WORKSHOPS / ATELIERS

CIEAEM 70

Mostaganem (Algérie)

July, 15 - 19 2018

"MATHEMATIQUES ET VIVRE ENSEMBLE": POURQUOI, QUOI, COMMENT?

"MATHEMATICS AND LIVING TOGETHER": WHY, HOW, WHAT?

Magic squares

Pedro Palhares
CIEC, Institute of Education, University of Minho

E-mail: palhares@ie.uminho.pt

Abstract: Magic squares are an important part of recreational mathematics. And they can be used in mathematics education, through problem solving, explorations, investigations, even with algorithmic procedures. Magic squares, on the other hand have not been invented in western mathematics, they were known in China and certainly were passed on from Africa to Europe (Gervais, 1997).
We will explain what a magic square is, which types exist, give some examples of methods to build them, and suggestions to their historical roots. Then we will solve some tasks based on magic squares and discuss the possibilities for mathematics education. Our claim is that magic squares are a rich environment to reflect on mathematics education.

Résumé: Les carrés magiques sont une partie importante des mathématiques récréatives. Et ils peuvent être utilisés dans l'enseignement des mathématiques, pour la résolution de problèmes, des explorations, des enquêtes, même avec des procédures algorithmiques. Les carrés magiques, en revanche, n'ont pas été inventés dans les mathématiques occidentales, ils étaient connus en Chine et ont certainement été transmis d'Afrique à Europe (Gervais, 1997).
Nous allons expliquer ce qu'est un carré magique, quels types existent, donner quelques exemples de méthodes pour les construire et des suggestions pour leurs racines historiques. Nous allons ensuite résoudre certaines tâches basées sur des carrés magiques et discuter des possibilités d'enseignement des mathématiques. Nous affirmons que les carrés magiques constituent un environnement riche pour réfléchir à l'enseignement des mathématiques.

Magic squares

If all the lines, columns and diagonals have the same sum, it's a magic square. Missing the diagonals, it's called half magic. A magic square is said to be pandiagonal when the sum of all diagonals, including broken ones, is equal to rows and columns (Rouse Ball, 2010). With only these definitions, we have already a lot to think about.
Ponte (2005) has developed a classification of mathematical tasks that is very useful. According to him, we can analyze mathematical tasks following two criteria, their degree of challenge and their degree of openness. Then, if a task is challenging and closed it is a problem. If it is closed but contain little challenge, it is an exercise. If it is open with reduced challenge, then it is an exploratory task. Finally, when it is open and challenging then it is an investigation task. Examples from each type of task can be constructed in the context of the magic squares.

Exploratory tasks

We will start with exploratory tasks. An exploratory task has reduced challenge and it is open. We could state one like this:
This magic square was invented by Benjamin Franklin (Fonseca, 2005). The magic sum is 260.

There are many combinations of numbers that make sum 260. Also, there are many combinations of four numbers that have sum 130. Can you find other 8 number combinations of sum 260? And of 4 numbers to sum 130?

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

None of the questions above are much difficult. Since it is an open task, when students start looking for the number combinations they will probably follow different paths, with different answers.

EXERCISES

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A method to construct magic squares of odd order is to place the number 1 in the central square of the top line, then always placing the next number diagonally to the top and right. If it falls outside the square, we have to imagine the rectangle bending to become a cylinder. If it's already occupied, or in the continuation of one main diagonal, we place the number just under the number already placed (Rouse Ball, 2010). Try to follow the placement of the numbers in the order 3 magic square given above to understand the method. Then construct an order 5 magic square.
This task is not very difficult since it is about following rules. That is clearly an exercise. The answer has to be the same, the procedure is known and is the same for every student.

Problems
This magic square below is a good example of a pandiagonal magic square. Not only all horizontal, vertical and diagonal line all add up to the same value, the broken diagonals too:

20	8	21	14	2
11	4	17	10	23
7	25	13	1	19
3	16	9	22	15
24	12	5	18	6

20+12+9+1+23 = 8+11+5+22+19 = 7+4+21+18+15 = 3+25+17+14+6 = 65
In addition to the rows, columns, and diagonals, a 5 × 5 pandiagonal magic square also shows its magic sum in four types of "quincunx" patterns:

20+2+6+24+13 = 20+21+13+7+4 = 21+19+5+7+13 = 8+17+25+11+4 = 65
Using these properties, can you finish the pandiagonal below (Fonseca, 2005)?

		7		
			15	
	12	4		
1	8	20	22	
	24			

This task contains a series of sometimes very difficult situations, sometimes not so difficult, but reasoning and decision making are necessary at all times. The path to the solution does not have to be unique, but the solution is unique.

INVESTIGATION TASKS

I have a friend whose birthday will be on the 17 of July, 2018. I want to offer her a magic square whose first line contains in sequence, 17, 7, 18. Is it possible?

17	**7**	**18**

In this kind of task, we start with a problem that is not so difficult in order to students get a sense of it. Then after they answer it, we introduce new questions and later encourage them to pursue their own interest. One possible follow up that will inevitably send students in different paths is "Can you use this idea to construct your own birthday magic square?" Many students will have lines whose sum is not a multiple of three. This means that they will leave the comfort zone of natural numbers and several lines of inquiry will be possible from there, expanding the notion of magic square and the discovery of possible properties.

Discussion

We think there are advantages of using magic squares to illustrate the differences between different kind of tasks. First, it's something many people heard about but probably does not know much about. So, there is something new and interesting to be learnt. Second, it is not so hard to understand, therefore the content is not an obstacle.
From the experience of solving different kind of tasks emerges reflection about their potentialities and benefits that can enrich a final discussion. In my experience that discussion is always rich and built upon the recent common experience students had.

Acknowledgements: This work was financed by the National Funds through the Foundation for Science and Technology (FCT) and co-financed by the European Regional Development Fund (ERDF) through the COMPETE 2020 - Operational Program for Competitiveness and Internationalization (POCI) within the CIEC (Research in Child Studies) of the University of Minho with the reference POCI-01-0145-FEDER-007562.

References

Fonseca, A. (2005). *Cuadrados* mágicos. Madrid: Santillana Ediciones.

Gervais, B. (1997). *Les carrés magiques.* Paris: Éditions Eyrolles.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Rouse Ball, W. W. (2010). *Mathematical Recreations and Essays. Whitefish, MT: Kessinger Publishing.*

"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 2, Supplemento n.3, 2019
G.R.I.M. (Departimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy)

Mathematiques et tours de magie

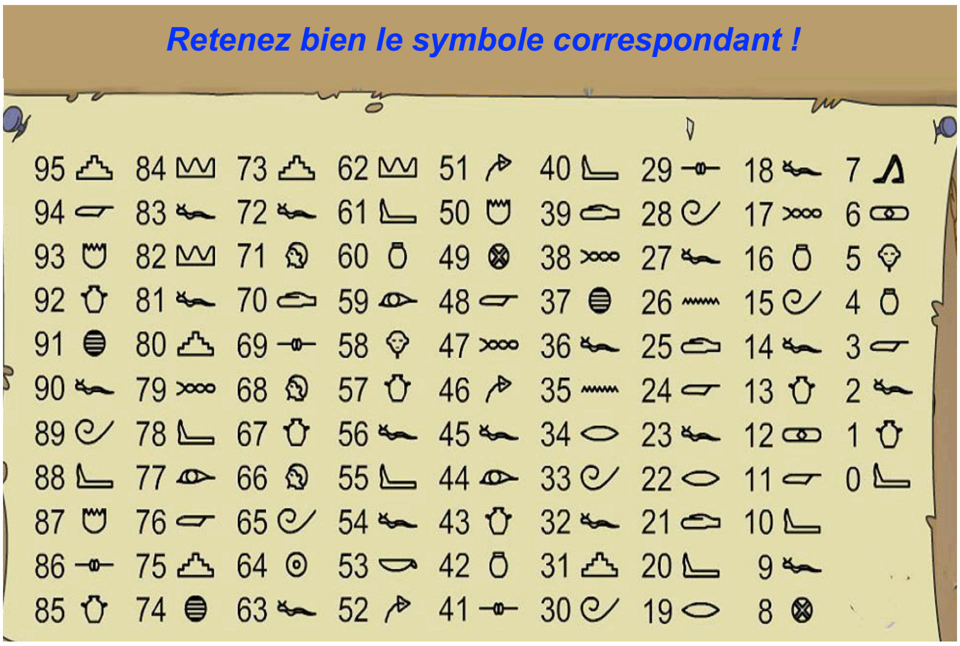
Françoise CERQUETTI-ABERKANE
Université Paris 12. ESPE de l'académie de Créteil

E-mail : cerquetti.francoise@gmail.com

Abstract : This workshop was devoted to mathematics and magic. The presented towers were all towers whose solution is based on mathematics. Once the tricks were presented a discussion on the interest of these tricks for teaching and learning mathematics was conducted with the participants.

Résumé : Cet atelier a été consacré aux mathématiques et à la magie. Les tours présentés étaient tous des tours dont la solution repose sur les mathématiques. Une fois les tours présentés une discussion sur l'intérêt de ces tours pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a été engagée avec les participants.

Une quarantaine de participants ont assisté à l'atelier. Une grande majorité d'entre eux étaient des inspecteurs algériens de l'éducation nationale.
Le premier tour de magie présenté était le suivant : le magicien demande à quelqu'un de choisir un nombre de 2 chiffres ab, de faire la somme des deux chiffres du nombre a+b et de retirer cette somme du nombre ab. Le magicien montre ensuite un tableau avec des symboles écrits à côté de chaque nombre compris entre 0 et 95 et demande à la personne choisie de mémoriser le symbole présent à côté du résultat qu'il a obtenu puis il devine le symbole que la personne a mémorisé.
Voici un exemple d'un tel tableau.



On refait la même chose avec une autre personne, un autre nombre et un autre tableau. Le magicien à chaque fois trouve le bon symbole.
Comment le magicien a-t-il fait ? Une discussion s'engage entre les participants pour permettre de comprendre quelle propriété mathématique est présente dans ce tour de magie.
La propriété est très simple. On propose aux participants de regarder attentivement les nombres qui ont le même symbole que le nombre qui a été trouvé. Parmi ceux là on constate que tous les

multiples de 9 y figurent. Bien sur il y a aussi des nombres quelconques qui ont également le même symbole afin de ne pas trop mettre sur la voie les participants au tour de magie.
La question est maintenant pourquoi les multiples de 9 ont-ils le même symbole ? La démonstration se fait facilement :

- Soit ab le nombre de deux chiffres
- ab- (a+b)= 10a- a + b - b= 9a
- Donc le nombre est multiple de 9
- Il suffit alors de mettre le même symbole au moins pour tous les multiples de 9 (et certains autres nombres pour dissimuler le truc) et le magicien sera sûr de trouver le nombre calculé par le participant.

Un deuxième tour de magie a été proposé. Il s'agit du jeu de trois. Il est extrait de (1).
Choisir 3 personnes qui vont prendre, hors de la vue du magicien, trois objets proposés (une pièce d'argent, un étui et une image) Le magicien doit deviner qui a pris chacun des trois objets.
On dispose de 24 jetons.
On donne 1 jeton à la première personne, 2 jetons à la deuxième personne et 3 jetons à la troisième personne. On donne la consigne suivante :
Quand le magicien sera sorti chaque personne choisira l'un des trois objets.
La personne qui a pris l'argent prendra parmi les jetons restants autant de jetons que ce qui lui a été donné.
La personne qui a pris l'étui prendra parmi les jetons restants le double de jetons que ce qui lui a été donné.
La personne qui a pris l'image prendra parmi les jetons restants le quadruple de jetons que ce qui lui a été donné.
Quand s'est terminé on rappelle le magicien qui devine qui a pris quoi ? Il lui suffit de regarder le nombre de jetons restant pour conclure. Les participants ont été convié à trouver comment le magicien procède et à quel reste de jetons correspond chaque possibilité de prise des objets par les trois personnes. Cette activité a été menée dans une classe de 4ème année de primaire et l'expérience est rapportée dans l'ouvrage (2). La compréhension du fonctionnement de ce tour de magie permet de travailler avec les élèves les différents cas possibles. L'un des problèmes évoqués par les participants et les élèves quand on fait cette activité en classe c'est le pourquoi du nombre de jetons donné à la personne qui prend l'image. La réponse se trouve dans la rédaction du tableau de choix possibles. Dans le cas où l'on donne le quadruple de jetons ou dans le cas où l'on donne le triple de jetons on se rend compte que dans cette dernière hypothèse deux cas différents de prise des objets correspondent alors au même nombre de jetons restants et donc cela ne permettrait pas de réaliser le tour de magie.
Le tableau des cas possibles ci-dessous permet de comprendre que à chaque reste correspond une et une seule prise d'objets.

	P	S	T	reste
début	1 jeton	2 jetons	3 jetons	18 jetons
Cas 1	A (1 jeton)	E (4 jetons)	I 12 jetons)	1 jeton
Cas 2	A (1 jeton)	I(8 jetons)	E (6 jetons)	3 jetons
Cas 3	E (2 jetons)	A (2 jetons)	I (12 jetons)	2 jetons
Cas 4	E (2 jetons)	I(8 jetons)	A (3 jetons)	5 jetons
Cas 5	I (4 jetons)	A(2 jetons)	E (6 jetons)	6 jetons
Cas 6	I (4 jetons)	E(4 jetons)	A (3 jetons)	7 jetons

On remarque qu'il ne reste jamais 4 jetons.
Un moyen mnémotechnique est également proposé dans le document historique le voici pour mémoriser qui a pris quoi en fonction du reste.

Parfer Cesar jadis devint si grand prince

1 2 3 5 6 7

ou en latin

Salue certa anima senita vita quies

Le premier mot correspond à un reste de 1 jeton et la première syllabe correspond à la première personne, la deuxième syllabe à la deuxième personne il est alors facile de savoir ce qu'a pris la troisième personne.

Ainsi de suite ; mais comme il ne reste jamais 4 jetons le 4ème mot correspond à un reste de 5 jetons et ensuite tout est décalé. Le 5ème mot correspond à un reste de 6 etc…les syllabes correspondront toujours à la première puis à la deuxième personne.

Il s'agira de d'adapter ce moyen mnémotechnique aux différentes langues si on veut utiliser ce tour de magie ailleurs qu'en France.

Concernant les objets on peut prendre en anglais « ace, envelope, image », mots qui commencent aussi par les lettres a e i, cela facilitera grandement la fabrication d'une phrase mnémotechnique.

Enfin un troisième tour de magie a été réalisé. Il s'agit du jeu de l'anneau extrait du même document que précédemment (1).

Voilà la description du tour de magie :

On va choisir un nombre de personnes < 9, que l'on numerotera. L'une d'entre elles va prendre un anneau et le mettre à l'une des jointures d'un de ces doigts hors de la vue du magicien.

Le magicien doit trouver qui a pris l'anneau et à quelle main, quel doigt et quelle jointure il l'a mis.

Avant de quitter la pièce il donne la consigne suivante afin que tout le monde ait le même codage.

On numérote les personnes, (P)

On numérote les mains 1 pour la main droite, 2 pour la main gauche (M)

On numérote les doigts 1 pour le pouce, 2 pour l'index etc… (D)

On numérote les jointures, 1 pour celle du haut, 2 pour celle du milieu et 3 pour la dernière. (J)

Une fois que l'une des personnes a pris l'anneau et la mis à l'un de ses doigts elle indique à toute la salle à quelle main, quel doigt et quelle jointure elle l'a mis.

Le magicien revient et demande à toute la salle de faire le calcul suivant :

Doubler le nombre correspondant à la personne qui a pris l'anneau.

A ce nombre ajouter 5

Multiplier par 5 le résultat,

Y ajouter 10

Y ajouter le nombre correspondant à la main,

Multiplier le résultat par 10

Y ajouter le numéro du doigt

Multiplier le résultat par 10

Y ajouter le numéro de la jointure

Enlève 3500 au résultat précédent.

Remarque : Avec les élèves une feuille de calcul est fournie à chacun reprenant schématiquement les calculs. Lors de l'atelier cette même feuille a été donnée au participants afin de simplifier le travail.

On donne ce nombre de 4 chiffres au magicien qui découvre quelle personne a pris l'anneau, à quelle main elle l'a mis et à quelle jointure.

En fait le résultat de 4 chiffres indique directement le numéro de la personne, de la main, du doigt et de la jointure.

Là encore après le tour de magie les participants ont été invité à comprendre pourquoi les 4 chiffres du résultat final indiquent dans cet ordre, la personne, la main, le doigt et la jointure.

Explications

On fait doubler le nombre correspondant à la personne qui a pris l'anneau. 2 P

A ce nombre on ajoute 5	2P + 5
Le résultat est multiplié par 5,	(2P+5) x 5 = 10 P + 25
On ajoute 10	10P + 25 + 10 = 10P + 35
On ajoute le nombre correspondant à la main,	10P + 35 + M
On multiplie par 10	(10P + 35 + M) x 10= 100P + 350 + 10M
On ajoute le numéro du doigt	100P + 350 + 10M + D
On multiplie par 10	1000P + 3500 + 100M + 10 D
On ajoute le numéro de la jointure	1000P + 3500 + 100M + 10 D + J
On enlève 3500	1000P + 3500 + 100M + 10 D + J -3500

Le résultat de 4 chiffres indique le numéro de la personne, de la main, du doigt et de la jointure dans cet ordre. 1000P + 100M + 10 D + J = PMDJ (nombre de 4 chiffres du résultat final)

Toutes ces activités peuvent être menées dans des classes de l'école élémentaire et/ou des premières années du collège. Elles permettent aux élèves de résoudre des problèmes et aussi de comprendre certaines propriétés mathématiques d'une façon plus ludique qu'un cours traditionnel. Plusieurs expériences utilisant l'histoire des mathématiques ont été relatées dans (2).

Bibliographie

(1) Arithmétique curieuse par sa nouveauté, facilité et brièveté (cote fonds français 14731 BNF) révérend père Hilarion Augustin Dechaussé 1702
(2) F. Cerquetti-Aberkane et Annie Rodriguez : Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège. CRDP de l'académie de Créteil 2002