⁸¹.

⁷⁹ È inoltre importante notare che anche tra i protocolli ungheresi e quelli italiani c'è differenza: i primi sono testi prodotti in attività svolte in classe e valutate mentre i secondi sono problemi non valutati e svolti con l'intenzione di scrivere le tracce dei ragionamenti seguiti per poi analizzarli successivamente (contratto del corso).

⁸⁰ Tale abitudine è dovuta al fatto che, in Ungheria, l'uso delle rappresentazioni grafiche per modellare situazioni temporalizzate è introdotto fin dalla fine della scuola primaria. Ad esempio le situazioni di inseguimento/incontro tra due oggetti che si muovono su una retta sono analizzate immaginando e disegnando sequenze di "fotogrammi" successivi della situazione in evoluzione. La formalizzazione di tali situazioni sul piano cartesiano avviene poi successivamente come strumento per rappresentare formalmente tali situazioni e quantificare così le variabili in gioco.

⁸¹ Questo confermerebbe l'ipotesi che le difficoltà nel gestire le componenti episodiche dei processi di esplorazione sono superabili se strutturate attraverso modelli che le incorporino.

Gli studenti italiani analizzati invece non sembrano abituati ad usare il piano cartesiano come ambiente di lavoro e prediligono l'uso esclusivo del linguaggio algebrico. Può accadere però che tale approccio sia causa di una rottura semantica tra le esplorazioni piuttosto povere che vengono svolte per entrare nella situazione problematica (schematizzazioni con frecce e disegni dei moti di andata e ritorno dei segnali) e le esplorazioni svolte attraverso la manipolazione delle formule algebriche. Questa perdita di controllo semantico sulla produzione algebrica fa sì che molti studenti italiani non riescano neppure ad impostare il problema oltre l'analisi del movimento del segnale che muove verso la Terra per la prima volta e, anche quelli che riescono a padroneggiare il problema anticipando sia le possibili posizioni relative tra la terra e la sonda, sia lo sviluppo dei moti dei segnali, mostrano comunque difficoltà a gestire la relazione tra i moti oltre il secondo invio dalla sonda. Bisogna infatti notare che alcuni di questi studenti riescono a costruire delle rappresentazioni visive che tengono conto in qualche modo delle componenti temporali delle situazioni analizzate, ma le loro produzioni, non realizzando il passaggio a un uso adeguato dei grafici cartesiani, non permettono di portare avanti con successo le esplorazioni intraprese.

Si può quindi concludere che gli studenti ungheresi, nonostante l'età e il grado scolastico inferiore rispetto agli studenti italiani analizzati (studenti universitari del quarto anno del corso di laurea in matematica), incontrino meno difficoltà ad affrontare il problema sopra riportato⁸².

Tra gli elaborati in nostro possesso sul problema della sonda, abbiamo selezionato due protocolli in cui si ritrova uno sviluppo iniziale simile dell'analisi dei moti (scomposizione e traduzione, attraverso le formule del moto rettilineo uniforme, dei moti dei segnali) che però, nel caso dello studente italiano, è interrotto dopo il primo scambio tra terra e sonda nel protocollo, mentre nell'elaborato dello studente ungherese è portato avanti fino alla fine⁸³.

Dal confronto tra questi due protocolli si può notare come la presenza di una visualizzazione (schizzo) sia utile per avviare i processi di esplorazione episodica (protocollo A); per permettere lo sviluppo corretto dei processi risolutivi, è però necessario

⁸² La percentuale di successo, intesa come abilità nel tradurre e manipolare le variabili presenti nella situazione problematica attraverso strumenti provenienti dalla matematica (come l'algebra o i grafici cartesiani), è infatti maggiore nei protocolli ungheresi (3 su 7) rispetto ai protocolli italiani (3 su 14). Tali percentuali si basano su un numero ristretto di soggetti, ma trovano riscontri coerenti nei gruppi più estesi di elaborati a disposizione, e sono indicative delle maggiori difficoltà incontrate dagli studenti italiani analizzati nel risolvere il problema.

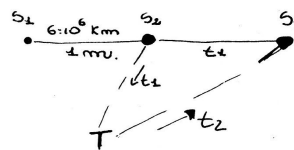
⁸³ I protocolli in questione sono riportati interamente in allegato

l'utilizzo di un modello matematico che ne strutturi le fasi (protocollo B): grafico cartesiano.

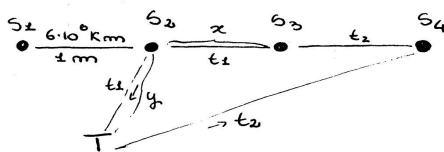
Riportiamo alcune parti dei protocolli A e B per mostrare nello specifico le analogie e le differenze sopra citate.

A: Italiano:

$S_1 = v \cdot t = 100'000 \text{ Km/sec} \times 60 \text{ sec} = 6'000'000 \text{ Km}$ è lo spazio percorso dalla sonda in 1 minuto; quindi se la sonda si Trova nel punto x al momento del passaggio quomolo invia il sig. le si è spostato da x di $6 \cdot 10^6 \text{ Km}$

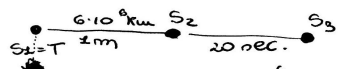


ma! quando la terna "risponde" la sonda continua a muoversi!



mi chiedo se è giusta la posizione della terna.

.....



$t_1 = \frac{S}{V} = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Km}}{3 \cdot 10^8 \text{ Km/sec}} = 20 \text{ sec}$. tempo che occorre alle informazioni per arrivare nella terna

$S_3 - S_2 = v \cdot t = 100'000 \frac{\text{Km}}{\text{sec}} \cdot 20 \text{ sec} = 2 \cdot 10^6 \text{ Km}$ è lo spazio percorso dalla sonda mentre il messaggio raggiunge la terna

B: Ungherese:

$$s_1 = v_a \cdot t_1 = 100'000 \text{ km/s} \cdot 60 \text{ s} = 6'000'000 \text{ km}$$

Questa distanza ci serve per calcolare quanto tempo impiega la luce emessa dall'astronave ad arrivare sulla Terra:

$$t_2 = \frac{s_1}{v_L} = \frac{6'000'000 \text{ km}}{300'000 \text{ km/s}} = 20 \text{ s}$$

Nel momento in cui questo raggio luminoso arriva a destinazione, dopo cioè 1 minuto e 20 secondi, l'astronave si troverà alla distanza d_2 :

$$s_0 = s_1 + s_2 = v_a \cdot t_1 + v_a \cdot t_2 = v_a (t_1 + t_2) = 100'000 \text{ km/s} \cdot 80 \text{ s} = 8'000'000 \text{ km}$$

Abbiamo quindi l'equazione del moto dell'astronave:

$$s = v_a \cdot t + s_0$$

e quella della luce che viene emanata dalla superficie terrestre:

$$s = v_L \cdot t$$

Equagliando le due equazioni otterremo il tempo t_3 l'intervallo di tempo dopo il quale il segnale luminoso

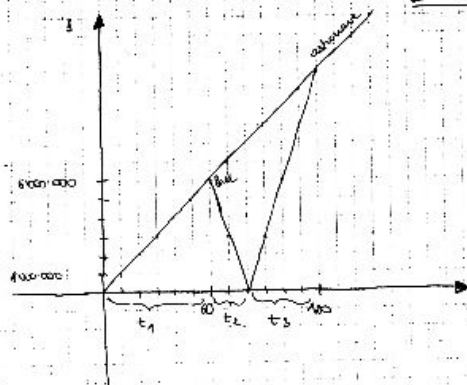
raggiunge l'astronave:

$$v_a \cdot t_3 + s_0 = v_L \cdot t_3$$

$$s_0 = t_3 (v_L - v_a) \Rightarrow t_3 = \frac{s_0}{v_L - v_a} = \frac{8'000'000 \text{ km}}{300'000 \text{ km/s} - 100'000 \text{ km/s}} = 40 \text{ s}$$

Per ottenere tutta la durata del processo, dalla partenza da Terra all'arrivo del segnale sull'astronave, bisogna sommare t_1 , t_2 e t_3 :

$$t = 60 \text{ s} + 20 \text{ s} + 40 \text{ s} = 120 \text{ s} = 2'$$



La differenza sostanziale tra le risoluzioni di questi due protocolli (pur abbastanza simili nell'approccio iniziale) sembra essere la presenza/mancanza dell'attivazione di Frame, schemi e soprattutto rappresentazioni legate alle situazioni problematiche di inseguimento: nello specifico nel protocollo A mancano rappresentazioni strutturate delle situazioni di moti coordinati che guidino e controllino la costruzione della modellizzazione algebrica di tali fenomeni (risulta infatti evidente come in A l'esplorazione venga bloccata dalla mancanza del modello matematico "grafico cartesiano" che invece è presente in B).

Le differenze negli altri protocolli a disposizione sono ancora maggiori: nella maggior parte dei protocolli italiani l'avvio del processo risolutivo avviene con una visualizzazione statica assai rudimentale della situazione problematica, accompagnata qualche volta da una freccia (sonda \rightarrow Terra) o da una coppia di frecce (sonda \rightarrow Terra e Terra \rightarrow sonda), e poi ci sono tentativi in campo aritmetico o in campo algebrico di seguire il primo ritorno del segnale con calcoli o formule, però con difficoltà a immaginare e rappresentare in modo coordinato il moto della sonda mentre il segnale viaggia verso la Terra e poi torna verso la sonda. I grafici cartesiani sono usati spontaneamente da una percentuale esigua di studenti italiani (solo 4 su 44 nel gruppo totale). Tra gli studenti ungheresi invece quasi la metà utilizzano i grafici cartesiani (in modo più o meno preciso quantitativamente) per attivare e/oppure tenere sotto controllo le rappresentazioni algebriche dei moti, oppure (in modo accurato) per risolvere il problema. Da notare anche che nei casi (poco frequenti nei due gruppi) di uso di tabelle per rappresentare o tenere sotto controllo i momenti di partenza del segnale dalla sonda, di raggiungimento della Terra e di raggiungimento della sonda da parte del segnale, l'uso è più produttivo per gli studenti ungheresi perché accompagnato da una rappresentazione schematica di tipo cartesiano o da una descrizione verbale più esauriente di cosa succede tra una "fase" e l'altra del moto del segnale.

Tali evidenze sperimentali portano a considerazioni riguardanti la sfera della didattica, in particolare sul ruolo cruciale dei processi di esplorazione temporale nelle attività di problem solving (che comporta la necessità di dare più spazio a scuola a tali processi), e sull'importanza dell'introduzione di modelli matematici non in modo avulso dal loro uso nel problem solving, ma come strumenti utili per superare le difficoltà intrinseche a particolari situazioni problematiche (come le situazioni di interazione strategica o i problemi di inseguimento).

7.2 Il “tempo” nel problema di coordinamento dei moti

I protocolli sul problema della sonda hanno confermato le difficoltà nel gestire esplorazioni temporali complesse in cui sia richiesto di manipolare eventi coordinati interrompendo e ricostruendo il flusso temporale in cui sono immersi. Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come anche per affrontare il problema della sonda sia determinante il ruolo dei modelli matematici per lo sviluppo di processi di esplorazione temporale complessi. L'ipotesi che viene confermata consiste quindi nella difficoltà a gestire processi di esplorazione, che coinvolgono sia dimensioni temporali differenti (tempo del problema e tempo interno), sia piani temporali sovrapposti o intersecati (presente-passato-futuro), senza poter utilizzare dei modelli matematici legati al fenomeno considerato.

Nonostante vi siano alcuni punti di contatto nei processi che intervengono durante le risoluzioni di queste due differenti tipologie di problemi (problemi di “inseguimento” e problemi di interazione strategica), non si possono però trascurare anche gli elementi che li distinguono. Per questo motivo sono stati analizzati anche gli elementi di diversità (in termini di strutture e processi temporali coinvolti) che caratterizzano le risoluzioni di questi due tipi di problemi. Nello specifico, la gestione degli eventi immersi nel tempo del problema nelle situazioni di interazione strategica (analizzate in questa ricerca⁸⁴) può essere interpretata come un “andirivieni temporale” assai elementare intrinseco alla struttura del problema stesso: le variabili temporali da gestire infatti si riducono alla simulazione di possibili sequenze di mosse e contromosse (ordinate secondo le regole del gioco). Abbiamo quindi scelto di definire il “tempo del problema” nelle situazioni di interazione strategica da noi analizzate semplicemente come “il tempo del prima e del poi” per distinguerlo dal tempo “fisico” (metrico) presente nel problema della sonda.

In quest'ultimo problema infatti la gestione del tempo del problema non si può ridurre alla sola individuazione della sequenza di eventi che lo discretizzano perché il valore numerico delle variabili temporali e il loro procedere sincrono determinano lo sviluppo e la soluzione del problema.

In base a questo primo contatto con problemi di matematica applicata a problemi di moto, possiamo affermare che: l'individuazione delle analogie e delle differenze nel ruolo delle

⁸⁴ Ci sono poi studi su problemi di interazione strategica dove la protrazione nel tempo dei processi di scelta modifica le assunzioni sulle preferenze (time preference), ma ciò non rientra nei fattori che influiscono nella risoluzione dei problemi da noi analizzati.

variabili temporali, e del conseguente sviluppo delle componenti delle esplorazioni che le manipolano, in altri campi della matematica applicata potrebbero essere i punti di partenza per la costruzione di future ricerche che avranno lo scopo di affinare le ipotesi di ricerca fin qui elaborate e di generarne di nuove per ampliare il quadro teorico costruito in questo lavoro.

7.3 Implicazioni didattiche

Come già accennato nell'Introduzione generale, la tesi, in quanto riguardante una ricerca di base in Didattica della Matematica, non aveva come obiettivo di produrre risultati direttamente utilizzabili dagli insegnanti o nel rinnovamento dei curricula di insegnamento. Tuttavia alcune indicazioni possono essere ricavate collegando il lavoro svolto e i risultati ottenuti a questioni importanti che si pongono gli insegnanti e i responsabili della redazione dei curricula di insegnamento. In questo paragrafo cercheremo di presentare alcune di tali indicazioni in forma molto sintetica.

Una delle difficoltà che incontrano gli insegnanti nell'affrontare in classe problemi in cui la matematica viene “applicata” a problemi non matematici riguarda l'analisi delle difficoltà che incontrano gli allievi e delle loro carenze. Il lavoro svolto con questa tesi suggerisce di utilizzare per tale analisi alcuni degli strumenti e dei punti di vista messi a punto per le analisi dei processi di problem solving considerati nella tesi stessa. In particolare può essere utile concentrare l'attenzione sulla fase di pianificazione della risoluzione del problema e in particolare sulle attività esplorative connesse con tale fase (in quanto tali attività appaiono cruciali per il successo nel problem solving). Per quanto riguarda la fase di pianificazione e le attività di esplorazione, l'insegnante può utilmente valutare (nell'analisi a priori di un problema, che sempre dovrebbe precedere la somministrazione di esso in classe) quali sono le conoscenze e i “comportamenti appresi” che gli allievi devono mettere in opera per risolvere il problema, e quale è la complessità, in termini di “dinamiche temporali”, delle attività di esplorazione richieste agli allievi. Ciò potrebbe consentire all'insegnante di calibrare meglio i compiti proposti agli allievi. Analogamente, nell'analisi dei comportamenti degli allievi l'insegnante può cercare di valutare in che misura le loro difficoltà e i loro insuccessi possono dipendere da carenze riguardanti l'attivazione di conoscenze che essi dovrebbero possedere e/o da una insufficiente gestione

di “dinamiche temporali” complesse di esplorazione ed anticipazione. In proposito, le analisi dei comportamenti riguardanti il “problema della sonda” (ma anche le analisi relative ai problemi di interazione strategica) suggeriscono che sarebbe bene insegnare i contenuti di base della matematica in situazioni “aperte” di uso (quelle che richiedono processi di esplorazione e di anticipazione), in modo da collegare determinate conoscenze all'apprendimento di comportamenti produttivi per la loro messa in opera. Nel “problema della sonda” il confronto tra studenti liceali ungheresi e studenti del quarto anno del vecchio corso di laurea in Matematica evidenzia una capacità d'uso molto diversa di strumenti di geometria analitica elementare, che pure dovrebbero essere conosciuti sia dagli uni che dagli altri. Queste considerazioni rinviano a scelte importanti, riguardanti le metodologie didattiche e l'inquadramento culturale dei contenuti matematici, che dovrebbero essere meglio evidenziate nei curricula di insegnamento

Appendici

I. Sviluppi della teoria di Camerer

I.1 Esperimenti sul altri problemi

Il p-Bc non è stato l'unico gioco su cui Camerer ha svolto sperimentazioni per verificare le capacità anticipatorie in campioni eterogenei di persone. Un altro esempio di gioco analizzato è stato il Bargaining Game. In questo gioco ai giocatori è affidata una certa somma di denaro da dividersi. Ciascuno a turno dovrà proporre una possibile divisione. Il primo giocatore farà un'offerta, se il secondo rifiuta dovrà fare lui una contro offerta e così via. Dopo ciascun rifiuto la somma da dividersi diminuirà.

“Game theory assumes that selfish players look ahead to all possible future bargaining periods, then ‘backward induct’ to see what they should offer and accept in the first period, to get Player 2 to accept the offer rather than reject and make a counteroffer”
(Camerer, 2003; p.225)

Gli esperimenti, attraverso l'espedito di far vedere ai giocatori i possibili risultati successivi solo aprendo (con un click del mouse) dei riquadri su uno schermo di un computer, hanno confermato che i soggetti non vanno molto avanti nell'esplorazione. Il 10-20% dei soggetti non aprono neanche le finestre del secondo e del terzo round quindi, di fatto, non possono elaborare una strategia per l'equilibrio attraverso il procedimento di induzione a ritroso.

“Steps of thinking can also be inferred from direct cognitive measures. Suppose, for example, that players can view the payoffs they will get by opening boxes on a computer screen with a mouse click. Players' attention can then be measured directly. Consider a bargaining game in which players alternate offers over how to divide a sum of money: Player 1 makes the first offer; if it is rejected Player 2 makes a counteroffer, and so on”.

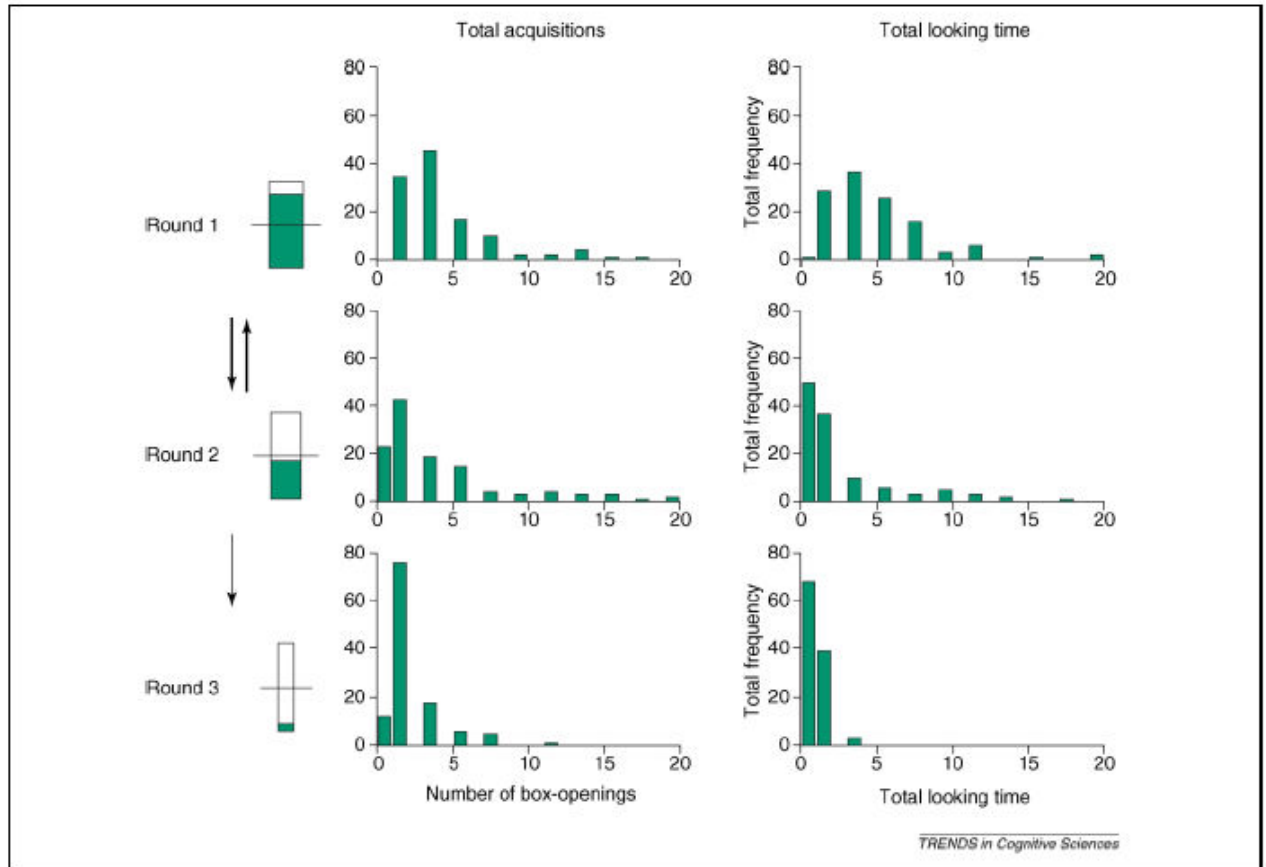


Fig. 1. Each box represents one stage in three-stage bargaining with alternating offers (Round 1 at top). Icons (left) show the relative time for which each box is opened (indicated by shaded portion), the relative number of times each box is opened (indicated by box width), and the relative number of forward (down arrow) and backward (up arrow) transitions (indicated by arrow thickness). In stage 1 (top box) players divide \$5; in stage 2 they divide \$2.50; in stage 3 they divide \$1.25 (and if the third-stage offer is rejected they earn nothing). The icons show that most players look longest and most often at the first stage, and do not 'backward induct' by looking at the third stage then working backward (there is no arrow pointing upward from box 3 to box 2). Histograms show the frequencies of number of box-openings (middle column) and total time boxes are open (right column). Note that in 20% of trials box 2 is not opened at all (zero box-openings) and in 10% of trials box 3 is not opened.

(Camerer, 2003; p.227)

Quest'ultimo gioco presenta però delle caratteristiche differenti rispetto al p-Bc game: le decisioni dei soggetti sembrano essere molto influenzate da motivazioni affettive e socioculturali (come l'altruismo, l'equità, la fiducia, la vendetta, l'odio e le ripicche). Per approfondire queste problematiche si è aperta una nuova frontiera della ricerca: la Neuroeconomia (Camerer, 2005). In queste ricerche si studiano le relazioni esistenti tra le azioni svolte da un soggetto e le parti del cervello attivate durante la loro programmazione mentale. Attraverso queste analisi si cerca di trarre delle conclusioni sulle motivazioni che determinano le scelte degli individui (affettive, culturali o cognitive) e di costruire modelli che permettano di prevedere come le componenti affettive, unite alle motivazioni sociali, influenzino le azioni. I nuovi esperimenti effettuati da Camerer si stanno quindi dirigendo verso un campo d'indagine che non rientra nella nostra ricerca e, per questo, non saranno utilizzati in questo lavoro.

I.2 Neuroeconomia

I.2.1 La Behavioural Economics e le neuroscienze

La Behavioural Economics si è sviluppata appoggiandosi principalmente ad una branca della psicologia detta “Behavioural decisions research”, ma negli ultimi anni molte importanti informazioni stanno arrivando anche dagli studi delle neuroscienze. Queste ultime, infatti, stanno dando una nuova forma alle conoscenze della psicologia che, a sua volta, influenza l’economia. Le neuroscienze usano le immagini dell’attività cerebrale ed altre tecniche⁸⁵ per inferire dettagli sul lavoro del cervello.

“Until recently, economists have been content to treat the human brain as a “black box” and to express what the brain is doing in a “reduced form” mathematical equation.[...] Now advances in genetics, brain imaging, and other techniques have made it possible to observe detailed processes in the brain better than ever before. The brain scanning that we carry out at the Broad Imaging Center at Caltech shows which parts of the brain are active when people make economic decisions. The results of this research will eventually enable us to replace the simple mathematical ideas that have been used in economics with more neurally detailed descriptions” (Camerer, Bulletin of the American Academy Summer 2005 p.12)

⁸⁵ Tecniche e strumenti usati in neuroeconomia:

1. Brain imagining:
 - EEG (elettroencefalogramma): rilevazione dell’attività elettrica
 - PET (positron emission topography): rilevazione dei cambiamenti nel flusso sanguigno
 - FMRI (functional magnetic resonance imaging): individuazione delle differenti proprietà magnetiche del sangue dovute ad una diversa ossigenazione

Limiti e caratteristiche di questi strumenti:

- EEG: ha una buona risoluzione temporale, ma è utilizzabile solo per piccole zone.
- PET – FMRI: hanno una migliore scansione spaziale rispetto al precedente, ma richiedono tempi maggiori (Gli scanner non sono tarati per rilevare i cambiamenti troppo veloci)

Le procedure ibride quindi sembrano essere le soluzioni migliori a queste limitazioni tecniche degli strumenti, quindi i risultati provenienti dagli strumenti sopra elencati sono spesso affiancati e completati da altri studi , come ad esempio:

2. Single neuron measurement (utilizzato solo su animali perché vengono utilizzati aghi)
3. EBS (electred brain stimulation) (utilizzato solo su animali perché vengono utilizzate scariche elettriche)
4. Studi su persone che hanno o hanno subito danni cerebrali
5. Analisi delle risposte “fisiche” eterne (come la dilatazione delle pupille, la pressione...)

La neuroeconomia si propone come obiettivi sia di trovare conferma delle assunzioni ed idee usate in economia, sia di trovare delle evidenze che portino alla generazione di nuove teorie sul comportamento economico.

“In thinking about the ways that neuroscience can inform economics, it is useful to distinguish two types of contributions, which we term incremental and radical approaches. In the incremental approach, neuroscience adds variables to conventional accounts of decision making or suggests specific functional forms to replace “as if” assumptions that have never been well-supported empirically. [...] The radical approach involves turning back the hands of time and asking how economics might have evolved differently if it had been informed from the start by insights and findings now available from neuroscience”. (Camerer e al. 2005; p 2)

Gli studi condotti da Camerer e al. (2005) sono volti all’analisi delle relazioni esistenti tra la costruzione di strategie e le parti del cervello attivate durante lo svolgimento (o la programmazione mentale) di queste.

Box 5. Questions for Future Research

- What neural mechanisms correspond to aspects of strategic thinking?
- Are ultimatum rejections and other apparent expressions of social preference due to emotions, learned heuristics, evolved modules, or combinations of these and other mechanisms?

(Camerer , 2003)

La ricerca nelle neuroscienze ha messo in luce alcuni difetti dell’approccio classico dell’economia, come il fatto che solitamente sono trascurati il ruolo dei processi automatici (non controllati consciamente) e di quelli emozionali durante le attività

decisionali⁸⁶. Il comportamento umano richiede una fluida interazione tra i processi controllati e quelli automatici e tra il sistema affettivo e quello cognitivo. Invece, molti comportamenti che emergono da questo scambio sono solitamente ed erroneamente interpretati come il prodotto della sola attività cognitiva.

La nuova area dell'economia che è stata etichettata "neuroeconomia" ha già prodotto idee per numerosi workshop in cui neuroscienziati ed economisti si sono trovati a lavorare insieme; in particolare per studiare gli aspetti legati alle componenti socio-emotive che influenzano le decisioni si sono costruiti ed analizzati esperimenti sui risultati di giochi come *l'ultimatum game*⁸⁷ e il *dilemma del prigioniero*).

Per essere integrate nell'economia le neuroscienze devono suggerire nuove percezioni e prospettive utili su vecchi problemi. Le scoperte nelle neuroscienze fanno emergere domande sull'utilità di molti dei comuni costrutti usati dagli economisti (come "l'avversione al rischio", "le preferenze temporali" e "l'altruismo"). Di particolare interesse per le ricerche in economia sono gli studi di molti neuroscienziati sull'esistenza di un modulo specializzato della mente "mentalizing module" (o teoria della mente) che controlla le inferenze di un individuo sulle credenze e sui sentimenti delle altre persone o su quello che queste potrebbero fare.

In passato sono stati effettuati esperimenti sui bambini autistici e su soggetti che hanno riportato lesioni in particolari regioni del cervello che volevano dimostrare l'esistenza di questo particolare modulo, ma è stato l'avvento delle neuroscienze a dare maggior credito a queste teorie attraverso esperimenti mirati all'investigazione delle regioni cerebrali coinvolte in tali attività.

"The possibility of a mentalizing module has gained credibility and substance through converging neuroscientific evidence. fMRI studies have shown that when normal adults

⁸⁶ Per esempio vi è una differenza temporale importante per quanto riguarda la messa in atto da parte del cervello di "processi automatici" rispetto a quelli che richiedono un processo introspettivo: questi ultimi infatti richiedono oltre ad un controllo maggiore anche la messa in gioco di altre componenti come quella affettiva.

⁸⁷ *"In an ultimatum game a Proposer makes a one-time offer to a Responder, who can accept it or reject it; if she rejects the game ends and they both get nothing. Players who are selfish, and think that others are too, will offer the least they can, and take anything they are offered. Contrary to this prediction, the average offer is usually 30–50% and offers of less than 20% are rejected half the time"* (Camerer, 2003a; p. 228)

"Sanfey et al (2003) find that the insula cortex— a region in the temporal lobe that encodes bodily sensations like pain and odor disgust—is active when people receive low offers in an ultimatum bargaining game. This means that even if rejecting a low offer is done because of an adapted instinct to build up a reputation for toughness (in order to get more in the future), the circuitry that encodes this instinct clearly has an affective component, which is not purely cognitive" (Camerer e al. 2005; p.9).

are given pairs of closely matching judgment problems, differing only in whether they do or do not require mentalizing, the mentalizing problems lead to greater activation in the left medial prefrontal cortex (Fletcher, et al. 1995; Rebecca Saxe and Nancy Kanwisher, in press)” (Camerer e al., 2005; p. 34)

Il Mentalizing è rilevante per gli economisti perché molti giudizi richiedono agenti per fare delle supposizioni su come le altre persone sentono o su cosa faranno.

“The concept of equilibrium requires that agents correctly anticipate what others will do; presumably this arises because of accurate mentalizing, or through some kind of specific learning about behavior which may not transfer well to new domains or when variables change.”(Camerer e al., 2005; p. 35)

In economia si assume implicitamente che le persone abbiano capacità cognitive che possono essere applicate ad ogni tipo di problema e che le persone si comportino equivalentemente in problemi che presentino la stessa struttura. L'esistenza di sistemi che si evolvono per affrontare specifiche funzioni, al contrario, suggerisce che le performance dipendano in modo critico dal contesto in cui viene situato il problema. Quando un sistema specializzato esiste ed è applicato ad un particolare compito, il processo infatti avviene rapidamente e senza uno sforzo evidente: i processi automatici coinvolti nella visione, per esempio, sono velocissimi ed avvengono senza che si abbia la sensazione di uno sforzo mentale così le persone non sono consapevoli del potere e della complessità del processo che lo rende possibile.

I.2.2 Neuroeconomia e Teoria dei Giochi

I dati provenienti dalle neuroscienze sono adattati all'esplorazione delle ipotesi centrali su cui è basata la teoria dei giochi. Queste assunzioni si possono così riassumere:

- I giocatori hanno precise conoscenze circa cosa gli altri faranno (i giocatori sono in equilibrio)
- I giocatori non hanno emozioni (come ad esempio invidie o rancori verso gli altri giocatori)
- I giocatori hanno la capacità di anticipare le azioni proprie e degli avversari.

- I giocatori apprendono dall'esperienza⁸⁸

“Despite the rapid growth of game theory as an analytical tool at many social levels, we know almost nothing about how the human brain operates when people are thinking strategically in a game” . (Camerer, 2005; p.12)

In questa prospettiva di ricerca gli studi in neuroeconomia di Camerer e al (2005) si sono rivolti ad indagare, attraverso l'individuazione di differenti parti del cervello attivate durante le attività decisionali, nell'ipotesi che l'equilibrio ricercato in teoria dei giochi sia il risultato, non solo di una capacità cognitiva ed introspettiva, ma anche di processi costruiti dall'individuo attraverso l'apprendimento e l'interazione sociale.

⁸⁸ *“Neuroscientific data are well-suited to exploring the central assumptions on which game theory predictions rest. These assumptions are that players: (i) have accurate beliefs about what others will do (i.e., players are in equilibrium); (ii) have no emotions or concern about how much others earn (a useful auxiliary assumption); (iii) plan ahead; and (iv) learn from experience”.* (Camerer e al. 2005; pag 52)

II La Teoria di Tulving

II.1 Memoria episodica e memoria semantica

Nel corso degli ultimi decenni sono state proposte differenti teorie per spiegare la capacità umana di recuperare informazioni dal proprio “passato”. Queste “informazioni acquisite” sono dette conoscenze. L’uomo possiede un’enorme varietà di conoscenze e, per questo, molti studiosi hanno proposto distinzioni in sottoinsiemi e classificazioni di queste. Endel Tulving però ha proposto qualcosa di diverso: una distinzione non tra conoscenze, ma tra “ricordo” e “conoscenza”.

La definizione di Episodic Memory (memoria episodica) fu proposta da Endel Tulving circa trent’anni fa, ma nel corso degli anni la sua formulazione è cambiata molto. Le informazioni e i dati sulle ricerche di Tulving cui mi riferirò sono frutto delle ultime elaborazioni esposte nel 2002 nell’articolo *“Episodic memory: From Mind to Brain”*.

Tulving afferma che l’uomo possiede la capacità di viaggiare nel tempo e quindi di violare la legge dell’irreversibilità del flusso del tempo. Il tipo di “viaggio” che il soggetto effettua quando rivive un evento passato è, però, solo mentale (e non fisico) ed inoltre questo tipo di esperienza è accompagnata dalla consapevolezza che la situazione rivissuta (nel tempo che Tulving chiama soggettivo) è profondamente diversa da quella avvenuta in passato.

La memoria umana per Tulving comprende due sistemi differenti che vengono chiamati Episodic Memory e Semantic Memory. Il primo sistema ci permetterebbe di ricordare eventi esperiti personalmente (memoria autobiografica) e di viaggiare indietro nel tempo per “riviverli”, mentre il secondo potrebbe essere definito come “la nostra conoscenza del mondo” (conoscenza enciclopedica).

Per chiarire la distinzione proposta da Tulving si pensi al fatto che l’attività di ricordo assume caratteristiche differenti quando, ad esempio, si ricorda il nome di un compagno di scuola rispetto a quando si ricorda un evento personalmente vissuto con quel compagno.

La memoria semantica si riferisce a fatti e informazioni che possono o no essere personali o autobiografiche ed è accompagnata dalla sensazione che l’informazione sia obiettiva piuttosto che soggettiva.

La memoria episodica, pur essendo strettamente legata a quella semantica (visto che si appoggia alle informazioni e nozioni gestite da questa), è un sistema da considerarsi

differenti⁸⁹. Per Tulving, infatti, l'Episodic Memory è il sistema neurocognitivo (cervello/mente) che unisce il soggetto “viaggiante”, il suo tempo soggettivo e la sua consapevolezza della differenza tra tempo soggettivo e tempo reale⁹⁰.

Tulving, per trovare delle evidenze sperimentali che supportassero le sue teorie, ha studiato soggetti che, avendo riportato danni cerebrali, presentavano delle alterazioni nelle capacità cognitive. Questi suoi studi mostrano come una conservazione delle capacità di ricordo legate al sistema di memoria semantica possa essere dissociata dalla conservazione delle capacità legate al sistema della memoria episodica: alcuni soggetti, infatti, conservavano la memoria semantica, ma non quella episodica. Questi dati confermerebbero l'ipotesi di Tulving sulla separazione dei due sistemi. Ulteriori conferme alle teorie di Tulving vengono da studi nell'ambito della neuroscienza.

“The fact that semantic retrieval seems to be localized largely to the left, whereas episodic retrieval involves additional processes subserved by regions in the right hemisphere (Buckner 1996) points to basic differences in the neuroanatomy of the two memory systems (Desgranges et al. 1998; Fletcher et al. 1995, 1997)” (Tulving, 2002; p 18)

Gli studi in questo campo usano le immagini dell'attività cerebrale ed altre tecniche per inferire dettagli sul lavoro della mente (i cambiamenti nelle attività neurali vengono individuati attraverso il monitoraggio del flusso sanguigno o del livello di ossigenazione del sangue nelle diverse parti del cervello). Sfruttando queste nuove tecnologie, sono stati condotti esperimenti che mostrano come le parti del cervello attivate durante le attività di ricordo siano differenti a seconda che venga coinvolta la memoria semantica o quella episodica.⁹¹

⁸⁹ La memoria semantica e quella episodica non possono esistere da sole infatti esse possono essere viste come sottosistemi specializzati: la memoria procedurale (stimolo-risposta) contiene la semantica che a sua volta contiene l'episodica.

⁹⁰ Rivivere un evento passato, infatti, è un'attività mentale accompagnata dalla consapevolezza che la situazione rivissuta è profondamente diversa da quella avvenuta in passato.

⁹¹ Queste nuove ricerche sono però ancora considerate poco affidabili (soprattutto se si parla della comprensione dei legami tra l'attivazione di alcune zone di corteccia cerebrale e processi di pensiero complessi ed articolati come quelli di ricordo). È però innegabile che le nuove tecniche provenienti dalla neuroscienza, nonostante i molti problemi che ancora presentano (costi elevati, interpretazione dei dati...), hanno sicuramente le potenzialità per dare grandi contributi agli studi sul legame tra le attività cerebrali e quelle mentali (vedere Neuroeconomia).

La distinzione tra i due tipi di memoria e la stretta relazione di questi con l'attivazione di schemi sono anche citate da Zammuner (1998) :

“La memoria a lungo termine comprende due sistemi, specializzati in diversi tipi di informazioni o conoscenze: da un lato le conoscenze preposizionali, dichiarative e fattuali (“know that”, declarative knowledge) che riguardano gli oggetti, i loro attributi, le relazioni tra di essi, e così via (per esempio, “mi chiamo Vanda”, “la memoria del mio computer è migliore della mia”, “per andare e tornare dal lavoro uso le bicicletta”), dall’altro le conoscenze procedurali (“know how”, Skill memory, procedural knowledge), inerenti al modo in cui si fanno le cose (per esempio, “per accendere il computer bisogna premere un tasto posto a sinistra della tastiera”). Ambedue i tipi di conoscenza sono tipicamente articolati in strutture schematiche o schemi, più o meno ricchi; dato il loro valore euristico, le conoscenze procedurali sono designate anche con il termine copione (script), in analogia al copione teatrale. All’interno della memoria proposizionale si possono poi proficuamente distinguere due sottoinsiemi: la memoria semantica contiene conoscenze impersonali, indipendenti al momento o dal contesto in cui sono state apprese (ad esempio, “5 è maggiore di 4”, “Amsterdam è una città olandese”); la memoria episodica comprende informazioni personali, attinenti a esperienze specifiche o eventi passati della propria vita (ad esempio, “mi piace ballare”, “l’ultima volta che sono stata ad Amsterdam era tre mesi fa”). I due tipi di memoria sono sistemi indipendenti; per esempio un persona che ha subito una lesione celebrale può avere una memoria semantica intatta e non essere invece più in grado di ricordare alcun fatto personale”.

II.2 Influenze di questa teoria sulla ricerca

In questo lavoro i processi di esplorazione sono stati classificati partendo dalle loro relazioni con le conoscenze possedute dal soggetto. Gli studi condotti da Tulving ci hanno indotto però a riflettere sulla possibilità di integrare le analisi distinguendo i processi esplorativi anche a seconda delle manipolazioni del tempo effettuate in queste. La ricostruzione di un evento passato, infatti, richiede una generazione/gestione di un tempo

interno diversa da quella richiesta per ricordare un concetto⁹² o per immaginare le possibili evoluzioni di una situazione. In quest'ottica gli studi di Tulving ci hanno quindi fornito una nuova chiave di lettura per le attività di esplorazione. Nelle sue ricerche però rimane sullo sfondo l'ipotesi che la compromissione del sistema di memoria episodico comporti anche una compromissione delle capacità di progettare attività future. Potrebbero quindi esistere delle possibili simmetrie tra i processi di gestione della memoria e quelli di esplorazione del futuro. La ricostruzione di eventi passati e la pianificazione di azioni future, infatti, sfruttano entrambe la capacità umana di generare coscientemente un tempo interno che simuli quello reale, ma che, nello stesso tempo, presenti caratteristiche che non sono proprie del tempo esterno (come ad esempio la possibilità di essere manipolato dal soggetto).

La teoria di Tulving mi ha quindi sollecitato a considerare come elemento caratterizzante delle esplorazioni una possibile differenza, in termini di dinamiche temporali attivate, tra il semplice ricordo e la ricostruzione di questo. Se c'è differenza tra “conoscere” e “ricordare”, è lecito chiedersi anche se esiste un'analogia distinzione nel modo di pensare al futuro. Una ricerca che tenesse conto di questi aspetti era stata proposta in un articolo di Atance & O'Neil (2001), ma non ha poi avuto sviluppi in termini di indagine dei processi esplorativi.

“Thinking about the future is an integral component of human cognition one that has been claimed to distinguish us from other species. Building on the construct of episodic memory, we introduce the concept of ‘episodic future thinking’: a projection of the self into the future to pre-experience an event” (Atance & O'Neil, 2001; pag 533)

⁹² Durante le risoluzioni di problemi analizzate per il lavoro di tesi di laurea le attività di recupero dal passato maggiormente riscontrate sono state quella di ricordo di concetti e quella di controllo dei ragionamenti effettuati (cioè quando si ripercorrono mentalmente le fasi della risoluzione precedentemente affrontate). In questi elaborati la ricostruzione di eventi personali passati non è mai stata esplicitata, ma questo non significa che possa essere avvenuta mentalmente o che possa essere riscontrata in altri protocolli.

Alcune delle prospettive di ricerca elencate in questo articolo sono state affrontate dal nostro lavoro:

Questions for future research

- Clearer terminological distinctions are needed to differentiate between closely related concepts pertaining to future thinking, such as projecting, planning, anticipating, envisaging, simulating, imagining, fantasizing, supposing and hypothesizing. For example, what kind of future thinking best describes what a computer programmed to play chess is doing?
- Although a future orientation is generally considered to be adaptive, might there be negative consequences associated with an excessive focus on future events? How do differences in the balance between future, present and past orientation translate into people's different life choices (e.g. career, investment decisions).

(Atance & O'Neil, 2001; pag 538)

III. Prime sperimentazioni non completamente sfruttate

Vengono di seguito riportate informazioni e analisi relative all'avvio della ricerca⁹³.

Nell'anno scolastico 2004-2005, il lavoro di ricerca per la tesi di dottorato si è intersecato con il mio bisogno di sviluppare un programma di attività didattiche da svolgere nelle classi di scuola superiore in cui svolgevo il compito di supplente. Ho quindi scelto di dedicare parte delle ore di lezione alla Teoria dei Giochi, proponendo ai miei studenti una selezione di problemi di interazione strategica. Non avendo esperienza nelle sperimentazioni in cui i soggetti affrontano problemi di Teoria dei Giochi, questo poteva essere un primo contatto concreto con questo tipo d'attività. In questo modo ho potuto testare la formulazione dei primi problemi scelti per la tesi fosse chiara e ho ottenuto delle informazioni sulle possibili reazioni dei soggetti alle situazioni problematiche proposte (purtroppo non ho potuto coinvolgere maggiormente gli studenti nella ricerca perché non mi è stata concessa la possibilità di registrare le attività svolte).

Per effettuare questo progetto ho inizialmente scelto una classe II superiore formata da pochi studenti (10) con storie scolastiche tormentate (quindi non omogenei per età, da 15 a 18 anni, e curriculum scolastici) e con notevoli difficoltà e disinteresse per le materie scientifiche. Ero già stata la loro supplente per qualche mese l'anno precedente e, per questo, conoscevo già le loro difficoltà e reticenze verso la materia, ma, nonostante questo, si era instaurato tra noi un buon rapporto. Ho scelto quindi di utilizzare questa classe come test per verificare la buona formulazione dei problemi. Ho proposto ai ragazzi (sotto opportune condizioni di buon lavoro ed impegno settimanale) di dedicare un'ora la settimana a fare qualcosa di diverso rispetto alle solite lezioni di matematica. In queste lezioni ho spronato gli alunni a verbalizzare le loro idee in modo libero (senza che intervenisse il mio giudizio), a lavorare in gruppo e, soprattutto, a cercare di appassionarsi ad attività di problem solving. Volevo che si abituassero a pensare ad un problema e poi discuterne con i compagni per arrivare ad una soluzione condivisa.

Prima di proporre i problemi di teoria dei giochi scelti per la tesi, siamo passati attraverso altri tipi di attività: dai classici esperimenti di probabilità (come quello in cui gli alunni, divisi in piccoli gruppi, devono contare il numero di teste e di croci in serie di lanci sempre più numerose) a vere e proprie sfide al gioco del tris (la classe era divisa in due squadre ed

⁹³ Questi materiali attestano i primi tentativi e le prime difficoltà incontrate nell'impostare l'indagine.

io alla lavagna segnavo le mosse). In tutti i casi ci sono state discussioni collettive sui risultati ottenuti, sul perché accadevano certi fatti (come ad esempio che il numero di teste e di croci spesso risultavano essere in numero uguale) o sul perché si era deciso di agire in un certo modo (ad esempio nel gioco del tris). Queste esperienze, come ho già detto, si sono svolte in modo informale e libero. Durante queste attività molti studenti hanno mostrato di essere maggiormente interattivi rispetto al loro comportamento abituale: hanno fatto domande, esposto le loro idee e spesso strascinato nella discussione anche i compagni più svogliati.

Come ho accennato in precedenza il primo gioco proposto è stato quello del tris: semplice e familiare anche se non più molto di moda. La classe è stata divisa in due gruppi (la scelta della composizione è stata lasciata ai ragazzi) ed io alla lavagna segnavo le loro mosse. La regola da seguire era la seguente: la decisione della mossa doveva essere approvata la maggioranza dei componenti del gruppo prima di essere comunicata in modo definitivo e solo uno dei ragazzi poteva essere il portavoce di tutto il gruppo. I due gruppi si dovevano disporre nella classe in posizioni distanti e non dovevano comunicare. La prima volta che abbiamo giocato il divertimento principale è stata la preparazione: formazione dei gruppi e disposizione. Nelle prime partite le mosse scelte sembravano fatte a caso o mantenendo dei punti fissi nell'agire (in particolare ho notato che ciascun gruppo sceglieva sempre la stessa casella iniziale sia in caso di vittoria, sia nel caso contrario). La netta affermazione di un gruppo sull'altro ha fatto sì che, la volta successiva, la sfida tra gli stessi gruppi fosse presa più seriamente dagli "sconfitti". Quando ho cominciato ad intuire che le mosse non erano fatte più a caso, ma che seguivano degli schemi, ho suggerito ai ragazzi di scriversi le loro mosse vincenti e quelle degli avversari per capire se vi era una strategia per vincere sicuramente. Questo suggerimento è stato preso molto sul serio, infatti, ogni gruppo ha cominciato a tenere sotto mano una serie di griglie in cui annotava le mosse o studiava le possibili contro-mosse degli avversari. Dopo due o tre lezioni i ragazzi avevano capito benissimo come gestire il gioco prevenendo le possibili mosse vincenti dell'avversario⁹⁴. Questa esperienza è stata produttiva perché anche gli studenti che durante le lezioni "ordinarie" restavano in silenzio, in questo contesto si sono sentiti in condizione di parità con i compagni e quindi hanno partecipato attivamente.

⁹⁴ Alla fine di queste esperienze ho introdotto la rappresentazione del grafo ad albero per descrivere tutte le possibili evoluzioni del gioco.

Il secondo passo è stato proporre il famoso “dilemma del prigioniero”⁹⁵.

Questa volta non ho diviso la classe in gruppi, ma ognuno doveva esprimere la sua opinione singolarmente. I commenti sono stati i più disparati, ma sono emersi dei ragionamenti coerenti ed efficaci.

A questo punto ho introdotto la rappresentazione normale del gioco e l’algoritmo per determinare l’equilibrio di Nash⁹⁶. Dopo aver mostrato qualche esempio di determinazione dell’equilibrio di Nash utilizzando la rappresentazione normale del gioco, ho proposto il seguente problema⁹⁷:

Paolo e Marco sono due studenti che dividono lo stesso appartamento e che, desiderando di avere il televisore in casa, discutono sull’opportunità di acquistarne uno in comune. Ciascuno di loro possiede € 400, che è esattamente il costo del televisore, quindi entrambi sono in grado di acquistarlo individualmente, ma poi non sarebbero in grado di escludere l’altro dalla fruizione del televisore. Inoltre sarebbe conveniente dividere la spesa a metà ottenendo il televisore e risparmiando € 200 a testa. La possibilità di avere due televisori è scartata a priori perché sarebbe uno spreco di denaro per entrambi. I due ragazzi studiano in facoltà diverse e per questo la sera precedente alla data prevista per l’acquisto stabiliscono di trovarsi al negozio entro una certa ora per acquistare il televisore. Questo è il patto: se si presentano entrambi pagano € 200 a testa altrimenti se si presenta solo uno di loro paga interamente il prezzo di € 400. Se tu fossi uno dei due studenti, ad esempio Marco, come decideresti di comportarti sapendo che Paolo vuole il televisore quanto te, ma anche lui non gradirebbe pagare per entrambi?

Mi aspettavo che i ragazzi riconoscessero delle affinità con gli esercizi precedenti e utilizzassero i modelli appresi di teoria dei giochi, ma questo non è successo. Discutendo con i ragazzi, infatti, sono emersi questi punti critici: la storia descritta nel problema comportava troppe situazioni poco credibili (mancanza di comunicazione e rapporto tra i

⁹⁵ Immaginate che due criminali complici in un reato grave, vengano catturati subito dopo il fatto e vengano rinchiusi in due stanze separate per essere interrogati. I due complici non hanno avuto il tempo di accordarsi ed ora si trovano di fronte ad un grosso dilemma: collaborare o non collaborare con la giustizia?

Le conseguenze a seconda della scelta sono:

- se uno dei due decidesse di non collaborare e l’altro decidesse di farlo, il primo sarebbe condannato a 6 anni di reclusione mentre il secondo sarebbe messo in libertà;

- se entrambi decidessero di collaborare, la pena sarebbe dimezzata a 3 anni di reclusione ciascuno;

- se entrambi decidessero di non collaborare, potrebbero essere condannati ad 1 anno ciascuno.

Sapendo che i due complici sono in una situazione d’incertezza sul reciproco comportamento, cosa decidereste di fare se foste uno di loro?

⁹⁶ L’Equilibrio di Nash è stato introdotto solo nella forma strategica: si veda nota 27 p. 34

⁹⁷ Questo testo è una rielaborazione di un problema proposto da Lambertini, L. & Rovelli, R. in “Applicazioni della teoria dei giochi”, <http://www2.spfo.unibo.it/scienze/docenti/0506/microeconomia/GameMad.pdf>

due coinquilini) e l'attribuzione delle utilità richiedeva una "abitudine" che i ragazzi non possedevano ancora.

Dopo questa esperienza ho scelto di eliminare questo problema sostituendolo con il seguente:

Due compagnie aeree offrono entrambe un volo giornaliero diretto da Milano Malpensa a Hong Kong allo stesso prezzo. Una ricerca di mercato ha mostrato che il 70% dei passeggeri preferisce partire per Hong Kong la sera mentre il 30% preferisce partire la mattina. Dalle informazioni raccolte risulta inoltre che, essendo il prezzo del biglietto uguale, se i voli delle due compagnie avverranno entrambi di mattina o entrambi di sera le due compagnie si divideranno a metà gli utenti (entrambe le compagnie conoscono tale distribuzione delle preferenze della popolazione).

Le due compagnie dovranno decidere entro la stessa data l'orario di partenza del volo senza sapere quale sarà la scelta dell'altra. Una volta che avranno effettuato la scelta poi non potranno cambiarla per un lungo periodo di tempo (gli slot da Malpensa vengono assegnati una volta l'anno).

Se ti fossi uno dei dirigenti di una delle due compagnie, cosa proporresti di fare? (motivare adeguatamente la risposta)

Questo problema quindi, essendo risultato più credibile e chiaro sia per esposizione della "storia", sia per la sua traduzione attraverso i modelli della teoria dei giochi, ha sostituito il problema precedente.

Per testare ulteriormente il nuovo problema ho deciso di proporlo anche ad una classe III superiore (12 studenti) con cui non avevo affrontato il percorso di introduzione alla Teoria dei Giochi. La scelta di questa classe è scaturita dal fatto che questi ragazzi si erano già dimostrati particolarmente loquaci e sciolti nel discutere sulle possibili soluzioni dei tradizionali problemi affrontati in classe ed inoltre erano differenti dalla classe precedente perché con loro no avevo introdotto le nozioni di Teoria dei Giochi.

Questo tipo d'esperienza era stata giustificata ai ragazzi affermando che poteva esser un'occasione per pensare ad un problema non matematico e poi discuterne in classe per vedere quale fosse la soluzione più accettabile. Ho inoltre specificato più volte che si doveva affrontare la consegna come un gioco e che il lavoro non sarebbe stato valutato. Quest'esperienza doveva essere interessante non solo per avere la conferma della buona

formulazione del problema, ma soprattutto per testare le capacità di questi studenti di esporre in modo chiaro e coerente le loro idee.

Ho fornito a ciascun alunno il testo del problema scritto su un foglio. Dopo aver lasciato loro il tempo di riflettere abbiamo discusso oralmente sulla formulazione del problema (se era chiaro o meno) e sulla situazione descritta. Alcuni studenti hanno poi espresso le loro idee sulle possibili “soluzioni” del problema, ma in modo confuso e non organico. Questa situazione non è mutata neanche dopo aver richiesto di provare a scrivere le loro idee per poi leggerle ai compagni. Questo esperimento non è stato quindi un successo: infatti gli studenti si sono sentiti bloccati ed inibiti da una consegna così inusuale.

Da questa esperienza in III, e dal confronto con quanto accaduto in II, mi sembra di poter trarre l’indicazione che, a livello di scuole secondarie superiori, una raccolta di dati su problemi di interazione strategica possa diventare significativa solo se gli allievi sono coinvolti in un’attività prolungata che li abitui ad affrontare problemi in cui l’elaborazione di una strategia risolutiva necessiti non solo l’adattamento di schemi conosciuti (come viene richiesto in molti esercizi “standard”), ma anche l’attivazione e gestione di processi di anticipazione complessi. Il coinvolgimento al lungo termine in attività di questo tipo potrebbe, infatti, essere utile sia per superare le difficoltà degli studenti legate alla mancata abitudine ad esplorare le differenti evoluzioni delle strategie risolutive possibili, sia per instaurare negli studenti un’abitudine ad usare gli strumenti in loro possesso per affrontare situazioni nuove. (si veda par 7.3).

Analisi di una intervista a uno studente che affronta il beauty contest game :

Alcuni degli studenti che avevano fatto parte della classe III citata precedentemente (che quindi non conoscevano la teoria dei giochi) si sono prestati ad essere intervistati l'anno seguente. Riporteremo quindi, a titolo di esempio, l'analisi svolta su uno di questi protocolli⁹⁸.

Soggetto intervistato: Sal (studente di 16 anni di istituto tecnico aeronautico con un buon rendimento scolastico)

Frame e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata (con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)	Analisi integrata
<p>Frame: estrazioni di numeri</p> <p>Frame media</p> <p>Frame comportamento uniforme e schema media aritmetica</p> <p>Blocco sull'algoritmo di calcolo</p>	<p>Anticipazione (b1)</p> <p>Anticipazione modellata (A2)</p> <p>Ritorno al presente</p>	<p>1. SAL: (<i>legge il testo a mente</i>) n cosa vuole dire?</p> <p>2. O: puoi scegliere tu il numero dei giocatori.</p> <p>3. SAL:</p> <p>a) Sono cento giocatori perciò un numero naturale da 0 a 100 c'è la possibilità che ogni persona ne scelga uno</p> <p>b) perciò il numero più vicino ai 2/3 della media...</p> <p>c) la media è 50,</p> <p>d) i due terzi di 50 non lo so...</p> <p>4. O: lo facciamo</p> <p>5. I : e come si fa?</p> <p>6. O: fai 2/3 di 50</p> <p>7. SAL: mi passi la calcolatrice? Devo fare due diviso tre diviso...</p> <p>8. O: non diviso...non preferisci scriverlo?</p> <p>9. SAL: qua?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La generalità data dalla non determinazione del numero dei giocatori è subito identificata come un ostacolo. • Riconduce la situazione problematica ad una a lui familiare: le estrazioni di numeri (a ciascun giocatore un numero). • Deve applicare l'algoritmo di calcolo scritto nel testo. • Emerge una sua conoscenza che gli permette di immaginare quale sia la possibile media senza fare calcoli o supposizioni sulle possibili scelte. • Non riesce a svolgere a mente il calcolo. • Da adesso fino alla battuta 13, le difficoltà nell'applicare l'algoritmo di calcolo lo "staccano" dal problema (mancanza di conoscenza/saper fare provoca blocco nei processi di esplorazione).

⁹⁸ Un'altra di queste interviste è riportata in seguito, ma riguarda un problema diverso da quelli analizzati nella tesi

		<p>10. O: sì scrivi pure</p> <p>11. SAL: (<i>comincia a scrivere</i>) due terzi di 50 sarà...50 lo divido per tre, quindi $50 : 3$ fa ...non lo so (<i>usa la calcolatrice</i>) 16,6 ...da 0 a 50...cosa devo prendere? 16,6 vuol dire che saranno i numeri...</p> <p>12. O: attento $50: 3$ e poi per ...</p> <p>13. SAL: per due...ah ecco (<i>lo fa con la calcolatrice</i>) 33,3 va beh all'incirca..</p> <p>14. O: devi scegliere 33 o 34, cosa scegli? Devi scegliere un numero naturale...</p> <p>15. SAL: no non devo scegliere...ah no è vero...quindi prenderò...boh...a caso</p> <p>16. O: è sì, ma il problema è che vorresti vincere magari.</p> <p>17. SAL: e prendo il 17 allora!</p> <p>18. O: Ok, perché ti piace?</p> <p>19. SAL: ok però questo coso qua...</p> <p>20. O: però devi pensare cosa faranno gli altri perché se tu prendi il 17...</p> <p>21. SAL: in teoria prenderei il 33 però magari non tutti prendono un numero da 0 a 100 e ci sarà...sicuramente è più probabile che prendano i numeri da 10 a 100 perché sono a due cifre e perciò c'è più possibilità perciò sono novanta i numeri sono più probabili ad uscire.</p> <p>22. O: ok però perché allora tu hai scelto 33?</p> <p>23. SAL: perché ho fatto una media...visto che ho scelto 100 giocatori...</p>	
<p>Frame gioco</p>			<ul style="list-style-type: none"> • Confusione iniziale e primo tentativo di ritorno alla situazione problematica
<p>Ripresa frame "estrazioni"</p>	<p>Esplorazione su "insieme di numeri"</p>		<ul style="list-style-type: none"> • Ormai si è persa la finalità del processo esplorativo e la richiesta di scelta rifatta dall'osservatore innesca comportamento "istintivo" del soggetto che sceglie un "numero fortunato"..
<p>Schema probabilità di uscita</p>			<ul style="list-style-type: none"> • Ritorno al ragionamento precedente e innesco di una nuova fase esplorativa; è interessante notare che l'esplorazione non riprende seguendo il processo di anticipazione delle mosse, ma su considerazione sui numeri. Non ci sono giocatori razionali, ma solo estrazioni.

<p>Ripresa dello Schema probabilità di uscita</p>	<p>Esplorazione guidata da schemi (A1)</p>	<p>24. O: non è detto che tutti prendano a caso (<i>mi interrompe</i>) 25. SAL: sì non tutti...nessuno userà un ragionamento 26. O: e se tutti ragionassero come te? 27. SAL: e prendono 33 e 34...e allora tutto il premio si divide per tutti e 100 28. O: e secondo te andrebbe bene per tutti questa cosa qua? 29. SAL: no 30. O: tu se vuoi vincere un miliardo oppure vuoi vincere cento euro... 31. SAL: li rubo! 32. O: un miliardo diviso 100 te ne stai, ok? però 100 euro diviso cento...ah dici cerco di farcela..il tuo fine è cercare di vincerli, cioè cercare di arrivare più vicino alla media totale... 33. SAL: prof ma...em boh...il fatto è che con 100 numeri (<i>un compagno dice "un numero ciascuno"</i>) grazie se hai 100 giocatori! cioè ...però è anche vero che tipo...cioè su 100 numeri ...che qualcuno prenda...sicuramente non prenderà un numero tra 0 e 9 34. O: perché? 35. SAL: perché da uno a nove... ah ma non c'entra con la media! Comunque da 1 a 9 in proporzione su 100 numeri sono solo nove numeri su 100 con una sola cifra perciò è più probabile che gli altri prendano un numero a tre cifre 36. O: sì, ma non c'è scritto che tutti debbano prendere un numero diverso, tutti potrebbero prendere anche lo stesso quindi sul</p>	<ul style="list-style-type: none"> • L'osservatore tenta di spostarlo dal suo frame, ma ottengo solo di destabilizzarlo • Rimane sempre nel frame estrazioni
---	--	---	--

	<p>Esplorazione che segue</p>	<p>anche lo stesso...quindi sul numero di cifre io non farei tanto</p> <p>37. SAL: ok è vero boh prenderei ...</p> <p>38. O: l'idea del 33 è buona, hai fatto la media se tutti prendessero un numero diverso...</p> <p>39. SAL: o 33 o 34</p> <p>40. O: ok però se tutti fanno il tuo ragionamento e scelgono tutti 33, potresti migliorare la situazione?</p> <p>41. SAL: no...sì! 34 perché è più vicino!</p> <p>42. O: perché?</p> <p>43. SAL: perché è 33.6</p> <p>44. O: no era 33,3</p> <p>45. SAL: ah, va beh non me lo ricordo...allora... beh se tutti prendono 33 i due terzi di 33</p> <p>46. O: perché?</p> <p>47. SAL: perché se tutti prendono 33 la media di due terzi che si avvicinano di più quindi è 11 no cosa dico...33:2 ...quanto fa 33:2</p> <p>48. O: no, diviso tre per due...</p> <p>49. SAL: non devo far prima la metà: perché se no qua ho preso 50 e non 100? Sono scemo?</p> <p>50. O: no hai detto subito che la media era 50.</p> <p>51. SAL: allora me la sono inventata, non l'ho calcolata</p> <p>52. O: no è che dovevi fare i 2/3 della media.</p> <p>53. SAL: ok perché è 100 ...quindi è 33 diviso tre per due ...22 prenderei allora in questo caso il 22 però adesso ho (<i>guarda il foglio</i>) 33 e 22 predo i numeri che stanno in mezzo a 33 e 22 ho ancora più una possibilità di uscita</p>	<ul style="list-style-type: none"> • L'osservatore lo forza ad entrare nell'ottica sei problemi di interazione strategica. • Momenti di confusione • Ripresa dell'esplorazione: riprende lo stesso processo fatto nella <i>lettura?</i>
--	-------------------------------	--	--

<p>Frame media</p> <p>Frame comportamento uniforme e schema media aritmetica</p>	<p>quella svolta nella battuta 3</p> <p>Controllo</p>	<p>di uscita...</p> <p>54. O: perché in mezzo?</p> <p>55. SAL: cioè faccio $(33 + 22) / 2$ e poi faccio la media dei numeri che stanno qua in mezzo perché se 50 la pensano nel primo modo e 50 nel secondo...</p> <p>56. O: ah ok. Va bene. Ognuno ha la sua strategia</p> <p>57. SAL: Ok prof ma alla fine non arriverò mai alla soluzione perché se poi trovo anche che allora qui un tot ragionano un modo e un tot in un altro...un tot nell'altro e un tot nell'altro...</p> <p>58. O: quello è vero...</p> <p>59. SAL: perciò arrivo a migliaia di risultati</p> <p>60. O: sì, ci sono un sacco di risultati possibili a seconda di come scelgono gli altri</p> <p>61. SAL: e se faccio una rapina e li rubo e me ne vado via non vale? (ride) no è questo alla fine: ho 33...(guarda il foglio)</p> <p>62. O: adesso se tu dovessi scegliere, devi dirmi un numero: tu che numero diresti? Ora come ora che numero sceglieresti?</p> <p>63. SAL: 33</p> <p>64. O:ok va bene.</p>	<p>battuta 3.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Difficoltà nel gestire un processo iterato. Intervengono fattori affettivi che influenzano la produzione di una strategia e quindi, alla fine, sceglie 33 perché gli altri ragionamenti lo confondono.
--	---	---	--

Intervista svolta su un problema che poi non è stato scelto per il lavoro di tesi, ma che è servito per costruire il problema numero due.

Problema voli

Due compagnie aeree hanno un volo in partenza da Malpensa per Tokyo nella stessa fascia oraria. Le due compagnie devono decidere entro la stessa data i nuovi prezzi dei biglietti per l'anno successivo e, dato che sono concorrenti, non lasciano trapelare le loro intenzioni.

Dalle informazioni raccolte risulta che in quella fascia oraria l'afflusso di passeggeri è scarso e che, essendo il prezzo del biglietto con le due compagnie pressoché uguale, gli utenti si distribuiscono in modo uniforme tra i due voli. Entrambe le compagnie vorrebbero aumentare il numero dei loro passeggeri per quei voli, ma se continuano ad avere le stesse tariffe si divideranno a metà gli utenti. Le due compagnie sanno che entrambe stanno prendendo in considerazione queste due possibilità: praticare uno sconto del 20% guadagnando meno, ma invogliando gli utenti a scegliere la propria compagnia oppure lasciare i prezzi invariati e quindi dividersi in modo equo i pochi passeggeri che solitamente scelgono quei voli.

Entrambe le compagnie dovranno decidere come comportarsi senza sapere quale sarà la scelta dell'altra e non potrà cambiare i prezzi per tutto l'anno successivo.

Cosa pensi che decideranno i dirigenti delle due compagnie? Perché?

Soggetto intervistato: Sem (studente di 16 anni dell'istituto tecnico aeronautico con un buon rendimento scolastico).

Frames e schemi attivati	Processi di esplorazione	Trascrizione dell'intervista registrata <i>(con l'aggiunta di brevi appunti sul comportamento del soggetto risolutore)</i>	Analisi integrata
		1) Sem: A) <i>(Legge il testo a mente e quando ha finito e comincia a ragionare in silenzio per qualche secondo)</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Sem. non esprime a voce le sue prime considerazioni sul problema, ma decide di parlare solo dopo aver individuato i nodi del problema (anche se prima dell'intervista gli è stato chiesto di cercare di dire a voce alta tutto quello che pensava, naturalmente Sem, non essendo abituato a

<p>Frame problem solving e schema: dividere in casi</p>	<p>Controllo sul testo</p> <p>Anticipazione. Tentativo di classificare i possibili futuri (non spiega come fa ad arrivare a vederne 3)</p> <p>Esplorazione di varie situazioni dividendo la situazione in casi: Sal fissa un giocatore e vede cosa può succedere (è embrione di modellizzazione e applicazione di schemi, ma mantiene un po' di episodico)</p>	<p>B) ho il problema number three ci sono queste due compagnie ...ergo dividiamo le due compagnie A e B.</p> <p>O: puoi scrivere tutto quello che vuoi e puoi usare il foglio</p> <p>2) S: no, non mi aiuta.</p> <p>O: ok</p> <p>3) S:</p> <p>A) (<i>segue di sfuggita il testo poi e dice:</i>) se entrambe le compagnie hanno lo stesso volo in egual maniera tutti i passeggeri... (<i>guarda il testo</i>)</p> <p>B) ah ...ok ! per avere più passeggeri alla fine senza sapere ognuna la scelta dell'altra ci sono tre soluzioni no?</p> <p>C) La soluzione A che è quella di rischiarsela cioè alla fine te la rischi abbassi del 20% magari l'altra lo lascia uguale e guadagni facendo il 20% in meno però hai più passeggeri e alla fine quindi andresti a guadagnare di più;</p>	<p>questa pratica, non condivide con l'osservatore i suoi pensieri).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Focalizza la sua attenzione sul numero dei giocatori e comincia con etichettare le due compagnie perché è più chiaro riferirsi a qualcosa usando un nome (simbolo). • Il testo scritto è il suo supporto al ragionamento, non ha sentito in precedenza, né adesso il bisogno di riscrivere o utilizzare schemi grafici per manipolare i dati del problema. • Di nuovo il suo processo di esplorazione rimane nascosto e comunica solo il risultato di questo: dice che ci sono tre soluzioni (poi però in realtà espone non le soluzioni ma le possibilità di azione che sono solo due) e comincia ad elencarle come in un elenco puntato (è curioso notare che anche qui nomina con le lettere le diverse possibilità). • Si immedesima in una delle due compagnie (tanto la situazione è simmetrica) e ragiona analizzando le conseguenze alle possibili azioni da intraprendere (scelte). Il fuoco del ragionamento si sposta dalle compagnie alle azioni (ragionamento analogo a quello proposto dalla teoria dei giochi dove fissate le scelte di un giocatore se ne analizzano le conseguenze). Sem. però sembra non analizzare tutte le
---	--	--	--

	<p>Esplorazione del secondo caso: possibili futuri</p> <p>Il controllo avviene attraverso la costruzione di possibile episodio legato alle scelte</p>	<p>D) mentre la seconda è lasciarlo invariato nel tentativo dici va beh magari anche loro fanno così e guadagno sempre uguale però alla fine sono sicuro oppure cioè l'altra decide di rischiarsela e te la tieni sempre uguale ...alla fine te sarai quello che ...in quel caso lì avresti perso... se gli altri abbassano del 20%</p> <p>E) perché i passeggeri che avevi te vanno sull'altro...invece di abbassarla hai voluto fare il cretino, la hai lasciata così non hai più passeggeri alla fine.</p> <p>O: perché si sceglie sempre quella che ti fa la tariffa migliore?</p> <p>4) S: beh certo. Quindi per me alla fine il 20% in meno andrebbe applicato.</p>	<p>conseguenze all'azione da lui fissata ("abbassare del 20%) perché espone solo il possibile successo di tale azione. In realtà usando la parola "rischiarsela" si capisce che Sem. ha preso in considerazione anche la seconda possibilità all'azione "fare lo sconto" ossia che anche l'altra lo faccia e quindi perdere il guadagno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ora esplora le possibili conseguenze della seconda scelta: in questo caso immagina entrambi i possibili futuri derivanti da questa. Il futuro immaginato si divide in due e, mentre la gestione temporale della prima possibilità procede in modo fluido e chiaro, quando si arriva al cambio di futuro dovuto alla possibilità che l'altra compagnia effettui un'altra scelta si riscontra una difficoltà che viene superata ritornando ai dati del problema. • Ora ricomincia l'immaginazione delle possibili conseguenze però come se ritrattasse di una scena vissuta (futuro episodico). • Conclusione "forzata" dal mio intervento: Sam. Sceglie l'equilibrio di Nash del gioco e non la scelta più conveniente per entrambi. In questo caso quindi la teoria dei giochi predice in modo corretto il comportamento. Questo forse perché i processi di anticipazione de
--	---	---	---

	<p>Controllo discendente</p>	<p>O: perché? 5) S: A) perché alla fine cioè se l'altro decide di lasciarlo uguale tu guadagni di più se gli altri invece lo mettono al 20% guadagni il 20% in meno su ogni cliente però alla fine sei sempre sicuro...invece se la lasci alta mentre gli altri la mettono la 20% non hai più passeggeri, non hai più soldi, fallisci e ciao.</p>	<p>processi di anticipazione da portare avanti in questo caso sono molto brevi (Quindi la teoria di Camerer continua a valere).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ripercorre il suo ragionamento che però è "contaminato" da convinzioni sociali che approvano l'atto di scontare con il rischio di perdere qualcosa rispetto a quello di voler guadagnare a tutti i costi. Questo risulta evidente dal fatto che le quantità numeriche dei guadagni non sono considerate, ma conta solo lo sconto.
--	-------------------------------------	---	--

Riportiamo infine la prima intervista svolta con i soggetti scelti come campione (si veda par. 2.4)

Problema 1: affrontato da F. ed analizzato all'inizio della ricerca con i metodi provenienti dalla tesi di laurea

<p>1. A:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>(legge il testo ad alta voce). Va bene...io sentirei già l'esigenza veramente di scrivermi qualche dato quindi magari lo faccio...allora...sulla popolazione diciamo che...(comincia a scrivere) il 70% preferisce di sera e il 30%...preferisce invece viaggiare di mattina (ha scritto le percentuali con a fianco rispettivamente sera e mattina)</i> • <i>ok...(guarda il testo e cerca il riferimento al prezzo del biglietto e quindi rilegge la riga relativa) eh...dalle informazioni ...il prezzo del biglietto è uguale quindi diciamo che eh...già sistemare questo mi sembra più arduo</i> • <i>comunque in se diciamo che non c'è una compagnia preferibile all'altra a parità di ...partenza ...ok? (si rivolge a me e quindi io annuisco) va bene (riprende al leggere il testo).</i> 	<p>1.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Il suo primo impulso è quello di ricostruire la situazione problematica proposta evidenziando le informazioni fornite. Per far questo ripercorre il testo isolando i dati numerici relativi alla suddivisione dei passeggeri tra sera e mattina senza però prendere in considerazione la divisione di questi tra le due compagnie. • Continua la sua operazione di "riscrittura" della situazione problematica in maniera schematica cercando di individuare nel testo le altre informazioni fornite. In questo passaggio vuole trascrivere l'informazione riguardante l'uguaglianza del prezzo, ma non sembra riuscire a tradurre questo elemento attraverso un'elaborazione numerica o, in generale, grafica. • La sistemazione di questa informazione necessita di una rielaborazione del dato fornito che si manifesta nella frase "non c'è una compagnia preferibile all'altra a parità di partenza". A questo punto sente di aver "sistemato" questa informazione attraverso la rievocazione di una frase comunemente utilizzata in teoria dei giochi (la parola "preferibile" come la struttura stessa dell'enunciato sono infatti probabilmente riaffiorate dalla sua esperienza passata di risoluzione di giochi). Non scrive nulla perché non può legare la sua scrittura precedente con questa informazione visto che questa riguarda l'interazione tra le due compagnie e nella sua scrittura delle percentuali non
---	---

<ul style="list-style-type: none"> • “Le due compagnie dovranno decidere entro la stessa data l’orario di partenza del volo senza sapere quale sarà la scelta dell’altra”. Va bene. <i>(continua poi a leggere velocemente fino alla fine del testo)</i> • ...allora ...quindi il discorso è, bisogna...eh...<i>(un po' di pausa in cui fissa quello che ha scritto)</i>... • <i>beh</i> scusa eh, se si sa che la maggior parte dei passeggeri preferisce partire la sera... io a senso direi bisogna scegliere l’orario notturno quindi ... • allora le situazioni che...cioè le situazioni possibili sono in effetti...direi quattro però forse me le devo scrivere bene nel senso che sono che ... allora chiamiamo le due compagnie A e B <i>(comincia a scrivere le due lettere separate)</i> se no non sopravvivo a tutto questo <i>(ride)</i>...va bene...allora ... <p>2. O: ma il testo ti è chiaro...</p> <p>3. F: Il testo mi è chiaro...sì, sì, però adesso riformulandolo magari mi rendo anche più conto di...come si può...va beh... mi rendo conto se mi è veramente chiaro. Al momento mi sembra chiaro quello che devo</p>	<p>compare l’informazione che ci siano due compagnie. Per questo motivo decide lasciare questo punto e continuare la scansione del testo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trova un’altra informazione importante che sottolinea con una lettura lenta e scandita, ma ,anche in questo caso come nel precedente, non scrive nulla perché non riesce ad inserirlo nella strutture di ciò che ha prodotto. • Non avendo un modello completo su cui appoggiarsi basa la sua analisi sui dati che ha sott’occhio. Non esplicita il suo ragionamento, ma soltanto la congettura che ne scaturisce. • Dai dati che ha trascritto la conclusione risulta essere banale: scegliere la sera. Resta sullo sfondo il fatto che le due compagnie si divideranno i passeggeri. In questo caso il tutto funziona perché le possibilità portano a risultati simmetrici (non so dire se a questo punto se il risolutore ne sia cosciente). La rappresentazione che omette alcuni dati in questo caso non compromette la validità della scelta. • La congettura è stata formulata ed ora è necessario tentare una dimostrazione più rigorosa o meglio più completa. Per far questo bisogna combinare e mettere in evidenza tutti gli aspetti e le informazioni fornite da problema: bisogna costruire una rappresentazione più completa e strutturata che supporti un’argomentazione. La prima cosa che fa è mettere in evidenza la struttura del problema rimasta sullo sfondo: ci sono due compagnie in competizione. <p>3.</p>
---	--

<p>scegliere. Allora...però mi sembra talmente chiaro che mi sembra di poter già rispondere quindi credo che ci sia qualche problema allora...</p> <ul style="list-style-type: none"> • ho due compagnie A e B ciascuna delle due compagnie quindi praticamente può scegliere tra giorno e sera, quindi di fatto le possibilità...giorno e sera...va beh mattino e sera...quindi di fatto le possibilità sono <i>(comincia a scrivere una tabella delle opzioni)</i> mattina - mattina, mattina - sera, sera - mattina, sera - sera. D'accordo? <p>4. O: ok</p> <p>5. F: allora abbiamo delle ...eh...abbiamo anche in un certo senso dai dati che tu mi dai ...già la ...percentuale, almeno teorica, dei passeggeri che sceglieranno una compagnia o l'altra <i>(scrive $P(A)$ e $P(B)$ vicino alla tabella già compilata)</i> a secondo di questa loro scelta...perché si sa già che a parità di orario di partenza sarà 50% <i>(comincia a compilare un'altra tabella dove le colonne sono $P(A)$ e $P(B)$)</i> quindi sia per mattina- mattina che per sera - sera sarà del 50% se no ho capito male...la cosa più interessante diciamo sarà andare a vedere che cosa succede su mattino - sera e sera - mattina allora sul mattino - sera diciamo che sarà avvantaggiato chi sceglie di partire la sera perché in quel caso ci sarà...dimmi se ho capito bene, qua il 30% e qua il 70% <i>(scrive queste percentuali nella tabella)</i> qua il 70% e qua il 30%...o non ho capito bene il testo? Tu hai scritto che: "una ricerca di mercato... <i>(legge il testo)</i>"</p> <p>6. O: ...e loro si devono dividere... <i>(mi interrompe)</i></p> <p>7. F: loro devono scegliere...beh scusa se siamo in una situazione in cui c'è una compagnia che parte di mattina ed una compagnia che parte la sera, i 30% che vogliono partire al mattino sceglieranno la prima compagnia e i 70% quella della sera quindi diciamo questi della mia terza</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Costruzione di una tabella a doppia entrata influenzata dalle reminiscenze di teoria dei giochi. <p>5. Deve riempire le caselle corrispondenti alla combinazione dei due eventi e parte cercando di esplicitare attraverso delle percentuali l'informazione solo espressa a parole nella quarta parte della battuta 1: le due compagnie a parità di partenza sono indistinguibili e per questo scrive che si divideranno a metà i passeggeri (50%). Ora ha finalmente sistemato tutti i dati forniti dal problema traducendoli in un modello grafico manipolabile attraverso il confronto tra quantità numeriche. Infine sistema anche gli ultimi dati.</p> <p>7. Controllo della e sulla tabella.</p>
---	--

<p>colonna (<i>indica il suo scritto</i>) sono i passeggeri che andranno in A e questi sono i passeggeri che andranno il B (<i>indica la quarta colonna</i>) ...è giusto?</p> <p>8. O: ok, non ho tanto capito il 50%-50%...ho capito quello che volevi dire, però se tutti e due partono alla mattina ...il 50% però non del totale (<i>mi interrompe</i>)</p> <p>9. F: (<i>si mette a leggere il testo del problema ad alta voce</i>) “Se i voli delle due compagnie avverranno entrambi di sera le due compagnie si divideranno a metà gli utenti” cioè se io sono utente che devo partire quel giorno e tutte e due le compagnie partono la mattina ho il 50% di scegliere una compagnia piuttosto che l'altra.</p> <p>10. O: questo è giusto, ma non è il numero dei passeggeri</p> <p>11. F: perché non è il numero dei passeggeri?</p> <p>12. O: perché se ho il 100%...perché se solo il 70% vuole partire di mattina (<i>mi interrompe</i>)</p> <p>13. F: sì però se non c'è alternativa perché tutte e due partono di mattina ...</p> <p>14. O: però il 70% parte di mattina e il 30% di sera.</p> <p>15. F: ok. Questo se c'è un volo al mattino e uno alla sera.</p> <p>16. O. sì.</p> <p>17. F: se tutti i voli sono al mattino quelli che vogliono partire alla sera dovranno per forza partire al mattino e cambiare la loro scelta. E tu dici che (<i>legge il testo</i>) “se i voli avvengono entrambi di mattina o entrambi di sera allora le due compagnie si dividono a metà gli utenti” che significa cinquanta e cinquanta.</p> <p>18. O: ok. Ho capito quello che volevi</p>	<p>8. Chiedo spiegazioni sulla motivazione della scelta di tradurre “si dividono a metà i passeggeri” in 50%-50% perché nella nostra idea si dovevano dividere i passeggeri del mattino (30%) oppure della sera (70%), ma effettivamente la formulazione del mio testo si presta più all'interpretazione data dalla risolutrice.</p> <p>9. La risolutrice infatti reagisce alla richiesta rileggendo il testo per sottolineare che la sua interpretazione è coerente.</p> <p><i>Nelle ultime battute c'è solo un tentativo dell'osservatore di portare la risolutrice a spiegare maggiormente la sua interpretazione della situazione problematica.</i></p>
---	---

<p>dire. Ok.</p> <p>19. F: È giusto o non ho capito il testo?</p> <p>20. O: no, è giusto. È un'interpretazione del testo.</p> <p>21. F: e non era quella prevista?</p> <p>22. F: no però questa qua va bene.</p>	
--	--

Bibliografia

- Atance, C.M. & O'Neil, D.K.: 2001, "Episodic future thinking", *Trends in cognitive science*, Vol. 5 no. 12, 533-539.
- Arzarello, F.: 2000, "Inside and Outside: Space, Times and Language in Proof Production", *Proceeding of PME-XXIV*, Hiroshima, Vol. 1, 23 – 38.
- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. & Robutti, O.: 2002, "Time(s) in Didactics of Mathematics. A Methodological Challenge", in: Lyn English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh e D. Tirosh (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (LEA, USA), 525-552.
- Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G.: 2000, "A model for analyzing algebraic processes of thinking", *Perspectives on School Algebra*, In Sutherland R., Roiano T., Bell.A. (Eds) Kluwer, 61-81.
- Barbero, R., Bazzini, L., Ferrara, F. & Laiuolo, P.: 2006, "The Prince and the messenger story: from a tale to Mathematical thinking", *Pre-Proceeding CIEAEM58 SRNI*, 64-69.
- Boero, P.: 2001, "Transformation and anticipation as key process in algebraic problem solving", *Perspective on School Algebra*, 99-119.
- Boero, P. & Garuti R. & Mariotti M.A.: 1996, "Some dynamics processes underlying producing and proving conjectures", *Proceedings of PME-XX*. Vol. 2: 121-128. Valencia, Italy.
- Boero, P. & Scali, E.: 1996, "Il tempo (i tempi) nel lavoro mentale e alcune difficoltà in matematica", *Lo spazio e il Tempo*. C. Caredda, B. Piochi & P. Vighi, Eds., Pitagora Bologna, 59-65
- Bosch-Domenech, A., Montalvo, J. G., Nagel, R. & Satorra; A: 2002, "One, Two, (Three), Infinity, ...: Newspaper and Lab Beauty-Contest Experiments", *The American Economic Review*, Vol. 92, No. 5 , 1687-1701.
- Camerer, C. & Teck-Hua Ho & Juin-Kuan Chong: 2002, "A cognitive hierarchy theory of one-shot games: some preliminary results", http://www.hss.caltech.edu/~camerer/web_material/Ch08Pg_119-179.pdf
- Camerer, C. & Teck-Hua Ho & Juin-Kuan Chong: 2002, "Behavioural Game Theory: Thinking, Learning and Teaching", Presented at the *Nobel Symposium and forthcoming in a book edited by Steffen Huck, Essays in Honor of Werner Guth*.
- Camerer, C.: 2003a, "Behavioural studies of strategic thinking in games", *Trends in cognitive science*, Vol. 7, No. 5, 225-231.
- Camerer, C.: 2003b, "Strategizing in the brain", *Science*. Vol. 300, 1673-1675.
- Camerer, C.F. & Ho T. & Chong, J.: 2003, "Models of thinking, learning and teaching in games", *The American Economic Review*, Vol. 93, No. 2, 192-195.
- Camerer, C. & Johnson E.: 2003 "Thinking about attention in games: Backward and forward induction" <http://www.hss.caltech.edu/camerer/thinking2002.pdf>

- Camerer, C. & Loewenstein, G.: 2003, "Behavioural economics: Past, Present and Future", In C. F. Camerer, G. Loewenstein, and M. Rabin (Eds.), *Advances in Behavioral Economics*. Russell Sage Foundation/Princeton University.
- Camerer, C. & Loewenstein, G. & Drazen Prelec: 2005, "Neuroeconomics: How neuroscience can inform economics", *Journal of Economic Literature XLII*, 9-64.
- Carlson M.P. & Bloom I.:2005, "The cyclic nature of problem solving: an emergent multidimensional problem-solving framework", *Educational Studies in Mathematics*, Vol.58, 45-75.
- Craik, F.I.M. & Tulving, E.: 1975, "Depth of processing and the retention of words in episodic memory", *Journal of Experimental Psychology: General*, Vol. 104, 268-294.
- Dapueto, C. & Parenti L.:1999, "Contributions and obstacles of context in the development of mathematical knowledge", *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 39, 1-21.
- Ericsson, K.A. & Simon, H.A.: 1980, "Verbal reports as data", *Psychological Review*, Vol. 87, 215-251.
- Fodor, J.A.: 2001, *La mente non funziona così*, Editori Laterza.
- Gibbons, R.: 1992, *A Primer in Game Theory*, Harvester-Wheatsheaf (traduzione italiana: 1994, *Teoria dei Giochi*, il Mulino).
- Goeree, J. & Holt, C.: 2001, "Ten little treasures of GT and ten intuitive contradictions", *American Economic Review*, 1402-1409.
- Guala, E. & Boero, P.: 1999, "Time Complexity and Learning", *Annals of the New York Accademy of Sciences*, Vol. 879, 164-167.
- Hargreaves Heap, S. P. & Vaurofakis, Y.: 1995, *Game theory. A critical introduction*, London and New York.
- Kreps, D. M.: 1990, *Game Theory and Economic Modelling*, Oxford University Press (traduzione italiana: 1992, *Teoria dei Giochi e modelli economici*, il Mulino).
- Lakoff, G. & Núñez, R.: 2000, *Where mathematics comes from*, New York: Basic Book.
- Macar, F. & Pouthas, V. & Friedman, W.J.: 1992, *Time, Action and Cognition / Towards Bridging the Gap*, Kluwer Academic Publishers, Series D: Behaviour and Social Science, Vol. 66.
- Martignone F.: 2002, *Analisi di processi dimostrativi in ambito analitico*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Genova.
- Minsky, M.: 1989, *La società della mente*, Adelphy.
- Morgenstern, O.: 1969, *Teoria dei Giochi*, Boringhieri.
- Myerson, R.B.:1991, *Game Theory: Analysis of Conflicts*, Harvard University Press.
- Osborne, M.J. & Rubinstein, A.:1994, *A Course in Game Theory*, MIT Press.

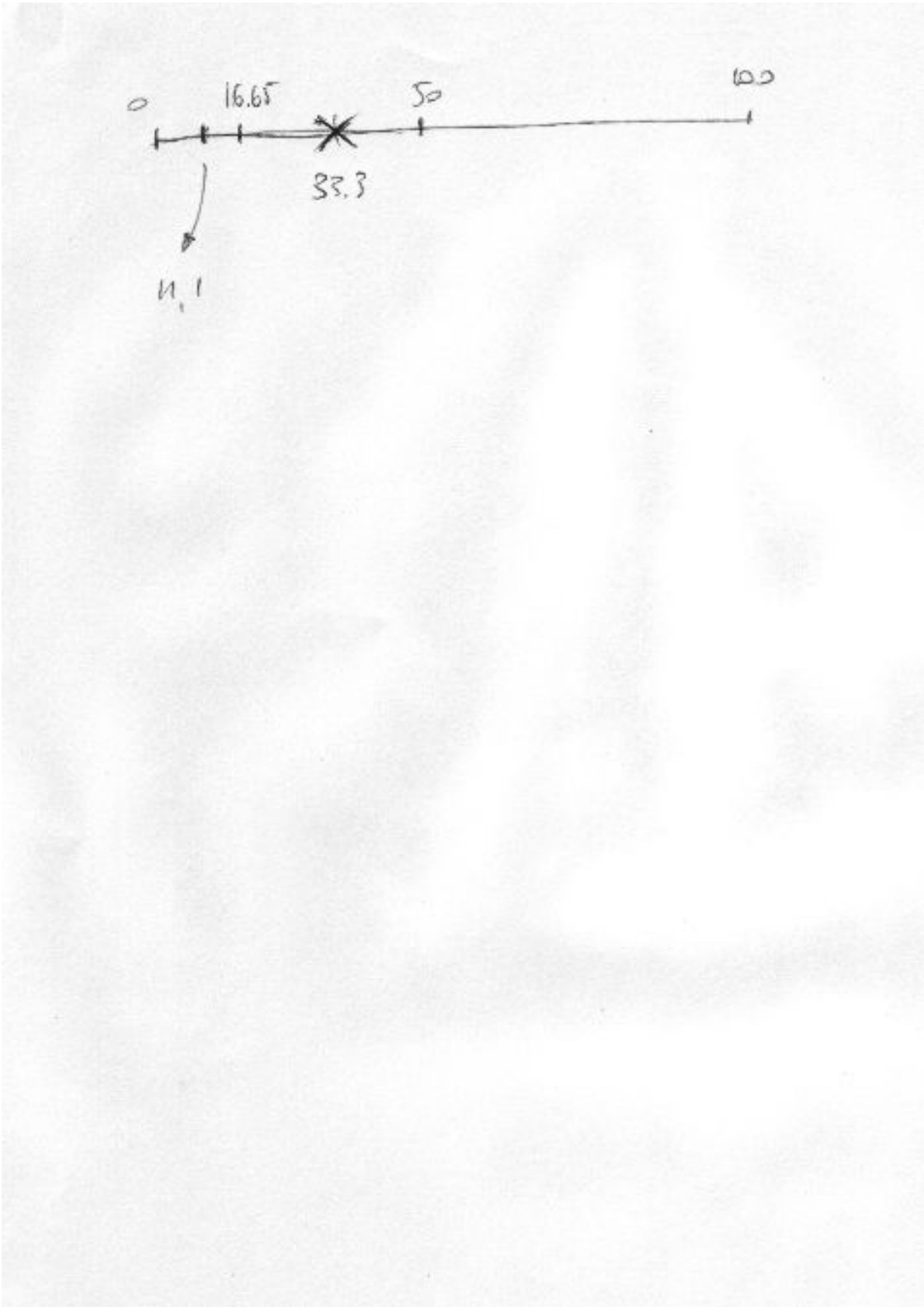
- Owen, G.: 1995, *Game Theory*, Academic Press.
- Piaget, J.: 1952, *Psicologia dell'intelligenza*, Giunti-Barbera.
- Polya, G.: 1957, *How To Solve It; A New Aspect of Mathematical Method*, 2nd ed., Doubleday, Garden City.
- Pontecorvo, C.: 1984, "Concettualizzazione ed insegnamento", *Concetti e conoscenza*, Loescher.
- Rubinstein, A. : 1998, *Modeling bounded rationality*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Rubinstein, A.: 2004, "Instinctive and cognitive reasoning: response times study", <http://arielrubinstein.tau.ac.il>
- Simon, Herbert A.: 1955, "A Behavioural Model of rational Choice", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 69(1), 99-118.
- Simon, M.A.: 1996, "Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of Knowing", *Educational studies in mathematics* Vol. 30, 197-210.
- Tulving, E.: 2002, "Episodic memory: From Mind to Brain", *Annu.Rev.Psychol.*, Vol. 53, 1-25.
- Vergnaud, G.: 1990, "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 10, 133-169 (traduzione italiana: Vergnaud, G.: 1992, "Teoria dei campi concettuali", *La matematica e la sua didattica*, Vol. VI/1, 4-19).
- Vygotskij, L.S.: 1990, *Pensiero e linguaggio*, Laterza.
- Zammuner, V. L.: 1998, *Tecniche dell'intervista e del questionario*, . Ed. il Mulino.

ALLEGATI

- 1. Protocolli scritti e trascrizione delle interviste sul Beauty contest game (BcG)**
- 2. Protocolli scritti e trascrizione delle interviste sul problema della pubblicità**

1. Protocolli scritti e trascrizione delle interviste sul Beauty contest game (BcG)

BcG di A:



1. A: (*legge il testo e si ferma quando legge due terzi poi riprende fino alla fine*) ...allora se ci sono n giocatori, allora loro devono scegliere dei numeri tra 0 e 100 abbiamo detto, no?
2. O: sì.
3. A: ...quindi se ci sono... n giocatori in realtà potrebbero scegliere numeri cioè ...potrebbero anche scegliere lo stesso numero, tutti lo stesso numero.
4. O: sì, anche tutti, perché è come se fossero messi tutti in una stanzetta da soli, nessuno sa cosa sceglieranno gli altri, sa che ci sono tutti gli altri...
5. A: ok. Allora vince chi va più vicino ai due terzi della media dei numeri scelti ...ai due terzi...quindi se per esempio loro si distribuissero equamente, la media sarebbe cinquanta, no?
6. O: perfetto.
7. A: ecco però...allora i $2/3$...quindi vincerebbe chi si avvicina di più ai $2/3$ di 50...
8. O: sì.
9. A: ok...però...(guarda il testo del problema) beh allora qua “quale potrebbe essere una buona scelta per vincere”, cioè allora ...cioè una cosa...(disegna un segmento dove pone a metà una tacca che etichetta con il numero 50) una distribuzione normale dovrebbe essere che i giocatori scelgono tanto numeri sotto i 50 che sopra il 50 quindi se la distribuzione fosse normale la media dovrebbe essere proprio 50 (scrive agli estremi del segmento 0 e 100) e quindi una buona scelta sarebbe...allora... scegliere il numero vicino proprio ai $2/3$ di 50...però se tutti poi scelgono quel numero lì alla fine non è più la media ...cioè non lo so allora un'idea potrebbe essere visto che tutti potrebbero scegliere appunto i due terzi di 50 per cercare di vincere invece scegliere proprio la metà, la media, cioè la metà di questi due terzi di 50, fare ancora i due terzi e vedere quel numero lì però non so se ...
10. O: questa è una buona strategia e quindi che numero sceglieresti? Puoi farli i calcoli se vuoi.
11. A: allora 50 diviso tre per due...
12. O: 33,3 circa.
13. A: questo è 33,3 (mette una tacca tra 0 e 50 più vicino a 50) quindi la media dovrebbe essere...
14. O: ti do la calcolatrice
15. A: (fa i calcoli) $33,3 : 2$... la media dovrebbe essere 16,65 perché tutti dovrebbero scegliere intorno a questo numero qua, la media è 16,65 ancora i due terzi di 16,65 (fa calcoli)... 11,1. Però non so è una cosa...
16. O: quindi tu sceglieresti...
17. A: 11,1.
18. O: quindi 11 o nell'intorno di 11...
19. A: sì vicino a 11.
20. O: ok.

BcG di esperto:

	0	1	2	3
0	500,00	1000	1000	...
1	0,1000	500,00	1000	...
2	0,1000	0,1000
3	0,1000

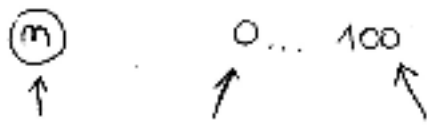
$$n \Rightarrow (0, \dots, 0)$$

1. E: (*legge il testo*) sì dunque, questo qua è un gioco abbastanza...standard, ne trovi anche una trattazione su sulla pagina web di...eh...Ariel Rubinstein
2. O: si lo so...
3. E: ah sei già andata a vedere, basta. Perfetto. Dunque... non mi ricordo assolutamente cosa diceva Ariel Rubinstein...ovviamente, che da un certo punto di vista è meglio...dunque beh, tanto proverei a cominciare a vedere cosa succede con due giocatori, farmi proprio lo schemino e veder cosa conviene tra due, per vedere se il discorso si può espandere a più di due giocatori in maniera abbastanza decente. Allora...diciamo (*comincia a scrivere una*

tabella a doppia entrata con le righe e colonne date dai numeri che pronuncia) 0,1,2,3 ...0,1,2,3 allora...in questo caso qui (indica la prima casella data dalle scelte 0,0) la media è zero quindi in teoria vincono tutti e due ...supponiamo che se lo dividano a metà: 500 e 500 (riempie la caselle con questi due numeri).

4. O: sì.
5. E: tanto per dare l'idea. Se invece scelgono 0 e 1 è il secondo il più vicino ai due terzi...no...sì è il secondo perché la media è...no perché la media è 0,5 i due terzi sono al disotto e quindi chi ha scelto zero vince...quindi diciamo (*compila la tabella*) 1000, 0 con due la media è 1 i due terzi si avvicina a zero quindi vince comunque sempre chi sceglie il più basso (*compila la tabella mettendo 1000, 0 nell'altra casella e mettendo i puntini di sospensione sotto le ipotetiche altre colonne che non ha neanche esplicitato*) niente in questi casi qua (*indica la prima colonna*) è l'opposto (*scrive 0, 1000 e poi puntini di sospensione come per la prima riga*) bisogna vedere gli altri, dunque 1,1 ovviamente 500 e 500 (*lo mette nella tabella*) quindi sulla diagonale si suppone che ci sia sempre la stessa cosa chiaramente(*mette puntini per indicare questo*). Dunque 2 e 1, la media è 1,5 ...i due terzi è uno quindi..sì in generale vince sempre chi sceglie il più basso dei due, con due giocatori deve stare al di sotto quindi in generale avremo 1000 e 0 sotto tutto questo eventuale triangolo (*indica le celle della tabella le celle da 1,2 in poi sopra la diagonale*) e 0, 1000 (*indica le celle da 2,1 in giù sotto la diagonale*). Allora ...eh...ma direi che questo (*riquadra la prima casella corrispondente a 0,0*) è un equilibrio di Nash perché comunque uno si sposta ci perde soltanto.
6. O: quindi il 500, 500
7. E: sì bisognerebbe giocare 0,0 ufficialmente e quindi sarebbero 500 ciascuno perché in tutti, questo qui è l'unico caso in cui se un giocatore invece di giocare zero cambia, fa vincere l'altro e viceversa e quindi gli conviene, mentre in tutti gli altri casi, cambiando tu puoi vincere o di più o di meno, ma soprattutto puoi vincere di più e questa è la cosa interessante, quindi esiste un equilibrio di Nash che è 0,0 quindi la cosa più conveniente sarebbe giocare 0,0 eh...() beh la stessa cosa dovrebbe valere anche per più di due giocatori perché, dunque se tutti i giocatori giocano zero si dividono la posta in parti uguali, se uno cambia la sua giocata quindi evidentemente gioca di più alza la media e quindi lui è sicuro di non vincere perché la alza ma non a sufficienza da far sì che lui vinca e quindi comunque vincono ...gli altri si dividono il risultato. La scelta zero è sempre quella più vicina. Quindi non conviene alzare la propria giocata quindi in teoria conviene giocare zero. Il risultato ...n giocatori portano al risultato (0,0) (*lo scrive*)

BcG di F:

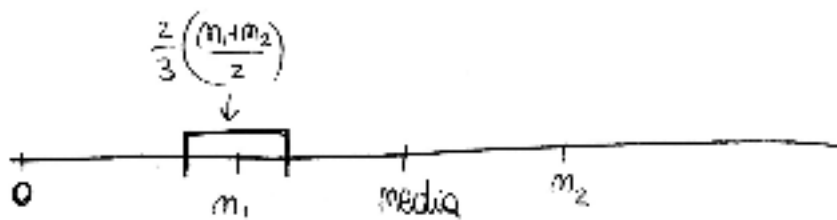


$$\frac{2}{3} \text{media}$$

$$n = 4$$

$m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{4} \right) = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{6}$$



$$\frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) = \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3}$$

1. F: (*legge il testo*) allora sono n giocatori (*scrive n*) e ciascuno sceglie un numero tra zero e 100 (*scrive $0...100$*) ok e vince chi prende il numero più vicino ai $2/3$ della media dei numeri scelti ok quindi di chi si avvicina ai $2/3$ della media, (*scrive "2/3 media"*) scrivo media perché in questo momento non mi viene in mente altro modo per dirlo ok. Quindi intanto questa media qui è la media tra n valori che non sono necessariamente distinti...
2. O: sì possono scegliere il numero che vogliono.
3. F: ok...stavo pensando se ci sono per così dire delle situazioni estreme qualcosa tipo se tutti scelgono (*fa due frecce che indicano lo zero e il cento che ha scritto*)... perché è strano perché ...parlo a ruota libera?
4. O: sì certo.
5. F: sembra una media in due tempi perché è media sulle scelte...e quindi mi verrebbe da dire...però...ok, no. Niente...no mi è venuto subito da pensare ...i due casi estremi e io per casi estremi ho pensato quando la media è più vicina allo zero e quando la media è più vicina la cento, ok? In realtà c'è anche un altro, in realtà questo non è un vero caso estremo, il caso estremo è quando tutti scelgono la stessa cosa o se tutti la scelgono diversa, ok va bene?
6. O: perfetto.
7. F: però questa cosa qui del numero molto basso o del numero molto alto, cioè somma molto alta, somma molto bassa chissà perché mi sembra che sia una cosa che...che può in qualche modo influire e così molto a senso però sembra una di quelle cose tipo le scommesse, ti direi che non sceglierei mai un numero troppo vicino allo zero o troppo vicino al cento e in tutto questo mi sono anche resa conto che questo n non so assolutamente quanto valga, spero di poter considerare che sia minore di 100.
8. O: sì, sì n può essere il numero che vuoi.
9. F: diciamo che per il momento...
10. O: n può essere il numero che ti piace di più, se vuoi puoi anche fissarlo.
11. F: posso fissarlo eventualmente. Magari per fissare le idee ad un certo punto ti dirò che n è...quattro... una cosa molto bassa... stavo pensando se influisce...
12. O: sul risultato?
13. F: sì, sicuramente sì quindi...va bene...allora (*rileggendo parte del testo*) "quale potrebbe essere una buona scelta per vincere"...allora...sì fisso veramente n uguale... in questo momento a quattro (*scrive $n=4$*) non so bene per quale motivo...allora se ci sono ...quattro scelte diverse ci saranno quattro numeri che chiamo n_1 n_2 n_3 n_4 (*lo scrive*) la media...è media...
14. O: è una media normale.
15. F: è una media aritmetica...quindi bisogna avvicinarsi ai due terzi di $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ su quattro (*lo scrive*) quindi a $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ sesti...che non credo...non credo possa significare qualcosa anche perché come mi hai fatto notare...cioè come ho notato a partire da ciò che ci siamo dette prima in qualche modo questa scelta sarà dipendente da n , quindi non so nemmeno se ha molto senso prendere degli n particolari...va beh è uguale...eh...per due minuti ho avuto la tentazione di fare per n uguale a 5, a 6, a 7 per cercare di fare una cosa induttiva per darti la gioia di un matematico che lo fa, però non mi è sembrato

- particolarmente intelligente come cosa ...va bene. Non ho un granché di idee...allora...tra l'altro è i 2/3 della media...allora banalmente, ora ti dico delle cose banali...
16. O: tu dimmi tutto quello che pensi.
17. F: banalmente alla peggio tutti quanti i giocatori scelgono zero perché ho questa cosa fissa del...del numero ...tutti uguale... delle cose in cui tutti sono d'accordo che immagino tra l'altro che non sia assolutamente la cosa più probabile quindi ...mi disturba un pochino il fatto che ci sia un...che sembra che ci sia un po' di calcolo delle probabilità infilato dentro...
18. O: non c'è la probabilità...cioè non sai niente perché ognuno di loro è chiuso nella stanzetta...
19. F: quindi teoricamente è equi-probabile la cosa di tutti uguali o tutti diversi...
20. O: loro dicono...è una scelta, ma non solo...
21. F: sì però è una scelta...non è solo ti metto in una cabina e ti dico dimmi un numero.
22. O: no.
23. F: è scegli un numero cercando di vincere i mille euro.
24. O: sì, sì non è a caso.
25. F: devono avere delle strategie, fanno dei ragionamenti...
26. O: sì non è casuale, cioè loro non vanno a caso.
27. F: va bene. Il caso più stupido potrebbe essere: tutti scelgono zero, quindi la media è zero, a quel punto però cosa succede? Succede che i due terzi di zero è ancora zero e cosa fanno? Hanno vinto tutti.
28. O: sì, se vincono tutti si dividono la somma.
29. F: si dividono la somma, ok. No perché stavo cercando di vedere se c'è una condizione che è così palesemente la migliore per tutti...direi di no. Se tutti scelgono 1...
30. O: ecco se tutti scelgono uno è uguale.
31. F: se tutti scelgono uno è uguale nel senso che viene ...media 1, tutti hanno scelto uno, sto iniziando a capire che non conta la scelta del numero, ma quante persone lo scelgono.
32. O: sì.
33. F: e no non mi era chiaro questo pensavo che ci fosse anche differenza a seconda se tutti scelgono lo zero piuttosto che il 50, non so per quale motivo...
34. O: il numero effettivamente è diverso, cioè i 2/3 di quel numero lì, però...
35. F: cioè nell'ipotesi che tutti scelgano lo stesso non cambia assolutamente niente.
36. O: no, infatti.
37. F: ok, sarà una cosa lunga e doloroso.
38. O: no, tu vedila... cioè proprio come se fossi lì e dovessi giocare.
39. F: sì, se fossi io che cosa giocherei.
40. O: sì cosa giocheresti...non c'è una soluzione...
41. F: no infatti è vero.
42. O: non essendoci una soluzione...non si può dire: è vero questa è la strategia migliore, la strategia migliore non è proprio vero che ci sia...
43. F: no, infatti.
44. O: non puoi dire sono sicura che facendo quello vinco.

45. F: stavo pensando se nel mio caso dell'enne uguale a 4 è possibile capire...dal fatto che la media è questa...(pensa) non mi fare prendere anche dei valori particolari...cioè il problema è secondo me che non avendo...cioè tipo da questo caso qua (indica il risultato dei 2/3 della media) $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ non ti so nemmeno dire ovviamente chi vincerebbe dei quattro perché sono generici e quindi non mi serve a niente in effetti essermi ricondotta al solo caso di $n=4$.
46. O: no penso di no...ma sono tutti simili...
47. F: ...in tutto questo sto anche pensando se ricondurmi cioè se ignorare i due terzi mi cambia drasticamente la strategia oppure no...(pensa) nel senso ci sarebbe comunque una scelta...cioè la scelta cambia se anziché premiare...
48. O: sì cambia.
49. F: se anziché premiare...sì ...però se loro lo fanno allo stesso modo in effetto per loro non cambia niente...
50. O: cioè il fatto che sia 2/3 cambia il valore che vincerà ...però la regola...
51. F: sì cambia ovviamente il valore che vincerà però il tipo di ragionamento sarebbe uguale ... sia che ci fosse 2/3 che se ci fosse $\frac{3}{4}$ ecc..
52. O: sì, la frazione è solo per il valore...
53. F: sto pensando, il fatto che c'è proprio 2/3 però mi fa escludere sicuramente dei ...mi dava l'idea di poter escludere dei valori troppo grandi e dei valori troppo piccoli...
54. O: ...quello sì, 2/3 è un numero particolare quindi sicuramente lui escluderà qualcosa.
55. F: infatti...(si blocca per un po' in silenzio a guardare ciò che ha scritto)
56. O: potrei...vuoi che ti dica qualcosa?
57. F: sì, perché sono un po'...
58. O: il discorso è che secondo mela rappresentazione algebrica così, fatta così ...è vuota nel senso che...
59. F: e sì...non serve a niente. Io sarei tentata di farmi un ...un grafichino...cioè una retta dei numeri, però...
60. O: ok, prova a fare quello che vuoi.
61. F: sì però non ... non sono così sicura che mi aiuti.
62. O: ok che la retta possa essere un modello che ti può piacere...
63. F: ...ma essenzialmente perché non credo di saperti bene piazzare la media rispetto quattro numeri...
64. O: sì ho capito...rispetto a quattro numeri infatti è difficile...
65. F: ok, non è facile.
66. O: siamo d'accordo.
67. Allora posso farla tra due numeri? Faccio "spontaneamente" una retta (*disegna una retta*) da n_1 e n_2 (*mette due tacche e le nomina*)...chissà perché sono partita da quattro...(pensa guardando il grafico e mette una tacca a metà tra n_1 e n_2)...sta lì la media...ah! I 2/3 dove sta? (guarda il grafico) chissà perché a questo punto devo fare lo zero (*mette all'estrema sinistra sulla retta lo zero*)...questa è la media...vengono fuori tutte le mie...ah...se questa (*scrive sotto la tacca della media*) è $\frac{n_1 + n_2}{2}$ i due terzi di questo, va beh divido in tre parti e prendo due terzi (*non lo fa sul disegno lo dice solo*)...però non mi sembra molto carina come

- cosa perché non so come sta rispetto ad n_1 , ma posso saperlo come sta rispetto ad n_1 a patto di aver voglia di risolvere una facile disequazione...però non credo che sia particolarmente interessante...hai capito cosa potrei voler fare?
68. O: sì ho capito, vuoi guardare due terzi...
69. F: sì vorrei fare $\frac{2}{3}$ rispetto ad n_1 però...
70. O: però più o meno hai idea di dove è...se è un po' più in su o un po' più in giù...
71. F: ma sai che no...aspetta se vuoi me lo riscrivo così tutto il potere dell'algebra...(*scrive* $\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2}$ e poi $\frac{2}{3}(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2}) = \frac{n_1}{3} + \frac{n_2}{3}$ e poi *pensa*) ... non mi è così chiaro, ma sono un po' ottenebrata...tanto questa cosa mi ha fatto riflettere su quanto sia stata carina la scelta di due terzi...e sì..
72. O: in questo caso qua..
73. F: in questo caso qua è come dire prendo un terzo dell'uno e prendo un terzo dell'altro...sta più in qui rispetto a n_1 (*indica la sinistra di n_1*) ... non è detto assolutamente ...è importante? Sapere se sta prima o sta dopo?
74. O: di n_1 e di n_2 ... ma non tanto (*mi interrompe*)
75. F: ma chi se ne importa tanto ci sta più vicina n_1 rispetto ad n_2
76. O: perché?
77. F: ...
78. O: è vero.
79. F: eh... è vero, ok.
80. O: è verissimo, che sia più vicino ad n_1 è vero...infatti stai sempre lavorando da quella parte lì (*indico il grafico*)...tu volevi sapere se era davanti o dietro però ...
81. F: ok, no, a parte questa mi fissa di sapere se sta davanti o dietro n_1 , di sicuro prendendo i due terzi di una cosa positiva arretro rispetto alla media...va bene...quindi di sicuro tra n_1 e n_2 vince chi ha scelto n_1 che significa che se giocano in due è sempre bene tirare in basso rispetto...cioè è sempre bene essere quello che ha preso il...il numero più basso, però non sapendo quello che prende l'altro, io a questo punto non...(guarda il grafico) beh, se fossimo due io a quel punto prenderei zero perché mal che vada anche lui ha preso zero e se lui ha preso qualcosa di più grande di zero, ho sicuramente vinto?
82. O: sì, questo va bene.
83. F: questo va bene?
84. O: ma sì, tu dici che se prendo zero sicuramente, sicuramente più piccolo di zero non c'è nient'altro?
85. F: sì, un cosa di quel genere. Sto chiedendomi quanto... questa cosa qui è una cosa vera in assoluto, a sto punto mi verrebbe quasi da dirti...prendo zero sempre, ma no! Perché se io prendo zero e altre due persone prendono 100, la media è 200 diviso tre...hai una calcolatrice? (*le passo la calcolatrice*) è 66 e 66 è più vicino a cento che a zero. La cosa che ho detto io non vale, ma ovviamente non vale perché come dicevamo prima la media tra due numeri so esattamente dove è, già la media tra tre...non so se è un mio problema,ma ...anche perché non la puoi fare mica in modo ...associativo la media...
86. O: in che senso?

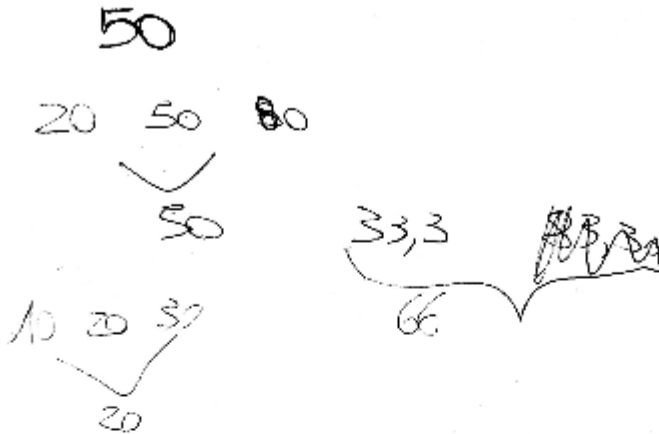
87. F: non puoi mica fare la media tra i primi due e poi così fare la media con il terzo? Sì puoi farlo, no!
88. O: no, infatti la media dipende dal numero di addendi...
89. F: mi sto chiedendo un sacco di cose strane...
90. O: effettivamente la media con tre è più difficile infatti come hai detto tu già nel caso estremo 100 100 0 non è vero che è a metà da qualche parte...
91. F: no non è vero ...perché tre non c'è il punto medio...ho preso un caso molto estremo quindi ...va beh ...ok quindi già non posso dirti che prenderei sempre lo zero...quanto hai ancora voglia di tenermi?
92. O: quanto tu hai voglia di continuare...
93. F: mi piace questo esercizio, ma non vedo...non sono ancora in grado di pronunciarmi...dovrei fare un sacco di...
94. O: ok, allora tu diresti per due...
95. F: per due prenderei lo zero.
96. O: per tre hai trovato un caso estremo...
97. F: esatto per tre già non vale la considerazione dello zero...spero che valga almeno per due, ma quello mi sentirei di dire di sì...
98. O: sì, sì.

Bcg di G (*non scrive nulla se non il numero che sceglie alla fine*):

1. G: (*legge il testo a mente*) Una buona scelta per vincere?
2. O: sì.
3. G: ovviamente ti arriverà un risposta ingegneristica, ne hai paura?
4. O: no,no.
5. G: allora (*pensa in silenzio*), stavo pensando alla strategia.
6. O: mi dici cosa pensi?
7. G: ... che il gioco è un po' fallato
8. O: ossia?
9. G: ossia ...visto che ci sono n giocatori che devono scegliere un numero in un range di medie dimensioni, tutti cercheranno ovviamente di avvicinarsi ai $2/3$ della media
10. O: sì
11. G: quindi non avendo nessun altro..nessun'altra base da cui partire tutti andranno a puntare alla media; ai due terzi della media cioè provo ad indovinare...prendono i numeri da zero a cento, fanno una media, i due terzi e giocano quel numero ...però è ovvio che se tutti fanno lo stesso ragionamento lo scopo del gioco salta.
12. O: sì, cioè se tutti fanno lo stesso ragionamento?
13. G: perché andranno a scegliere quasi tutti i numeri compresi in un certo intervallo.
14. O: sì, è questa l'idea; ecco, se tutti facessero la stessa scelta allora si dividerebbero la somma. Comunque quindi il gioco...
15. G: quindi, qua non c'è scritto, però l'obiettivo sarebbe anche vincere ...possibilmente una somma molto alta?
16. O: sì, cioè, se tu giocassi, punteresti a vincere...
17. G: allora l'unica strategia che, con un numero di giocatori n sufficientemente basso, potrebbe essere vincente...sarebbe creare da se stessi uno scostamento dalla media magari dicendo, proprio scegliendo il numero zero e scegliere un numero leggermente più basso di quello che potrebbe essere la media effettiva dei cento numeri, se la media è 66...
18. O: ecco mi dici, perché non ho capito.
19. G: mettiamo che la media sia 66, che è i due terzi di 100...facendo finta che i giocatori abbiano scelto più o meno uniformemente, se ho cento giocatori e ognuno ha scelto un numero, la media viene 66...io dico in teoria a me verrebbe da scegliere il 54...che più o meno...
20. O: non sai
21. G: sì non so assolutamente cosa fanno gli altri però se la media è 66 io anziché scegliere un numero qualsiasi scelgo lo zero così magari la media viene 64...io anziché la media, scelgo proprio il 64 che è un po' più bassa e vinco.
22. O: no aspettami.
23. G: Abbasso volutamente la media.
24. O: quello l'ho capito, ma il problema è che se tu abbassi la media...l'abbassi in che modo?
25. G: cerco...scegliendo un numero bassissimo: zero. Il più basso possibile.
26. O: e tu dici che zero?

27. G: Se però n supera un certo livello è ovvio che la mia scelta viene a pesare sempre meno, se siamo in tre pesa molto, se $n=3$ pesa molto, se $n=1000$...
28. O: certo, questo è vero.
29. G: altre strategie valide ...non le vedo.
30. O: quindi tu sceglieresti? Quale numero sceglieresti? Non è che ognuno deve scegliere un numero diverso...
31. G: sì possono scegliere anche lo stesso numero. Io sceglierei così a occhio un 64 mettendo come mio numero zero.
32. O: però non capisco, se tu metti un numero zero e dici che verrà 64? No, perché vince quello che ...
33. G: ci si avvicina di più al numero
34. O: e quindi se tu scegli zero vuol dire che è zero quello che ci si deve avvicinare di più ai due terzi della media.
35. G: ah, no io devo scegliere un numero...ah non avevo capito! Ah, no, no, allora la mia strategia non vale niente.
36. O: tu devi scegliere un numero e poi tra tutti i numeri scelti fanno la media e vince (*mi interrompe*)
37. G: sì ho capito, avevo considerato ...come due eventi diversi la scelta del numero e poi dire quanto verrà.
38. O: ho capito
39. G: invece è lo stesso evento. Quello che ho detto non ha senso. Ho interpretato male il problema. (*pensa in silenzio*) Uso l'unico metodo statistico valido, la media di tutti i numeri sarà ...50 indipendentemente dal numero dei giocatori, prendo i due terzi e gioco quel numero.
40. O: ok, ti prendo una calcolatrice? Ne hai bisogno?
41. G: due terzi di 50 quanto è? 35 (*pensa*) ...quindi io per ripicca scelgo 25. Perché come cosa psicologica, sperando non ci pensino in troppi, la media è 50 prendendo i numeri totalmente a caso, $2/3$ della media è 35 grossomodo, quindi tutti si faranno sto calcolo e andranno a scegliere 35, però se tutti scegliessero per ipotesi 35 a questo punto il numero medio è 35 di cui devi fare i due terzi che è grossomodo 24-25.
42. O: ok, quindi tu scegli...
43. G: è ovvio che potrei dire: se tutti fanno questo ragionamento...però...se itero troppo il procedimento è ovvio che poi alla fine tutti cercano...o 0 o 1
44. O: eh, ok...
45. G: però parto dal presupposto che non tutti facciano...
46. O: facciano...
47. G:...facciano un'iterazione troppo lunga, mi fermo al secondo step: $i=2$ ($i=2$ è l'unica cosa che scrive)

BcG di I:



1. I: (*legge il testo*) ma sei sicura che non c'entra niente probabilità ...
2. O: perché ti e' venuta in mente la probabilità?
3. I : perché quando ci sono questo discorso di numeri.. cioè mi viene...e' una mia associazione di... ma sarà più una paura di...va beh... reminescenze....(*ricomincia a leggere il testo ma sottovoce*) due terzi della media scelta da tutti i giocatori (*pensa in silenzio e poi dice sottovoce*) quindi tra zero e cento...
4. O: ti e' chiaro il testo?
5. I: sì, sì (*pensa in silenzio*) scegliere un numero ...io partirei con un esempio...cioè io scelgo 50 (*scrive 50*) il numero più vicino ai due terzi...ai due terzi della media dei numeri ...mettiamo che come media venga fuori 50 i due terzi di 50 sarebbe?
6. O: sì.

7. I: due terzi di 50...quale potrebbe essere una buona scelta per vincere...aiuto... (*pensa*) che vincerà mille euro non c'entra...
8. O: si poteva essere anche 2000 o un milione...
9. I: e' tanto grave non avere nessuna idea...
10. O: assolutamente no...ok ti e' chiaro che cosa ti si richiede?
11. I: sì
12. O: le regole del gioco ti sono chiare. Ci sono tot persone ...
13. I: sì ognuna deve scegliere questo numero, poi si fa la media e chi più si avvicina, cioè chi rientra nel ...sì chi più si e' avvicinato ai due terzi di quel numero comunque vince. Tra questi uno comunque e' il vincitore.
14. O: sì quindi sapendo che il gioco è questo se tu dovessi giocare quale numero sceglieresti e perché?
15. I: eh...quale numero sceglierei, (*pensa*) non saprei dire quale numero sceglierei...
16. O: tranquilla non c'e' una soluzione, non c'e' un numero che è bene assolutamente giocare..
17. I: essendo n giocatori cioè può essere...() metti che uno sceglie...20, uno sceglie 50 e uno sceglie... 90 (*scrive questi tre numeri*) ok? La media intesa proprio come ...media?
18. O: media aritmetica diciamo...() esatto quella
19. I: diviso tre... 50 e qualcosa ...
20. O: vuoi la calcolatrice?
21. I: facciamo che facciamo ottanta (*cambia il 90 scrivendoci sopra 80*)...me lo faccio venire, la media è 50 (*lo scrive sotto*) e fin qua ci siamo ok? I 2/3 di 50...eh...quanto fa i 2/3 di 50...viene un numero con la virgola...
22. O: però tanto è chi ci si avvicina di più, non deve venire un numero intero.
23. I: (*usa la calcolatrice*) ah, è 33,33. Quindi chi tra 33,33 e chi tra 83,33 (*scrive 33,33 e poco distante sulla stessa riga 83,33*)...giusto? In questo...chi più si avvicina ai 2/3?
24. O: sì, aspetta, cosa stai scrivendo ora?
25. I: no i 2/3 di 50, cioè la media sarebbe 50 in questo caso quindi i 2/3 di 50 è 33,33...ah ma solo i 2/3...quindi io calcolavo anche...lo spostamento.
26. O: cos'era quell'ottantatré e trentatré?
27. I: 83,33 sarebbe...
28. O: 50 più 33,33...no solamente il 33...in questo caso...
29. I: quindi se io avessi scelto un numero da 33,33 a 50...
30. O: no diciamo che se le tre persone scelgono tra 20, 50 e 80, la media è 50, i 2/3 della media è 33,33...
31. I: ah ok! (*cancella 83,33*)
32. O: tra i tre in questo caso vince...
33. I: 20 giusto?
34. O: sì, esatto.
35. I: ...quindi se è così sceglierei un numero comunque basso.
36. O: perché?
37. I: beh, un numero comunque basso perché...eh...perché deve essere comunque un numero... più basso della media (*fa un gesto con la mano verso sinistra*)...perché mi viene da dire che difficilmente potrà essere un numero...non lo so a meno che si scelga un numero da...che so da 60 in su, 60, 70 in su...quello che può essere, ma mi viene da dire...cioè più basso..non troppo alto...ora da qui a dire in quale...in quale fascia un numero...
38. O: però questa è già un'idea.
39. I: (*pensa*) quindi poi comunque devo dirti che numero scelgo...no?
40. O: no, puoi anche darmi l'indicazione di una fascia, tu comunque mi hai già detto qualcosa, se tu ritieni che quella sia la...
41. I: anche perché 2/3...(a bassa voce) se tutti scelgono 100 i due terzi di cento è...
42. O: è circa 66.

43. I: circa 66, quindi sicuramente non potrà essere superiore a 66...
44. O: il numero che tu scegli?
45. I: sì, il numero che scelgo.
46. O: però il numero che tu scegli lo aggiungi poi agli altri...quindi...
47. I: ah è vero va ad aggiungersi...no, ma voglio dire che al massimo tutti i giocatori possono dire 100...ah però in quel caso la media è 100 e i due terzi appunto è 66.
48. O: esatto però se tutti dicono la stessa cosa...
49. I: non c'è vincitore dici...
50. O: vincono tutti allo stesso modo o se vuoi si dividono i mille euro. Però è giusto quello che dicevi.
51. I: Però in ogni caso direi...(pensa e pi dice sotto voce) direi al massimo...
52. O: in che senso al massimo?
53. I: non lo so mi viene da dire questa cosa qua...che non direi un numero più alto di 60, di questa cosa qua...però io dico 60 e gli altri dicono 100...anche se dico 80 e gli altri dicono cento in realtà...vale fino and un certo punto.
54. O: perché vale fino ad un certo punto?
55. I: se tu dici 80 e gli altri dicono 100, la media è comunque sempre...ah, beh la media metti cento...280 diviso tre...93...
56. O: i $\frac{2}{3}$ di 93...
57. I: i $\frac{2}{3}$ è comunque...
58. O: chi vince?
59. I: vinco comunque io quindi dire più basso di 66 non è detto...è bello perché prima avevo magari i lampi...i lampi di genio poi...
60. O: però quello che tu dici era il caso in cui gli altri scelgono tutti 100.
61. I: sì perché ero partita dall'idea, da comunque il trovare...cioè il fatto che fosse comunque i $\frac{2}{3}$ di un numero e la media al massimo può essere 100 e i $\frac{2}{3}$ mi veniva quel numero però in realtà...(pensa in silenzio e poi riprende a bassa voce) e invece prendendoli all'altro modo...niente...se fosse un numero basso...tra zero e cento...potrei anche avere zero...
62. O: se tutti dicono zero...
63. I: se tutti dicono zero due terzi di zero è zero e quindi è la stessa cosa di 100...(pensa)...come è difficile...(pensa) come faccio a dire...le informazioni sono...
64. O: non c'è una scelta che ti garantisce la vittoria.
65. I: sì però se dovessi dire...cioè (legge il testo) "quale numero sceglieresti" ...mi verrebbe da dire un numero abbastanza vicino al 50 semplicemente perché è una via di mezzo tra lo zero e il cento, non perché ci sia una vera e propria...
66. O: quindi tu dici una cosa vicino al 50?
67. I: una cosa vicina al 50 però...anche perché cioè voglio dire anche i giocatori possono essere...i giocatori possono essere anche un milione quindi alla fine il numero...magari la media si può avvicinare al 50.
68. O: dipende ovviamente da quello che scelgono gli altri e che fanno lo stesso tuo ragionamento...tutti quanti contemporaneamente invitati a scegliere questo numero...
69. I:...(rilegge il testo in silenzio) sono bloccata...(pensa ancora in silenzio) mi viene da dire...nessun numero perché mi viene da contraddirmi in continuazione.
70. O: in che senso?
71. I: ma nel senso che ora ero spostata sul "se tutti dicono cento" e allora va beh allora abbiamo detto questa cosa (indica la parte di scritto fatta in precedenza)
72. O: del 66.
73. I: se dicono tutti che ne so 20 allora il più basso è...e no...(comincia a scrivere) 10, 20,30 ...in questo caso... 20 (scrive 20 sotto i tre numeri come ha fatto per la media precedente) allora i $\frac{2}{3}$...6 e qualcosa...
74. O: i due terzi di 20...

75. I: sono dodici e qualcosa, tredici.
76. O: sì. Ecco in quel caso chi vince tra 10,20 e 30...
77. I: sarebbe 10...(guarda il foglio su cui ha scritto) mi verrebbe da dire che però è sempre il numero più basso.
78. O: ok ...perché ora stai guardando sia quello di prima con 20, 50 e 80...
79. I: ...che questo.
80. O: ok. E questo perché?
81. I: perché vince il più basso? Beh, per il fatto che stiamo dicendo...cioè se comunque è ...chi ha scelto il numero più vicino ai due terzi, due terzi quindi è minore di quello che è la media...però più basso è relativo...cioè più basso rispetto a cosa?
82. O: sì tu dici: quando devo scegliere come faccio a sapere ... più basso
83. I: rispetto a cosa? (*pensa in silenzio*)
84. O: a cosa stai pensando?
85. I: sto facendo qualche esempio tanto per...e comunque non...cioè per visualizzarmi anche la cosa però non...non saprei...poi io non ho ben... mi viene da dire che...non so perché, sicuramente sbagliato però il fatto che comunque per un elevato numero di giocatori, quindi di numeri che uno può scegliere, non so perché sulla media rimane nel...nel mezzo...cinquanta. Ho quest'impressione, questa idea e quindi sarei tentata di dire giusto un numero...non lo so... tra i trenta e i 50...un numero comunque in quella fascia lì.
86. O: anche quando hai pochi giocatori?
87. I: e no, poi faccio un ragionamento sui grandi numeri mi viene da fare questa associazione...e già se i giocatori fossero pochi no, allora lì proprio cioè...potrebbe essere...
88. O: pensa proprio al caso dei pochi giocatori...
89. I: se fossero pochi?...non lo so se sono pochi...dipende se anche gli altri pensano la stessa cosa che penso io...e non credo!
90. O: beh, teoricamente hanno tutti quanti le stesse informazioni che hai tu, quindi anche loro si dovrebbero fare dei ragionamenti del tuo stesso genere
91. I: e ma non è detto che il mio ragionamento sia giusto...se loro fanno il mio stesso ragionamento allora anche loro dicono...ci manteniamo su quei numeri allora a quel punto lì...
92. O: su quei numeri quali?
93. I: i numeri più...trenta, quaranta, cinquanta...i numeri più bassi.
94. O: ok.
95. I: Però se tutti...diciamo così...(pensa in silenzio e sembra bloccata) ...uh.
96. O: ti convince come risposta?
97. I: no.
98. O: quindi tu dici sicuramente non vado oltre ai 50.
99. I: no, dovendo...cioè a questo punto non avendo altre idee, direi non vado oltre i 50 però, ripeto non perché ci sia dietro un ragionamento così...
100. O: e se siamo tre giocatori...
101. I: se siamo tre giocatori?
102. O: tre perché hai fatto gli esempi con tre.
103. I: se siamo tre giocatori...può essere...(pensa e guarda ciò che ha scritto per un po')
...la soluzione o è solo...
104. O: è la tua opinione...una strategia possibile diciamo...
105. I: sì certo...
106. O: ma se sei soddisfatta i dirmi intorno al 50...è più che lecito...
107. I: sì perché io non ...è l'unica cosa che potrei dire.
108. O: ok.

BcG di M:

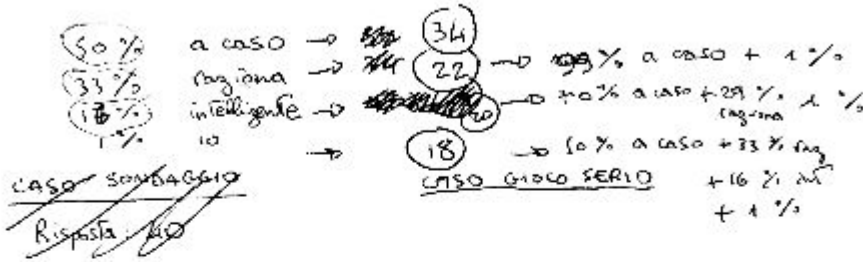
$$\frac{n}{2} \approx 50$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{n}{3} \approx 34$$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{6} \approx 22$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{n}{2} \cdot 50 + \frac{n}{3} \cdot 34 + \frac{n}{6} \cdot 22 \right)$$

$$= 25 + 11 + 4 = 40$$



$$\frac{n}{2} \rightarrow 50$$

$$\frac{n}{3} \rightarrow 34$$

$$34 \cdot \frac{2}{10} + 22 \cdot \frac{2}{10}$$

$$238 + 66 = \frac{304}{10}$$

$$34 \cdot \frac{10}{100} + 22 \cdot \frac{33}{100} + 20 \cdot \frac{16}{100}$$

$$17 + 7 + 6 = 30$$

$$1700 + 726 + 320 = \frac{2746}{100}$$

1. M: (legge il testo) dunque...dunque...il numero più vicino ai due terzi (alza la voce quando pronuncia 2/3) della media dei numeri scelti da tutti i giocatori...ai due terzi della media...uno cosa potrebbe dire ad esempio...la prima cosa che uno dice è: se io prendo cento numeri a caso dentro, tra zero e cento, la media credo che per quel poco che mi ricordo dovrebbe attestarsi attorno ai 50, qualcosa del genere, quindi uno dovrebbe scegliere i due

terzi di 50, però si presuppone che siano esseri umani intelligenti e che facciano lo stesso ragionamento, intanto i due terzi di 50...vent...no dic...tre, fa diciassette per due trentaquattro...trentaquattro...è un po' un circolo vizioso perché ammesso di avere 100 persone intelligenti, no (*va rileggere il testo*) n giocatori e un numero tra 0 e 100, ammesso di avere n giocatori intelligenti ...uno dice se tutti scelgono 34, io che sono più furbo scelgo i 2/3 di 34 e vado a dire 22...allora quindi...bah...una possibile scelta quale potrebbe essere di dire allora...supponiamo che mediamente ci siano i deficienti, quelli normali e quelli un po' più astuti, i deficienti dicono un numero a caso, quelli normali che riescono ad arrivare fin dove ho detto io adesso dicono 34 e quelli un po' più astuti dicono 22 ...e poi ci sono io, che vengo dopo quelli più astuti che quindi dico...allora mettiamo che...sì...quale potrebbe essere una buona scelta per vincere...sicuramente dire un numero tra 22 e 34 ...allora ammesso...dividiamo in tre parti uguali queste categorie, quindi vorrà dire che la media degli uni sarà 50, la media degli altri sarà 34, la media degli ultimi sarà ...i due terzi di 34 che abbiamo detto essere 22, io che...però è anche vero che probabilmente se noi facciamo questo test a livello assoluto le persone astute sono sicuramente meno delle persone incaute quindi si potrebbe fare una sorta di media pesata tra le tre cose e dire...cosa possiamo fare come scelta...50%...50,30, 20...50...metti che n sia 100, va beh, teniamo n (*adesso comincia a scrivere: elenca i casi possibili dividendoli come parti di n e associando a ciascun gruppo un scelta media*) n/2 dicono qualcosa che avrà come media 50 e degli altri n/2...2/3 diranno...abbiamo detto 34 e l'altro terzo si suppone che dica 22...quindi io che sono astuto cosa dico? Come faccio a fare sto conto? Adesso cado sulle cose più facili...se n/2 dicono 50 ...la media cos'è? La somma diviso n. (*parla mentre scrive* $\frac{1}{n}(\frac{n}{2}50 + \frac{n}{3}34 + \frac{n}{6}22)$) questo è quello che dico io (*fa il conto*) 25+ più o meno facciamo 11 più ...e questo è duro...questo ...beh tanto tutto dipende da queste cose che ho messo io che sono abbastanza a caso quindi ...questo è un 4, viene 40...40 potrebbe essere una buona scelta per vincere? Rivediamo un po', perché tutto è basato su queste percentuali che ho dato alla fine che sono abbastanza ...casuali, io dico (*comincia a scrivere*) 50% delle persone è...fondamentalmente a caso poi ho detto che i 2/3 del 50% che sarebbe il 33%...ragiona, si limita a ragionare, e il restante 17? Mi sembra un po' altino questo 17, è intelligente

2. O: questa presa di posizione sugli intelligenti...
3. M: è un po' alta è vero, è vero
4. O: No, anzi, pensavo fosse più alta...
5. M: no io mi immagino un sondaggio nazionale con vecchietti, bambini...e sono stato anche abbastanza generoso...però effettivamente mi aspettavo di trovare un numero un po' più basso, 40 è molto alto cioè presuppone che veramente la gente tiri giù a caso...quindi eh...sì ovviamente cose banalissime: molto dipende da chi sono gli altri giocatori, tutto dipende da chi sono i giocatori e dall'ambito in cui si è inseriti, se ci sono n giocatori che sanno giocare allora il discorso cambia, se sono n persone perse a caso per la strada...e allora...allora no. Prendiamo che chi gioca sa, sa come avvengono le regole del gioco, sa se è stato preso per la strada mentre fa la spesa oppure è in tavolo insieme ad altra gente...
6. O: facciamo due casi?

7. M: facciamo due casi.
8. O: puoi fare un caso in cui tu giochi insieme ai ...tuoi simili e il caso...
9. M: caso sondaggio...
10. O: effettivamente la scelta è davvero diversa
11. M: caso sondaggio (*lo scrive*), io dico, risposta mia essere intelligente...(*guarda ciò che ha scritto*) 1% e via (*aggiunge un 1% alle percentuali precedentemente scritte etichettandolo con la parola io*) essere più che intelligente ...40, caso gioco serio (*lo scrive*) nel caso gioco serio secondo me bisogna un attimo fare un ragionamento più fine, ovviamente come dicevi tu prima non c'è una soluzione cioè bisogna vedere fino a che punto...si potrebbe andare avanti all'infinito...e vedere fino a che punto uno si ferma...ovviamente non c'è nessuno in un gioco serio, oppure molto bassi, che tirano a caso quindi quanto meno al primo step ci arrivano ...di dire...ma comunque la gente non tirerà un numero alto perché è stupido dire un numero alto essendoci i 2/3, sto facendo giusti i conti...sì i 2/3 ok...i 2/3 quindi...uno dice...uno dice sopra i 34 è difficile che si vada...34 veniva da questo 2/3 no? Ok 34 è giusto, se tiri a caso i 2/3 viene 34...però la gente lo sa e dice metti che la gente dica 34, io metto 22 (*mentre parla guarda quello che ha scritto*) ...facciamo un passo ancora avanti, mettiamo che io sia ancora più intelligente di loro, tot di gente dice 34 e tot di gente dice 22...la media ...ammettiamo che questi siano in numero uguale, la media...questo 22 l'ho fatto giusto? Non vorrei aver ceffato il 22, però il 22 sono i 2/3 di 34...e no ho sbagliato, in questo caso qui io persona super intelligente ...non è vero che devo fare i 2/3 di 34, devo fare i 2/3 della media tra 34 e 50, perché io do per scontato che ci siano tot di persone stazze e ci siano tot persone che al primo livello ci sono arrivate, non che abbiano tutti pensato questa cosa qua...quindi il discorso cambia...come cambia? Ecco qui bisognerebbe sapere la matematica ...allora se io ho n/2 stazzi...poi ci sono n/3 che dicono 34 (*lo scrive*) perché sono arrivati al passo uno, io che sono intelligente cosa dico? Ammet. ...innanzi tutto ammetto di essere l'unico intelligente che riesce arrivare al passo due, e quindi secondo me c'è almeno un 50%...e no facciamo così, così mi piace di più...io suppongo (*rilegge ciò che ha scritto*) che ci sia il 50% di gente a caso, il 33% che ragiona, il 17% intelligente e 1 io, facciamo 16% intelligente (*corregge 17% con 16%*) e 1 io, ora abbiamo detto (*ad ogni gruppo associa una scelta e la scrive accanto*) questo dice 50, questo dice 34, questo dice, tutti questi dicono ...tutti questi che sono intelligenti, ma non tanto quanto me dicono: gli altri hanno detto o 50 o 34 quindi ammettendo che l'uno per cento più o meno non c'entri niente, tirano fuori un 47, dicono la gente o tira a caso o ha fatto il primo step, io arrivo ...ad essere così intelligente da dire che...50% meno mezzo hanno votato 50 e 50% meno mezzo hanno votato 34, la media è 47, i 2/3 di 47 sono ...48 diviso tre fa...no 16, diviso tre per due trentadue, incredibile, venti ...e no ...no sto dicendo stupidate, 48 diviso 3 fa 16...32...e no, no, ti sto facendo perder un po' di tempo, però...e no! E no, vedi è il punto di partenza che sbaglio, ho capito che la gente è scarsa però almeno a fare i 2/3 di 50 ci deve arrivare...cioè uno dice...non può dire un numero a caso, se no non gioca la gente...sottile la cosa...potrebbe durare in eterno...
12. O: no, però è vero che ci sono dei ragionamenti lunghissimi che si possono fare...

13. M: (*rilegge a bassa voce il testo del problema*)...allora abbandoniamo il sondaggio che non mi piace (*cancella la scritta "caso sondaggio" e la scelta relativa*), cioè non voglio la gente scarsa, uccidiamo la gente scarsa.
14. O: ok, togliamoli.
15. M: tattica un po' nazista però...una selezione naturale della specie, no artificiale della specie. Non c'è gene che tira un numero a caso, perché se no è triste la cosa, quindi a questo punto la gente che arriva allo step uno almeno dice allora...il 50% dice...tra zero e cento la media è 50 io metto i 2/3 della media che è ...sempre 34, assumiamo che il primo step sia 34, mi piace di più (*cancella dallo schema precedente 50 e mette 34 e fa così anche per gli altri valori*)...allora c'è sempre il super uomo di Nietzsche dietro che dice che tutti hanno detto 34, ma io sono più furbo e dico i 2/3 di 34 che fa 22 più o meno, questo è quello che ragiona, quello che dice a caso comunque non dice a caso, dice questo (*indica 34 sul foglio*), quello che ragiona dice questo (*indica 22 sul foglio*)...e quello intelligente...questo era lo step un po' più delicato, quello intelligente cosa dice? ...supponiamo che io sia ancora più intelligente, ci sarà il 50% di gente che ci ha dato a caso e il 50% di gente che ragiona...quindi la media si attesterà attorno ai ...28 io dico i 2/3 di 28, dico 18 e adesso io che vedo tutto dal di fuori e sono forte che non so perché mi devo fermare al terzo step, ma sono sufficientemente arrogante per dire che nessuno arriva fin al terzo step, dico...allora...secondo me ...no. Togliamo il 18 perché quello intelligente sa già, è intelligente per dire che non ci sono...(indica la "colonna delle percentuali") è questa, è la percen, è questa l'intelligenza fondamentalmente...(parla guardando la "tabella" che ha scritto) allora questo dice tutti tranne me hanno scelto 34 e quindi io prendo i 2/3 di 34, questo già deve fare una distinzione e dice secondo me abbiamo un...30% di persone quindi ...aspetta passo questo qui (*comincia a scrivere*) 100% , 99% ammesso che siano 100 di a caso + 1% che risponde, qui abbiamo sempre 1% che risponde, ma che dice che secondo lui ci sarà 70% di gente che ci darà a caso + 29% di gente che ragiona ...quindi (*scrive in una parte sottostante del foglio*) la media in questo caso sarebbe ...(svolge i calcoli sul foglio) 30 che è in mezzo ecc perché non mi tornava...devo prenderci i 2/3 quindi 20...no non può essere 20...deve essere molto più vicino a 34, ah no. Ok, 30 è molto più vicino a 34...e quindi io dico 20 (*lo scrive nella tabella*) poi arrivo io super intelligente che dico: secondo me la gente che ragiona si crede intelligente, ma non lo è ...la gente intelligente si crede intelligente, ma c'è chi è più intelligente di loro...quindi andiamo alle percentuali che avevo detto all'inizio che sono queste (*indica le percentuali nella tabella*) in cui c'è il 50% della gente...ah ok, che ci tira a caso, ma a caso non è più a caso, a caso è comunque almeno lo step uno lo fa più il 333% che ragiona più il 16% intelligente più 1% che sono io...(mentre parla scrive divisione della popolazione con le percentuali per indicare i gruppi) e quindi cosa devo fare...la stessa cosa di qua (*indica lo svolgimento della media fatto precedentemente e poi svolge i calcoli*) quindi la mia risposta è 17 più 7 più... aspetta perché poi devo farci i 2/3...e la peppa...cosa sto combinando...(fa i calcoli a mente) ..oh mi piace perché viene anche divisibile per tre, no, sì che viene divisibile per tre, è 30, non è possibile non può fare di nuovo 20...o sì? Se fa di nuovo 20 devo ammettere di non essere così intelligente, di non essere più intelligente degli altri...però potrebbe essere una riprova del

fatto che io metto 20...ammesso di non aver sbagliato i conti (*controlla i primi passaggi*) la calcolatrice è ammessa in questo genere di gioco?

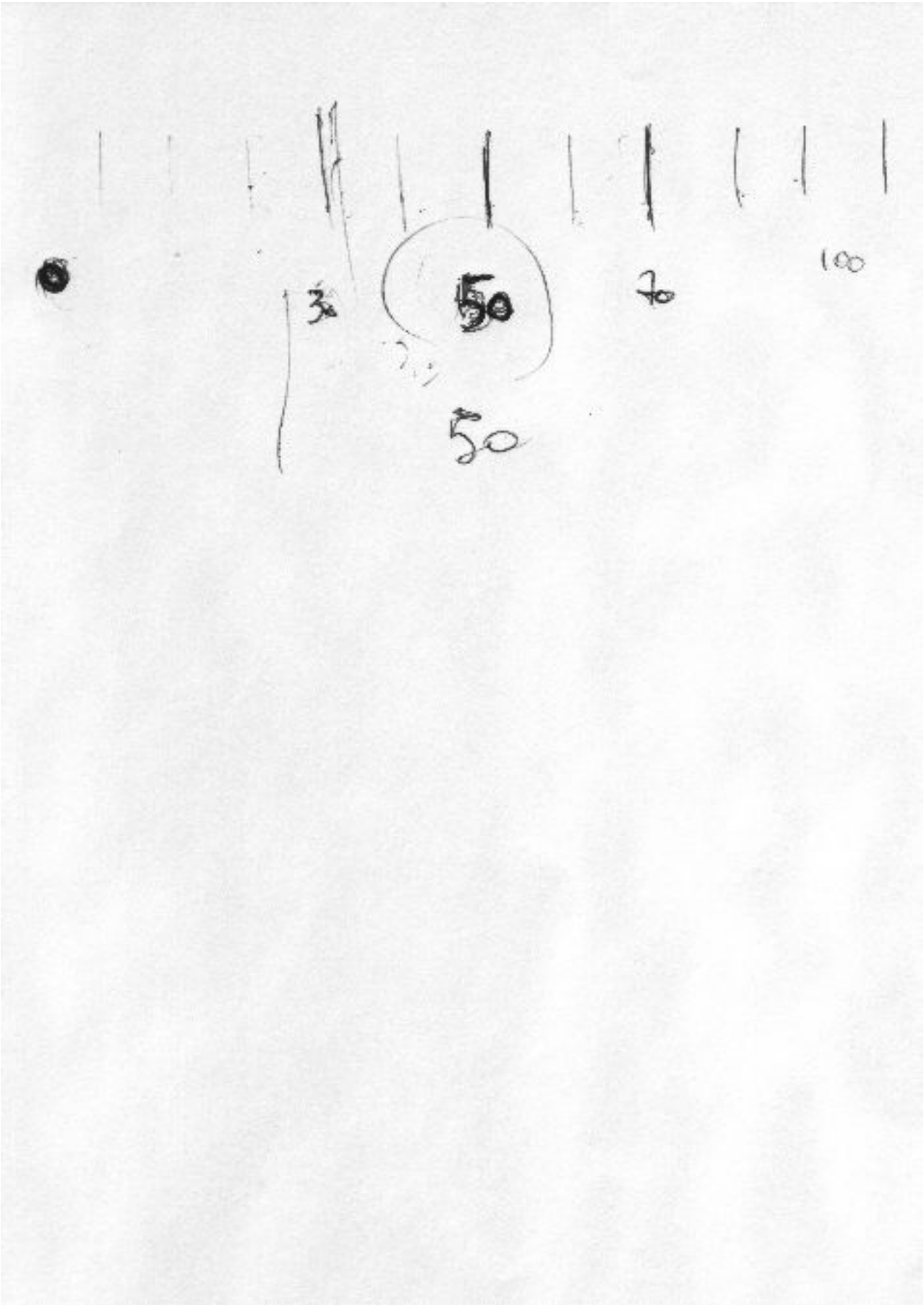
16. O: sì era già disponibile da prima, sei tu che sei l'uomo del calcolo...

17. M: (*rifà i calcoli con la calcolatrice*) 27,46...oh, mi piace già di più, 27 diviso tre fa nove per due: diciotto (*compila la tabella mettendo come sua scelta 18*)

18. O: ok, questo è il responso del super uomo?

19. M. il super uomo dice 18 con tutte le riserve ...chiaramente bisognerebbe guardare in faccia i giocatori.

BcG di Mittu:



1. M: (*legge il testo a mente*) Secondo me, qui, questi 100 “beoti”...
2. O: non è detto che siano 100
3. M: ah... (*rilegge il testo*) ah, ci sono enne giocatori, che devono scegliere un numero tra zero e cento... vah beh possono anche essere 1000 si va bene, ce ne sarà un po'. Secondo me per un'idea che ho in testa, più sono e più la media dei numeri che sceglieranno loro sarà cinquanta secondo me... si avvicinerà a cinquanta perché... secondo me, secondo me.
4. O: sì ok.
5. M: e allora io per vincere i mille euro mi scelgo... (*ritorna a leggere il testo*) scelgo... “il numero più vicino ai due terzi della media”... quindi i due terzi di 50... non so devo fare il conto?
6. O: quello che vuoi.
7. M: posso anche non farlo? Più o meno sarà... due terzi sarà più o meno sui 37... non so..
8. O: sì 33 e qualcosa
9. M: 33. io sceglierei così.
10. O: quindi tu sceglieresti ... il tuo ragionamento me lo ridici bene.
11. M: praticamente, mettiamo che ce ne siano tanti di sti giocatori, mettiamo giusto che ce ne siano un centinaio o duecento
12. O: Ok puoi scegliere quelli che vuoi, n è a tua scelta.
13. M: mettiamo che siano duecento, ce ne sarà una parte che sceglierà numeri sotto il 50 e una parte che sceglierà numeri sopra il 50, giusto o no?
14. O: è vero..
15. M: e quindi se facciamo la media dei numeri sotto il 50 e la media dei numeri sopra il 50 e poi facciamo la media dei due risultati probabilmente si avvicinerà a cinquanta.
16. O: ok, sono d'accordo e quindi tu hai deciso di scegliere i due terzi di 50.
17. M: sì.
18. O: e se tutti ragionassero come te?
19. M: ah... loro sanno che io so... eh beh io a questo non ci ho pensato... sì ma io ho detto che sono 100 beoti!
20. O: sì la premessa era questa, però invece pensa che in realtà sono 100 Mittu che più o meno pensano come te.
21. M: se tutti... se ci fossero 100 Mittu... il mondo stia attento... cosa succederebbe se ci fossero 100 Mittu... sceglierebbero... però non c'è forma di comunicazione tra di loro...
22. O: no sono tutti in una stanzetta.
23. M: potrebbe secondo me... boh... probabilmente sceglierebbero in tanti un numero improbabile.
24. O: perché?
25. M: perché... ah però un momento no.. se sono cento Mittu non so cosa succederebbe... se ci fossero cento Mittu che facessero un ragionamento di questo genere, ho capito ... diciamo, se tutti fossero 100 Mittu, ma nessuno di loro sa che anche l'altro è un Mittu perché comunque non c'è una forma di comunicazione e loro non si conoscono...
26. O: quello è verissimo però tu supponi che abbiano selezionato per fare questo gioco un tot di persone che anche tu riterresti particolarmente intelligenti, cioè hanno detto mettiamo nelle

- stanzette, ma anche tre o quattro solo, persone intelligentissime e vediamo cosa scelgono...queste persone sono particolarmente intelligenti quindi tu sai che il tuo avversario, non sai chi è, non lo conosci, però sai che è intelligente.
27. M: intelligente...quindi cioè tutti questi giocatori, intelligenti, dovrebbero scegliere dei numeri...che poi alla fine la media non sia un numero che si avvicina al 50. però...cioè va a discapito di tutti, nessuno ...però nessuno sa...mi metti in difficoltà.
28. O: la tua prima risposta è corretta, ed è quello che ...che in realtà poi quando tu fai giocare le persone, giocano così; però io ti ho dato in più, dato che tu avevi detta subito, quello che ti ho detto. Un'altra situazione in cui...
29. M: Aspetta un attimo che ci ragiono un momento...cento Mittu...tutti sanno che hanno un Mittu di fronte...quindi una persona particolarmente intelligente...ah, ah
30. O: ah, ah sì...
31. M: (*pensa in silenzio*) io non so ...potrei dato che comunque la media secondo me se l'insieme di questi numeri, di queste scelte, fosse casuale si avvicinerebbe comunque al 50...io proverei dal canto mio o ad abbassarla scegliendo un numero bassissimo o ad alzarla scegliendo un numero altissimo...però voglio dire...tra zero e cento...cioè potrei avere la fortuna che tutti scelgono al trenta il su e tutti scelgono dal 70 in su e la media ...e dal 70 in giù scusa, e la media verrebbe 50...io la abbasso dicendo zero e poi faccio i due terzi di un numero più basso di quella che si suppone che sia la media.
32. O: ok e cosa verrebbe?
33. M: però sarebbe troppo casuale capito? Se avessi questo genere di fortuna qua..capito? (*comincia, per la prima volta dall'inizio della risoluzione, a scrivere qualcosa e lo fa su un foglio bianco, non sotto il testo del problema: prima disegna delle tacche consecutive come quelle di un righello e poi mette sotto la tacca centrale il numero 50 e sotto gli estremi, in ordine di grandezza, prima zero e poi cento. Poi fissa questo schema*) io farei così però anche lì e se gli altri la pensano come me probabilmente anche loro ragionerebbero così...e a quel punto io potrei anche pensare di ragionare la contrario...però gli altri poi pensano..gli altri anche sono come me...capito? è troppo casuale! (*guarda lo schema che ha prodotto*) Però io farei così, direi sti qua magari non sono proprio degli stupidi e quindi ci arrivano che il ragionamento, la media potrebbe essere 50 allora io dico, ma, magari dato che pensano anche, prima ancora di scegliere, a sto numero 50...50...50...(*ricalca più volte sul foglio la tacca e il numero 50 corrispondente*) quando per esempio vai in macchina e c'è un ostacolo no?... e devi frenare di colpo...se tu guardi l'ostacolo probabilmente ci picchi dentro. Tu devi guardare dove c'è la via d'uscita, non l'ostacolo, e lo stesso qua (*indica il "righello disegnato*) gli altri hanno già questo 50 in testa (*fa un cerchi sul numero 50*) e quindi, non so, per una deviazione mentale, per una loro auto suggestione magari sono portati a scegliere numeri comunque intorno al cinquanta (segna sul disegno un intervallo intorno al cinquanta diciamo dal trenta in giù, dal trenta in su e dal 70 in giù ok? (*scrive sotto due tacche simmetriche al 50 i numeri trenta e 70 indicando con la penna l'intervallo tra queste due tacche*). La media verrebbe sicuramente 50 (riscrive sotto 50 e la sua tacca corrispondente di nuovo 50), io invece che voglio picchiare nell'ostacolo, mi allontano dal 50 e decido per uno zero così abbasso tantissimo la media e poi mentre tutti si fanno i due terzi del loro ipotetico

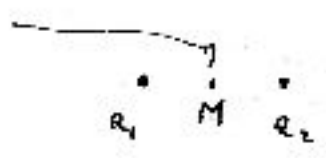
- 50, io mi faccio i due terzi di un numero più basso, non so , di un 35 che è tra zero e 70 (*indica un ipotetico punto tra 30 e 50 sul righello*) e mi faccio i due terzi di un 35.
34. O: che ti viene più piccolo e quindi dici che si avvicina a zero e quindi vinci tu?
35. M: sì.
36. O: ok. Ho capito.
37. M: Hai capito?
38. O: sì. Ho capito che tu...il cinquanta... praticamente vuoi togliere...tutti pensano cinquanta e tu allora pensi...
39. M: (*mi interrompe e comincia a parlare indicando lo schema dell'intervallo di numeri*) tutti pensano che la media sia 50 e che il numero vincente sia i due terzi di 50 allora io gliela abbasso questa media capito? scegliendo non so uno zero e allora la media verrebbe 35, se nessuno ha superato il 70, verrebbe sui 35 e poi mi faccio i due terzi di 35 e mi vinco i mille euro.
40. O: ok. Ho capito.
41. M: perché tutti non superano...staranno intorno al 50 perché hanno in testa il 50 rimangono propensi a dire un numero intorno a 50 capito? A scegliere un numero, quando uno si sceglie il suo numero, intorno al 50 perché hanno sta insegna che gli lampeggia in testa (*indica il 50 sul disegno*) con scritto 50.
42. O: perché la media è 50...
43. M: sì.

u
0 - 100

u=2

a_1 a_2

$$\frac{a_1 + a_2}{2}$$



l=3

0 100 100

$$R = \frac{200}{3}$$

$$\frac{2}{3} R = \frac{400}{3} \approx \dots < 50$$

a b

$$R = \frac{a+b}{3}$$

$$\frac{2}{3} R = \frac{2(a+b)}{3} = \frac{2a+2b}{3}$$

$$a - \frac{2a+2b}{3} = \frac{1}{3} (3a - 2a - 2b) = \frac{1}{3} (a - 2b)$$

$$D \quad \textcircled{1.0} \quad 20$$

$$\pi = 10 \quad \frac{2}{3} \cdot 10 \rightarrow 6$$

a b c

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} = \frac{2a+2b+2c}{9}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 100 = \frac{200}{3} \approx 66.\bar{6}$$

$$0 \quad - \quad \textcircled{67}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 66 = 44$$

⋮
0

$$0 \quad 0 \quad a$$

$$\frac{2a}{3} = \frac{2a}{9}$$

1. S: (*legge il testo ad alta voce fermandosi quando incontra l'intervallo numerico da considerare*) posso scrivere direttamente qui? (*indica la parte bianca del foglio sotto il testo*).
2. O: dove vuoi tu.
3. S: Tra zero e cento ... n giocatori (*scrive "n"*) ... tra zero e cento compresi? (*scrive "0 – 100"*) boh, leggiamo (*ricomincia a leggere il testo*) ...bello...(continua a leggere) non è concesso...bello perché non ho la più pallida idea di come si risolve (*legge il testo fino alla fine*). Quale potrebbe essere una buona scelta per vincere? Allora vince (*guarda il testo*) chi ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media dei numeri scelti da tutti ... quindi da tutti compreso lui?
4. O: sì.
5. S: da tutti compreso lui...(rilegge il testo) vince colui che ha scelto il numero più vicino ai due terzi della media...e ci sono enne giocatori...enne...quindi potrebbero anche sceglierlo tutti uguali perché non c'è nessuna forma di accordo...uh...boh...niente devo fare una cosa semplice non vedo soluzioni...proviamo con $n=2$, due giocatori (*scrive "n=2"*) due giocatori...due giocatori...eh?due giocatori (*pensa guardando in alto*) mi sta venendo in mente...dunque, due giocatori sono tutti e due distanti dalla media, il primo gioca diciamo a_1 (*scrive "a₁"*) e l'altro a_2 (*scrive "a₂"*) la media è $\frac{a_1 + a_2}{2}$ (*scrive mentre parla*) ...eh...(riguarda il testo) più vicino ai due terzi della media...i due terzi della media, i due terzi della media è ...dove sta? Tra... cioè è più piccolo della media, due terzi...loro sono equidistanti dalla media, due terzi è più piccolo della media, quindi vince chi ha dato il numero più basso. Dovrei fare i conti però mi pare evidente. Allora abbiamo due numeri, chi dà il numero più vicino ai due terzi della media...due terzi della media è più basso della media, loro sono equidistanti...se vuoi ti faccio una rappresentazione grafica (*comincia a disegnare*) qui abbiamo a_1 , qui a_2 e questa è la media (*scrive quello che dice disegnando i punti nell'ordine dato dal pedice come se appartenessero ad una retta, anche se non la traccia esplicitamente, ed in mezzo mette il "punto media" M*) due terzi della media sta di qua (*fa un segno che parte da M e va indietro verso sinistra verso a_1 e quindi suppone che il primo sia un numero inferiore al secondo*) e quindi vince a_1 . Almeno che a_1 sia uguale ad a_2 e allora vincono tutti e due e qui va beh spartiscono...qui non c'è scritto cosa succede...a questo punto qual è la strategia vincente se ci sono due giocatori? A parte che non c'è scritto se loro sanno quanti giocatori sono...
6. O: sì lo sanno.
7. S: non c'è scritto, potrebbero non saperlo...allora mettiamo che lo sappiano...se lo sanno conviene puntare il minimo numero. Zero non so se è possibile...
8. O: sì, sono compresi gli estremi. Possono essere compresi come no, ma tanto è uguale...
9. S: allora se sono due conviene puntare zero. A questo punto mi chiedo se vale ...se si può ... eh, no perché forse aumentando il numero dei giocatori, potrebbe essere che la media non sia così...sia un po' più in là, più vicino cioè i due terzi della media sia più vicino alla media e forse un numero troppo basso è troppo distante dai due terzi della media. Vediamo cosa succede con due giocatori perché con uno conviene zero...sempre, con tre giocatori...con tre

giocatori...*(scrive "n=3")*...sto pensando (*riflette in silenzio*)...stavo portando i casi limite: se due giocatori puntano cento e l'altro zero (*scrive questi casi limite*) cioè non è una congettura ancora, diciamo che sto cercando di verificare se lo zero potrebbe funzionare ancora. Allora penso: il caso peggiore è quando gli altri puntano alti così due terzi della media diventa più grande e lo zero più distante; allora se due giocatori puntano cento e l'altro zero la media è (*scrive $M=200/3$*) $200/3$ e i due terzi della media è (*scrive $400/9$*) che è circa...quanto è $400/9$...più piccolo di quaranta, no è più grande di quaranta, però è minore di cinquanta perché cinquanta per nove è quarantacinque...quindi questo è non so quanto, ma è minore di cinquanta (*scrive "<50"*) quindi più vicino ci è andato lo zero...da qui dovrei dimostrare adesso...però...che anche se non scelgo il cento funziona lo stesso perché forse se si abbassano loro vanno più distanti...può essere? Può essere? Allora a questo punto direi che per tre giocatori potrei andare, mi sembra in termini ...adeguato al contesto, la congettura che lo zero funzioni sempre nel caso di tre giocatori. Allora per dimostrarlo dovrei dire...allora uno punta zero, l'altro punta a e l'altro punta b (*da adesso in poi scrivo i passaggi che esprime anche a parole*) allora la media è $\frac{a+b}{3}$ e i due terzi della

media è a più b fratto...no...due per a più b fratto tre che è più vicino a $\frac{2(a+b)}{3}$ beh...questo cos'è... $\frac{2a+2b}{3}$ ah...dovrei fare...dunque questo è più grande o più piccolo?

Questo è chiaramente più piccolo sia di a sia di b ...stavo pensando che la media è più piccola...no...non si sa...è più piccola del più grande, no! Ma l'altro ha puntato zero! Uno punta zero, uno a e l'altro b, la media dove sta? ...è più piccola del più grande di sicuro, o di tutti e due? Uffa...cioè dovrei verificare se questo qui ...va beh senti ...*(comincia a scrivere: " $a - \frac{2a+2b}{3}$ "*) quanto fa? (*fa minimo comune multiplo e scrive: "*

$\frac{1}{3}(3a - 2a - 2b)$ ", *svolge i passaggi algebrici successivi e scrive " $\frac{1}{3}(a - 2b)$ ") e qui mi interessa il valore assoluto e vattelapesca! Chi è il più piccolo? Questo o $\frac{2a+2b}{3}$?*

Dunque...chi è il più piccolo...no...penserei una strategia migliore perché non ho voglia di fare i conti...ah...(*a bassa voce*) dovrei vedere se questo o questo ...dove è minore...uffa...(si blocca e pensa un po' e poi ripercorre in silenzio le cose che ha scritto). Il problema che a media con tre è un disastro...no stavo pensando: se a è abbastanza in mezzo...forse riesce ad essere più vicino alla media; tipo se noi proviamo zero, dieci, venti (*scrive i numeri*) cosa succede? La media è dieci (*scrive $M=10$*) giusto? Perché trenta diviso 3, la media è dieci e i due terzi di dieci (*scrive $2/3 * 10$*) è venti terzi. Ecco lì il contro-esempio! ...zero non funziona perché due terzi di dieci fa..è maggiore di sei (*scrive >6*) e quindi in questo caso vincerebbe il 10... però no funziona in questo caso...*(pensa in silenzio)* allora ripartiamo: a, b, c (*scrive le lettere e $\frac{a+b+c}{3}$*) è la media, due terzi di questo ...*(*

esegue i passaggi algebrici e scrive $\frac{2a+2b+2c}{9}$) dunque questa roba può essere zero e al

massimo a, b, c possono essere cento quindi sarebbe trecento fratto tre..due terzi di cento (*scrive* $273*100=200/3$) che è ...66? Sì $66.\bar{6}$ (*lo scrive*) qui quindi la media...quindi questi due terzi stavano lì...quindi tenderei a non ...a non stare lì dentro più o meno...(*scrive* "0 – 66")...sessantasette anche (*cancella 66 e scrive 67*) ...(*rimane fisso a pensare sulle ultime cose scritte, cerchia il 67 e continua a pensare in silenzio per qualche secondo; infine comincia a riguardare tutto quello che ha scritto fino a quel momento*) stavo pensando che potrebbe essere questo...però nel caso di due non era quella lì...(*pensa*) nel caso di due...era zero..*(riguardale cose scritte)* ...perché era il più piccolo, qui potrebbe essere quello in mezzo sempre..no, non è detto però...non è detto, io come faccio a puntare quello in mezzo? Non so quanto mettono gli altri...(*pensa*)..

10. O: Non c'è una soluzione vera...nel senso che..*(mi interrompe)*
11. S: No, d'accordo, ma magari mi conviene...
12. O: sì, ce ne è una che magari...
13. S: ...tra venti e quaranta...
14. O: sì, un range in cui,,ma non è neanche detto...
15. S: (*pensa*) e...dovrei studiare la probabilità: fissati b e c, dato a, la probabilità che a sia più vicino ai due terzi della media in funzione di a (*pensa*) per esempio se a è più grande, non va bene ...(*pensa*)
16. O. su questo hai ragione, però pensa che in realtà se usi la probabilità... devi pensare che le altre scelte sono fatte da persone...
17. S: sì, certo. Presuppongo che le facciano a caso...se gli altri lo fanno a caso...(*pensa*)
18. O: ...che gli altri giocatori vadano a caso... è possibile però...
19. S. No, certo è un'ipotesi che metto; allora supponendo che vadano a caso...e trovo qualcosa.
20. O: ok.
21. S: dopo di che da lì forse posso aggiustare dicendo che...va beh supponiamo che anche loro usino la stessa strategia...per raggiungere strategie più raffinate, ma va beh ...si forse...(*si blocca*)
22. O: Ok, non avevo capito, scusa.
23. S: (*pensa su quello che ha scritto*) no, mi sono bloccato...allora (*pensa in silenzio guardando le ultime cose scritte*) mettiamo che tutti e tre prendano un numero tra 0 e 67...però a questo punto due terzi della media viene più basso...quindi al massimo sarebbe due terzi della media che è 67...ossia (*scrive* $2/3*67$) ossia faccio 66 che è circa ventidue per due (*scrive 44*), ma adesso lo stesso discorso...stesso discorso per qui (*scrive serie di punti in verticale sotto per indicare la continuazione*) a questo punto mi verrebbe da puntare zero. A questo punto vediamo se riesco a fregarli perché so che gli altri due fanno questo ragionamento quindi puntano zero, non è che se io punto qualcosa di più alto riesco a vincere io ? No perché $0,0,n$ viene n diviso tre che è già più vicino a zero che a n . no se tutti fanno questo ragionamento conviene puntare zero. Quindi io punto zero con la speranza però che anche gli altri...abbiano fatto questo altrimenti se uno mi punta dieci e uno venti...però forse mi basta che uno solo mi faccia questo ragionamento...e sì mi basta uno solo perché se

gli altri fanno (*scrive* “ $0 \ 0 \ a \ \frac{a}{3}$ “ “ $\frac{2}{3} \ \frac{a}{3}$ “) che è (*scrive* “ $\frac{2a}{9} \ 2$) che è più vicino a zero che ad altro.

24. O: ok.

25. S: mi fermo?

26. O: se vuoi.

27. S: Ah perché non è finito?

28. O: No...se hai bisogno di scrivere altro...vedevo che stavi scrivendo.

29. S: No...non credo di avere altro...se vuoi...

30. O: No. Ok.

2. Protocolli scritti e trascrizione delle interviste sul problema della pubblicità

Problema pubblicità di A (*non scrive nulla*):

1. A: (*legge il testo si ferma a pubblicità e poi riprende fino alla fine*) allora...(*mentre parla indica e segue il testo*) allora se spendo 10 milioni di € e poi l'altro mi spende 10 milioni di €, perdo tutto, se spendo 10 milioni di € e l'altro ne spende 6 ne guadagno solo 8 e quindi ci rimetto...e se ne spendo 6 e l'altra ne spende 6 ne guadagno 5...cioè ci rimetto sempre in pratica...
2. O: ah, no però aspetta...guadagno inteso proprio come guadagno!
3. A: ah guadagno, va bene. Allora quindi...(*guardando il testo*) se entrambi 10 milioni ...entrambi solo 1, se una dieci e l'altra sei una otto e l'altra zero, se tutte e due 6, tutte e due 5...allora ...ma allora se spendo 10 milioni di € comunque sono sicuro di guadagnarci cioè o uno o otto milioni comunque ci guadagno sempre, se ne spendo 6 invece ne posso guadagnare, cioè o non ci guadagno niente o ne guadagno solo 5 quindi forse come cosa ne investirei 10 perché comunque cioè in pratica vinco sempre...
4. O: vincere vinci sempre, c'è una differenza di guadagno ecco.
5. A: sì c'è una differenza di guadagno però...eh...mi dirai se però ne spendo 10 magari l'altra farà il mio stesso discorso e ne vorrà spendere 10 anche lei perché dice almeno ci guadagno 1 e tutte e due guadagniamo solo 1...allora se considero il mio avversario intelligente ne spendo solo 6 perché così almeno ne guadagniamo tutti e due 5, se considero...se non lo considero intelligente ne dovrei spendere... 10 però...cioè no... forse alla fine ne spenderei solo 6 sperando che anche gli altri facciano il mio stesso ragionamento.
6. O: sì, più che intelligenti... perché effettivamente...
7. A: no intelligente...cioè se anche loro fanno lo stesso discorso tutti e due ne dovremmo spendere 6 ...per guadagnarne 5.
8. O: sì quello sicuramente, generalmente però appunto se sono due compagnie avversarie tendono..
9. A: ad avere il massimo profitto.
10. O: sì.
11. A: eh, sì però, quindi tutte e due ne investiamo dieci e poi guadagniamo 1 tutti e due...allora ne spenderei comunque 6 sperando che anche gli altri facciano il mio stesso discorso.
12. O: perfetto.

Problema pubblicità Esperto:

	6	10
6	5,5	0,8
10	8,0	1,1

1. E: (*legge il testo e quando arriva a leggere la parte riguardante le possibili conseguenze alle scelte comincia a scrivere una tabella a doppia entrata*) sei, dieci, sei dieci ...se tutte e due spendono sei guadagnano cinque (*scrive nella casella 6,6 5,5 e poi riprende a leggere il testo*) questo gioca sei, l'altro gioca dieci il suo, di quello che gioca dieci e' otto (*lo inserisce nella tabella*) a spese della sua avversaria che quindi non guadagnerà nulla quindi zero otto (*mette lo zero nella tabella*) e qui otto zero (*mette 8,0 nella cella corrispondente alla situazione simmetrica*) se entrambe 10 (*legge*) ok uno e uno (*inserisce 1,1 e finisce di leggere il testo*)...va bene, eh...(guarda la tabella) beh il solito dilemma del prigioniero in

fin dei conti nient'altro che dire e' chiaro che, per quanto sembri una cosa assurda, bisogna giocare 10 e 10 e basta (*riquadra la casella 1,1*), no ci sono altre scelte per quanto...

2. O: sempre perché e un equilibrio di Nash?
3. E: in questo caso anche perché sono strategie dominate c'e' un rafforzativo in più se vuoi mentre per quanto ne so io qua (*ha sotto mano il bcg*) non si gioca zero qui invece la pratica dice che qui davvero si gioca 10,10.

Problema pubblicità di F:

	A	B	A	B	P(A)	P(B)
100%	6 /10	6	6	6	5	5
6 miliardi	6 /6	10	6	6	8	-2
10 miliardi	10	10	6	10	-2	8
	10	6	10	10	1	1

1. F: (*Legge il testo fino al secondo punto*) cioè tutti gli anni c'è un certo prodotto ...che ha il 100% di quanto si vende (*scrive 100%*) cioè...eh (*guarda il testo*) le "vendite totali combinate" vuol dire quello, tutto il prodotto... non è che un anno se ne vende di più o di meno però si distribuiscono diversamente la fetta di mercato.
2. O: sì.
3. F: ok perfetto. Il prezzo di vendita del prodotto è lo stesso per le due?

4. O: sì
5. F: o forse è il seguito, non lo so...
6. O: (le indico la seconda riga del testo e rileggo la parte in questione)
7. F: ok, quindi è il prezzo di vendita per entrambe le compagnie cioè non si fanno concorrenza sul prezzo non è quello che devo arrivare...
8. O: no
9. F: ok, va bene. (*riprende a leggere il testo dalla terza riga e infine si ferma sulla parola pubblicità cerchiandola e dicendo:*) ok, immagino che sia questo il seguito. (*ricomincia a leggere e si ferma alla settima riga*) Ok, quindi o...faccio il bivio: o sei milioni o dieci milioni (*scrive le due possibilità e poi riprende a leggere fino all'ottava riga*) ah ok! Tra l'altro tu mi dici che il budget stanziato determina la divisione quindi immagino che più spendi più hai quota di mercato?
10. O: sì
11. F: però me lo spieghi bene poi...
12. O: sì
13. F: (*riprende a leggere fino al secondo punto*) ...e la sua avversaria ne prenderà solo due perché abbiamo detto che il totale è 10 milioni, ok...quindi è...eh...tra sei e dieci milioni quanto spendere...ah è più complicato dell'altro perché devi anche sottrarci quanto hanno speso per la pubblicità non è mattino e sera che non mi comporta...ma no, forse no, non lo so...va beh (*rilegge il secondo punto*). Quando dici profitto non è già detratta la spesa della pubblicità...
14. O: Nel profitto è già detratta.
15. F: Non è solo la spesa di produzione.
16. O: No
17. F: Quindi non tengo conto poi effettivamente di questo sei e dieci è solo per individuare la scelta?
18. O: sì
19. F: ok sto anticipando troppo...(*comincia a leggere da dove aveva lasciato*). Il profitto di ciascuna compagnia scende ad un milione di Euro? Ma no! Mi hai detto che...è costante!
20. O: No, il profitto...quanto ci guadagnano...
21. F: ah...allora...questo è difficile perché non mi tornano i conti. Adesso riprovo. Mi faccio una tabellina, c'è poco da fare. Ho di nuovo...ah scusami (*deve finire di leggere il testo e lo fa ad alta voce*). ok. Qui non sono sicura di aver chiaro quindi ci sono sempre le due compagnie A e B (*scrive A e B*) e le due...quattro possibilità sono: sei e dieci, sei e sei, dieci - dieci e dieci - sei (*mentre parla scrive i numeri nella tabella*). Se vuoi puoi fare uno studio su come metto i casi...no veramente non ci capisco niente...scusa lo faccio nell'ordine che è lì se no impazzisco (*cancella la tabella e la riscrive seguendo il testo*). Se entrambe le compagnie spendono sei milioni ciascuna guadagnerà ..quindi facciamo profitto di A e profitto di B ...guadagnerà cinque milioni (*aggiunge alla tabella altre due colonne: P(A) e P(B) mettendo i profitti rispettivi*) che non vuol dire che vanno in meno uno...
22. O: no
23. F: questo cinque è... cinque più sei undici è il ricavato...

24. O: se ne spende sei ne guadagna cinque
25. F: guadagno, ricavo?
26. O: no, non importa pensa che ne guadagna cinque, di quanti ne ha spesi non ce ne facciamo niente nel senso che se tutte spendono sei tutte e due guadagnano cinque
27. F: vuol dire che ricavano di più ma poi tolti i sei della pubblicità gliene restano cinque
28. O: Sì gliene restano cinque
29. F: Ok... perché prima leggendo precisamente credo un certo dato...*(lo ricerca nel testo)* no forse leggendo il primo...no detto così è ovvio credo*(parte discussione sulla formulazione del testo)* ...*(ricomincia a scrivere la tabella)* Se una compagnia investe dieci e l'altra sei: il caso dieci-sei e il caso sei-dieci quella che ha speso dieci ne ricava otto e quella che ne ha spesi sei ne ricava due *(scrive otto e due e poi si ferma a rileggere il testo)*..."perderà due milioni di Euro" cosa vuol dire "perderà"?
30. O: che li perde
31. F: Quindi meno due?
32. O: sì
33. F: ...ah... *(mette un meno davanti al due nella tabella)*
34. O: ...vuol dire che ti batte e che vai in passivo
35. F: Allora non bisognerà mai spenderne solo sei...aspetta però io qui ho dei problemi sul testo...*(comincia a rileggere l'ultimo punto)* quindi vuol dire che è *(scrive sulla tabella)* uno e uno, non è col negativo qua. Ok?
36. O: ok
37. F: quindi le situazioni sono queste *(guarda la tabella che ha scritto e commenta)*: alla peggio perdono due milioni di Euro alla meglio se ne guadagnano otto *(pausa di qualche secondo)*...perché non dovrebbe essere meglio comunque provare col dieci? *(pensa guardando la tabella)* ...in fondo se io sono...per comodità mi metto sulla colonna B perché sono messi in ordine meglio, perché non dovrei...ho capito perché non dovrei...perché non dovrei dire sempre dieci? Con dieci non rischio mai il negativo...ora sto lavorando molto nel confronto con il (problema) precedente in realtà non so se è una cosa che ti devo dire...che volevi o...non so se è previsto per tutti che li facciano a distanza ravvicinata
38. O: no
39. F: ok però sono profondamente influenzata
40. O: sono due problemi diversi...
41. F: io vedo questo come la versione complicata del precedente
42. O: in che senso?
43. F: nel senso che è meno evidente la scelta anche perché non c'è quell'ordinamento bello che c'era nelle utilità...nell'altra c'era comunque una situazione per cui i due valori...le scelte per le due aziende sono due no? nell'altro caso la scelta sconsigliata portava sicuramente in entrambi i casi indipendentemente dalla scelta dell'altra compagnia ad avere risultati minori rispetto alle due scelte convenienti quindi non c'era effettivamente ragione per scegliere la scelta sconsigliata, giusto? Cioè in sostanza il problema è che non sono ordinati bene questi valori
44. O: cioè la simmetria c'è, ma non c'è...

45. F: non c'è la simmetria dei casi estremi...mentre prima con dieci e dieci avrei avuto cinque e cinque e quindi non ci sarebbe stato motivo per non scegliere il dieci adesso hai una cosa che è sensibilmente minore rispetto a tirare a sei e sei ...alla luce di tutto questo...sapendo sempre che l'altro ragiona come me...(*guarda la tabella*) il problema è sempre che se io dico "no va beh spen..." (*si ferma a pensare per qualche secondo*) mi dà l'idea che a meno di un accordo non ci sarà mai altro se non la situazione dieci –dieci sì perché la situazione dieci –dieci...mettiamoci sulla colonna B la situazione dieci-dieci, la scelta di dieci mi dà la sicurezza di evitare il meno due...però adesso sto ragionando in maniera molto intuitiva...la cosa che voglio veramente evitare è il meno due, non voglio mai il negativo. Quindi questo mi consente almeno quello...ovviamente però anche l'altra compagnia farà lo stesso ragionamento e quindi probabilmente ci troveremo con uno. In quel senso ti ho detto che secondo me sarà sempre uno-uno ...però d'altra parte cosa faccio se io dico "no magari tutti e due facciamo questo ragionamento...giochiamo sei"...poi l'altro può dire ma io...cioè non potendo controllare l'avversario io sceglierei dieci per essere sicura di non ...di non andare in perdita.
46. O: ok
47. F: ma qui interviene anche un qualcosa di personale? Cioè non c'è una scelta giusta o sbagliata?
48. O: Infatti...
49. F: ..ci sono scelte più o meno rischiose.
50. O: si, non c'è una soluzione...
51. F: A te interessano le motivazioni? Qui ti dico chiaramente che interviene un mio fattore personale per cui a me non piace il rischio, io piuttosto che rischiare il negativo rinuncio ad un grande guadagno...consapevole del fatto che magari un altro potrebbe...però così perlomeno...sai perché anche perché io dico va beh io sono fifona voglio fare la scelta dieci nella migliore delle ipotesi l'altro è uno che se la rischia e sceglie sei e per me va molto bene, se invece l'altro è un fifone come me sceglie dieci e va beh no ci ho perso niente.
52. O: ok
53. F: ho evitato la situazione meno due che ti dicevo prima.

Problema pubblicità di G:

$2,5 \leftarrow 6$
 $4,5 \leftarrow 10$

6	\rightarrow	5	n^{to} pezzi	
6	\rightarrow	5	10	\rightarrow 8
6	\rightarrow	5	6	\rightarrow \emptyset
10	\rightarrow	1		
10	\rightarrow	1		

1. G: (*legge il testo*) guadagno si intende profitto rispetto alla spesa pubblicitaria?
2. O: sì, cioè quello che effettivamente ...ti metti in tasca
3. G: ti rimane in tasca (*pensa e comincia a scrivere in silenzio una tabella a due colonne che riassume. a seconda della coppia di scelte. i possibili guadagni come descritto nel testo. Poi scrive da una parte 6 dicendo*) ...vediamo con sei, a questo punto ci sono due possibilità (*guarda la tabella che ha prodotto*): o guadagno 5 o guadagno 0, quindi due e mezzo (*scrive 2,5*)
4. O. non ho capito scusami
5. G: se io investo sei o guadagno 5, se fa come me la mia avversaria, o guadagno zero se la mia avversaria fa dieci, se io metto 10, o guadagno 1 o guadagno 8 (*scrive sempre da una parte sotto quello scritto in precedenza, 10*)...la media è quattro e mezzo (*lo scrive*) quindi sicuramente sarebbe più conveniente mettere 10, ma questo a parità di probabilità di mosse

- del mio avversario, 50%, 50%...però non penso di essere l'unico essere pensante...il responsabile della pubblicità...è responsabile anche dall'altra parte, penserà la stessa cosa...(*pensa in silenzio per un po'*)...quindi metterei 10.
6. O: perché?
 7. G: se lui facesse un ragionamento che si ferma ad un mero calcolo, dice: dovrei mettere 10 perché la media ...del guadagno è più alta...quindi se io mi comporto allo stesso modo, però prendiamo pochissimo tutti e due, uno. .. (*pensa in silenzio*) però...(*pensa per un po' in silenzio*)
 8. O: cosa stai pensando?
 9. G: sto pensando che ...se metto dentro 10...sono sicuramente in guadagno, se metto dentro sei no...però non sono neanche in perdita e quindi non è una discriminante abbastanza valida...anche per fare un investimento di 10 milioni per incassarne 1...(*pensa in silenzio*) sto cercando di mettermi nei panni anche del mio concorrente ...(*pensa in silenzio*) qualcosa mi dice che mi sto dimenticando un pezzo di problema
 10. O: in che senso?
 11. G: cioè c'è qualche cosa che non sto considerando, tipo la prima parte del testo, mi sono concentrato sulla seconda, ma non sulla prima che potrebbe contenere qualche informazione utile...(*comincia a leggere*)...le vendite totali combinate comprendono anche quelle della pubblicità?
 12. O: no...in che senso?
 13. G: qua dice "né il prezzo di vendita del prodotto, né le vendite combinate...varino di anno in anno"
 14. O: sì cioè nel senso che... la fetta di mercato è quella...quella che si devono spartire
 15. G: quindi nel senso che se io non prendo niente con la pubblicità, vuol dire che recupero in qualche altro modo, con la fetta di mercato che non ho preso se le vendite totali non variano
 16. O: no, nel senso che...le vendite totali nel senso che quel prodotto ha quello smercio lì, cioè sanno che devono coprire quello... quindi o lo prende uno o l'altro non è che ci sono molti altri tipi di...in questo senso qua.
 17. G: ho capito.
 18. O: il prezzo (*mi interrompe*)
 19. G: le vendite combinate sono sì entrambe le compagnie: nel senso che noi vendiamo 100 macchine all'anno, se io faccio pubblicità ne vendo più di te però in sostanza sono sempre 100
 20. O: sì, è una cosa...il testo dice così. Sul fatto poi di quanto sia reale una situazione del genere...diciamo che ...non è quello che interessa e anche sul fatto che il prezzo rimanga lo stesso, e soprattutto che tutte e due abbiano lo stesso è solo perché non ci siano discriminazioni sul fatto che effettivamente magari uno costa meno e allora scelgo quello; è solo sulla pubblicità. Si basa tutto sulla pubblicità: se ne fai di più, vendi di più, se ne fai meno vendi meno. Basta.
 21. G: e posso fare solo o sei o dieci.
 22. O sì
 23. G: volendo non posso fare zero

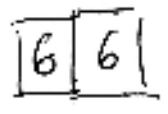
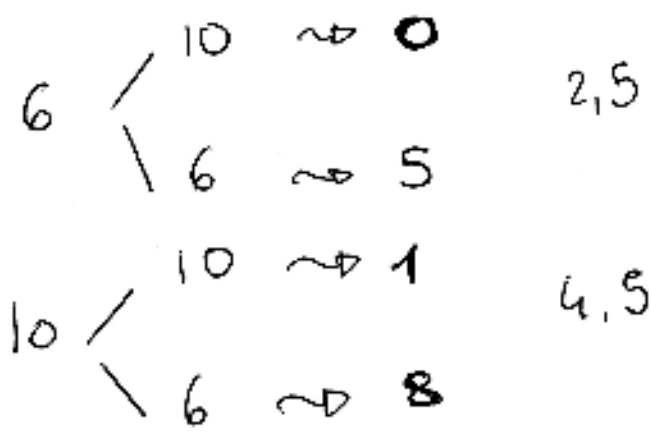
24. O: no è per quello...sì, è molto strutturata...
25. G: (*pensa in silenzio*)
26. O: ma è una scelta, cioè ti dico....
27. G: sì però bisogna anche vedere ...qual è la più profittevole...(*pensa in silenzio*)
ovviamente la più profittevole è indurre l'altra compagnia ad investire sei per superarla con dieci, ma non essendoci contatti è impossibile...
28. O: non puoi condizionare la scelta dell'altro
29. G: (*pensa in silenzio per un po'*)
30. O: quello che hai detto è tutto corretto, cioè il problema è questo... tu devi solo decidere, scegliere tra le due situazioni quale tu preferiresti...
31. G: infatti sto valutando...(*pensa in silenzio*) ti dico che sceglierei 10 ...
32. O: perché?
33. G: perché molto probabilmente la mia avversaria...cercherà di dire...anzi dirà...non so secondo me è una scelta quasi obbligata ...la possibilità, la probabilità che io investa sei milioni sperando che l'altro faccia la stessa cosa...è molto, molto bassa ...perché se io immagino che l'altro investa sei milioni non investo sei per fare cinque, cinque, ne investo dieci per superarlo: farò otto e lui zero. Quindi se io ho il dubbio che lui investa sei, non investo sei, investo dieci...però ovviamente lui fa lo stesso ragionamento, quindi a questo punto so che guadagno 1, però meglio che guadagnare zero mettendo io sei io e quindi dieci lui...cioè mettendomi io nei panni di quello che parte con dieci quindi a questo punto investo 10 a prescindere se il mio avversario ha tentato la carta del sei, tanto meglio per me che prendo otto, se no prendo uno e pazienza.
34. O: ok.

Problema pubblicità M:

22 M€

24 M€

22 M€



1. M: legge il testo...
2. O: dimmi se ci sono delle...
3. M: il prezzo di vendita del prodotto...di ogni compagnia sarà diverso o costante?
4. O: no, è uguale
5. M: cioè costante
6. O: no è uguale per tutte e due ed è sempre lo stesso
7. M: ok è uguale per tutte e due ed è sempre lo stesso e la somma delle due vendite è sempre costante quindi...
8. O: nel senso che si devono dividere il mercato
9. M: ok se cala uno...
10. O: si
11. M: ok se cala uno...
12. O: la fetta è quella cioè la vediamo solo e unicamente non per il prezzo , non per la qualità del prodotto, non per niente ma solo per la pubblicità che facciamo
13. M: aspetta ma stiamo parlando di percentuale di vendita o di numeri totali di pezzi venduti? Magari non cambia niente però...
14. O: non cambia niente
15. M: ok, va bene, no sembrerebbe che la somma, sembrerebbe che ogni anno si vendano 100 lavatrici
16. O: si si si si
17. M: ma un certo anno ne vende 70 e 30, una così..
18. O: può essere benissimo così
19. M: varia solo la fetta di mercato...pubblicità...e...va beh il budget stanziato per la pubblicità determina quindi la divisione del mercato....già questa è opinabile
20. O: e...lo so
21. M: sembra di stabilire una connessione diretta tra budget speso e quantità di roba venduta...cioè se io spendo più soldi allora vendo più lavatrici....una cosa...
22. O: si
M: mettiamo che funzioni così...
23. O: si è molto semplificato
24. M: ok però l'idea è questa perché dice il budget determina la divisione del mercato....ok...per semplicità (*legge il testo*) ..spendere 6 milioni o spendere 10 milioni oh...mi piace sta cosa.. i profitti di ciascuna compagnia dipenderanno dalla cifra scelta e dalla decisione dell'avversario, se entrambe le compagnie spenderanno 6 milioni ciascuna raggiungerà 5 milioni di guadagno....di guadagno si intende...in un anno guadagno 5 milioni, quindi in totale in un anno ce ne ho perso 1 milioni..
25. O: no, nel senso di guadagno vero...netto
26. M: cioè guadagno 11 milioni a testa e quindi la differenza è 5 milioni
27. O: si, si diciamo di si..
28. M: se una compagnia investirà 10 milioni e il suo avversario ne investirà solo 6, allora il suo guadagno sarà di 8 milioni a spese del suo avversario che quindi non guadagna...quindi si sta presupponendo che il totale di ciò che si guadagna in un anno sia di 22 milioni...direi...si

perché se ne spendono tutte e due 6 ne guadagnano tutte e due 5 quindi...6 e 6 fa 12, 5 e 5 10...se ne spende uno 10 e uno 6...no, non è vero niente...il suo guadagno sarà di 8 milioni a spese del suo avversario che quindi...a no, non guadagnerà nulla...quindi ne reincassa 6...perché giustamente tutte e due hanno fatto meno pubblicità.. e quindi la gente compra di meno...no perché abbiamo detto che il monte totale è costante..cioè se uno investe 10 ne guadagna 8.. vuol dire che sono stati spesi 18 milioni in lavatrici però ne sono stati spesi anche 6 perché l'altro non guadagna nulla...quindi sono stati spesi 24 milioni in lavatrici....sto dicendo probabilmente cose inutili però se fosse vero che il totale rimane uguale e il prezzo rimane uguale c'è qualcosa che non quadra...

29. O: perché? Cioè il prezzo è quello che decidono...

30. M: se è vero che ogni anno si comprano tot lavatrici e il prezzo è sempre lo stesso...

31. O: non si sa se le hanno comprate o no ...cioè loro ce le hanno lì....

32. M: (*legge il testo*)..lo sforzo in eccesso viene sprecato ..il guadagno finale...non capisco

33. O: cioè non c'è...non c'è la relazione...tra i numeri che hai...non c'è relazione ..io ho speso ...e cioè la spesa serve solo per dividere...cioè dire ho fatto più pubblicità ho fatto meno pubblicità...diciamo...e invece quello che guadagni è quello lì....

34. M: quindi lo sforzo in eccesso viene sprecato...è una considerazione del redattore...posso leggere... (*legge il testo*)...il guadagno finale di ciascuna compagnia si limiterà ad 1 milioni e qui torniamo ai 22 milioni....c'è una anomalia nel sistema...mi sarebbe piaciuto di più se anche questo fosse stato 22..va beh...si introducono considerazioni ulteriori secondo me...e complica le cose...vero? No, quello che sto dicendo... cioè che la gente spende di più, non so perché ma la gente in questo caso spende di più...è che è 10,8,6...24 va beh proviamo ad andare avanti (*termina la lettura del testo*)....e qui torniamo ai responsabili intelligenti...allora io responsabile della mia azienda...(*comincia a scrivere*) .io spendo 6...se l'altro spende 10 non m'importa nulla di quello che guadagna l'altro...perché io so che...non guadagno niente...se l'altro ne spende 6 io ho 5 se io ne spendo 10...se l'altro ne spende 10...1, se l'altro ne spende 6...5...no, è 8, è 8! Se io metto 6 e l'altro 10 io vengo licenziato e mi darebbe fastidio...se io ne spendo 6... il guadagno medio è 2,5 se io ne spendo 10 il guadagno medio è di 4,5...uno dice, perché non spenderne 10...ne spendo 10 e comunque qualcosa guadagno...se mi va bene ne guadagno 8, se mi va male ne guadagno 1...comunque il dato di fatto è che non perdi niente quindi in questo sei facilitato nella scelta...e comunque qualcosa ci guadagno quindi non c'è nessun motivo per non metterne 10...non trovo nessun motivo per non metterne 10...un motivo è dire...no, se l'avversario ne mette 6, comunque ne guadagno di più...se l'avversario ne mette 10 comunque ne guadagni di più quindi direi, se ho fatto bene...non c'è motivo per non mettere 10...(*legge tabella*)....se non c'è possibilità di accordo...non vedo il motivo di mettere 6 a rischio di prenderne 0...ne metto 10 e se mi va male ne prendo 1 (*guarda tabella*) ...il discorso, per essere meno superficiali, è...se andiamo avanti così...non guadagneremo mai nulla perché ci mettiamo sempre 10 tutte e due e guadagneremo sempre 1...la domanda è... ne potremmo guadagnare 5....cosa si può fare?...però dura un anno solo...può provare...mettiamo di essere all'anno zero e uno dice, faccio uno sforzo di buona volontà per un anno, investo l'eventuale milione di guadagno mettendoci 6 milioni e guardo cosa fa

l'altro...se l'altro ci mette 6 milioni allora posso pensare di avere un personaggio all'altezza e guadagnamo 5 milioni tutti per sempre...se l'altro ci mette 10 milioni allora io per un anno ho perso 1 milioni perché... se io ne avessi messo 10 prenderei 1 milioni e continuerò a metterci 10 perché l'altro ha capito che non...che mi fregherà...sacrifico 1 milioni con la prospettiva di guadagnarne 5 ogni anno...questa è una cosa che potrei fare...ci può stare...anche qui la parola "dipende" potrebbe comparire ovunque...questo presuppone che la cosa vada avanti già da un po' di tempo...che dire...è un sacrificio che si può fare comunque....

35. O: sei sicuro che il tuo avversario continui a metterci sempre 6?

36. M: no, però l'alternativa qual è?...se per un anno non ce ne mette 6...io...ho perso 1 milioni non di più...che non è vero che ne ho persi 5...io...innanzitutto non ce li ho e poi cioè se lui un anno ci mette 10, io comunque, avendocene messo 10 quell'anno lì, ne avrei guadagnati uno solo, non 5...quindi la mia scelta di averne messi 6 mi porta a perdere 1 milioni e basta rispetto alla prospettiva di guadagnarne 5...l'ultima alternativa sarebbe che per un anno, sfruttando l'ingenuità altrui, io provi a prendermene 8...però sarebbe una cosa stupida perché io ne prendo 8 quell'anno lì al posto di 5 e poi perdo tutto l'anno dopo che ne ritorno a guadagnare 1...quindi in due anni ci ho già perso 1 milioni perché ne ho guadagnati 8 e 1 anziché 5 e 5 quindi...il fatto è che si presupponga un precedente...e so più o meno con chi ho a che fare, quindi se parto dall'anno "n" e nei precedenti l'altro ci ha messo sempre 10...è una cosa che posso provare...si ammortizza...posso lanciargli un messaggio dicendogli...io per un anno metto 6...lui avrà messo 10 perché non possiamo avere avuto la stessa idea...e quindi quell'anno lì prendo 0, sperando che abbia capito perché ho messo 6...l'anno dopo metto 6 posso guadagnare 5 rifacendomi dello 0 precedente...e da lì in poi guadagnerò sempre 5...oppure lui continua con 10 però io poi dall'anno dopo torno ad aver 1..... indipendentemente io quell'anno lì ci metto 6...ho cambiato da quello che ho detto prima...ci metto 6...e anche il successivo...dal terzo in poi...so di perderlo...sempre che anche lui non ci metta 6 per farmi capire la stessa cosa...e non perdo nulla...*(ripete i ragionamento per i tre anni)*...direi che questa è la soluzione migliore....6!!!!

Problema pubblicità di Mittu:

1. M: (*guarda il testo*) Tutto uno questo qua?
2. O: sì. Leggilo con calma.
3. M: non mi bastano due ore...
4. O: e lo so...
5. M: (*legge il testo a bassa voce*) qui praticamente ci sono due compagnie no?
6. O: sì.
7. M: compagnia x e compagnia y che vendono lo stesso prodotto A
8. O: identico.
9. M: allora le vendite...di questo prodotto qua da parte della compagnia x e della compagnia y sono sempre uguali di anno in anno dice...cioè no, le compagnie varino di anno in anno dice...nelle vendite totali sono sempre uguali, sono sempre uguali e...anche le vendite sommate insieme sono sempre uguali...è logico, no?
10. O: sì...
11. M: cioè qui dice (*rilegge la seconda frase del testo a bassa voce*)...vuol dire le vendite totali, cosa vuol dire? Di quel prodotto o anche di altri?
12. O: solo di quello. La fetta di mercato che hanno è la stessa cioè loro sanno che devono esaurire la richiesta per un tot...e sanno che entrambe stanno nella stessa fetta di mercato con lo stesso identico prodotto. Praticamente devono spartirsi (*mi interrompe*)
13. M: allora se il prezzo di vendita di questo prodotto e la vendita individuale di queste due compagnie non varia è logico che non varia neanche la vendita combinata.
14. O: sì però era un modo per dire che (*mi interrompe*)
15. M: volevo solo vedere se c'era qualcosa sotto.
16. O: volevo dire che hanno una certa fascia di mercato e devono dividersi quel mercato lì.
17. M: (*ricomincia a leggere il testo dalla terza riga*) cioè se uno investe di più come pubblicità probabilmente avrà un maggiore mercato.
18. O: sì perfetto.
19. M: (*ricomincia a leggere il testo ad alta voce sottolineando con un tono di voce maggiore i dati numerici*). Sei milioni, cinque milioni...che cavolo di spesa fa? Ci rimette un milione...
20. O: no è il profitto...nel senso che è un guadagno, il guadagno vero.
21. M: ah è vero...levate le spese!
22. O: sì.
23. M: sì. Ok. (*riprende a leggere il secondo punto e poi dopo una piccola pausa lo rilegge soffermandosi sui guadagni*)...(riprende a leggere dal terzo punto sempre soffermandosi sui dati numerici per poi continuare velocemente fino alla fine del testo) ...(pensa in silenzio per qualche istante) ...però non ci sono contatti ma entrambe le compagnie sanno, conoscono questi numeri,
24. O: sì fanno la situazione, hanno conoscenza completa della situazione, solo non si possono mettere d'accordo prima su tipo "allora facciamo così?" e poi quando gli spendono ormai gli hanno spesi, diciamo, per convenzione, contemporaneamente, non è che una vede cosa fa l'altra.

25. M: così di primo acchito io...forse dirò una stupidaggine, ma conoscendo questi numeri qua...però...sì...e no, come faccio? (*pensa in silenzio guardando il testo*) allora il guadagno sicuro ce l'ho se spendo 10 milioni...cosa faccio se non posso mettermi d'accordo con quelli là e poi non li conosco neanche come persone...allora qua bisognerebbe sapere anche chi c'è di là nella compagnia, come ragiona, come... cioè come si fa?
26. O: non sai come ragiona però sai che bene o male sono dei professionisti, gente che ci ragiona su ecco. Pensa che ci ragionano su...non è che vanno a caso...
27. M: beh, la cosa migliore sarebbe: io spendo 6 milioni e basta. Se l'altro spende 6 milioni ci guadagniamo una bella cifra tutti e due; se però io mi fido del buon senso dell'altro ne spendo 6 e quello mi frega e invece di spenderne 6 ne spende 10 mi manda in mezzo ad una strada. Allora la cosa migliore sarebbe investirne 10 (*indica il punto del testo che riassume le conseguenze di questa scelta e sottolinea "1 milione"*), sarebbe investirne 10, cioè un milione di euro sicuro però cioè non è che sia un gran...ah però un momento, un momento, un momento...entrambi si accorgono che la cosa più intelligente sarebbe spendere 6 milioni, entrambi se ne accorgono e dicono, e dicono...aspetta che mi si era accesa una mezza lampadina...(*pensa in silenzio per qualche istante*)...e dicono...dicono, dicono (*guarda il testo in silenzio*)...ah no! Cosa dicono...io ne investo sei, ne investo sei e l'altro se non è un deficiente completo ne investirà sei anche lui...se ne investe 10, va beh, mi frega però non ne va ad investire 10 pensando che io non mi fido di lui e ne investo 10...perché se quello là ne investe 10, ne investe 10 unicamente perché dice "quell'altro ne ha investito 10", allora pensa...no, no, no non ci siamo...
28. O: tutto quello che stai dicendo è corretto.
29. M: sì è corretto però..
30. O: non c'è una soluzione "giusta"...
31. M: è corretto, ma non ci siamo.
32. O: è solo un problema di decisione. Tu scegli la tua decisione e mi dici perché lo hai fatto, cioè non ce ne è un migliore di un'altra, o meglio...
33. M: sì che c'è quella migliore! Ai fini di non farsi mandare in mezzo ad una strada, è investirne 10, se ti va bene guadagni un sacco di soldi e se ti va male, per mal che vada guadagni un milione di euro...sicuramente quella lì a conti fatti è la migliore, non è la più sensata, non è la più sensata!
34. O: sì, però se fossi uno di questi qua, cioè tu mettiti nei panni di uno che poi ci rimette anche il posto che cosa sceglieresti?
35. M: io andrei dal mio capo e gli direi: signori la situazione è questa qua e...io sarei propenso ad investire 10 milioni, se quello là pensa che io per buon senso mio, per far andare bene le cose a tutti e due, ho scelto 6 investe anche lui 6, lo freghiamo e ci prendiamo tutto noi, se invece l'altro non ha pensato che io per buon senso ...sia malpensante e investe dieci anche lui invece che guadagnarne 8 ci guadagniamo uno però...insomma ci abbiamo sempre guadagnato...insomma io sceglierei quella.
36. O: ok.

Problema pubblicità di Sam:

5 10

	Com A	Com B
spare	6	6
quadrato	5	5
<hr/>		
spare	10	6
quadr.	8	—
<hr/>		
spare	10	10
quadrato	1	1

→ 10 → 4, 5

6 → 3, 5

1. S: *(Legge ad alta voce le prime 5 righe e si ferma al primo capoverso dicendo:)* La pubblicità quindi determina la divisione del mercato...*(pensa qualche istante)*...si presuppone che comunque...*(guarda il testo e ricomincia a leggere)* a sì...a seconda del budget si determina la fetta di mercato *(ora comincia a leggere a alta voce da dove aveva lasciato in precedenza e quando arriva a scandire le due possibilità di investimento le trascrive immediatamente su foglio. Quando arriva a leggere le diverse possibilità conseguenti alle scelte comincia a scrivere:)* compagnia A *(scrive com A)* compagnia B *(scrive Com B di fianco)* se entrambe spenderanno sei milioni ciascuna raggiungerà un guadagno di cinque milioni...dove lo metto? Non so dove metterlo se a destra o sotto *(scrive sotto)* Allora lo mettiamo sotto, allora facciamo così. Spese, guadagno...cinque cinque *(scrive sotto le spese i rispettivi guadagni e costruisce quindi una tabella a doppia entrata partendo dalle indicazioni delle compagnie combinandole con le diverse situazioni di spesa-guadagno: ricomincia poi la leggere)* “se uno investe 10 quando la sua avversaria spende sei...” allora quindi dovrei rifare la tabellina (*tira una linea di separazione con quello scritto in precedenza e riprende le voci spese-guadagno mantenendo la convenzione di scrivere sotto le colonne individuate dalle due compagnie*) se una ne spende dieci e l’altra sei *(scrive 10 e 6 e ritorna a leggere il testo)* “allora il suo guadagno” ...il suo sarà riferito alla prima “sarà di otto milioni di euro a spese della sua avversaria che quindi non guadagnerà nulla” *(mentre legge compila la tabella mantenendo la struttura precedente)*...perché quindi? *(riprende la lettura fino alla fine del testo e arriva a costruire tre tabelle che non sono altro che la trascrizione, ripulita dalle parole, dei tre punti descritti nel testo)*...*(pensa in silenzio)* io sono il responsabile di una delle due e devo decidere cosa fare...cercando di...quindi di guadagnare il più possibile ... (*guarda i numeri scritti da lui nelle tabelle e mentre descrive i suoi ragionamenti gestisce i numeri che ha scritto indicandoli con la penna ogni volta che li nomina*) e qui è un problema perché il guadagno massimo è otto quindi se io investo 10 potrei *(alza la voce su questa parola)* avere otto ma il mio avversario potrebbe anche pensare la stessa cosa e quindi alla fine guadagnano tutti e due uno...dunque...d'altronde se io investo sei e l’altro investe dieci io perdo tutto...uh,uh...ho la sensazione che...che qui ci siano dei fattori...di conoscenza...sociale e psicologica del mio avversario perché ...ehhh...dunque io non so cosa fa l’altro se devo minimizzare la perdita eh mi conviene spendere 10 ...perché se io spendo 10 mal che vada guadagno 1 benché vada guadagno otto *(fa tutti questi ragionamenti guardando la tabella e spostandosi con la penna per indicare le situazioni che prende in considerazione)* se io investo 6 benché vada guadagno 5 mal che vada non guadagno niente *(anche se le tabelle sono state costruite separatamente nella sua argomentazione le gestisce come un’unica tabella in cui le situazioni possibili sono discriminate dalle sole due possibilità di investimento : 6 e 10)*..eh a questo punto mi porrei il problema: ma l’altro cosa fa? *(pensa in silenzio)* non ci vedo soluzione se ho capito bene il problema.
2. O: sì.
3. S: perché la prima parte era un po’ ...per me ...era giusto?

4. O: sì, sì. L'hai interpretata nel modo corretto.
5. S: quindi cosa farei? Ah...cioè io ho la scelta: o spendo 6 o spendo 10
6. O: sì
7. S: se spendo sei potrei guadagnare 5 o non guadagnare nulla, se spendo 10 potrei guadagnare 8 o potrei guadagnare 1. Cioè io vedo di più...*(ritorna al testo)* "come decideresti di comportarti..."...io la vedo di più come una strategia non locale cioè non di un anno ma forse a lungo termine...cioè nel senso...se io spendo sempre 10 (*scrive 10*) e l'altro spende a volte 6 a volte 10...io guadagno a volte 8 a volte 1 con, a seconda di quanto l'altro alterna il sei e l'uno, circa...nove...quattro e mezzo di guadagno (*scrive a fianco di 10 una freccia e 4,5*) se l'altro si comporta la 50 % ...puntando 10. Se invece io punto 6 (*scrive 6 sotto a 10*) ...chissà come mai dico punto...eh penso ai giochi...
8. O: eh sì.
9. S: eh...se punto sei guadagno o cinque o niente a seconda del comportamento di quell'altro quindi se l'altro si comporta...agisce al 50% ...sempre 2,5 (*lo scrive a fianco di 6 sempre collegandoli con una freccia*) che sarebbe più basso sarebbe più basso...uhm... tenderei probabilmente allora a spendere 10 (*fa una freccia prima del 10 per indicarlo*)...cioè io farei delle ipotesi qui . Allora se vogliamo risolvere il problema...eh...se io non so nulla dell'avversario...cioè diciamo la verità è un modello che non funziona è un modello che nella realtà e per quanto chiede la domanda non serve a niente perché in questo modello mi sembra che non ci sia nulla sul comportamento dell'avversario e allora io potrei fare delle ipotesi aggiuntive del tipo il mio avversario ragiona esattamente come me, allora se il mio avversario ragiona come me...*(guarda il foglio)* non so nemmeno come ho ragionato io! (*pensa*) è molto complesso anche se il mio avversario ragiona come me è complessa la situazione...*(guarda la tabella)* ecco perché alla fine si mettono d'accordo! nella realtà! Perché conviene a tutti e due spendere sei e sei.
10. O: certo.
11. S: oppure potrei fare quest'altra ipotesi che la faccio perché mi è comoda e mi permette di risolvere il problema: l'ipotesi è, non sapendo cosa fa l'altro, presuppongo, come si fa anche in calcolo delle probabilità, che si comporti al 50% al 50% sceglie sei al 50% sceglie 10. In questo caso una strategia di un anno... non riesco a trovarla però riesco a trovarne una in un arco temporale più lungo possibile perché... a questo punto se è 50% io spendo 10 ...avrò una media di guadagno di quattro e mezzo, se spendo sei avrò una media di due e mezzo e quindi mi conviene spendere dieci ...a lungo termine ...presupponendo che l'altro scelga al 50% ...è vero che l'altro se fa lo stesso ragionamento sceglierà 10 anche lui ...e quindi il guadagno sarà uno in tutti e due i casi...uhhhh...
12. O: va bene.
13. S: va bene?
14. O: sì va benissimo.

Ringraziamenti

Ringrazio tutte le persone che hanno contribuito alla realizzazione di questo lavoro: in particolare, il Professor Paolo Boero per la guida e per il lavoro svolto in questi anni, il Professor Fioravante Patrone per la disponibilità mostrata e per i consigli e, naturalmente, tutti i soggetti che si sono offerti di essere intervistati (senza i quali la ricerca non sarebbe stata possibile). Ringrazio anche lo staff del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena (la Prof. Bartolini Bussi, la Dott. Michela Maschietto, e la Dott. Rossana Falcade) per il sostegno datomi nell'ultimo periodo della stesura della tesi.

Infine non posso dimenticare di ringraziare i miei familiari che mi sono sempre stati vicini supportandomi in ogni difficoltà.