STORIA DEL PENSIERO ALGEBRICO FINO AL CINQUECENTO

COSTRUZIONE DEL SIMBOLISMO E RISOLUZIONE DI EQUAZIONI

Elsa Malisani*

Articolo pubblicato nei "Quaderni di Ricerca in Didattica" del "Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche" di Palermo - Italia, nel N° 6 del 1996.

* G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche – Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università – Via Archirafi, 34 – 90123 Palermo – Italia.

STORIA DEL PENSIERO ALGEBRICO FINO AL CINQUECENTO

COSTRUZIONE DEL SIMBOLISMO E RISOLUZIONE DI EQUAZIONI

INTRODUZIONE

Risolvere equazioni di primo e di secondo grado può sembrare un compito abbastanza semplice per una persona che conosce i rudimenti dell'algebra e le operazioni nei vari insieme numerici, per esempio: razionali assoluti, interi relativi e reali. Ma facendo un'analisi dello sviluppo storico dell'algebra è evidente che per molti secoli questa disciplina è rimasta indietro rispetto alla geometria e che la costruzione del linguaggio simbolico è stata troppo lenta e difficoltosa. E allora, in assenze di un linguaggio adeguato e di certe conoscenze sugli insieme numerici, come venivano rappresentati i diversi tipi di equazioni?, quali algoritmi di risoluzione utilizzavano i popoli antichi e orientali?, come influivano le conoscenze aritmetiche e geometriche sullo sviluppo del linguaggio algebrico e sulle tecniche risolutive?, come si sviluppa la concezione storica di equazione?. In assenza di simbolismo o con un simbolismo molto rudimentale era possibile classificare i problemi secondo l'algoritmi di risoluzione? cioè, la possibilità di ipotizzare la generalizzazione di problemi va sempre accompagnata dell'uso di un simbolismo adeguato? In questa sede vedremo di dare risposta ad alcune di queste domande.

Il pensiero algebrico è favorito dall'uso di un simbolismo adeguato e allora nella storia dell'algebra ha importanza non solo la storia dei concetti, ma anche quella dei sistemi di simboli usati per esprimere i medesimi (Arzarello *et al.*, pag. 10 - 11). Secondo Nesselman si possono individuare tre periodi distinti:

1- FASE RETORICA: anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.), nella quale si usa esclusivamente il *linguaggio naturale*, senza ricorrere a alcun segno.

2- FASE SINCOPATA: da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune *abbreviazioni* per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in *linguaggio naturale*.

3- FASE SIMBOLICA: introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il *linguaggio simbolico* non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Secondo Ferreri e Spagnolo (pag. 83): *"Lo studio delle concezioni storiche non è altro che lo studio dei significati legati ad un certo linguaggio in un determinato periodo storico. Un linguaggio nasce con* ***ambiguità semantiche*** *o anche* ***ricchezza di significati*** *all'interno della grammatica. Quando il linguaggio si formalizza si assegna un significato ad ogni formula e* ***si perdono i significati precedenti****"*.

L'obiettivo di questo lavoro è studiare la costruzione del linguaggio algebrico con le sue ambiguità semantiche e la sua ricchezza di significati, in relazione all'evoluzione dei metodi e di strategie di risoluzione di equazioni nei due periodi storici che precedono la formalizzazione: retorico e sincopato. Perché è precisamente nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico nella quale si trova il passaggio tra un campo semiotico significativo (*l'aritmetica*) e il tentativo di mettere a punto un nuovo linguaggio (*algebrico*) relativo ad una certa classe di problemi (*risoluzione di equazioni*). Gli ostacoli epistemologici sono legati proprio a questo passaggio (Spagnolo, 1996, pag. 81; Marino e Spagnolo, pag. 131).

Il lavoro qui presentato viene diviso in tre parti. Nella prima si illustra lo sviluppo del linguaggio algebrico nei popoli antichi, greco e orientali in stretta relazione con le loro conoscenze aritmetiche. Nella seconda vengono spiegati i principali metodi di risoluzione di equazioni utilizzati da questi popoli, specialmente quelli che si appoggiano sulle conoscenze aritmetiche, geometriche e anche analitiche. Nella terza si presenta la costruzione del linguaggio algebrico in Europa fino al cinquecento. In particolare vengono analizzate tre opere: il *Liber Quadratorum* di Leonardo Pisano, *Il Trattato d'Algibra* (XIV secolo) di autore anonimo e *L'Algebra* di Rafael Bombelli, perché esse rappresentano tre momenti significativi nel tentativo di mettere a punto il linguaggio algebrico.

Questo articolo non vuole essere un lavoro completo dal punto di vista storico ma un apporto alla Didattica della Matematica. Si pone come contributo sugli studi che si stanno realizzando all'interno G.R.I.M. sugli ostacoli epistemologici riguardanti il linguaggio algebrico. Sulla base di questa analisi storico-epistemologica è possibile mettere a punto situazioni didattiche che possano verificare la persistenza degli ostacoli epistemologici a tutt'oggi.

1. L'ALGEBRA DEI POPOLI ANTICHI, GRECO E ORIENTALI

1.1 I BABILONESI

Le caratteristiche del sistema di numerazione babilonesi che più colpiscono sono la base 60 (che in alcuni casi viene usata assieme alla base 10) e la notazione posizionale. Conoscevano un sistema di regole di calcolo per i numeri naturali e razionali positivi, oltre le quattro operazioni usuali, utilizzavano le potenze di esponenti 2 e 3 e le radici quadratiche e cubiche.

Un problema classico dell'algebra babilonese più antica chiedeva di trovare un numero che aggiunto al suo reciproco fosse un numero positivo dato (*b*). La sua risoluzione conduce ad un'equazione di secondo grado del tipo: $x^2 - bx + 1 = 0$ con $b > 0$, la cui formula risolutiva era ben conosciuta dai babilonesi. Poiché non avevano i numeri negativi, le radici negative delle equazione quadratiche venivano trascurate. Erano capaci di risolvere problemi speciali che conducevano ad equazioni biquadratiche e a sistemi di equazioni contenenti numerose incognite. Per la soluzioni di questi sistemi (con uguale numero di equazioni e di incognite) usavano un metodo di combinazione delle varie equazioni fino a quando venivano calcolate le incognite.

I problemi algebrici venivano enunciati e risolti <u>verbalmente</u>, descrivendo soltanto i passaggi necessari per ottenere la soluzione, ma non si preoccupavano di giustificare le regole impiegate. Le parole *us"* (lunghezza), *sag* (larghezza) e *asa* (area) erano spesso usate come incognite, e non perché le incognite rappresentassero necessariamente queste quantità geometriche, ma probabilmente perché molti problemi algebrici nascevano da situazioni geometriche e la terminologia geometrica era diventata standard. A volte usavano dei simboli speciali per rappresentare le incognite i quali corrispondevano agli antichi simboli pittorici sumerici, non più in uso nel linguaggio corrente (Cfr. Kline, pag. 14).

I babilonesi mostravano una certa abilità numerica e algebrica nella risoluzione di problemi speciali, ma nel complesso la loro aritmetica e la loro algebra erano molto elementari. Bourbaki (pag.100) ritiene che il contributo più importante dei babilonesi sia stato il ridurre la soluzione delle equazioni quadratiche e biquadratiche ad un'unica operazione algebrica nuova, l'estrazione di radici quadrate.

1.2 GLI EGIZIANI

Il sistema di numerazione egiziano usava la base 10 ma non era posizionale. I numeri venivano rappresentati mediante simboli geroglifici e la direzione di scrittura era da destra a sinistra. L'insieme numerico utilizzato era formato dai numeri naturali non nulli, dalle frazioni del tipo $1/n$ con n intero positivo e dalla frazione $2/3$. Oggi sappiamo che ogni razionale positivo si può scrivere come somma di due elementi di questo insieme, ma gli egiziani conoscevano soltanto alcune di queste somme, per esempio:

$2/5 = 1/3 + 1/15$; $2/7 = 1/4 + 1/28$; $2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$; ecc.

Il papiro Rhind (1700 a.C. circa), noto anche come papiro **Ahmes**: nome del suo autore, contiene una tavola per esprimere le frazioni con numeratore 2 e denominatore dispari da 5 a 101 come somma di frazioni con numeratore 1 o frazioni unitarie. Mediante questa tavola anche una frazione del tipo a/b poteva essere espressa come somma di frazioni unitarie. Servendosi delle frazioni unitarie potevano effettuare le quattro operazioni aritmetiche sulle frazioni (Vedasi Nota 1).

La loro aritmetica era essenzialmente additiva, la addizione e la sottrazione si effettuavano ripetendo un numero conveniente di volte il passaggio da un numero al suo consecutivo o al suo precedente, nella successione naturale dei numeri. La moltiplicazione e la divisione venivano ricondotte a procedimenti additivi. Ad esempio, 6 volte 12 era calcolato nel seguente modo:

	1	*12*
	2	***24***
6		
	4	***48 .***

Ogni riga è il doppio della precedente. Osserviamo che $\mathbf{2} \cdot 12 = 24$ e $\mathbf{4} \cdot 12 = 48$, allora $\mathbf{6} \cdot 12 = 24 + 48 = 72$. Cioè ogni moltiplicazione diversa da 10 veniva scomposta in una successione di duplicazioni, seguita da un'addizione. La moltiplicazione per 10 consisteva invece nel sostituire il simbolo di $10^{\,n+1}$ a quello di $10^{\,n}$ del moltiplicando, per n intero positivo. Ugualmente interessante è il modo in cui gli egiziani effettuavano la divisione di un numero intero per un altro, ad esempio 19 diviso 8 veniva calcolato nel seguente modo:

1	*8*	
2	***16***	
1/2		
1/4	***2***	***19***
1/8	***1***	

L'idea era semplicemente quella di prendere tante volte il numero 8 e di parti di 8 che danno in totale 19. Quindi $19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$.

Nei papiri si trovano le soluzioni di problemi che tradotti al linguaggio algebrico si possono ricondurre ad equazioni lineari ad un'incognita. Tuttavia i procedimenti usati dagli egiziani erano puramente *aritmetici*. I problemi venivano enunciati verbalmente insieme con delle semplici regole per ottenere le soluzioni, ma senza spiegare perché venivano utilizzati quei metodo e perché essi funzionavano (Cfr. Kline, pag. 25). In alcuni casi Ahmes usava la *regola della falsa posizione*, che verrà illustrata più avanti.

Gli egiziani consideravano anche i più semplici tipi di equazioni quadratiche, ad esempio:

$a\ x^2 = b$, $x^2 + y^2 = 400$, ecc.; e sistemi di grado superiore al primo come il seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x / y = 1/(3/4) \ . \end{cases}$$

Anche in questo caso per determinare i valori delle incognite ricorrevano alla *regola della falsa posizione.*

L'algebra egiziana era molto limitata e non usava praticamente alcun simbolismo. Nel papiro Ahmes l'addizione e la sottrazione sono rappresentate rispettivamente dalle gambe di un uomo che si avvicina e dalle gambe di un uomo che si allontana: -_/_| e /__ ; mentre il simbolo ⌈ denota la radice quadrata.

Secondo Kline (pag. 24), gli estesi e complicati calcoli con le frazioni furono uno dei motivi per cui gli egiziani non portarono mai la loro aritmetica e la loro algebra a uno studio avanzato. La matematica era uno strumento che si presentava sotto la forma di un insieme di semplici regole non dimostrate e prive di connessione fra loro, rispondenti a problemi che nascevano nella vita quotidiana della gente.

1.3 I GRECI

I greci adoperavano un sistema di numerazione avente per base 10, però cambiarono il loro modo di scrivere i numeri almeno due volte. Proprio agli inizi del periodo classico (sec. VII a.C.) introdussero simboli speciali per rappresentare i numeri e usarono una specie di abaco per effettuare i calcoli. Più tardi, intorno al V secolo a.C., i greci cominciarono a utilizzare il sistema attico che si serviva delle lettere: ⇉, ↻, ⇆, ⇇, ⇮ e ↺ per rappresentare i numeri: 1, 5, 10, 100, 1.000 e 10.000. I numeri intermedi venivano formati combinando questi simboli. Per qualche motivo che ci è ignoto, nel III secolo a.C. i greci cambiarono il loro modo di scrivere i numeri passando al sistema ionico o alessandrino che usava le lettere dell'alfabeto ed altre tre segni di un antico alfabeto fenicio. Le operazioni aritmetiche venivano effettuate in modo simile al nostro e utilizzavano dei simboli speciali per indicare le frazioni, anche se in alcuni casi si può trovare il sistema egiziano di scomposizione in frazioni unitarie; per i calcoli astronomici, invece, si usavano le frazioni sessagesimali (Cfr. Kline, pag. 153-156).

I matematici del periodo classico consideravano le frazioni soltanto come rapporti di interi e non come parte del tutto e questi rapporti venivano usati soltanto nelle proporzioni; gli alessandrini (Archimede, Erone e Diofanto) usavano, invece, le frazioni come veri i propri numeri. Nell'epoca classica si cercava di evitare i numeri irrazionali, almeno in parte, lavorando geometricamente.

I greci classici si preoccupavano nel giustificare le regole impiegate, anche se non si trova ancora un trattamento assiomatico della teoria dei numeri naturali. **Euclide** nei suoi *Elementi* dimostra alcune regole di calcolo, soprattutto quelle relative alla teoria delle grandezze. Nel Libro VI giustifica alcuni risultati fondamentali dell'algebra moderna utilizzando un *linguaggio geometrico*, per esempio le tre proposizione: 12, 28 e 29 danno la soluzione a problemi che, enunciati algebricamente, si presentano sotto forma di equazioni di primo e secondo grado ad un'incognita, con coefficienti positivi. Secondo Bourbaki (pag. 75): "...il progresso verso il rigore va accompagnato in Euclide di una paralisi, ed in alcuni punti anche di un tornare indietro, nello sviluppo del calcolo algebrico. Il predominio della geometria (per la quale fu concepita la teoria delle grandezze) blocca lo svolgimento autonomo della notazione algebrica, gli elementi che appaiono nei calcoli devono sempre essere rappresentati geometricamente...".

Euclide nei suoi *Elementi* si limita a considerare problemi che possono risolversi mediante costruzioni con riga e compasso, cioè quelle costruzioni nelle quali appaiono soltanto rette e circonferenze come curve ausiliari. Ma oggi sappiamo che le equazioni algebriche che possono risolversi mediante l'uso della riga e del compasso sono di tipo particolari; per esempio, un'equazione irriducibile di terzo grado (sul campo dei numeri razionali) non si può risolvere in questo modo, e i greci avevano trovato problemi di terzo grado che sono stati celebri, come la duplicazione del cubo (risoluzione di $x^3 = 2a^3$) e la trisezione dell'angolo; mentre la quadratura del cerchio si presentava come un problema trascendente. Per risolvere questi problemi dovevano introdurre numerose curve algebriche (coniche, cissoide di Diocle, concoide di Nicomede) o trascendenti (quadratrice di Ippia, spirale di Archimede) [Vedasi Nota 2].
Secondo Bourbaki (pag. 103) i metodi "geometrici" utilizzati dai greci non rappresentarono alcun progresso per la risoluzione delle equazioni algebriche e l'unica opera dell'Antichità che rese un contributo importante a questa teoria è il Libro X degli *Elementi* di Euclide, il quale ebbe un'influenza notevole sugli algebristi del Medioevo e del Rinascimento. In questo Libro (1932, pag. 9-11) Euclide considera delle espressioni ottenute mediante combinazione di radicali come: $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ con a e b razionali positivi, dà delle condizioni perché queste espressioni siano irrazionali, le classifica in distinte categorie e studia le relazione algebriche fra questi irrazionali, per esempio:

$$\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-q}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-q}\right)}$$

ma esprime tutto nel linguaggio geometrico abituale degli *Elementi* e perciò l'esposizione risulta pesante e scomoda.

1.4 DIOFANTO

Nel declino della matematica greca si risvegliò l'interesse per l'aritmetica e l'algebra come argomenti *indipendenti* dalla geometria. Gli abacisti professionisti continuavano ad applicare senza modificazioni le regole ereditate dagli egiziani e babilonesi. La produzione algebrica era espressa in forma verbale e non veniva usato alcun simbolismo né venivano fornite dimostrazioni dei procedimenti impiegati. A partire dall'epoca di Nicomaco (c.100 d.C.), la risoluzione di problemi che conducevano a delle equazioni era diventata una forma comune di indovinelli.

Il culmine dell'algebra alessandrina viene raggiunto con **Diofanto** (250 d.C.) che scrisse numerosi libri tra cui l'*Arithmetica*. Egli non utilizzò le rappresentazioni geometriche dei numeri, ma si preoccupò di sviluppare alcune regole del calcolo algebrico, ad esempio quella che tradotta in linguaggio algebrico moderno equivale alla formula: $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ per piccoli valori di m ed n. Introdusse per la prima volta delle abbreviazioni (lettere greche) per rappresentare l'incognita di un'equazione e le sue potenze:

x	$\to \zeta$	chiamata	"*il numero del problema*"
x^2	$\to \Delta^{\Upsilon}$		"*quadrato*" *o* "*potenza*"
x^3	$\to K^{\Upsilon}$		"*cubo*"
x^4	$\to \Delta^{\Upsilon}\Delta$		"*quadrato-quadrato*"
x^5	$\to \Delta K^{\Upsilon}$		"*quadrato-cubo*"
x^6	$\to K^{\Upsilon}K$		"*cubo-cubo*"

$1/x \to \zeta$ [illegible]

L'addizione veniva indicata da Diofanto scrivendo i termini l'uno di seguito all'altro, per la sottrazione usava il simbolo /|\ e per la uguaglianza ι^{σ}, non vi erano simboli per rappresentare la moltiplicazione, la divisione e i coefficienti generici. I calcoli, invece, erano eseguiti in linguaggio naturale, le soluzione venivano scritte in un testo continuo.

L'*Arithmetica* di Diofanto è una raccolta di problemi staccati che conducono a equazioni di primo, secondo e terzo grado, in una o più incognite; alcune di queste equazioni sono determinate altre, invece, sono indeterminate.

Per risolvere equazioni di primo grado in un'incognita Diofanto raggruppa in un membro tutti i termini contenenti l'incognita e nell'altro i termini noti, così il problema è ridotto ad eseguire una divisione o a cercare un quarto proporzionale. Nel caso di trovare la soluzione di un sistema determinato di equazioni lineari, Diofanto incontra delle difficoltà perché disponeva di un solo simbolo per rappresentare le incognite e allora esprime le altre incognite in funzione di una privilegiata che spesso era un'incognita ausiliare, scelta per ogni problema. Ad esempio per risolvere il problema 27 del Libro I dell'*Arithmetica* che chiede di: "Trovare due numeri la cui somma sia uguale a 20 e il cui prodotto sia uguale a 96 ", Diofanto procede nel modo seguente: somma data 20, prodotto dato 96, $2x$ la differenza dei numeri richiesti. Dunque i numeri sono $10 + x$ e $10 - x$. Quindi $100 - x^2 = 96$. Allora $x = 2$ e i numeri richiesti sono 12 e 8 (Kline, pag. 164).

Nel caso delle equazioni di secondo grado ad un'incognita, considera separatamente cinque casi: $a x^2 = bx$, $a x^2 = c$, $a x^2 + bx = c$, $a x^2 + c = bx$, $a x^2 = bx + c$ in modo che in coefficienti a, b e c risultino sempre positivi.

La caratteristica più straordinaria dell'opera di Diofanto è la risoluzione di equazioni indeterminate. Alcuni autori (Bourbaki, pag. 122) ritengono che Diofanto sia stato il primo matematico ad affrontare questo tipo di problemi in maniera sistematica e pertanto, viene considerato il promotore della branca dell'algebra chiamata oggi *"analisi diofantea"*.

Egli risolve equazioni lineari in due incognite del tipo: $ax + by = c$ con a, b e c positivi, dando un valore ad una delle incognite, per esempio, $x = x_o$ con x_o minore del rapporto c/a , e allora l'equazione è soddisfatta dal numero razionale positivo $y = (c - a\,x_o)/b$. Nel caso delle equazioni quadratiche, Diofanto esprime alcune incognite in funzione di una "indeterminata", scelta in modo che le soluzioni risultino razionali positive. Ad esempio, per risolvere l'equazione: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ considera $x = lx - a$, $y = mx - b$ con l, m costanti arbitrarie e x una quantità da determinare, trovando così: $x = 2\,(la + mb)/(l^2 + m^2)$ ed allora x e y risultano razionali (Cfr. Loria, pag. 202-203). Nel caso di sistemi di due equazioni quadratiche: $y^2 = A\,x^2 + B\,x + C$ e $z^2 = D\,x^2 + E\,x + F$ considera soltanto casi particolari in cui A, B, ..., F sono numeri speciali e il suo metodo è sempre quello di assumere che y e z si possano esprimere come determinate funzioni di x e di risolvere rispetto a x. Procedendo in questo modo Diofanto si rende conto che scegliendo certe espressioni o certi valore per alcune incognite, egli dà soltanto delle soluzioni particolari e che i valori assegnati sono in una certa misura arbitrari.

Diofanto generalmente si accontenta di ottenere una soluzione razionale positiva ed in casi eccezionali cerca soluzioni intere (nell'analisi diofantea moderna si cercano soltanto soluzioni intere). Se un'equazione di secondo grado ha due radici positive, egli ne dà soltanto una, la più grande. Se la soluzione di un'equazione conduce chiaramente a due radici negative o immaginarie, respinge l'equazione e dice che non è risolubile. Nel caso delle radici irrazionali, Diofanto ripercorre all'indietro i passaggi effettuati e mostra come, modificando l'equazione, se ne può ottenere un'altra che abbia radici razionali.

Egli dà prova di grandissima abilità nel ridurre equazioni di vari tipi a modelli che è in grado di risolvere. Non si sa come sia pervenuto ai suoi metodi per la mancanza di informazione sullo sviluppo del pensiero matematico nel ultimo periodo alessandrino, ma per quello che si conosce i suoi studi sono notevolmente diversi dai lavori precedenti. Diofanto non possiede *metodi generali*, ciascuno dei problemi dell'*Arithmetica* viene risolto con un metodo diverso: ci sono più di cinquanta tipi distinti di problemi ma non si trova nessun tentativo per classificarli. Diofanto non riesce a cogliere la essenza dei suoi metodi che gli permetta di arrivare a una piena generalizzazione. Alcuni autori non condividono questa opinione, Eulero attribuì a Diofanto il merito di essere arrivato a dei metodi generali che egli non poteva mostrare in quanto tali, perché non aveva a disposizione delle lettere per rappresentare una classe di numeri, come ad esempio i coefficienti di un'equazione (Kline, pag. 167 -168).

1.5 I CINESI

L'algebra cinese si è sviluppata in due periodi: uno anteriore al XIII secolo, che corrisponde alla fase retorica, e uno posteriore (molto importante per il notevole progresso) che presenta le caratteristiche della fase sincopata. Un problema tuttora aperto è fino a che punto questo sviluppo è stato totalmente autonomo, quali sono stati i punti di contatto con la matematica greca, indiana e araba, e in quale direzione si è manifestata l'influenza di un popolo sull'altro.

Già nel XIII secolo a.C. i cinesi erano in possesso di un sistema di numerazione decimale simile al nostro sistema posizionale. Di alcuni secoli posteriori sono le conoscenze sulle regole di calcolo con le frazioni e i procedimenti di estrazioni di radici quadrate e cubiche. La prima opera della letteratura matematica cinese è il *"Libro sacro dell'aritmetica"*, scritto nel periodo della terza dinastia (1122 - 255 a.C.). In questo libro si trovano relazioni ottenute a partire da una figura composta di quadrati e rettangoli, che tradotte al linguaggio algebrico moderno sono del tipo: $c^2 + 4\,(ab)/2 = (a - b)^2 + 4\,ab$ (Vedasi Nota 3).

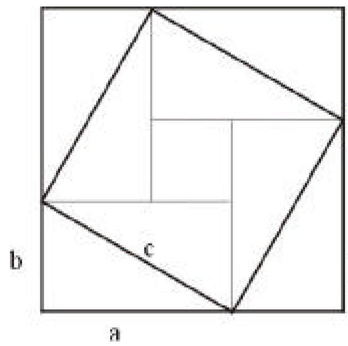


FIG. 1

Altri autori cinesi hanno scoperto la relazione: $(b + a)^2 = 4\,ab + (b - a)^2$ usando una figura simile alla precedente. Questa relazione permette di calcolare due numeri a partire dalla loro somma (o dalla loro differenza) e dal loro prodotto, utilizzando una radice quadrata. I cinesi si sono trovati di fronte ad una tecnica che conduce alla risoluzione di equazioni di secondo grado in un'epoca in cui la nozione stessa di tali equazioni era ancora sconosciuta.

Al III secolo a.C. risale la risoluzione sistematica delle equazioni de primo grado mediante l'applicazione di un metodo che alcuni autori (Guillemot, pag. 13) ritengono sia proprio l'origine del metodo della *doppia falsa posizione*. Tale metodo, chiamato *del troppo e del non abbastanza,* si trova spiegato nel libro *"Jiuzhang suanshu" (Nove capitoli sull'arte del calcolo)* scritto durante il periodo dei Han (206 a.C. - 220 d.C.) e viene utilizzato per risolvere sistemi di primo grado di due equazioni in due incognite ed equazioni di secondo grado in modo approssimativo.

Nella letteratura cinese vengono anche risolti problemi di analisi indeterminata. Per esempio, nella l'*Aritmetica classica* di **Chang Ch'in Suan-ching** (anteriore al VII secolo d.C.) si trovano problemi del tipo: "Un gallo costa 5 monete, una gallina 3, mentre 3 polli si hanno per una moneta; mediante 100 monete si sono acquistati in tutto 100 bipedi; quanti di ciascuna specie furono comprati?". La risoluzione di questo problema equivale alla ricerca delle soluzioni intere e positive del seguente sistema: $x + y + z = 100$ e $5x + 3y + (1/3)\,z = 100$. Chang Ch'in ne trova le uniche tre soluzioni: $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$ e $(12, 4, 84)$, ma non sappiamo quale metodo abbia applicato per risolverlo. Questo problema è analogo a una serie di questioni trovate in uno scritto arabo del X secolo appartenente ad Abu Kamil. I cinesi indicavano i problemi di questo tipo con il nome di: "Problemi dei cento uccelli" perché in essi si utilizzava spesso il numero *100* (Cfr. Loria, pag. 275 - 277).

Tra il VII e il XIII secolo troviamo una serie di lavori che rappresentano una raccolta di problemi risolti mediante equazioni di terzo, quarto e quinto grado, ma i metodi utilizzati non vengono in alcun modo giustificati; talvolta fra i risultati esatti vengono intercalati procedimenti grossolani, preferiti ad altre migliori già usate. Tra tutte queste procedure è interessante mettere in evidenza quella adoperata da **Chi'n Chiu-shao** nella sua opera *Nove sezioni di matematica* (1257), per risolvere l'equazione biquadratica: $x^4 - 763.200\, x^2 + 40.642.560.000 = 0$. Il metodo consiste in applicare successive trasformazioni all'equazione originale per trovare a una a una le cifre della radice; queste trasformazioni consistono in sostituire $x + a$ ad x, essendo a un valore che contiene le cifre già calcolate della radice. L'autore determina $x = 840$ ma senza alcuna giustificazione sui passaggi effettuati. Questo modo di procedere già era stato adoperato un secolo prima dall'arabo al-Tusi per risolvere equazioni di terzo grado ed è simile a quello conosciuto attualmente con il nome di *Ruffini-Horner*.

Nel XIII secolo appare l'opera di **Li Yeh** o **Li-Ye** chiamata: *Specchio marittimo della misura del cerchio* che viene considerata come l'inizio del notevole sviluppo dell'algebra cinese. In questo libro vengono insegnati dei procedimenti per tradurre in equazioni i problemi espressi in linguaggio naturale. Le equazioni sono tutte quadratiche e vengono indicate simbolicamente scrivendo di seguito i coefficienti delle potenze crescenti dell'incognita, in rosso quelli positivi, in nero quelli negativi, ovvero (per evitare la scrittura policroma) i negativi attraversati da una sbarra; lo zero è rappresentato da un cerchietto. In un altro lavoro dello stesso matematico, l'algebra viene applicata alla risoluzione di problemi geometrici che richiedono il calcolo degli elementi di alcune figure geometriche. Tra queste figure troviamo alcune ben note dalla geometria come il quadrato, il rettangolo, il cerchio e la corona circolare; altre che sono combinazioni di quadrati, rettangoli e cerchi concentrici. Le nozione teoriche applicate sono elementari, ogni soluzione è esposta completamente con una certa metodologia che, secondo Loria (pag. 289 - 290), ricorda l'andamento compassato degli *Elementi* di Euclide.

Chu Shih-Chieh (XIII - XIV secolo), nel *Prezioso specchio di quattro elementi*, spiega una tecnica algebrica utilizzata per risolvere problemi con quattro incognite, che i cinesi rappresentavano con gli ideogrammi corrispondenti a cielo, terra, uomo e cosa. Essi non indicavano con simboli speciali l'uguaglianza e le operazioni aritmetiche, in questo si manifesta l'inferiorità dell'algebra cinese rispetto a quella utilizzata in Europa. Nella stessa opera appaiono la formula del quadrato di un polinomio e il "triangolo aritmetico" (corrispondente alla parte superiore del "triangolo di Tartaglia") che permetteva il calcolo dei coefficienti dello sviluppo binomiale di esponente inferiore a 9.

1.6 GLI INDIANI

Il gran sviluppo della matematica indiana si produce nel periodo compreso fra il 200 e il 1200 d.C.. La geometria degli indiani era quella greca, ma essi avevano un dono speciale per l'aritmetica. E' possibile che l'algebra sia stata fortemente influenzata da Alessandria e Babilonia, e in una certa misura anche dalla Cina, ma essi crearono un simbolismo algebrico abbastanza efficiente che permise loro di sviluppare nuovi procedimenti di risoluzioni di equazioni. I matematici più importanti di questo periodo sono: **Ãryabhata** (n. 476), **Brahmagupta** (n. 598) e **Bhãskara** (n. 1114), ma la maggior parte della loro opera erano testi di astronomia o di astrologia, di cui alcuni capitoli venivano soltanto dedicati alla matematica. Questi capitoli si presentavano come una raccolta di proposizioni e di problemi senza una sistemazione logica.

Si attribuisce agli indiani la scoperta, l'introduzione e l'uso del sistema di numerazione posizionale in base 10. I numeri erano rappresentati mediante i simboli brahmanici. Lo zero veniva trattato come un "vero" numero, non soltanto per denotare "assenza di quantità", conoscevano le regole di calcolo: $a \pm 0 = 0$ e $a \cdot 0 = 0$. Bhãskara considerava che una frazione il cui denominatore è uguale a 0 non muta per la somma o la sottrazione di un numero qualsiasi; un numero diviso per zero veniva chiamato "quantità infinita". Definirono le operazioni aritmetiche con i numeri razionali in modo molto simile al nostro. I numeri negativi furono introdotti per rappresentare i debiti e venivano indicati con la sovrapposizione di un punto o di una stelletta. Enunciarono le regole per le quattro operazioni con questi numeri e in particolare veniva messo in evidenza che la radice quadrata di un numero negativo non esiste, e quella di un numero positivo può avere due valori di segno opposto. <u>Le radici negative di un'equazione o le soluzione negative di un problema</u> erano a volte accettate come debito, a volte ripudiate come false, soprattutto quando non era possibile interpretarle (Cfr. Kline, pag. 216).

Gli indiani affrontarono il problema dei numeri irrazionali e incominciarono ad operare con essi mediante procedimenti corretti, erano note le regole di calcolo:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\cdot\sqrt{a\cdot b}} \quad \text{e} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\cdot\sqrt{a\cdot b}}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}$$

le quali venivano applicate soprattutto quando il prodotto ab nelle prime due formule e la differenza $a^2 - b$ nella terza erano quadrati perfetti. Bhãskara dette anche le regole per la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radici quadrate di espressioni irrazionali (Loria, pag. 311).

Gli indiani effettuarono alcuni importanti progressi nel campo algebrico. Brahmagupta, nella sua opera *Brahmasputasiddhanta*, utilizza alcune <u>abbreviazione</u> per rappresentare l'incognita e le sue potenze:

$x \rightarrow$ *ya* [prima sillaba della parola *yavattavat (tanto-quanto)*]
$x^2 \rightarrow$ *va*
$x^3 \rightarrow$ *gha*
$x^4 \rightarrow$ *vava*
$x^9 \rightarrow$ *ghagha*
$x^{1/2} \rightarrow$ *ka* [prima sillaba della parola *karana (radice quadrata)*]

(Cfr. Bortolotti, 1950, pag. 637).

Per indicare l'addizione non c'era nessun simbolo, nemmeno per il prodotto che veniva rappresentato scrivendo di seguito i due fattori, per la sottrazione invece si utilizzava un punto sopra il sottraendo. Per denotare un'uguaglianza di due quantità si limitavano a scrivere i due membri in due righe consecutive. Quando in un problema figuravano parecchie incognite, una di esse veniva rappresentata con la sillaba *ya*, le altre con oggetti di diversi colori: praticamente usavano le prime sillabe delle parole relative al rispettivo colore. Questo simbolismo, per quanto rudimentale, è sufficiente per classificare l'algebra indiana come *"quasi-simbolica"* e sicuramente in misura maggiore di quanto lo fosse l'algebra sincopata di Diofanto. I problemi e le soluzioni erano scritti in questo stile sincopato, ma i diversi passaggi non venivano accompagnati con motivazioni o dimostrazioni.

Ãryabhata nella sua opera *Ãryabhatiya*, risolve il problema di calcolare due numeri a partire dalla loro differenza $a - b$ e dal loro prodotto ab, trovando prima la somma di essi $(a + b)^2 = 4\,ab + (a - b)^2$ e poi scrivendo la soluzione:

$$a = \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{4\cdot a\cdot b + (a-b)^2} + (a-b)\right] \qquad b = \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{4\cdot a\cdot b + (a-b)^2} - (a-b)\right]$$

Questa tecnica, conosciuta dai cinesi, condurrebbe più tardi alla risoluzione di equazioni di secondo grado. Gli indiani sapevano che un'equazione di secondo grado ha due radici e accettavano sia quelle negative sia quelle irrazionali. Consideravano la forma generale: $ax^2 + bx + c = 0$ perché ammettevano che alcuni coefficienti fossero negativi e per risolverla usavano il metodo di completare il quadrato. Poiché non ritenevano accettabili le radici quadrate dei numeri negativi, non erano in grado di risolvere tutte le equazioni di secondo grado.

Brahmagupta risolse alcune equazioni di terzo e quarto grado completando rispettivamente il cubo e il quadrato del binomio corrispondente, e poi estraendone la radice cubica o quadratica, cioè applicando un metodo che permetterebbe più tardi la risoluzione di tutte le equazioni biquadratiche.

La risoluzione di equazioni e di problemi indeterminati dei primi due gradi è un campo in cui gli indiani hanno raggiunto risultati di notevole interesse. Cercavano tutte le soluzioni intere, mentre Diofanto generalmente si accontentava di ottenere una soluzione razionale positiva. Risolsero equazioni di primo grado del tipo: $ax \pm by = c$, con a, b e c interi positivi ed equazioni di secondo grado della forma: $x^2 - ay^2 = 1$, con a non necessariamente un quadrato perfetto, e riconobbero che queste equazioni erano fondamentali per risolvere quelle della forma: $cy^2 = ax^2 + b$. Bhãskara nella sua opera *Siddãnta Siromani* risolse le equazioni di secondo grado a coefficienti interi del tipo: $ax + by = c + xy$ trasformandola in $(x - b)(y - a) = ab - c$ e scompose $ab - c$ nel prodotto di due fattori interi m ed n ; cioè considerando $x - b = m$ e $y - a = n$ ottenne $x = m + b$ e $y = n + a$.

L'algebra veniva utilizzata per risolvere problemi commerciali usuali, ma l'astronomia costituisce la sua principale applicazione. Gli indiani svilupparono ottimi procedimenti e grande abilità tecnica, ma non si preoccuparono nel giustificare le regole impiegate, le loro opere costituiscono una raccolta di regole e problemi ma sono carenti di sistemazione logiche fra le varie parti.

1.7 GLI ARABI

Verso la fine del VIII secolo ed inizio del IX secolo, Bagdad si trasformò nel centro di un'intensa attività scientifica. Gli arabi che avevano raccolto ciò che rimaneva della scienza alessandrina, si dedicarono a tradurre, assimilare e studiare tutta l'opera greca. Essi effettuarono anche la traduzione dei testi indiani di astronomia e non tardarono a riconoscere l'utilità pratica dei procedimenti di calcolo utilizzati da questo popolo.

Gli arabi adottarono il sistema di numerazione posizionale in base 10 introdotto dagli indiani e usarono gli stessi simboli per rappresentare i numeri; però con il passare del tempo questi simboli terminarono per adottare forme ben diverse da quelli caratteri utilizzati negli scritti indiani. Operavano senza difficoltà con i numeri irrazionali e le trasformazioni del tipo: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$ e $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ diventarono di uso comune. Infatti **Omar al-Khayyam** (1038-48 - 1123) e **Sharaf ad-Din al-Tusi** (1130 - ?) consideravano che ogni rapporto di grandezze commensurabili o incommensurabili, può essere chiamato <u>numero</u>; enunciato che Newton si sentì in dovere di riaffermare nella sua *Arithmetica universalis* del 1707 (Kline, pag. 224-225). Ma da un altro punto di vista, gli arabi fecero un passo indietro nel campo dell'aritmetica perché non accettarono i numeri negativi, nonostante li conoscessero bene dai testi indiani.

Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (c. 780 - c. 850) compose un trattato di aritmetica intitolato: *Algorithmi de numero indorum* e appunto il vocabolo *"Algoritmo"* è venuto dall'alterazione dell'appellativo: *al-Khowârizmî* con cui Mohammed era chiamato. Questa parola dopo aver subito numerose variazioni sia di significato che di denominazione, viene utilizzata per esprimere una costante procedura di calcolo (Loria, pag.336-337). Al-Khowârizmî scrisse anche un libro di algebra: *Al-jabr w'al muqâbala* e in questo titolo si trovano precisamente indicate le due operazioni fondamentali della risoluzioni di equazioni di primo grado: la parola *al-jabr* significa "ristabilire", cioè ristabilire l'equilibrio tra i membri di un'equazione mediante il trasporto di termini e il vocabolo *al muqâbala* significa "semplificazione" cioè la riduzione dei termini simili. La parola *al-jabr* venne trasportata in Spagna e diventa *algebrista*, tradotta in latino si trasforma in *algebrae* e il nome della disciplina venne infine abbreviato in *algebra* (Vedasi Nota 4).

L'algebra di al-Khowârismî si basa sull'opera di Brahmagupta ma rivela anche l'influenza dei greci, principalmente di Diofanto. Al-Khowârismî usava il simbolo per rappresentare l'incognita che chiamava "lato" e attribuiva nomi speciali alle successive potenze dell'incognita e così faceva Diofanto. Risolse equazioni di secondo grado considerando separatamente cinque casi:

$$a\,x^2 = bx\,, \quad a\,x^2 = c\,, \quad a\,x^2 + bx = c\,, \quad a\,x^2 + c = bx\,, \quad a\,x^2 = bx + c$$

in modo che a, b e c siano sempre positivi. Questo modo di procedere permette di evitare i numeri negativi ed è simile a quello proposto da Diofanto, ma significa un passo indietro rispetto all'algebra indiana che considerava la "forma generale" dell'equazione perché venivano ammessi i coefficienti negativi. Questa prassi di distinguere cinque casi diversi fu poi seguita fino al XVI secolo. Al-Khowârismî risolse queste equazioni utilizzando il metodo di completare il quadrato, sapeva che si potevano trovare due radici ma considerava soltanto le radici positive razionali o irrazionali.

Gli arabi non usavano né abbreviazioni né simboli, soltanto alcuni nomi per nominare l'incognita e le sue potenze e questo rappresentò un passo indietro rispetto all'algebra indiana e perfino a quella di Diofanto. Per esempio un'equazione di secondo grado veniva presentata da al-Khowârismî così: "Un quadrato e dieci delle sue radici sono uguale a nove e trenta (per trentanove), cioè tu sommi dieci radici a un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta". La soluzione veniva spiegata in questo modo: "Prendi metà del numero delle radici, cioè in questo caso cinque, poi moltiplicalo per se stesso e il risultato è cinque e venti (per venticinque). Somma questo a nove e trenta, il che dà sessantaquattro; prendi la radice quadrata, cioè otto, e sottrai da essa la metà del numero delle radici, cioè cinque, e rimane tre. Questa è la radice" (Kline, pag. 226).

Gli arabi, influenzati dai greci, sentivano la necessità di spiegare o giustificare geometricamente il procedimento aritmetico utilizzato per risolvere le equazioni di secondo grado e, a questo scopo, applicavano la soluzione geometrica trovata negli *Elementi* di Euclide (la quale verrà illustrata più avanti).

Le equazioni di primo grado ad un'incognita venivano risolte mediante l'applicazione della *regola della falsa posizione*. Il più antico lavoro in cui viene esposto in modo soddisfacente questo metodo corrisponde a **Qosta ibn Luqa** (inizio X secolo), ma molti sono gli autori che dedicarono parte delle sue opere per spiegare o utilizzare questa tecnica nella risoluzione di problemi, tra cui: **al-Khowârismî**, **al-Sabi** (X secolo), **Abu Kamil** (X secolo), **al-Benna** (1258 - 1340) ed **al-Qalasadi** (1423 – 1494/5).

Nella letteratura araba vengono anche risolti problemi appartenenti all'analisi indeterminata. Ad esempio **Abu Kamil** affrontò una categoria di questioni che i cinesi indicavano con il nome di: "Problemi dei cento uccelli". Questi problemi, tradotti nel linguaggio simbolico moderno, si presentano sotto la forma di un sistema di equazioni del tipo: $x + y + z + ... = m$ e $ax + by + cz + ... = n$ con m ed n interi positivi (spesso prendevano il valore *100*). Venivano risolti sostituendo nella seconda equazione il valore di una delle incognite ottenuto dalla prima e poi cercando tutte le soluzioni intere positive della equazione indeterminata risultante. L'abilità di Abu Kamil per risolvere questo categoria di problemi viene dimostrata dal fatto che per un sistema dato determina 2676 possibili soluzioni. Questo autore ha avuto una notevole influenza sulla matematica europea, numerosi problemi proposti nelle sue opere si trovano poi risolti nei testi medievali, per esempio nel *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano (Loria, pag. 345-347).

I matematici della scuola di Bagdad si occuparono anche della teoria dei numeri. **Abu-Mahmud-Alkosciandi** (X secolo) e **Beha Eddin** (1547 - 1622) dettero la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere l'equazione indeterminata: $x^3 + y^3 = z^3$ con numeri interi. **Muhammed ben Albusain al-Karchî** (... - 1029) risolse il problema di "trovare un numero quadrato al quale aggiunto o sottratto uno stesso numero dato sia sempre un numero quadrato", mediante la formula: $(a^2 - b^2 \pm 2\ ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \pm 4\ ab(a^2 - b^2)$ (Cfr. Bortolotti, 1950, pag. 642-643). E' interessante osservare che in presenza di un problema con due incognite, al-Karchî le chiamava con nomi diversi, ad esempio: una di esse *cosa* o *radice* mentre l'altra *misura* o *parte*, e da questo uso deriva il nostro termine *radice*.

Al-Hosein (X secolo) raggiunse importanti risultati riguardanti la teoria dei numeri, per esempio: a partire della relazione $z^2 \pm 2\ xy = (x \pm y)^2$ essendo x, y e z i lati di un triangolo rettangolo, scoprì lo stretto legame che esiste fra la costruzione di triangoli rettangoli di lati interi e la ricerca di numeri congrui, cioè dei numeri m soddisfacenti le due equazioni intere della forma $x^2 + m = a^2$ e $x^2 - m = b^2$. Tali questioni erano già state prese in considerazione in precedenza nell'*Arithmetica* di Diofanto e verranno sviluppate in modo più approfondito posteriormente dal noto matematico europeo Leonardo Pisano.

Uno dei più interessanti progressi dovuti alla matematica araba è la risoluzione di equazioni cubiche mediante l'intersezione di sezioni coniche. Dopo la diffusione del *Trattato di Algebra* di al-Khowârizmî si svilupparono due correnti di idee:

* un problema geometrico si può ricondurre alla risoluzione di un'equazione algebrica ad un'incognita;

* la risoluzione di un'equazione di terzo grado, per esempio, si può ricondurre ad una costruzione geometrica.

Secondo Rashed, il contributo più importante della matematica araba è precisamente l'avere iniziato lo sviluppo di questa corrispondenza tra la geometria e l'algebra cinque secoli prima di Descartes e di Fermat (Cfr. Ballieu, pag. 9). I principali rappresentanti di questa corrente di pensiero sono: **Omar al-Khayyam** (1038-48 - 1123) e **Sharaf ad-Din al-Tusi** (1130 - ?) [Vedasi Nota 5].

Le due importanti opere di al-Khayyam sono: *Commenti sui postulati degli Elementi* di Euclide e un *Trattato d'Algebra*. Si attribuisce pure a lui un trattato sull'estrazione di radici quadrate e cubiche nel quale appare una dimostrazione aritmetica del procedimento indiano che si appoggia sulle formule del quadrato del binomio e del cubo del binomio. Sembra proprio che voleva estendere la formula a esponenti interi qualsiasi (binomio di Newton).

Con al-Khayyam *l'Algebra* diventa *la teoria generale delle equazioni algebriche* di grado minore o uguale a tre e con coefficienti interi positivi. Questo autore arrivò a due risultati di notevole interesse:

* la soluzione generale di tutte le equazioni di terzo grado mediante l'intersezione di due coniche;

* lo sviluppo del calcolo geometrico a partire dalla scelta di una lunghezza unità (e questo è conseguenza dell'accettazione dei numeri irrazionali che rese possibile assegnare un valore numerico a tutti i segmenti della retta).

Nel suo *Trattato* al-Tusi studiò la risoluzione di equazioni di grado minore o uguale a tre, facendo ricorso a tecniche come: la ricerca del massimo di un'espressioni algebriche, del suo limite in determinati punti e della sua derivata. Applicò un'approssimazione locale e analitica che si oppose al procedimento globale e algebrico adottato da al-Khayyam. Il linguaggio utilizzato, sprovvisto di formalismo, era poco favorevole alla manipolazione di tali strutture matematiche.

Gli arabi studiavano la matematica con una finalità essenzialmente pratica: per applicarla alle scienze che essi coltivavano (astronomia, astrologia e ottica) e per risolvere problemi commerciali. Ma il lavoro più importante realizzato fu di assimilare la matematica greca e indiana, di conservarla e di trasmetterla infine all'Europa. Inoltre la prassi araba di risolvere le equazioni algebricamente e di giustificare i procedimenti applicati mediante una rappresentazione geometrica, rivelò il parallelismo di queste due branche della matematica. Il pieno sviluppo di questo parallelismo doveva condurre alcuni secoli dopo alla nascita della geometria analitica (Kline, pag. 230-232).

2. I METODI DI RISOLUZIONE DI EQUAZIONI. I GRECI E GLI ORIENTALI

2.1 IL PROCEDIMENTO GEOMETRICO DI EUCLIDE

Negli *Elementi* di Euclide si trovano alcuni risultati fondamentali dell'algebra moderna trattati geometricamente, per esempio la risoluzione di equazioni dei primi due gradi.

La proposizione 12 del Libro VI degli *Elementi* (1930, p.107) consiste in trovare il quarto proporzionale da tre segmenti dati.

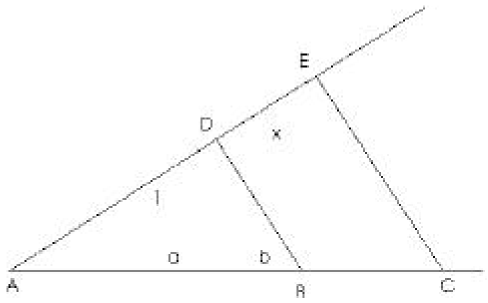


FIG. 2

$$AB : BC = AD : DE$$

Applicando questa proposizione si possono risolvere "geometricamente" equazioni di primo grado del tipo $ax = b$ con coefficienti positivi, considerando come segmenti: $AB = a$, $BC = b$, $AD = 1$ e $DE = x$. Ma i precedenti libri degli *Elementi* presentano anche la risoluzione di equazioni di primo grado nei casi di applicazione delle aree; per esempio la proposizione 44 del Libro I che si potrebbe enunciare così: "Costruire un rettangolo conoscendo l'area ed un lato", corrisponde all'equazione $ax = b^2$.

Nel Libro II degli *Elementi* Euclide dà la soluzione ad alcuni problemi che, enunciati in linguaggio algebrico, si presentano sotto forma di equazioni di secondo grado, nei casi in cui almeno una radice sia positiva. Le proposizioni 28 e 29 del Libro VI (1930, pag. 146-150) ne offrono una generalizzazione, nel senso che permettono di risolvere una qualunque equazione di secondo grado quando almeno una delle radici è positiva.

Proposizione 28: *Su una retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, mancante di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato. Occorre che il poligono dato non sia maggiore del poligono costruito sulla metà della retta data, e simile al poligono mancante.*

Questo teorema è l'equivalente geometrico della soluzione dell'equazione di secondo grado: $ax - (b/c)\, x^2 = S$, dove a è la retta, S è l'area del poligono dato, b e c sono i lati del parallelogramma dato. La seconda parte: $S \leq a^2c/4b$ corrisponde alla limitazione necessaria perché le radici dell'equazione siano reali. Supponiamo per comodità che i parallelogrammi siano rettangoli, che S sia il poligono dato, che il rettangolo di lati b e c, che AB sia uguale ad a e che x sia uno dei lati del rettangolo cercato.

Si costruisce il rettangolo *AKFG* di area *S* e tale che il suo rettangolo mancante sia *D'* simile a *D*. Ma *AKFG* = *ABHG* - *D'* e *D'* essendo simile a *D* ha l'area uguale a bx^2/c. Quindi $ax - (b/c)\,x^2 = S$. Così per costruire *AKFG* bisogna trovare *AK* e *x* tali che *x* soddisfi questa equazione.

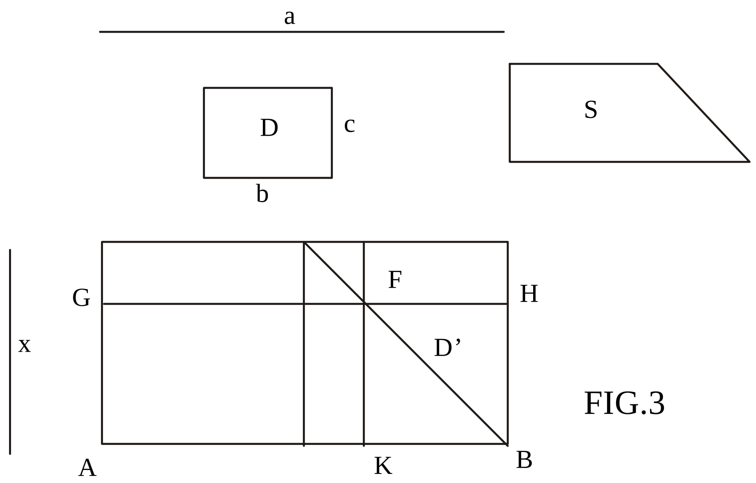


FIG.3

<u>Proposizione</u> <u>29</u>: *Su una data retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, eccedente di un parallelogrammo simile ad un altro dato.*

In termini algebrici, essa corrisponde all'equazione: $ax + (b/c)\,x^2 = S$ con *a, b, c,* e *S* numeri positivi dati. *S* non è soggetto ad alcuna limitazione (soltanto di essere positivo) perché l'equazione ammette sempre una soluzione reale.

Per analizzare il grado di generalizzazione che le due proposizioni precedenti offrono, consideriamo le quattro forme diverse che l'equazione di secondo grado può assumere attribuendo ai coefficienti soltanto valori positivi:

1) $x^2 - ax + b^2 = 0$ 3) $x^2 - ax - b^2 = 0.$

2) $x^2 + ax - b^2 = 0$ 4) $x^2 + ax + b^2 = 0$

La quarta di queste equazioni ammette soltanto radici negative o complesse coniugate e pertanto, i problemi relativi ad essa non possono essere presi in considerazione dai greci che non conoscevano né i numeri negativi né i numeri complessi. Le altre equazioni che si possono scrivere sotto la forma:

1) $ax - x^2 = b^2$

2) $ax + x^2 = b^2$

3) $x^2 - ax = b^2$

corrispondono rispettivamente a questi problemi geometrici (Cfr. Zapelloni, pag. 150-151):

1- *Su un segmento dato (a) preso come base, costruire un rettangolo (di altezza x) che superi il quadrato dell'altezza (x^2) di un'area equivalente ad un quadrato dato (b^2);*

2- *Su un segmento dato (a) costruire un rettangolo che aumentato del quadrato dell'altezza (x^2), dia un'area equivalente ad un quadrato dato (b^2);*

3- *Su un segmento dato (a) costruire un rettangolo tale che togliendo dal quadrato dell'altezza (x^2) questo rettangolo, si ottenga un'area equivalente ad un quadrato dato (b^2).*

Ad esempio per risolvere il primo problema si procede in questo modo:

Siano a il segmento dato e C il quadrato di area b^2 :

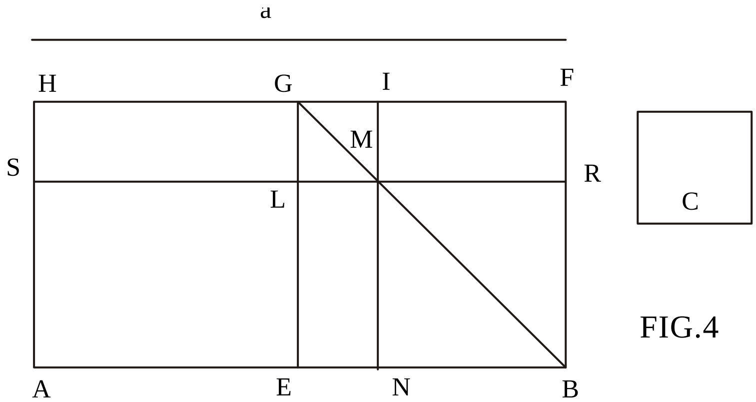


FIG.4

1- Si divida il segmento $a = AB$ in due parti uguali, nel punto E; su EB si costruisca il quadrato $EBFG$ e si completi il quadrato $AEGH$. L'area del quadrato $AEGH$ deve essere maggiore o uguale a b^2, altrimenti il problema non ha soluzione.

2- Se l'area del quadrato $AEGH$ è b^2, allora $x = AH$ *e il problema è risolto.*

3- Se l'area del quadrato $AEGH$ è maggiore di b^2, si costruisca il quadrato $LMIG$ di area uguale alle differenze delle aree. Allora i quadrati $LMIG$ e $NBRM$ sono disposti intorno alla stessa diagonale (prop. 26, Libro VI), sia GB e si completi la figura.

4- Per costruzione l'area della figura $LEBFIM$ risulta uguale a b^2, facilmente si dimostra che l'area del rettangolo $ANMS$ è uguale a quella di $LEBFIM$ e pertanto uguale a b^2. Allora $x = SA$.

2.2 IL PROCEDIMENTO ARITMETICO DEGLI INDIANI

Il metodo per risolvere equazioni indeterminate di primo grado del tipo: $ax \pm by = c$, con a, b e c interi positivi, fu introdotto da Ãryabhata (n. 476) e migliorato dai suoi successori. Questo procedimento veniva chiamato <u>*metodo di polverizzazione*</u> *(Kuttaka)* e corrisponde a quello seguito da Eulero. Ad esempio per ottenere le soluzioni intere di $ax + by = c$ si procede in questo modo (Cfr. Kline, pag. 218 - 220):

1- Se a e b hanno un fattore comune m che non divide c, allora il problema <u>non ammette soluzioni intere</u>, perché il primo membro è divisibile per m mentre il secondo non lo è. Se a, b e c hanno un fattore comune lo si elimina e allora, per l'osservazione precedente, è sufficiente considerare il caso in cui a e b sono primi fra loro.

2- Si divida a per b utilizzando l'algoritmo di Euclide per trovare il massimo comune divisore di due interi. Consideriamo $a > b$. Questo algoritmo richiede anzitutto di dividere a per b in modo da ottenere $a = a_1 b + r$, dove a_1 è il quoziente e r il resto. Ne segue che $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{r}{b}$, che si può anche esprimere nella forma $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r}\right)}$ (1).

3- Il secondo passo dell'algoritmo di Euclide consiste nel dividere b per r in modo da ottenere $b = a_2 r + r_1$, ovvero $\frac{b}{r} = a_2 + \frac{r_1}{r}$. Sostituendo questo valore di b/r nella (1) si ricava: $\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\left(\frac{r}{r_1}\right)}}$.

4- Proseguendo l'applicazione dell'algoritmo euclideo si ottiene la cosiddetta <u>frazione continua</u>: $\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}$

Questo procedimento si applica anche quando $a < b$. In questo caso a_1 è zero e poi si continua nello stesso modo descritto precedentemente. Dato che a e b sono numeri interi la frazione continua è finita.

5- Le frazioni ottenute arrestandosi al primo, secondo, terzo e in generale n-esimo quoziente sono dette rispettivamente la prima, la seconda, la terza e la n-esima convergente. Poiché, quando a e b sono interi, la frazione continua ha termine, c'è una convergente che precede di un posto l'espressione esatta di a/b. Sia p/q è il valore di questa convergente, si può dimostrare che: $aq - bp = \pm 1$.

6- Consideriamo $aq - bp = 1$ e torniamo alla equazione di partenza $ax + by = c$, allora

$ax + by = c\,(aq - bp)$ di cui si ottiene $(cq - x)/b = (b + cp)/a$.

Se t è il valore comune di queste due frazioni, si avrà

$x = cq - bt$ e $y = at - cp$. (2)

Assegnando a t dei valori interi si ottengono dei valori interi per x e y perché tutte le altre quantità sono intere.

7- I casi in cui l'equazione di partenza è della forma $ax - by = c$ ovvero la relazione $aq - bp = -1$ sono piccole modificazioni del caso precedentemente presentato.

E' interessante mettere in evidenza che Brahamagupta (n. 598) arriva alle soluzioni (2) anche se non si serviva delle lettere generiche a, b, p e q.

2.3 IL PROCEDIMENTO DI AL-KHAYYAM [5]

Con al-Khayyam (1038-48 - 1123) *l'Algebra* diventa *la teoria generale delle equazioni algebriche*. Per le equazioni di secondo grado deduce la soluzione numerica positiva dalla soluzione geometrica trovata negli *Elementi* di Euclide (non prende in considerazione le radici negative). Per le equazioni di terzo grado non riconducibili ad equazioni di secondo grado, tenta di trovare la soluzione con un procedimento simile a quello utilizzato per queste ultime, però non riesce a farlo. Invece arriva a dare una soluzione generale per tutte le equazioni di terzo grado mediante intersezioni di curve coniche. Sembra che al-Khayyam sia stato il primo matematico a formulare la seguente conclusione: "Generalmente le equazioni di terzo grado non possono essere risolte con riga e compasso".

Al-Khayyam classifica le equazioni secondo il loro grado e il numero di monomi che le compongono. Questo lo porta a considerare 25 forme canoniche di cui 6 sono già state studiate da al-Khowârizmî. Altre 5 si possono ricondurre a queste ultime dividendo l'equazione per l'incognita o il suo quadrato. La soluzione delle 14 forme restanti è trovata con l'aiuto delle sezioni coniche. Questa classificazione riguarda soltanto quelle equazioni in cui le soluzioni sono positive. Prima di risolvere geometricamente un'equazione, scrive la sua forma omogenea, per esempio l'equazione

$x^3 + ax = b$ con a e b positivi, viene scritta come

$x^3 + p^2x = p^2q$ dove $p^2 = a$ e $p^2q = b$.

Al-Khayyam la risolve costruendo una parabola di equazione $y = x^2/p$ e poi tracciando la circonferenza avente come diametro QR di lunghezza uguale a q (la sua equazione è $x^2 + y^2 - q\ x = 0$) . Per il punto P di intersezione delle due curve (diverso dall'origine delle coordinate) determina la perpendicolare PS e dimostra che QS è la soluzione dell'equazione. A partire dalla costruzione geometrica deduce che questo tipo di equazione ha sempre una radice positiva.

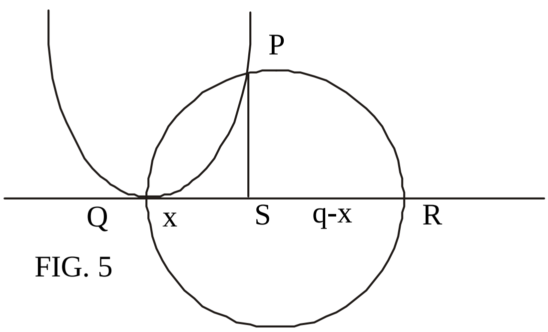


FIG. 5

Al-Khayyam realizza una dimostrazione di tipo sintetico utilizzando la teoria delle proporzioni. Applica la proprietà della parabola data Apollonio: $x/PS = p/x$. (1)

Considera ora il triangolo rettangolo QPR, la sua altezza PS è media proporzionale fra QS e RS:

$x/PS = PS/(q - x)$. (2)

Da (1) e (2) ricava che: $p/x = PS/(q - x)$. (3)

D'altra parte, per la (1) ottiene che $PS = x^2/p$. Sostituendo questo valore nella (3) si vede que x soddisfa l'equazione:

$x^3 + p^2x = p^2q$.

L'autore risolve anche equazioni del tipo: $x^3 + a = bx$ per a e b positivi, con l'aiuto della parabola $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ e di una branca dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - (a/b)x = 0$. Egli mette in evidenza che questo tipo di equazioni può avere più di una radice positiva o non ammettere nessuna soluzione (non prende in considerazione le radici negative). Determina le radici dell'equazione: $x^3 + a\,x^2 = c^3$ mediante l'intersezione di un'iperbole e di una parabola e quelle dell'equazione: $x^3 \pm a\,x^2 + b^2\,x = b^2\,c$ dall'intersezione di un'ellisse con un'iperbole (Kline, pag. 228).

2.4 IL PROCEDIMENTO DI AL-TUSI (5)

Al-Tusi (1130 - ?) classifica le equazioni di grado minore o uguale a tre secondo l'esistenza o meno di radici positive. Nella prima parte del *Trattato* considera la risoluzione di 20 equazioni: costruzione geometrica delle radici, determinazione del discriminante per le equazioni di secondo grado e risoluzione numerica con l'aiuto di un metodo prossimo a quello conosciuto con il nome di *metodo di Ruffini-Horner*. Sembra che nel XI secolo tale metodo sia stato applicato all'estrazione di radici quadrate e cubiche e al-Tusi lo generalizza per la risoluzione di equazioni.

Nella seconda parte del *Trattato* studia 5 equazioni che ammettono "casi impossibili" (utilizzando la sua espressione) e cioè, i casi in cui non esistono soluzioni positive:

$x^3 + c = ax^2$
$x^3 + c = bx$
$x^3 + ax^2 + c = bx$
$x^3 + bx + c = ax^2$
$x^3 + c = ax^2 + bx$.

Ciascuna di queste 5 equazioni si può scrivere nella forma $f(x) = c$ dove f è un polinomio. Al-Tusi caratterizza i casi impossibili studiando l'intersezione della curva $y = f(x)$ con la retta di equazione $y = c$ per $x > 0$ e $f(x) > 0$. L'esistenza di soluzioni dipende dalla posizione della retta in relazione a $f(x_0)$ essendo x_0 il massimo della funzione polinomiale. Se la retta interseca la funzione, determina le radici di $f(x) = 0$ e questo gli permette di inquadrare le radici di $f(x) = c$, cioè le radici di $f(x) = 0$ determinano l'intervallo che contiene le radici de $f(x) = c$.

Al-Tusi introduce così l'analisi locale, per trovare il massimo di $f(x)$ risolve un'equazione che tradotta al linguaggio simbolico moderno corrisponde a $f'(x) = 0$, cioè introduce la nozione di derivata che utilizza soltanto in alcuni esempi senza arrivare a formalizzare il concetto e questo succede molto probabilmente per la mancanza di un linguaggio simbolico adeguato. Secondo Ballieu (pag. 16), sembra che per la prima volta nella storia della matematica, si trova l'idea di calcolare gli estremi di una funzione polinomiale e precisamente questo si fa studiando la variazione della funzione nelle vicinanze degli estremi. Al-Tusi è portato a manipolare concetti nuovi, ovviamente non lo fa con tutto il rigore di un Newton, però ricordiamo che questo accade nel XII secolo!

Ad esempio, per risolvere l'equazione $x^3 + c = ax^2$ con a e c positivi, al-Tusi procede in questo modo:

1- Osserva che $x^3 = x.x^2$ e che x, a e c sono positivi , di conseguenza a deve essere maggiore di x. Studia la funzione $f(x) = - x^3 + ax^2$ e dimostra geometricamente che **i** suo massimo è $x_0 = (2/3)\ a$ in questo modo: considera i segmenti $AB = a$ e $BC = x$, con C appartenente AB e li sostituisce nell'equazione di partenza ottenendo $BC^2 \times AC = c$.

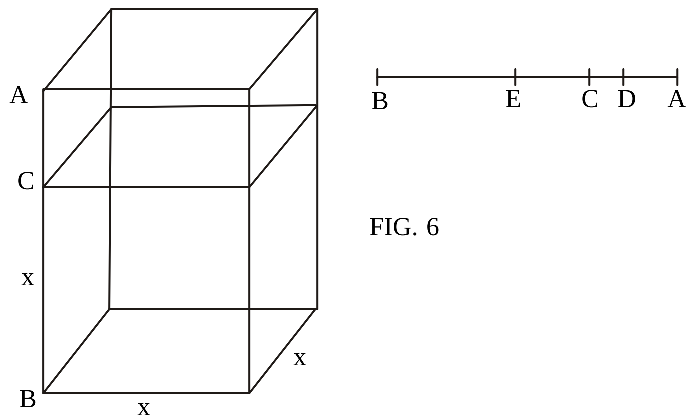


FIG. 6

2- Prende il segmento $AC = (1/3)AB = (1/3)a$ e due punti qualunque: D tra A e C ed E tra B e C e dimostra che: $BC^2 \times AC > BD^2 \times AD$ e $BC^2 \times AC > BE^2 \times AE$. Cioè, prova che $AC = (1/3)a$ [ovvero $BC = (2/3)a$] con C appartenente ad AB, è il massimo dell'espressione $BC^2 \times AC$.

3- Confronta c con il valore che assume $BC^2 \times AC$ nel punto di massimo:

* se $c > (4/27)\ a^3$, il problema non ammette soluzioni positive.
* se $c \leq (4/27)\ a^3$ l'equazione ha una o due soluzioni, in particolare:
  - se $c = (4/27)\ a^3$, allora $x = (2/3)\ a$ è l'unica soluzione,
  - se $c < (4/27)\ a^3$, allora x_1 e x_2 sono due soluzioni che verificano: $0 < x_1 < (2/3)a$ e $(2/3)a < x_2 < a$, essendo 0 e a le radici di

    $f(x) = - x^3 + ax^2$.

Nella risoluzione di questo problema Al-Tusi non spiega perché scegli AC = $(1/3)\ a$, però Ballieu (pag. 20) nota che in un altro problema simile del *Trattato*, egli risolve effettivamente l'equazione $f\ '(x) = 0$.

Per risolvere l'equazione $x^3 + bx = c$ con b e c positivi, Al-Tusi procede così :

1- Dimostra geometricamente l'esistenza di una radice positiva, con l'aiuto di una circonferenza e di una parabola, e la scrive in questo modo: $s = \sum_{i=0}^{r} s_i$

$s_i = \ _i \cdot 10^{(r-i)}$

2- Per determinare σ_0 considera che $f(x) = x^3 + bx - c$ ammette un'unica radice positiva, allora f cambia di segno soltanto una volta in R^+, poiché

$0 < \sigma_0 .10^r \leq s < (\sigma_0 + 1) .10^r$ si ha

$f(\sigma_0 .10^r) \times f[(\sigma_0 + 1) .10^r] \leq 0$ e si può anche provare che

$f(\sigma_0 .10^r) < 0$ e $f[(\sigma_0 + 1) .10^r] > 0$.

L'idea di al-Tusi è considerare l'esistenza di un polinomio f^* che dipenda da s ed f, che abbia un numero minore di termini di f e che verifichi:

$f^*(\sigma_0 .10^r) < 0$ e $f^*[(\sigma_0 + 1) .10^r] > 0$.

Quanto minore è il numero di termini di f^* più semplice è calcolare σ_0 . f^* è il *polinomio dominante* di f relativo ad s .

3- Determina successivamente le altre cifre di σ_i mediante un metodo simile a quello conosciuto con il nome di *Ruffini-Horner.* Calcolato σ_0 costruisce un'equazione che ammette $(s - s_0)$ come soluzione e a partire da questa equazione determina σ_1 . Poi scrive un'equazione che ha come radice $[(s - s_0) - s_1]$, calcola σ_2 e ripete questo procedimento tante volte quanto sia necessario. Cioè per ricorrenza definisce una successione di polinomi che tradotta al linguaggio simbolico moderno, si scrive così :

$f_0(x) = f(x)$, $f_k(x) = f_{k-1}(x + s_{k-1})$ per $0 \leq k \leq r$.

In questo modo le radici di f_k sono quelle di f_{k-1} diminuite di s_{k-1} .

Sviluppando $f_k(x)$ si ottiene:

$$f_k \cdot (x) = x^n + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1!)!} \frac{d^{n-1}}{d x^{n-1}} (f_{k-1}) \cdot (s_{k-1}) + \dots + x \cdot \frac{d}{dx} (f_{k-1}) \cdot (s_{k-1}) + f_{k-1} \cdot (s_{k-1})$$

Si può dimostrare che gli ultimi due termini di questo sviluppo sono quelli del polinomio dominante, ciò che permette di determinare s_k :

$$s_k = \frac{-f_{k-1} \cdot (s_{k-1})}{\frac{d}{dx} (f_{k-1}) \cdot (s_{k-1})}$$

questa è la formula che al-Tusi applica sistematicamente per $k > 0$.
Ad esempio, se $f(x) = x^3 + 36x - 33.087.717 = 0$, un polinomio dominante relativo alla radice cercata è: $f^*(x) = x^3 - 33.087.717 = 0$.
A partire da f^* determina $s_0 = 300$ perché:

$300^3 = 27.000.000 \leq 33.087.717 \leq 64.000.000 = 400^3$.

Di conseguenza $\sigma_0 = 3$, $r = 2$ ed

$f_1(x) = f_0(x + 300) = x^3 + 900 x^2 + 270.036 x - 6.076.917$.

Dunque $s_1 = - f(300) / f'(300) = 6.076.917 / 270.036 = 22{,}504099...$ e $\sigma_1 = 2$.

$f_2(x) = f_1(x + 20) = x^3 + 960 x^2 + 307.236 x - 308.197$

$s_2 = - f_1(20) / f_1'(20) = 308.197 / 307.236 = 1{,}003127...$ e $\sigma_2 = 1$.

Dato che $f_2(1) = 0$, $s_3 = - f_2(1) / f_2'(1) = 0 / 309.159 = 0$.

Allora l'unica radice reale positiva è $s = 321$.

2.5 I METODI DELLA FALSA POSIZIONE

Durante il Medioevo questi procedimenti venivano chiamati con il nome di regula al-chataim (parola di origine orientale) o regula falsorum. La loro origine è molto antica e si trova precisamente nei matematici cinesi e egiziani. Erano utilizzati spesso dagli indiani e dagli arabi nella risoluzione di problemi e appaiono nella maggior parte dei testi di aritmetica dal Medioevo fino all'inizio della nostra era (Cfr. Guillemot, pag. 1).

Le tecniche della falsa posizione venivano applicate per risolvere equazioni di primo grado ad un'incognita, ed in certi casi, sistemi di equazioni lineari ed equazioni di secondo grado. Sono di natura intuitiva perché consistono nel provare con uno o due valori sostituendoli nella(e) equazione(i) per poi ottenere il(i) risultato(i) esatto(i) applicando il concetto di proporzionalità. Questi metodi sono di due tipi: semplice falsa posizione e doppia falsa posizione.

2.5.1. IL METODO DELLA SEMPLICE FALSA POSIZIONE [6]

La base di questo procedimento è considerare un valore particolare dell'incognita ed effettuare i calcoli necessari per ottenere un risultato esatto: da qui il nome di *semplice falsa posizione*. Data la natura lineare dei problemi a cui viene applicata la regola, i calcoli utilizzano fondamentalmente il concetto di proporzionalità diretta.

L'origine di questo metodo si trova nel papiro Rhind (1700 a.C. circa). Il suo autore, Ahmes, lo applica per risolvere una serie di problemi della forma generale: $x + (1/n) x = b$, con n e b interi positivi ed $x \in E$, essendo E l'insieme numerico utilizzato dagli egiziani e composto dai numeri naturali non nulli, dalla frazione $2/3$ e dalle frazioni del tipo $1/n$ con n intero positivo.

Per esempio, il problema 24 del papiro chiede di "trovare una quantità che aumentata della sua settima parte sia uguale a 19", la quale espressa nel linguaggio simbolico dell'algebra attuale corrisponde all'equazione: $x + (1/7) x = 19$. Ahmes lo risolve in questo modo:

1- Adotta la *falsa posizione 7* , cioè $x = 7$, e allora $7 + (1/7) 7 = 8$.

2- Divide 19 per 8 ottenendo: $19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$ (vedasi paragrafo su *"Gli egiziani")*.

3- Moltiplica $19/8$ per 7 , cioè: $(2 + 1/4 + 1/8) . 7 = 16 + 1/2 + 1/8$, così :

1	*2 + 1/4 + 1/8*	
2	*4 + 1/2 + 1/4*	
4	*9 + 1/2*	somma le due colonne
7	*16 + 1/2 + 1/8*	

4- Allora la quantità è: *16 + 1/2 + 1/8* , e verifica il risultato:

quantità:	*16 + 1/2 + 1/8*
1/7	*2 + 1/4 + 1/8*
la somma è	*19* .

In sintesi, Ahmes adotta la falsa posizione *7* e ottiene come risultato *8* invece di *19,* poi applica la proporzionalità: *19 : 8 = x : 7* e trova *x = 16 + 1/2 + 1/8* .

Dato che la manipolazione delle frazioni dell'insieme E risultava abbastanza complessa, gli egiziani trattavano di evitarle per ridurre al minimo il calcolo con esse. Precisamente il metodo della semplice falsa posizione applicato al problema precedente, permette di sostituire la divisione elementare di *19* per *8* a quella di *19* per *(1 + 1/7)*, assai difficoltosa utilizzando le regole egiziane. Inoltre in tutte le equazione del tipo: $x + (1/n)\ x = b$, Ahmes sceglie la falsa posizione $x_0 = n$, così ottiene al primo membro un valore intero: $n + 1 = b_0$, poi effettua la divisione di b con b_0 e moltiplica il risultato per x_0 , cioè: $x = \frac{b}{b_0} \cdot x_0$. In questo modo l'autore sceglie di lavorare nei limite del possibile con i numeri interi.

Tutto ciò dimostra che le difficoltà trovate nell'effettuare i calcoli con le frazioni portarono gli antichi matematici a cercare dei metodi alternativi, mediante i quali potevano risolvere più facilmente i problemi proposti. Per esempio, data l'equazione $ax = b$ nell'insieme F delle frazioni, si adotta la falsa posizione x_0 e quindi $a\,x_0 = b_0$. Se $b_0 = b$, il problema è risolto. Se $b_0 \neq b$ si può scrivere:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{b \cdot x_0}{a \cdot x_0} = \frac{b}{b_0} \cdot x_0 = \frac{x_0}{b_0} \cdot b$$

Nei problemi 24 a 27 del papiro, Ahmes applica il "procedimento" corrispondente all'uguaglianza $x = \frac{b}{b_0} \cdot x_0$. Nel problema 29, invece, utilizza $x = \frac{x_0}{b_0} \cdot b$. Molto più tardi un persiano anonimo proporrà tre "procedimenti" per ridurre al minimo l'uso delle frazioni, che tradotti al linguaggio simbolico moderno corrispondono alle relazioni:

$$x = \frac{b \cdot x_0}{b_0} \;, \quad x = \frac{x_0}{\left\{\frac{b_0}{b}\right\}} \;, \quad x = \frac{b}{\left\{\frac{b_0}{x_0}\right\}}$$

Ahmes si accontenta di indicare soltanto il proseguimento dei calcoli, senza spiegare il metodo utilizzato e il suo campo di applicazione. Guillemot (pag. 3) ritiene che, in questo contesto, la ripetizione di un gran numero di esercizi simili assume spesso la funzione di spiegazione. Lo sviluppo effettuato dal matematico indiano Bhãskara (n. 1114), invece, si inserisce in una prospettiva più algebrica perché riesce a spiegare la regola della semplice falsa posizione in questi termini: "Un numero, supposto come si vede (cioè x_0), subisce un'operazione determinata nel problema particolare, moltiplicazione, divisione, aumento o diminuzione mediante frazioni; allora la quantità data (b), moltiplicata per il numero supposto (x_0) e divisa per quello trovato (b_0), rappresenta il numero cercato (x)" (Colebrooke, pag. 23) (le parentesi con i simboli sono nostre).

2.5.2. IL METODO DELLA DOPPIA FALSA POSIZIONE

La base di questo procedimento è considerare due valori particolari dell'incognita (da qui il nome di *doppia falsa posizione*), effettuare i calcoli necessari per trovare gli errori commessi assumendo questi valori e quindi applicare la formula di interpolazione lineare.

Gli autori medioevali non riescono a stabilire chiaramente il campo di applicazione di ciascuno dei metodi della falsa posizione. Secondo Pellos (1492): "Con il metodo della doppia falsa posizione si possono risolvere problemi più sottili e più complessi, la loro soluzione senza questa regola rappresenta una gran fatica ...". Spesso gli esempi proposti possono anche risolversi applicando il metodo della semplice falsa posizione. Da un analisi accurata dei testi si determina che frequentemente *i problemi più sottili e più complessi* corrispondono algebricamente alla risoluzione di: equazioni di primo grado in cui l'incognita si trova in entrambi i membri, sistemi lineari di equazioni ed equazioni di secondo grado (in modo approssimativo). (Guillemot, pag. 12 - 13).

Gli arabi Al-Qalasadi (1423 - 1494-5) e Beda Eddin (1547 - 1622) propongono problemi semplici che si risolvono applicando questa regola, per esempio: "Trovare un numero che aumentato dei sui $2/3$ e di 1 sia uguale a 10" . Algebricamente corrisponde all'equazione: $x + 2/3\, x + 1 = 10$ con $x \in Q$, che viene risolta così:

1- Si adotta la falsa posizione: $x_1 = 9$, allora il primo membro è uguale a 16 e la differenza con il secondo membro è $d_1 = 6$.

2- Si suppone la falsa posizione: $x_2 = 6$, allora il primo membro è uguale a 11 e la differenza è $d_2 = 1$.

3- Si applica la formula di interpolazione lineare:

$$x = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (d_1 - d_2) = (6 . 6 - 9 . 1) / (6 - 1) = 5 + 2/5.$$

Questo procedimento che permette di risolvere equazioni del tipo $ax = b$ con $x \in Q$, può essere tradotto al linguaggio algebrico moderno così:

1- Si adotta la falsa posizione x_1 e si ottiene $a x_1 = b + d_1$ (1)

2- Si suppone la falsa posizione x_2 e si trova $a x_2 = b + d_2$ (2)

d_1 e d_2 vengono chiamati *differenze o errori* ottenuti considerando come valori dell'incognita x_1 e x_2 .

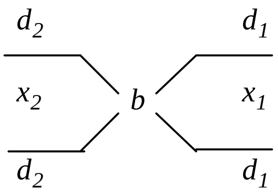
3- Si risolve il sistema composto dalle equazioni (1) e (2) in funzione di a e b e si ottengono:

$$a = (d_1 - d_2) / (x_1 - x_2) \quad \text{e} \quad b = (x_2 d_1 - x_1 d_2)/(x_1 - x_2) . \qquad (3)$$

4- Dato che $x = b/a$ si trova: $$x = (x_2 d_1 - x_1 d_2)/(d_1 - d_2) . \qquad (4)$$

Questa formula generale è di una certa complessità per risolvere il problema proposto. Perciò nella sua opera, Al-Qalasadi utilizza l'immagine dei piatti di una bilancia per presentare in modo più chiaro e preciso l'algoritmo eseguito.

La regola araba della doppia falsa posizione veniva enunciata diversamente secondo i segni, positivo o negativo, delle differenze e si applicava servendosi di uno schema grafico (Loria, pag. 345 - 346):

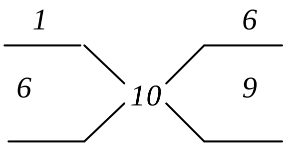


posizione delle differenze con segno positivo

posizione delle differenze con segno negativo

Fig. 7

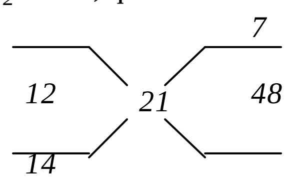
L'esempio precedente risponde allo schema seguente:



$x = (6 . 6 - 9 . 1)/(6 - 1) = 5 + 2/5.$

Fig. 8

Al-Qalasadi propone il problema: "Qual è il numero di cui la terza e la quarta parte addizionate sono uguali a 21?". L'equazione da risolvere è: $x/3 + x/4 = 21$; considerando $x_1 = 48$ e $x_2 = 12$ si ottengono rispectivamente le differenze $d_1 = 7$ e $d_2 = -14$, quindi lo schema corrispondente è il seguente:



$x = (12 . 7 + 48 . 14)/(7 + 14) = 36 .$

Fig. 9

L'autore del *Trattato d'Algibra* (opera del XIV secolo che verrà analizzata più avanti) risolve alcuni sistemi di equazioni lineari mediante l'applicazione di questo algoritmo. Per esempio, il problema 38 può essere tradotto, utilizzando il linguaggio simbolico moderno, in un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, che l'autore trasforma mediante sostituzioni successive in un sistemi di due equazioni in due incognite del tipo (Cfr. Franci e Pancanti, pag. 145 - 150):

$$\begin{cases} 7y = 13x + 4 & (5) \\ 4y = 2x + 176 & (6) \end{cases}$$

che risolve in questo modo:

1- Adotta la falsa posizione $y_1 = 40$ e nell'equazione (5) calcola $x_1 = 21 + 3/13$.

2- Sostituisce questi due valori nell'equazione (6) trovando 160 al primo membro e $218 + 6/13$ al secondo membro. Poiché i due membri dovrebbero essere uguali si ha una differenza $d_1 = 58 + 6/13$.

3- Analogamente adottando la falsa posizione $y_2 = 80$, calcola $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.

4- Applica la formula (4) e ottiene:

$$y = [80 \cdot (58 + 6/13) + 40 \cdot (58 + 6/13)] / (58 + 6/13 + 58 + 6/13) = 60 .$$

5- Sostituendo $y = 60$ nell'equazione (5) trova $x = 32$.

Alcuni autori (Guillemot, pag. 13 - 14) ritengono che l'origine del *metodo della doppia falsa posizione* si trovi precisamente nei matematici cinesi. Nel libro *"Jiuzhang suanshu" (Nove capitoli sull'arte del calcolo)* scritto durante il periodo dei Han (206 a.C. - 220 d.C.) vengono risolti sistemi di primo grado di due equazioni in due incognite ed equazioni di secondo grado in modo approssimativo, mediante l'applicazione di un algoritmo chiamato *del troppo e del non abbastanza*, considerato il precursore della regola analizzata in questa sede. Per esempio l'enunciato del quarto problema è il seguente: "In una compra collettiva di giadeite, se ciascun uomo paga la metà (della unità monetaria) il *troppo* è 4, se ciascun uomo paga un terzo il *non abbastanza* è 3. Qual è il numero degli uomini e il prezzo delle pietre?". Risposte: 42 uomini, prezzo delle pietre: 17. Considerando a il numero degli uomini, b il prezzo della merce, questo problema può essere tradotto al linguaggio simbolico mediante un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a\,x_1 = b + t \\ a\,x_2 = b - n \end{cases}$$

analogo al sistema composto dalle equazioni (1) e (2) (all'inizio di questa sezione) con t corrispondente alla differenza d_1 e $-n$ alla differenza d_2 . Risolvendo questo sistema si ottiene: $a = (t + n) / (x_1 - x_2)$ e $b = (x_2 t + x_1 n) / (x_1 - x_2)$.

Dato che $x = b/a$ (nel problema precedente sarebbe il prezzo pagato da ciascun uomo) si trova:

$x = (x_2 t + x_1 n) / (t + n)$ (7) equivalente alla formula (4) (Cfr. Guillemot, pag. 13 - 14).

I matematici cinesi adottarono questa tecnica per risolvere numerosi problemi anche quelli di secondo grado, per esempio i classici "problemi di incontro": "Siano due cavalli uno buono ed uno cattivo che lasciano Chang'an per andare a Qi. Qi dista 3000 li da Chang'an. Il buon cavallo fa 193 li il primo giorno e aumenta poi la sua corsa di 13 li ogni giorno; il cavallo cattivo fa 97 li il primo giorno e diminuisce dopo la sua corsa di mezzo li ogni giorno. Il buon cavallo raggiunge Qi e poi viene all'incontro del cattivo cavallo. Si domanda dopo quanti giorni i cavalli si incontrano e quale distanza percorre ciascuno?". I cinesi suppongono $x_1 = 15$ giorni e ottengono $n = 337 + 1/2$, poi adottano $x_2 = 16$ giorni e trovano $t = 140$. Applicando la formula (7) ricavano $x = (15 + 135/191)$ giorni (Cfr. Guillemot, pag. 15 - 16).

Utilizzando la teoria delle progressioni aritmetiche e il linguaggio simbolico dell'algebra moderna questo problema può essere espresso mediante l'equazione: $25\ x^2 + 1135\ x - 24000 = 0$. Di conseguenza il metodo *del troppo e del non abbastanza* permette di risolvere un problema di secondo grado in "modo approssimativo", trasformandolo in un problema "lineare". Osservare che la soluzione è precisamente un numero compresso tra le false posizioni *15* e *16* , perché solitamente i cinesi adottavano come false posizioni le migliore approssimazioni possibili.

3. L'ALGEBRA IN EUROPA FINO AL CINQUECENTO

3.1 LEONARDO PISANO

Durante il periodo altomedievale (400 al 1100 circa), la civiltà europea non si preoccupò dallo sviluppo della matematica, non vi fu alcun progresso, né vi furono tentativi seri di generare nuove conoscenze. Tutti i problemi erano ridotti all'applicazione delle quattro operazioni fra numeri interi. Poiché nella pratica i calcoli venivano effettuati con l'aiuto dell'abaco, le regole delle operazioni erano adatte a questo strumento. Si utilizzava il sistema di numerazione romano, evitando lo zero di cui non si capiva il senso. Le frazioni venivano usate raramente e i numeri irrazionali non comparivano affatto (Kline, pag. 237-239).

Intorno al 1100, nuove influenze riuscirono a mutare il clima intellettuale. Attraverso il commercio e i viaggi, gli europei erano venuti in contatto con gli arabi dell'area mediterranea e del Medio Oriente e con i bizantini dell'impero romano di Oriente. Gli studiosi si recarono in questi centri per conoscere le opere greche e arabe. Il primo europeo degno di menzione è Leonardo Pisano (c.1170 - 1250), detto Fibonacci, che visitò l'Algeria per imparare i procedimenti aritmetici utilizzati dagli arabi e poi percorse l'intero bacino del Mediterraneo per approfondire i suoi studi.

Tornato a Pisa, Leonardo scrisse le seguenti opere: il *Liber Abaci* (1202, revisionata nel 1228), *Practica Geometriae* (1220, riguardante problemi di geometria piana e dello spazio), *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometricam pertinentium* e il *Liber Quadratorum* (1225). Oltre a queste opere Leonardo compose anche una lettera indirizzata a Teodoro, filosofo della corte dell'Imperatore Federico II (riguardante la risoluzione di due problemi, uno di algebra ed un altro di geometria) e un commento sul Libro X di Euclide.

Fibonacci scrisse il *Liber Abaci*, cioè il "libro dell'abaco", con l'obiettivo di introdurre in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i metodi di calcolo indiani. Questa opera fu utilizzata per lungo tempo ed esercitò un'enorme influenza sul popolo, perché presentava procedimenti aritmetici molto più semplici di quelli fondati sul sistema romano .

Il *Liber Abaci* è diviso in quindici capitoli: all'inizio Leonardo presenta le nove cifre che chiama "indiane" (in realtà queste sono dieci perché va aggiunto lo zero), le regole per le quattro operazioni con i numeri interi e i criteri di divisibilità fino al 13, mettendo a disposizione del lettore apposite tabelle di addizione e moltiplicazione e mostrando come esse possano servire ad eseguire le operazioni suoi numeri composti da più cifre. I risultati delle operazioni vengono verificate mediante le prove per 9, 7 o 11. Nei capitoli successivi introduce il calcolo con le frazioni, espone le proprietà delle frazioni continue e applica tutti questi concetti nella risoluzione di problemi. E' interessante osservare che Fibonacci utilizza la scomposizione egiziana delle frazioni in frazioni unitarie (con numeratore uguale ad uno). Un capitolo è dedicato alle regole per operare con radicali quadratici e cubici e qui i punti di contatto con il Libro X di Euclide sono evidenti, ma non dichiarati dall'autore (Loria, pag. 385 - 390).

Il *Liber Abaci* contiene un gran numero di problemi di ordine pratico e relativi alle transazioni commerciali. Alcuni di questi appartengono alla "Teoria dei Numeri" che Fibonacci risolve utilizzando la successione numerica che oggi porta il suo nome (ogni numero è ricavato dalla somma dei due precedenti immediati). Altri, invece, riguardano una categoria di questioni di analisi indeterminata chiamata "problemi dei cento uccelli", già ritrovate nelle opere cinesi e arabe. Seguono numerosi problemi di analisi determinata di primo e di secondo grado; è interessante notare che per l'equazione di secondo grado, Leonardo segue lo stile arabo considerando cinque casi diversi in modo che i coefficienti risultino sempre positivi e poi, per ciascuno di essi, trova le soluzioni utilizzando i ragionamenti geometrici di Euclide. Le innumerevoli questioni di analisi indeterminata vengono risolte applicando diversi artifici usati da Diofanto o il metodo della falsa posizione. Precisamente questa regola viene spesso utilizzata: per scomporre un numero dato, sia in parti costituenti una progressione geometrica, sia in parti proporzionali a certi numeri conosciuti, per risolvere i classici "problemi di incontro" e diverse questioni sulla distribuzione di somme di denaro. Così per esempio sono tipici i problemi del tipo: "Tre uomini, ciascuno dei quali è provvisto di una certa somma di denaro, trovano una borsa ben fornita. Dice il primo: se consegnate a me la borsa io avrò tanto denaro quanto il doppio del secondo e del terzo pressi insieme. Analoghe dichiarazioni fanno gli altri due, con la sola differenza che, invece del doppio dicono il triplo e il quadruplo. Trovare quanto denaro hanno inizialmente i tre uomini e quanto contiene la borsa". In questo caso Leonardo calcola soltanto una soluzione: 7, 17, 23 e 73, ma è chiaro che infinite altre soluzione si ottengono moltiplicando questi numeri per un fattore arbitrario (Loria, pag. 386 - 391).

Il *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometricam pertinentium* comprende 15 questioni di analisi determinata e indeterminata, tra le quali si trova un problema posto a Fibonacci da Giovanni da Palermo della corte dell'imperatore Federico II. Esso tradotto al linguaggio algebrico moderno consiste nella risoluzione dell'equazione: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Leonardo dimostra che l'unica radice non può appartenere ai numeri irrazionali studiati da Euclide nel suo Libro X, cioè che l'insieme composto dai numeri razionali e irrazionali euclidei non contiene gli elementi idonei per esprimere la soluzione cercata, e questa è una conclusione molto importante per la posteriore risoluzione delle equazioni di terzo grado perché implica la necessità di ampliare il campo numerico con l'introduzione delle irrazionalità cubiche. Fibonacci trova poi la radice in frazioni sessagesimali con un'approssimazione notevole di $1/60^6$. Dato che egli non indica la via che conduce a questo risultato sembra che si tratti di una procedura ai suoi tempi di dominio generale, probabilmente sia lo stesso metodo applicato da al-Tusi per risolvere equazioni di terzo grado.

3.1.1 IL LIBER QUADRATORUM

Il *Liber Quadratorum*, cioè il "libro dei numeri quadrati", fu dedicato a Federico II. L'obiettivo di questa opera era risolvere altri due problemi che Giovanni da Palermo e il filosofo Teodoro della corte dell'imperatore proposero a Leonardo nella loro visita a Pisa. E' un testo di gran importanza perché contiene risultati rilevanti sulla Teoria dei Numeri e per l'originalità del metodo applicato da Fibonacci, nel quale si manifesta una certa tendenza a risolvere i problemi cercando di inserirli in famiglie o classi di problemi. Pertanto verrà soggetto ad un'analisi più approfondita.

Il libro è composto da venti proposizioni riguardanti problemi di analisi indeterminata di secondo grado, ma la maggior parte di esse costituiscono dei lemmi ausiliari che servono per preparare la soluzione delle due questioni poste all'autore. Quindi il *Liber Quadratorum* non è una raccolta sistematica delle proprietà dei numeri quadrati, ma una selezione di esse le cui dimostrazioni portano alla risoluzione dei due problemi assegnati. Secondo Ver Eecke (pag. XVIII - XIX), tutte queste proprietà non appartengono al Fibonacci, alcune già facevano parte di un'antica opera greca di Nicomaco da Gerasa (II sec. d.C.), ma il primo autore conserva il vantaggio di aver dimostrato le proposizioni che il secondo era soltanto riuscito a verificare numericamente.

Le due questioni proposte a Leonardo (Léonard de Pisa, pag. 43 e 63) sono: *Trovare un numero quadrato che aumentato o diminuito di cinque, sia sempre un numero quadrato* (Proposizione XIV) e *Trovare tre numeri in modo che la loro somma aumentata del quadrato del primo sia un numero quadrato, questo numero aumentato del quadrato del secondo sia un numero quadrato e infine questo altro numero aumentato del quadrato del terzo sia ugualmente un numero quadrato* (Proposizione XX) (Vedasi Nota 7) .

Le prime proposizioni del *Liber Quadratorum* riguardano il calcolo dei numeri quadrati come somme della successione di numeri dispari: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$. A partire da questa formula, Leonardo ricava una serie di proprietà relative ai numeri quadrati e due metodi per risolvere le equazioni pitagoriche, cioè per trovare coppie di numeri quadrati aventi per somme dei numeri quadrati. Ad esempio uno di questi metodi è il seguente (Léonard de Pisa, pag. 2 -3):

* se a è un <u>numero</u> <u>dispari</u> si considerino le somme: $1 + 3 + ... + (a^2 - 2)$ e $1 + 3 + ... + (a^2 - 2) + a^2$ la prima è un quadrato b^2 , la seconda un altro quadrato c^2 e dato che $c^2 = b^2 + a^2$ il problema è risolto.

* se a è un <u>numero</u> <u>pari</u>, $\frac{a^2}{2} \pm 1$ sono due numeri dispari e allora $1+3+...+\left(\frac{a^2}{2}-3\right)$ e $1+3+...+\left(\frac{a^2}{2}-3\right)+\left(\frac{a^2}{2}-1\right)+\left(\frac{a^2}{2}+1\right)$ sono due quadrati b^2 e c^2 e poiché $c^2 = b^2 + a^2$ la questione è risolta.

Seguono una serie di proposizioni che tradotte al linguaggio algebrico moderno sono le seguenti:

* Se $z^2 = a^2 + b^2$ trovare due numeri x e y, diversi da a e b, tali che $z^2 = x^2 + y^2$.

* Se quattro numeri a, b, c e d non sono proporzionali e verificano $a < b$ e $c < d$ allora si ha la doppia identità:

  $(a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2$;

  se $a^2 + b^2 = x^2$ si ha anche $(a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = (xc)^2 + (xd)^2$; e infine se $c^2 + d^2 = x^2$ si ottiene una quarta scomposizione in somma di quadrati $(a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = (ay)^2 + (by)^2$. A partire da questa proprietà ricava un'altra soluzione dell'equazione pitagorica. E' interessante osservare che questa proposizione solleva una questione storica di priorità, perché il Fibonacci enuncia forse in termini non molto chiari, le identità attribuite a Lagrange.

* Se $a^2 + b^2 = k$ con $k \neq z^2$ trovare due numeri x e y diversi da a e b e tali che $x^2 + y^2 = k$.

* Trovare la somma dei quadrati dei n primi numeri interi, per poi ricavare la somma dei quadrati dei n primi numeri pari o dispari e cioè:

  $n (n + 1) (2n + 1) = 6 (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$,

  $(2n - 1) (2n + 1) 4n = 12 [1^2 + 3^2 + 5^2 + (2n - 1)^2]$ e

  $2n (2n + 2) (4n + 2) = 12 [2^2 + 4^2 + 6^2 + (2n)^2]$.

La sezione seguente del *Liber Quadratorum* verte sui numeri congrui, argomento che era già stato preso in considerazione precedentemente dall'arabo al-Hosein. Nella Proposizione IX (pag. 26 - 28), Leonardo dimostra che: *Se due numeri primi tra loro hanno per somma un numero pari, moltiplicando il loro prodotto per la loro somma e per la loro differenza (positiva) si ottiene sempre un multiplo intero di 24* . Precisamente i numeri di questa forma: $ab.(a + b).(a - b)$ per a e b primi relativi ed $a + b$ pari sono quelli che Fibonacci chiama i *numeri congrui* e il *24*, che risulta di sostituire *3* ad a ed *1* a b , è il più piccolo numero congruo. Nella Proposizione XI (pag. 30) l'autore dimostra che le equazioni: $x^2 + m = a^2$ *e* $x^2 - m = b^2$ sono risolubili nell'insieme dei numeri interi soltanto se m è un numero congruo. Di conseguenza, nella proposizione XIV (pag. 43) che chiede di: "Trovare un numero x tale che $x^2 + 5$ ed $x^2 - 5$ siano numeri quadrati", Leonardo esclude il caso di soluzione intera perché $m = 5$. Trova poi la soluzione razionale $x = 41/12$, utilizzando i numeri *31*, *41* e *49* i cui quadrati sono in progressione aritmetica di ragione *720* (numero congruo divisibile per *5*) (Vedasi Nota 8):

$(41/12)^2 + 5 = 1681 /144 + 5 \times 144 /144 = 1681/144 + 720 /144 = (49/12)^2$

$(41/12)^2 - 5 = 1681 /144 - 5 \times 144 /144 = 1681 /144 - 720 /144 = (31/12)^2$.

Nelle successive proposizioni Leonardo determina alcune proprietà dei numeri congrui, per esempio: "nessun numero quadrato può essere congruo". Incidentalmente ricava (anche se in maniera imperfetta) una proprietà importante perché è equivalente al teorema di Fermat: "L'area di un triangolo rettangolo di lati interi non può essere espressa mediante un numero quadrato" (Vedasi Nota 9). Posteriormente risolve problemi di analisi indeterminata di secondo grado, che espressi nel linguaggio simbolico dell'algebra contemporanea sono i seguenti:

* Trovare il numero x tale che $x^2 + x$ e $x^2 - x$ siano numeri quadrati,

* Dato il rapporto m/n, trovare tre numeri x, y e z tali che $(x^2 - y^2)/(y^2 - z^2) = m/n$,

* Trovare tre numeri x, y e z tali che $x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2$ siano numeri quadrati.

Questi lemmi ausiliari vengono utilizzati per dimostrare finalmente la Proposizione XX.

E' interessante rilevare che Giovanni da Palermo propone a Leonardo la questione enunciata nella Proposizione XIV pur conoscendo la soluzione di altri problemi simili, ad esempio: $x^2 + 6 = a^2$ e $x^2 - 6 = b^2$; e questo succede precisamente perché Giovanni risolve le questioni singolarmente senza ipotizzare la possibilità di estenderle ad altri situazioni. Leonardo, invece, a partire dal problema proposto formula una generalizzazione determinando i casi di soluzioni intere per tutti i problemi della forma $x^2 + m = a^2$ e $x^2 - m = b^2$; cioè Fibonacci risolve i problemi cercando di inserirli in famiglie di problemi. Questi due modi di procedere segna appunto la distinzione tra *abacisti* e *algoritmisti* (Spagnolo 1995, pag. 2 - 3).

Il *Liber Quadratorum* presenta una certa analogia con il lavoro di Diofanto, che sicuramente Fibonacci conobbe in modo indiretto attraverso gli arabi. L'algebra di Leonardo come quella di Diofanto utilizzano il linguaggio naturale, ma in entrambe si manifesta già una certa tendenza verso il simbolismo per alcune abbreviazioni usate per rappresentare l'incognita e le sue potenze. Ma questi due autori presentano differenze dal punto di vista del metodo. Le numerose proposizioni di analisi determinata e indeterminata dell'*Arithmetica* di Diofanto sono assolutamente prive di geometria e impiegano la numerazione alfabetica che rende i calcoli laboriosi e lenti. Mentre l'algebra di Fibonacci utilizza la numerazione di posizione e il metodo euclideo della rappresentazione lineare dei numeri, e per questo motivo viene considerata da alcuni autori come un "algebra geometrica" (Ver Eecke, pag. XXI).

Sul simbolismo adoperato da Leonardo si può osservare che soltanto nell'ultima proposizione del *Liber Quadratorum* si serve delle parole *Res* e *Census* per indicare rispettivamente l'incognita e il quadrato dell'incognita. L'uso di questo simbolismo nascente è tuttavia più accentuato nel *Liber Abaci*, perché Leonardo rappresenta i numeri mediante segmenti di retta e questo favorisce l'impiego delle lettere per indicare i dati e le incognite del problema.

Secondo Ver Eecke (pag. XVIII) le venti proposizioni del *Liber Quadratorum* costituiscono i principali risultati relativi alla Teoria di Numeri ottenuti da Fibonacci e le soluzioni formulate a questi problemi rappresentano precisamente lo stato della disciplina algebrica nel XIII secolo in Occidente. Il *Liber Quadratorum* è un'opera di gran importanza, ma purtroppo è rimasta sconosciuta durante più di sei secoli e così certi risultati di rilevanza hanno dovuto aspettare l'arrivo di Fermat. Bortolotti (1950, pag. 650) sostiene che è "...l'opera che per l'originalità del metodo e l'importanza dei risultati *faceva di Leonardo* il più grande genio della teoria dei numeri, apparso nei quindici secoli trascorsi dal tempo di Diofanto a quello di Fermat".

3.2 IL TRATTATO D'ALGIBRA

A partire dal XIII secolo gli importanti progressi della matematica europea si verificarono nel campo dell'aritmetica e dell'algebra. L'opera degli indiani e degli arabi aveva messo i calcoli aritmetici pratici all'avanguardia della matematica i quali trovavano la sua sistemazione precettistica nei trattati d'abaco. In questi testi l'algebra aveva una base aritmetica piuttosto che geometrica e figuravano tra l'altro molte questioni che venivano affrontate con equazioni.

Il *Trattato d'Algibra* fu scritto alla fine del XIV secolo da un'anonimo maestro fiorentino d'abaco. E' un classico "trattato d'abaco" perché vengono affrontati tutti gli argomenti mercantili che caratterizzano questo tipo di opere; ma non è un testo elementare, cioè non sembra scritto per persone che utilizzavano l'aritmetica con una finalità pratica, ma piuttosto per coloro che avevano interessi più astratti per questa disciplina.

Franci e Pancanti (pag. VI) ritengono che questa opera sia uno dei migliore trattati d'abaco medioevali e del Rinascimento che esse abbiano esaminato. In particolare segnalano che: "... i capitoli finali dedicati all'algebra ... sono fondamentali nella ricostruzione della storia di questa disciplina nei secoli dal XIII e XVI. Questi capitoli infatti oltre a costituire uno dei trattati d'algebra più ampi e organici fra quelli che ci sono pervenuti, contengono un importante contributo alla risoluzione delle equazioni di terzo grado ..." prima della scoperta della formula risolutiva effettuata da Scipione dal Ferro nel 1530 circa.

La sezione dedicata all'algebra viene divisa in tre parti: nella prima l'autore spiega le regole di calcolo con monomi e polinomi, nella seconda elenca *25 regole* per risolvere equazioni dei primi quattro gradi e nella terza presenta la risoluzione di 41 problemi applicando le nozioni algebriche illustrate in precedenza.

In questo manoscritto viene utilizzato il linguaggio naturale per descrivere tutte le operazioni algebriche, ma già si manifesta una certa tendenza verso il simbolismo perché l'incognita e le sue potenze vengono chiamate con dei nomi particolare:

x *cosa (o chosa)*
x^2 *censo*
x^3 *chubo*
x^4 *censo di censo*
x^5 *chubo di censi*
x^6 *censo di chubo.*

L'autore definisce la *cosa* in questo modo: "...in prima noi diremo che sia questa cosa, onde dirò che non sia altro se non è una posizione che si fa in molte quistioni, e quando achaderà questa posizione fatta, o porterà quantità di numero alchun'altra volta, o porterà quantità di tempo alchun'altra volta..." (pag. 30). Cioè, la *cosa* considerata come "posizione per un valore particolare", si identifica precisamente con l'incognita di un'equazione. Tra le denominazioni utilizzate per le potenze della variabile richiamano l'attenzione *chubo di censi* e *censo di chubo* perché non seguono la stessa regola di formazione: l'autore spiega che il primo è il prodotto di un cubo per un censo, ma il secondo sembra provenire dal fatto che x^6 è anche uguale a $(x^3)^2$. Ma più avanti nel testo l'autore utilizza il nome *chubo di chubo* per x^6 , essendo coerente con la prima regola di formazione.

Seguono poi le regole per effettuare il prodotto di due monomi e di due polinomi. Per moltiplicare due binomi (o polinomi), l'autore dà una regola unica che consiste nel disporre: i binomi uno sotto l'altro, ordinati secondo la potenza decrescente dell'incognita, e nel realizzare il prodotto seguendo la moltiplicazione "a crocetta" fra i numeri interi (Vedasi Nota 10). Ad esempio, per moltiplicare $(3x + 8).(4x + 6)$, una volta disposti i polinomi l'autore esegue le seguenti operazioni: $6 \ . \ 8 = 48$, $6 \ .3x + 8 \ .4x = 50x$ (moltiplicazione "a crocetta") e $4x \ .3x = 12x^2$. Quindi il risultato è $12x^2 + 50x + 48$. L'autore fornisce numerosi esempi perché considera separatamente i casi in cui i coefficienti sono tutti positivi, quelli in cui alcuni di essi sono negativi ed finalmente quelli in cui alcuni sono radicali, positivi o negativi.

Il testo procede con alcune indicazioni sulla divisione fra monomi puntualizzando che essa è possibile soltanto se il grado del monomio dividendo è superiore a quello del monomio divisore.

Nella seconda parte della sezione dedicata all'algebra l'autore presenta le *reghole della chosa*. Questa è una delle denominazioni usate nel Medioevo e nel Rinascimento per indicare le regole di risoluzione delle equazioni (Cfr. Franci e Pancanti, pag. XIII). Nel testo vengono elencate 25 regole per risolvere equazioni dei primi quattro gradi, divise in due gruppi. Il primo gruppo comprende 22 regole che tradotte al linguaggio simbolico dell'algebra contemporanea corrispondono alle seguenti equazioni:

1- $ax = b$	12- $ax^3 = bx^2 + cx$
2- $ax^2 = b$	13- $ax^4 = b$
3- $ax^2 = bx$	14- $ax^4 = bx$
4- $ax^2 + bx = c$	15- $ax^4 = bx^2$
5- $ax^2 + c = bx$	16- $ax^4 = bx^3$
6- $ax^2 = bx + c$	17- $ax^4 + bx^3 = c x^2$
7- $ax^3 = b$	18- $ax^4 + cx^2 = b x^3$
8- $ax^3 = bx$	19- $ax^4 = bx^3 + c x^2$
9- $ax^3 = bx^2$	20- $ax^4 + bx^2 = c$
10- $ax^3 + bx^2 = c x$	21- $ax^4 + c = b x^2$
11- $ax^3 + cx = b x^2$	22- $ax^4 = bx^2 + c$.

L'autore considera separatamente tanti casi particolari di equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti siano sempre positivi. E' interessante osservare che seguendo la tradizione araba egli accetta soltanto le soluzioni reali positive non nulle; in modo particolare nell'equazione 5 calcola tutte e due le radici positive e verifica che entrambe sono possibili.

Le 22 equazioni elencate vengono risolte applicando il trasporto di termini dal primo al secondo membro o la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, che in alcuni casi deve essere particolarmente adeguata a trovare soltanto la radice positiva (Vedasi Nota 11). L'autore evidenzia che le soluzioni delle equazioni 10, 11 e 12 e 17, 18 e 19 si riducono a quelle delle equazioni 4, 5 e 6, dividendo ciascuna di queste equazioni di terzo o quarto grado per l'incognita o il suo quadrato. Inoltre egli sottolinea che le soluzioni delle equazioni 20, 21 e 22 sono uguali a quelle delle equazioni 4, 5 e 6, ma in questo caso bisogna sostituire x ad x^2 , cioè la *cosa* al *censo.* E' interessante notare che l'autore enuncia le regole 3, 9 e 16, 8 e 15 senza fare alcun riferimento sulla possibilità di ricondurre tali regole a quelle delle equazioni 1 e 2 rispettivamente, dividendo per x o una potenza di x . Ciononostante è importante sottolineare che queste osservazioni possono sembrare ovvie a chi è abituato ad utilizzare il simbolismo algebrico, ma sono molto meno triviali quando vengono formulate avendo a disposizione soltanto il linguaggio naturale, e secondo Franci e Pancanti (pag. XIV) esse mancano in quasi tutti i testi coevi.

Le 22 regole vengono illustrate mediante la risoluzione di numerosi problemi. La maggior parte di essi non è di carattere elementare, spesso è necessario fare un'accurata scelta dell'incognita, in modo di facilitare l'esecuzione dei calcoli; in molti casi i ragionamenti per arrivare all'equazione che risolve il problema sono lunghi e laboriosi (Franci e Pancanti, pag. XV). Ma la scelta dell'incognita dipende dalla difficoltà del problema, non del tipo di problema; per esempio nelle questioni del tipo: "Fare da 10 due parti ...", in un caso l'autore considerare x e $10 - x$ come le due parti (problema di applicazione della prima regola), mentre in altro sceglie $4 + x$ e $6 - x$ (esempio della sesta regola).

Trovata l'equazione che rappresenta il problema, l'autore la risolve effettuando le operazioni necessarie per trasformarla in un'equazione più semplice con coefficiente positivi e poter applicare così la regola adatta. Tra queste operazioni egli utilizza la proprietà di sommare (o sottrarre) lo stesso numero o la stessa espressione contenente l'incognita ad entrambi i membri e raggruppare i termini simili. Così per esempio: "... *2* chose meno *5* sono iguali a $1^{1/2}$ chose più 15, donde sarà da raguagliare le parti in questo modo che noi daremo a ciascuna parte 5 e poi leveremo di ciaschuna parte $1^{1/2}$ chose. E fatto questo rimaratti che *1/2* chose sarà iguali a *20*, donde oserva la reghola di sopra data (la prima) coè partendo lo numero ch'è *20* nelle chose che sono *1/2* ne veranne *40*..." (pag. 45) [Vedasi Nota 12].

E' interessante rilevare che, in questa opera come in altre coeve, i numeri negativi rappresentano una forte limitazione nella risoluzione delle equazioni, ereditata dalla tradizione araba: l'autore evita i coefficienti negativi nella formulazione delle regole e non accetta le radici negative. Tuttavia egli intuisce l'importanza che questi numeri possono avere nella risoluzione dei problemi, utilizzandoli parzialmente nella scelta dell'incognita o nel processo di costruzione dell'equazione, per esempio: $10 - x$, $6 - x$ e $52 - 4x + 2x^2 = 60$, e questo sembrerebbe indicare che lo stesso processo di risoluzione crea la necessità di incorporare a poco a poco nuovi oggetti algebrici di natura più astratta. Inoltre quelle regole, che non utilizzano la forma risolutiva dell'equazione di secondo grado, vengono formulate applicando l'operazione di trasporto di termini dal primo al secondo membro; mentre nel processo di risoluzione dei problemi l'autore effettua la stessa operazione (somma o sottrazione) ad entrambi i membri. Quindi si osserva la coesistenza di due metodi formali nel processo di risoluzione e questo significa un gran passo avanti nel campo concettuale-operativo.

Le regole del secondo gruppo comprendono tre tipi di equazioni di terzo grado:
23- $ax^3 + bx^2 = c$
24- $ax^3 = bx^2 + c$
25- $ax^3 + c = bx^2$.

L'autore inizia questa parte del manoscritto definendo un nuovo tipo di radici: "si dice che u è la radice cubica di a con l'aggiunta di b se $u^3 = a + bu$ ". Ma l'autore dà la definizione direttamente a partire da un esempio numerico: la radice cubica di 44 con la aggiunta di 5 uguale a 4 perché $4^3 = 64 = 44 + 5 \times 4$.

Il calcolo di questo tipo di radici suppone la risoluzione di un'equazione di terzo grado del tipo $x^3 = px + q$, che l'autore effettua mediante tentativi perché non conosce la sua formula risolutiva. Egli sottolinea che non sempre è possibile trovare le radici in questione quando viene assegnata l'aggiunta, per esempio: mentre la radice cubica di 15 con l'aggiunta di 4 è 3, la radice cubica de 15 con l'aggiunta di 2 non si può determinare. Comunque gli esempi riportati nel testo sono stati scelti in modo che tutti abbiano una soluzione intera o razionale positiva.

L'autore osserva che per risolvere le equazioni 23, 24 e 25 è necessario utilizzare le radici cubiche con aggiunta. Per esempio, egli formula la regola 23 relativa all'equazione $ax^3 + bx^2 = c$, procedendo in questo modo:

1- Divide entrambi membri dell'equazione per a ottenendo: $x^3 + (b/a)\, x^2 = c/a$. (1)

2- Opera la sostituzione $x = y - b/3a$, mediante la quale la risoluzione dell'equazione (1) viene ricondotta a quella dell'equazione $y^3 = \boldsymbol{b}\ y + \boldsymbol{a}$. (2)
   Allora y è la radice cubica di $\boldsymbol{a}$ con l'aggiunta di $\boldsymbol{b}$, essendo $\boldsymbol{a} = c/a - 2\,(b/3a)^3$ e $\boldsymbol{b} = 3\,(b/3a)^2$.
   Trovato il valore di y per tentativi, immediatamente resta determinata la soluzione x .

L'autore (pag. 102) utilizza questa regola nella risoluzione di alcune equazioni, per esempio: $2\,x^3 + 36\,x^2 = 704$, che divisa per 2 viene ricondotta alla forma $x^3 + 18\,x^2 = 352$. Poi applica la regola e trova che $x = y - 6$ essendo y la radice cubica di -80 con l'aggiunta di 108 e allora $y = 10$, da cui si ricava che $x = 4$. E' interessante osservare che in questo caso il valore di $\boldsymbol{a}$ è -80 e viene chiamato dall'autore con il nome di "debito 80", e ciò rappresenta un'altro esempio in cui vengono utilizzati i numeri negativi nella risoluzione di equazioni.

Le regole per risolvere le equazioni 24 e 25 sono simili a quella dell'equazione 23, con eccezione di alcuni cambiamenti di segni, per esempio le sostituzioni da operare sono: $x = y + b/3a$ ed $x = b/3a - y$ rispettivamente. Questo dimostra che l'autore aveva scoperto il rapporto esistente tra le soluzioni delle equazioni del tipo $x^3 + a\,x^2 + b = 0$ e quelle delle equazioni della forma $x^3 + px + q = 0.$ Secondo Franci e Pancanti (pag. XX): l'importanza delle regole in questione è ancora maggiore se si considera che la risoluzione dell'equazione generale di terzo grado $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$, passa proprio attraverso la risoluzione delle equazioni del tipo $y^3 + p\,y + q = 0$, alle quali si arriva mediante la trasformazione $x = y - a/3$, che è precisamente quella proposta dal nostro autore ed è la prima di questo genere nella letteratura matematica. Rimane ancora aperto il problema della divulgazione di queste regole e dell'incidenza che esse possono aver avuto nella scoperta della formula risolutiva delle equazioni del tipo $x^3 + px + q = 0$ effettuata nel cinquecento da Scipione Dal Ferro.

La parte finale del Trattato è dedicata alla risoluzione di 41 problemi. E' interessante rilevare che negli ultimi quattro l'autore utilizza due incognite: una è chiamata *cosa*, mentre all'altra viene lasciato il nome dell'oggetto da determinare.

Egli imposta un sistema di due equazioni nelle due incognite prefissate che risolve applicando il *metodo della doppia falsa posizione* per calcolare il valore di una delle incognite, e poi la *prima regola della cosa* per trovare l'altra.

3.3 GLI ALGEBRISTI DEL CINQUECENTO

Alla fine del XV secolo il grande interesse per l'algebra era motivato principalmente dalla necessità di risolvere equazioni e certe identità per compilare le tavole trigonometriche che venivano utilizzate nell'astronomia. Anche le attività commerciali e bancarie che si stavano sviluppando richiedevano un'aritmetica più avanzata. Le risposte a questi interessi si trovano nella *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalitate* di **Luca Pacioli** (1445 - 1514?) e nel *Trattato Generale di Numeri e Misure* di **Nicolò da Brescia** (c.1500 - 1557), conosciuto come **Tartaglia**.

Freguglia (pag. 1110) ritiene che l'opera di Pacioli rappresenta un momento di transizione tra un'impostazione prevalentemente pratica del calcolo aritmetico ed una trattazione più speculativa, non soltanto legata alla presentazione degli algoritmi risolutivi delle equazioni, ma anche a corrispondenti aspetti teorico geometrici. Proprio in questa fase storica si inizia la costruzione di una prima teoria delle equazioni algebriche, cioè un'impostazione trattatistica che dà una giustificazione teorica alle tecniche equazionali abacistiche.

L'opera di Pacioli è un compendio delle conoscenze di quella epoca che lega la matematica ad una gran varietà di applicazioni pratiche. Ma in essa si osservano progressi significativi rispetto all'utilizzazione del linguaggio sincopato, poiché mentre i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale, l'incognita e le sue potenze (fino alla ventisettesima), vengono rappresentate mediante nomi e abbreviazioni particolari, per esempio:

x	*cosa*	*co*	
x^2	*censo*	*ce* o *Z*	
x^3	*chubo*	*cu* o *C*	
x^4	*censo di censo*	*ce ce*	
x^5	*primo relato*	p° r°	ecc. (Loria, pag. 476).

Vengono anche adoperate altre abbreviazioni come *p* (per più), *m* (per meno) e *ae* (per uguale: aequalis), R^2 e R^3 (attraversata da una sbarra obliqua) indicano le radici quadratiche e cubiche. I numeri negativi sono preceduti dalla lettera *m*.

Nonostante i tipi di argomenti che vengono trattati nella *Summa* di Pacioli non rappresentino dei grandi progressi rispetto alle opere precedenti, è interessante sottolineare che questo autore propone una delle più grande sfida dell'algebra nell'affermare che la risoluzione delle equazioni di terzo grado del tipo: $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px$ (in notazione moderna) è impossibile come la quadratura del cerchio.

Altri matematici italiani, invece, avevano capito che quella impossibilità dipendeva principalmente dalla deficienza del campo numerico che non conteneva gli elementi idonei per esprimere la soluzione. Fibonacci, per esempio, volendo risolvere l'equazione: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ dimostrò che l'unica radice non può appartenere ai numeri irrazionali studiati da Euclide nel Libro X, e poi trovò la soluzione in frazioni sessagesimali con una notevole approssimazione.

Dato che lo sviluppo dell'algebra è strettamente collegato a quello dell'aritmetica, prima di affrontare la risoluzione algebrica delle equazioni cubiche si farà una descrizione sintetica sullo stato del sistema numerico all'inizio del XVI secolo: lo zero veniva accettato come un "vero numero" e i calcoli con gli irrazionali venivano effettuati liberamente, ciononostante uno dei grandi problemi ancora aperto ai matematici di quel periodo era decidere si gli irrazionali fossero dei "veri" numeri (problema che è stato risolto dopo nel XVII secolo). Quanto ai numeri negativi la maggior parte dei matematici del cinquecento e del seicento non li accettavano come "veri" numeri o, se lo facevano, non li ammettevano ancora come radici delle equazioni.

Il primo che affrontò in modo soddisfacente la grande sfida dell'algebra fu **Scipione Dal Ferro** (1465 - 1526), che intorno al 1500 trovò la formula risolutiva delle equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ con p e q positivi; ma l'autore decise di non pubblicare il suo procedimento, perché in quei giorni le scoperte venivano spesso tenute segrete per poter sfidare i rivali su problemi simili con un certo vantaggio. Tuttavia Scipione confidò la sua formula a due o tre matematici di sua fiducia, tra cui suo genero Annibale Della Nave.

Nel 1535, in maniera indipendente e con l'obiettivo di rispondere ad una sfida alla quale fu sottoposto, Tartaglia scoprì la formula risolutiva per le equazioni cubiche a coefficienti positivi del tipo: $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px$. Nel 1539 comunicò la sua regola mediante oscuri versi a **Gerolamo Cardano** (1501 - 1576), dopo che questo matematico si era impegnato a mantenerla segreta (Vedasi Nota 13). Tre anni più tardi Cardano e il suo allievo **Ludovico Ferrari** (1522 - 1565), in occasione di una visita a Della Nave, comprovarono che il procedimento di Dal Ferro era identico a quello di Tartaglia. Considerando che la formula era nota a più studiosi indipendentemente dalle ricerche di Tartaglia, Cardano si ritenne sciolto dal segreto e decise di pubblicarla nella sua opera *Ars magna* (1545) dichiarando il nome degli autori. Tartaglia protestò per il mancato mantenimento della promessa e nel suo libro *Quesiti et inventioni diverse* (1546) espose le proprie ragioni. Questa opera fu l'inizio di una famosa disputa tra Tartaglia e Ferrari contenuta in sei "cartelli di matematica sfida".

L'*Ars magna* rappresenta un'opera di gran importanza perché contiene una serie di nuovi risultati che costituiscono le fondamenta della teoria generale delle equazioni algebriche. Oltre la risoluzione dell'equazione cubica viene esposto il metodo di soluzione dell'equazione quartica, scoperto da Ferrari, ma applicato soltanto ad alcuni casi particolari. In questo testo vengono considerate sistematicamente tutte le radici, positive e negative, di un'equazione algebrica, ma quelle positive vengono chiamate "reali", mentre quelle negative sono interpretate come soluzioni impossibili, meri simboli, chiamati fittizi. Cardano stabilisce le condizioni perché il numero delle radici di un'equazione (di secondo e terzo grado) sia uguale al suo grado, insieme con le regole per abbassare il grado di un'equazione di cui è nota una radice. L'autore esegue certe sostituzioni per trasformare le equazioni del tipo: $ax^3 + bx^2 = c$, $ax^3 = bx^2 + c$ e $ax^3 + c = bx^2$ in equazioni cubiche ridotte (prive del termine quadratico) e poter applicare così la formula risolutiva adatta (questo tipo di trasformazione fu effettuato per la prima volta nel *Trattato d'Algibra*, scritto due secoli prima). Inoltre enuncia e dimostra alcune relazioni fondamentali tra i coefficienti di un'equazione e le sue radici (Cfr. Bortollotti, 1950, pag. 656 - 657).

Il metodo di risoluzione di equazioni cubiche applicato da Cardano viene illustrato in questo articolo per l'equazione $x^3 + p\,x = q$ con p e q positivi (Cfr. Kline, pag. 308). L'autore considera due numeri t e u che soddisfino il seguente sistema:

$$\begin{cases} t - u = q & (1) \\ t \cdot u = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 & (2) \end{cases}$$

Afferma poi che la soluzione è $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ (3)

Considerando t e $-u$ come radici dell'equazione di secondo grado $y^2 - q\,y - p^3/27 = 0$, egli ottiene:

$$t = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2} \quad \text{e} \quad u = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2} \; .$$

Per calcolare t e u, Cardano prende in considerazione soltanto quei casi in cui il radicando è positivo, poi applica la formula (3) per ricavare:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

che è la stessa formula applicata da Tartaglia (Vedasi Nota 13).

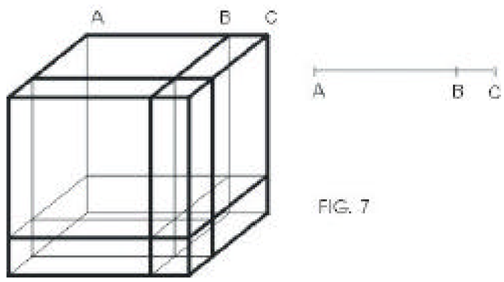


FIG. 7

Cardano realizza poi una dimostrazione geometrica per provare che il valore di x effettivamente viene dato dalla formula (3). Siano t e u i volumi di due cubi di lati $\sqrt[3]{t}$ e $\sqrt[3]{u}$. Allora il prodotto $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{t \cdot u} = \dfrac{p}{3}$ è l'area di un rettangolo e $t - u = q$ rappresenta la differenza dei due volumi. Per arrivare alla formula (3) l'autore enuncia e dimostra il seguente lemma: "Se da un segmento *AC* si toglie un segmento *BC*, allora il cubo su *AB* è uguale al cubo su *AC* meno il cubo su *BC* meno tre volte il parallelepipedo rettangolo i cui lati sono uguali rispettivamente a *AC*, *AB* e *BC* ".

Questo lemma rappresenta l'identità: $\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}\right)^3 = t-u-3\cdot\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}\right)\cdot\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u}$ che potrebbe ottenersi dalla formula del cubo di un binomio, Cardano invece la dimostra geometricamente applicando i teoremi di Euclide. Poi osserva che se si pone $x = \sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$, $t - u = q$ e $\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u} = p/3$, il lemma si può riscrivere in questo modo $x^3 = q - p\,x$ e allora la formula (3) soddisfa l'equazione iniziale (Kline, pag. 309; cfr. Freguglia pag. 1116 - 1117).

Cardano risolve anche le equazioni del tipo: $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ e $x^3 + px + q = 0$ a coefficienti positivi (seguendo la tradizione araba e medievale) dando una giustificazione geometrica per ciascuna delle regole trovate.

Gli algebristi del cinquecento avevano capito che per rendere applicabile la formula risolutiva delle equazioni cubiche occorreva estendere il campo numerico di razionalità con l'introduzione dei radicali cubici. Precisamente **Rafael Bombelli** (c.1526 - c.1572) dedicò la prima parte del Libro I del*l'Algebra* allo sviluppo del calcolo con i radicali e allo studio delle successive estensioni del campo numerico di razionalità, che oltre alle irrazionalità quadratiche, contenesse anche quelle cubiche.

C'era un'altra difficoltà connessa con la risoluzione delle equazioni cubiche di cui Cardano si accorse ma non la risolse: è il caso che Tartaglia chiamava *irriducibile*. Questo caso si presenta nelle equazioni del tipo $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$, la cui formula risolutiva prende la forma:

$$x = \pm\left[\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2}}\right].$$

precisamente quando $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2 < 0$; cioè compare con la radice quadrata di un numero negativo. E allora occorreva estendere il campo numerico con l'inclusione di nuovi numeri *non reali*, che vengono chiamati *immaginari*, adatti alla rappresentazione di quest'altro tipo di radici.

L'immaginario risultava una formulazione del tutto intrattabile per i matematici di quel tempo, Cardano lo considerava come un'espressione "sofistica e lontana dalla natura dei numeri", mettendo in dubbio l'utilità e la validità delle operazioni eseguite su di essi. Ma mentre Cardano trattava di evitare l'immaginario, Bombelli introdusse il concetto nella sua opera definendo tutte le regole di calcolo che vengono utilizzate attualmente.

E' importante sottolineare che per i matematici di quel tempo la necessità di introdurre i numeri immaginari non compare con la risoluzione delle equazioni di secondo grado, perché in questa occasione la presenza di radici quadrate di numeri negativi porta ad escludere la esistenza di soluzioni. Ben diverso appare il caso delle equazioni cubiche, perché nel procedimento di risoluzione può presentarsi un'espressione immaginaria pur quando le soluzioni sono, tutte e tre, numeri reali. Bombelli (pag. 225 - 226) propone come esempio la seguente equazione:

$x^3 = 15x + 4$ nella quale $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2 < -121 < 0$ e allora $t = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot i} = 2 + i$

ed $u = \sqrt[3]{2 - 11 \cdot i} = 2 - i$ da dove si ricava che $x = t + u = 4$.
Ciò significa che i numeri reali possono essere espressi in termini di radici cubiche di numeri complessi. Si può anche vedere che le altre due radici sono numeri reali negativi: $x_2 = \sqrt{3} - 2$ ed $x_3 = -\left(\sqrt{3} + 2\right)$ e pertanto non accettate da Bombelli.

Facendo un'analisi più approfondita si osserva che, per i matematici di quel tempo, l'ostacolo del numero immaginario non dipendeva dalla natura dell'equazione (o dal corrispondente problema), ma dal procedimento seguito nella sua risoluzione. Perché la presenza della radice quadrata di un numero negativo nelle equazioni di secondo grado implicava l'assenza di soluzione, mentre in quelle di terzo grado significava: dover lasciare il procedimento di risoluzione incompleto per mancanza di trasformazioni algebriche adatte che permettessero di portarlo a conclusione; e allora la regola applicata non offriva la possibilità di trovare quella radice positiva la cui esistenza, in molti casi, era comprovabile mediante semplici sostituzioni o utilizzando l'artificio di Cardano, che permetteva ricondurre l'equazione cubica ad un'equazione di secondo grado (Cfr. Forti, pag. XXI). Cioè l'impossibilità di eseguire un processo computazionale creava la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta: i numeri complessi.

3.3.1 IL SIMBOLISMO ALGEBRICO TRA IL CINQUECENTO E IL SEICENTO

E' importante osservare che tutti i cambiamenti di notazione introdotte fino al cinquecento erano fondamentalmente delle abbreviazioni di parole comuni. In questo periodo le richieste sempre crescenti della scienza stimolavano i matematici a utilizzare una notazione simbolica, ma il miglioramento era progressivo ed in alcuni casi intermittente. Molte variazioni furono effettuate accidentalmente ed è chiaro che gli studiosi di questa epoca non erano in grado di apprezzare quello che il simbolismo poteva significare per l'algebra. Spesso i nuovi simboli introdotti non venivano adottati in modo immediato dai matematici contemporanei (Kline, pag. 303). Cioè l'algebra simbolica non ha soppiantato di colpo quella sincopata.
Le prime abbreviazioni utilizzate nel XV secolo sono *p* (per più), *m* (per meno) e *ae* (per uguale). Alcuni autori (Kline, pag. 303; Loria, pag. 468) ritengono che i segni + e - vennero introdotti dai tedeschi per denotare i pesi in eccesso o in difetto delle cassette e furono poi adottati dai matematici Widman (XV sec.) e Stifel (1486? - 1567); Rapisardi (pag. 169), invece, attribuisce l'invenzione di questi segni a Leonardo da Vinci (1452 - 1519). Il segno = fu introdotto nel 1557 da Recorde (1510 - 1558) che scrisse il primo trattato inglese di algebra; Viète (1540 - 1603), che all'inizio utilizzava la parola *aequalis*, poi adottò il simbolo ~ per indicare l'uguaglianza; Descartes (1596 - 1650) usava α . Il segno $\times$ del prodotto è dovuto a Oughtred (1574 - 1660) e i segni $>$ e $<$ per denotare le disuguaglianze furono introdotte da Harriot (1560 - 1621). Le parentesi tonde compaiono nel 1544, le parentesi quadre e graffe, utilizzate da Viète risalgono al 1593 circa. La radice quadrata $\sqrt{.}$ e radice cubica $\sqrt[3]{c}$ appaiono nel XVII secolo con Descartes (Cfr. Kline, pag. 304).

I simboli per le incognite e le sue potenze ebbero un'evoluzione molto lenta. Gli algebristi del cinquecento utilizzavano le parole *radix*, *res*, *cosa* o *tanto* per denotare l'incognita e i simboli generalmente derivavano da abbreviazioni: *R* (da *res)* indicava x , *Z* (da census) x^2 e *C* (da *cubus*) x^3 . Gli esponenti vennero introdotti gradualmente. Chuquet (1445? - 1500?) nella sua opera *Triparty* scriveva 8^3 , 10^5 , 12^0 e 7^{1m} per indicare $8\,x^3$, $10\,x^5$, 12 e $7\,x^{-1}$. Bombelli usava un semicerchio sul quale veniva scritto l'esponente della potenza per esempio: ①, ② e ③ denotavano x , x^2 e x^3 (in questo articolo il cerchio sostituisce il semicerchio). Stevin (1548 - 1620) utilizzava anche gli esponenti frazionari: *1/2* per la radice quadrata ed *1/3* per la radice cubica e così via.

Nella costruzione del linguaggio algebrico il cambiamento più significativo fu introdotto con il simbolismo da **Viète**. Egli fu il primo ad usare deliberatamente e sistematicamente le lettere, non soltanto per rappresentare l'incognita e le sue potenze ma anche per i coefficienti generici. Di solito utilizzava le consonanti per i termini noti e le vocali per le incognite. Il linguaggio simbolico veniva utilizzato non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali. Questo autore chiamava la sua algebra simbolica *logistica speciosa* in contrasto con la *logistica numerosa*: considerava che l'algebra è un metodo per operare sulle specie o le forme delle cose, l'aritmetica, *la numerosa*, si occupa invece dei numeri. In questo modo l'algebra diventò lo studio dei tipi generali di forme e di equazioni, perché quello che si applica al caso generale è valido in tutti gli infiniti casi particolari (Kline, pag. 305).

3.4 L'ALGEBRA DI BOMBELLI

L'Algebra di Bombelli, scritta intorno al 1550 e pubblicata in parte nel 1572 e posteriormente nel 1579, rappresenta un'opera di gran importanza e si distingue da qualsiasi altro testo dell'epoca. E' composta da cinque libri, nei primi tre viene presentata in modo sistematico la teoria della risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi e negli ultimi due (non pubblicati fino al 1929) vengono effettuate le dimostrazioni geometriche dei risultati ottenuti nei primi tre libri e la risoluzione di problemi geometrici mediante l'applicazione dell'algebra. E' interessante osservare che la disposizione e l'ordine degli argomenti trattati, i procedimenti costruttivi e dimostrativi eseguiti e il livello di linguaggio utilizzato rappresentano un notevole passo verso la costruzione dell'algebra simbolica. Per questo motivo verrà soggetta ad un'analisi più approfondita.

Nel *Primo Libro* Bombelli realizza le successive estensioni del campo aritmetico di razionalità. Per ampliare questo campo utilizza come operazioni la somma (o sottrazione) di due elementi non riducibili per somma (o sottrazione) e l'estrazione di radici.

Una prima estensione viene realizzata con l'introduzione dei radicali semplici applicati ai numeri razionali. Bombelli spiega le regole di calcolo con i radicali e in particolare illustra l'estrazione di radici esatte e approssimate a partire da alcuni casi particolari. Ad esempio il procedimento per calcolare la radice quadrata approssimata di *13*, tradotto al linguaggio moderno dell'algebra, è il seguente (pag. 39):

1- Il quadrato più prossimo a 13 è 9 la cui radice è 3 e poi considera $\sqrt{13} = 3 + x$, e allora si avrà $13 = 9 + 6x + x^2$ da cui si ricava $4 = 6x + x^2$.

2- Trascurando x^2 si ottiene una prima approssimazione: $x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, quindi $\sqrt{13} = 3 + \frac{2}{3}$.

3- Volendosi ottenere un valore più approssimato si fa: $4 = (6 + x_1).x$ e sostituendo $\frac{2}{3}$ ad x_1 si avrà $4 = (6 + \frac{2}{3}).x$.

4- E allora si ricava $x_2 = \frac{4}{6 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ e una seconda approssimazione $\sqrt{13} = 3 + 3/5$.

5- Sostituendo $x_3 = \frac{3}{5}$ si può ottenere una terza approssimazione e così via.

Se Bombelli avesse indicato i calcoli in questo modo: $x_2 = \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}$, $x_3 = \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}}$ avrebbe scoperto le frazioni continue, introdotte posteriormente da Cataldi. E' importante sottolineare che questo tipo di frazioni fu utilizzato dagli indiani per risolvere equazioni lineari indeterminate a valori interi.

Il testo procede con le costruzioni geometriche della radice quadrata e cubica di un numero che rappresenta mediante segmenti di retta. Queste costruzioni si fondano su alcuni teoremi della geometria euclidea e sono un chiaro esempio di applicazione della nozione di segmento unitario quasi un secolo prima di Descartes (Cfr. Bortolotti, 1966, pag. XLVI). Seguono poi le regole per calcolare le radici quarta, quinta, settima e un metodo generale per trovare la radice di qualsiasi indice.

Bombelli determina le regole operative con i radicali: il prodotto e il quoziente di radicali semplici originano elementi che appartengono alla stessa estensione del campo, ma la somma o la differenza di due radicali o di un radicale e di un numero razionale generano (nella maggior parte dei casi) nuovi elementi che l'autore chiama *binomi* (somma) *o residui* (sottrazione). Spiega anche in quali circostanze particolari la somma (o sottrazione) di radicali quadratici e cubici si possano trasformare in radicali semplici e pertanto appartenenti al campo primitivo.

Nel*L'Algebra* seguono le regole per operare con binomi e residui. Viene definita un nuovo tipo di radice: "la radice legata" che si ottiene applicando un radicale quadratico a un binomio o a un residuo, il quale nella maggior parte dei casi genera nuovi elementi e così nuove estensioni del campo di razionalità. Inoltre vengono spiegate la procedura per calcolare la radice legata, quando questa estrazione sia possibile, e le regole di calcolo numerico con questo tipo di espressioni.
Bombelli procede a nuove estensioni del campo di razionalità con l'introduzioni dei radicali cubici: considera binomi e residui cubici con le sue regole operative e definisce la "radice legata cuba" come l'applicazione di un radicale cubico alla somma o differenza di un radicale quadratico e di un numero razionale o di due radicali quadratici. L'autore determina le regole di calcolo con queste nuovo tipo di

radici e, in particolare, dimostra che la trasformazione delle formule $\sqrt[3]{\sqrt{n}+m}$ $\sqrt[3]{\sqrt{m}-n}$ nel binomio (o residuo) $\sqrt{v} \pm u$ è equivalente alla risoluzione dell'equazione cubica $x^3 + 3x\sqrt{n-m^2} = 2m$ la cui radice è $2u = \sqrt[3]{\sqrt{n}+m} - \sqrt[3]{\sqrt{n}-m}$.

Per risolvere l'equazione cubica nel caso irriducibile, Bombelli realizza una nuova estensione del campo numerico con l'introduzione dei numeri immaginari, che chiama "sofistici". Egli utilizza come notazione: *+ di - (più di meno)* per indicare il simbolo *i* , adoperato posteriormente da Gauss; di conseguenza *- di - (meno di meno)* denota *-i* . Stabilisce le regole operative con questo nuovo tipo di numeri che sono esattamente quelle che si usano attualmente. Fa anche notare che nella risoluzione delle equazioni cubiche a coefficienti reali il numero di radici complesse è pari, e che ciascuna di esse va accompagnata dalla sua coniugata. Tra le regole delle operazioni con i numeri complessi formulate da Bombelli si trova il calcolo della radice cubica, utile nella risoluzione delle equazioni cubiche.

Riguardo alla notazione Bombelli utilizza un paio di "L" maiuscole: (⌊ ⌋ per esprimere ad esempio la radice quadrata o cubica di un polinomio, e che possono considerarsi i precursori delle parentesi quadre, che Viète introdurrà venti anni dopo.

E' interessante rilevare che Bombelli determina le regole per operare con i numeri irrazionali e i numeri complessi, ma ancora non vengono riconosciuti dai matematici come dei "veri numeri". Per esempio l'autore caratterizza la radice cubica di un numero in questo modo (pag. 13): "La Radice cuba è il lato cubico di un numero non cubo, il qual'è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice cuba". Cioè Bombelli considera che la radice cubica è un ente non appartenente al campo dei numeri razionali che può essere caratterizzata soltanto dalle operazioni numeriche mediante le quali essa viene combinata. In questo senso nell'*Algebra* si trova ancora una concezione operativa dei numeri irrazionali e complessi, la concezione strutturale di questi numeri (come "veri oggetti") arriverà nei secoli successivi (Cfr. Arzarello *et al.*, pag. 9).

Nel Secondo Libro Bombelli effettua lo studio dei polinomi algebrici e la risoluzione delle equazioni algebriche dei primi quattro gradi o riconducibili ad esse.

Nella prima parte definisce l'incognita che chiama *Tanto* (termine usato da Diofanto) e le sue potenze che denomina *Dignità*, utilizzando un simbolo speciale per la loro rappresentazione: un semicerchio sul quale viene scritto un numero che denota l'esponente della potenza (in questo articolo per semplificare la notazione il semicerchio verrà indicato con un cerchio):

x	*tanto*	①	
x^2	*potenza*	②	
x^3	*cubo*	③	
x^4	*potenza di potenza*	④	
x^5	*primo relato*	⑤	e così via.

Questo rappresenta un grande passo avanti nell'uso del linguaggio simbolico, perché la maggioranza dei cambiamenti di notazione effettuati fino a quel momento erano essenzialmente abbreviazione del linguaggio naturale. Questo simbolismo "Sincopato-Avanzato" condivide precisamente con l'algebra simbolica di Viète, la caratteristica di "auto-spiegazione"; nonostante Bombelli utilizzi sempre al linguaggio retorico come appoggio per completare la comunicazione (Cfr. Colin e Rojano, pag. 141 - 142).

Il testo procede con le regole di calcolo dei monomi algebrici: prodotto, quoziente, potenza e radice. Bombelli considera che la somma di monomi genera i polinomi, li ordina secondo le potenze crescenti o decrescenti della variabile e illustra tutte le operazioni con questi nuovi enti dando numerosi esempi. Seguono poi le operazioni con le espressioni algebriche che chiama "rotti".

Nella seconda parte di questo libro Bombelli sviluppa la teoria delle equazioni dei primi quattro gradi o come egli dice "dello agguagliare". Seguendo la tradizione araba e medioevale, l'autore considera separatamente tanti casi particolare di equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti siano sempre positivi. Analizza ogni tipo di equazioni procedendo in maniera sistematica, precisa e esauriente, formulando la "regola" pratica di risoluzione (enunciata in linguaggio retorico), la sua dimostrazione geometrica ed in alcuni casi la sua dimostrazione puramente analitica, realizzando un passo avanti verso l'aritmetizzazione dell'algebra (Cfr. Bortolotti, 1966, pag. LI).

Bombelli (pag. 182) definisce il concetto di equazione in questo modo: "L'Agguagliare non è altro che havere due quantità, o semplici o composte sotto diversi nomi, le quali due quantità ancor che siano di diversi nomi, nondimeno vagliono egualmente, però se si lieva ad una bisogna levare quel medesimo all'altra e se si aggionge ad una, il medesimo si aggionge all'altra ...". Cioè, l'autore considera che un'*equazione* è un'uguaglianza tra quantità, semplici o composte, di natura diversa (per esempio "tanti" e "numeri"), alla quale è possibile applicare la stessa operazione ad entrambi i membri; e giustifica questi passaggi mediante gli assiomi di Euclide. Ma subito dopo utilizza questa definizione per spiegare il trasporto dei termini di un'equazione da un membro all'altro mediante un esempio di primo grado. Quindi nella risoluzione di equazioni di primo grado si osserva la coesistenza dei due metodi formali (come nel *Trattato d'Algibra*) e questo mette in evidenzia la padronanza dell'autore nel campo concettuale-operativo.
Per risolvere le equazioni di secondo grado, Bombelli utilizza una regola generale per ciascuno dei tre tipi di equazioni: $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ e $ax^2 + c = bx$, conosciuta oggi con il nome di formula risolutiva ridotta. L'autore osserva che nell'equazione $ax^2 + c = bx$, quando il discriminate è positivo, entrambi le soluzioni sono positive, ma avverte che a volte la minore di esse non soddisfa il problema proposto senza dare nessuna spiegazione. In questa equazione si presenta anche la possibilità che il discriminante sia negativo e le radici numeri complessi coniugati. Bombelli dà come esempio: "*agguagliare 1* ② + *20* a *8* ①" (in notazione moderna $x^2 + 20 = 8x$), dalla quale ricava le radici *4 + di - 2* e *4 - di - 2* (cioè $4 + 2i$ e $4 - 2i$). Considera che qualsiasi di esse è il valore dell'incognita, ma chiama questo tipo di radici modo "sofistico" per la difficoltà di interpretare in maniera adeguata i risultati ottenuti, in relazione al problema che questa equazione risolve. Infatti egli sottolinea che il problema sarà di impossibile soluzione.

Dopo aver discusso la risoluzione delle equazioni biquadratiche e quelle di sesto grado con esponente multiplo di 3, spiegando che si riducono semplicemente alle equazioni di secondo grado, Bombelli inizia lo studio delle equazioni cubiche. Per la loro risoluzione utilizza la formula di Dal Ferro - Tartaglia, che per l'equazione del tipo $x^3 + px = q$ risulta:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

mentre per le equazioni $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$ prende la forma:

$$x = \pm\left[\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}}\right]$$ rispettivamente.

Queste formule vengono enunciate in linguaggio retorico e nella seconda di esse si può presentare il caso irriducibile che generalmente Bombelli risolve utilizzando i numeri complessi. Ma in alcuni esempi particolari propone, invece, l'artificio usato da Cardano per evitare questo tipo di numeri, che consiste in sommare (o sottrarre) un numero cubico a^3 ad entrambi i membri dell'equazione, tale che essi risultino divisibili per $x + a$ (o per $x - a$), in questo modo si potrà ridurre l'equazione cubica ad un'equazione di secondo grado. Bombelli osserva che questo numero $-a$ (od a) deve essere radice dell'equazione cubica [perché si deve verificare che $a = (a^3 + q)/p$] preannunziando così uno dei più importanti teoremi della teoria delle equazioni (Cfr. Bortolotti, 1966, pag. LIV). E' interessante osservare che questa è una delle numerose occasioni in cui l'autore propone strategie diverse per risolvere lo stesso problema, come volendo mostrare che il modo di affrontare un problema non è unico. Anche se in alcuni casi particolari egli utilizza l'artificio di Cardano, il suo contributo essenziale alla teoria delle equazioni fu dimostrare che la formula di Dal Ferro - Tartaglia dà il valore reale della radice, nonostante sia complicata dai numeri complessi.

Il testo procede con la risoluzione delle equazioni cubiche del tipo: $x^3 = px^2 + q$, $x^3 + px^2 = q$ e $x^3 + q = px^2$ che l'autore trasforma in equazioni cubiche ridotte, prive del termine quadratico. Per esempio per risolvere l'equazione $x^3 = px^2 + q$ considera tre tipi di trasformazioni:

1- $x = \sqrt{\frac{q}{y}}$ e l'equazione originale diventa $y^3 + p\,y = \sqrt{q}$

2- $x = \frac{q}{y}$ e l'equazione originale diventa $y^3 + p\,q\,y = q^2$

3- $x = y + \frac{p}{3}$ e l'equazione originale diventa $y^3 =. \left(\frac{p}{3}\right)^2 \cdot y + \left[2 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3 + q\right]$

La seconda viene chiamata *trasformazione a radici reciproche*, mentre la terza, che può anche prendere la forma $x = y - \frac{p}{3}$, *trasformazione a radici aumentate* che fu utilizzata per la prima volta nel *Trattato d'Algibra*, scritto due secoli prima.

Segue la risoluzione delle equazioni cubiche complete che vengono ricondotte a equazioni prive del termine quadratico, mediante la trasformazione a radici aumentate: $x = y - \frac{p}{3}$ o $x = y + \frac{p}{3}$ secondo se il termine cubico e quello quadratico si trovano nello stesso membro o in membri diversi, rispettivamente. Bombelli realizza una discussione completa analizzando tutti i casi possibili, tranne l'equazioni $x^3 + px^2 + q\,x + r = 0$ con coefficienti tutti positivi e non nulli, perché essa non ha radici positive. Per ogni caso e utilizzando numerosi esempi, l'autore sviluppa le formule di risoluzione ed esamina la natura e la molteplicità delle radici.

Nella risoluzione dell'equazione cubica completa Bombelli (pag. 257) introduce un esempio interessante: $x^3 + 28\,x = 9\,x^2 + 28$, perché applicando la trasformazione $x = y + 3$ l'equazione diventa $y^3 + y = -2$, la cui radice è <u>negativa</u> $y = -1$, che poi viene sostituita nella trasformazione ricavandosi $x = 2$. E' importante sottolineare che l'autore prende in considerazione soltanto le radici che sono positive, ma in questo caso accetta "transitoriamente" la radice negativa dell'equazione ausiliare, perché calcolando la radice dell'equazione originale si "trasforma" in positiva (Colin e Rojano, pag. 148 - 149). E questo rappresenta un altro esempio storico in cui il portare a termine un processo risolutivo crea la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta: i numeri negativi.

Bombelli studia le <u>equazioni di quarto grado</u> sviluppando in modo esauriente la soluzione data da Ferrari, risolvendo e discutendo separatamente i 42 casi possibili che si possono presentare ed infine esaminando la natura e la molteplicità delle radici. Secondo Bortolloti (1966, pag. LVII): "Questa e la ragione per cui taluni storici danno il Bombelli come autore della risoluzione generale delle equazioni di quarto grado".

Per risolvere le equazioni di quarto grado, Bombelli segue un procedimento costante che consiste nel ridurre l'equazione data al secondo grado quadrando entrambi i membri ed estraendone le radici. Nello sviluppo di questa procedura deve risolvere un'equazione ausiliare di terzo grado, ma in ogni caso l'autore determina la relazione esistente fra i coefficienti delle due equazioni, la primitiva e la ausiliaria. Utilizza spesso diverse trasformazioni per ridurre le equazioni cubiche e quartiche ai casi già risolti precedentemente. In questo articolo vengono esposti alcuni esempi che dà l'autore e che risultano di interesse per l'analisi svolta:

I- Per risolvere l'equazione $x^4 + 4\,x^3 = 1$ Bombelli (pag. 275 - 277) introduce un'incognita ausiliare che chiama *quantità* e la indica con l'intera parola. Questo è un esempio concreto dell'enorme ostacolo che può rappresentare per il calcolo la mancanza di un adeguato sistema di simboli. Il procedimento di risoluzione espresso nel linguaggio algebrico moderno è il seguente:

Considera $\sqrt{x^4 + 4 \cdot x^3} = (x^2 + 2\,x - y)$ e allora

$(x^2 + 2\,x - y)^2 = x^4 + 4\,x^3 + 4\,x^2 - 2\,x^2y - 4\,xy + y^2$ da cui sottratto il primo membro dell'equazione primitiva si ottiene:

$(x^2 + 2\,x - y)^2 - x^4 - 4\,x^3 = 4\,x^2 - 2\,x^2y - 4\,xy + y^2$ questa è l'espressione che si deve aggiungere ad ogni membro dell'equazione originale, quindi

$(x^2 + 2x - y)^2 = 4x^2 - 2yx^2 - 4yx + y^2 + 1$ (1) perché il secondo membro sia un quadrato (vedasi Nota 14) si deve verificare che $(1 + y^2).(4 - 2y) = 4y^2$ eseguendo i prodotti ed effettuando le opportune semplificazioni si ottiene $y^3 + y = 2$ la cui radice è $y = 1$. E allora sostituendo nella (1) si ricava

$(x^2 + 2x - 1)^2 = \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot x\right)^2$ estraendo la radice quadrata si ottiene

$x^2 + 2x - 1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot x$ che ha come radice $x = -1 - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{8} + 2\cdot\frac{1}{2}}$ (Cfr. Bortolotti, 1966, pag. 275).

II- L'equazione $x^4 + 20x = 21$ viene risolta da Bombelli (pag. 269 - 270) in questo modo (utilizzando la notazione moderna):
Considera $x^4 = 21 - 20x$, per quadrare i membri introduce l'incognita ausiliare che chiama in questo caso *numero* e allora
$(x^2 + y)^2 = x^4 + 2x^2y + y^2$ (2) sommando ad entrambi i membri $2x^2y + y^2$ si ricava
$(x^2 + y)^2 = 2yx^2 - 20x + y^2 + 21$ el secondo membro sarà un quadrato soltanto se
$2y.(y^2 + 21) = 100$ da cui si ricava $y = 2$. Sostituendo nella (2) si ottiene
$(x^2 + 2)^2 = 4x^2 - 20x + 25$ estraendo la radice quadrata Bombelli trova
$x^2 + 2 = 5 - 2x$ e quindi $x = 1$. L'autore sottolinea che se invece di $5 - 2x$ viene considerato $2x - 5$ l'equazione diventa $x^2 + 7 = 2x$ "... che non si potria agguagliare ..." perché ha radici complesse.

Nella definizione di radice quadrata di un numero Bombelli considera soltanto il valore positivo, mentre in questo caso sta contemplando la possibilità che la radice quadrata del secondo membro abbia come risultato due espressioni opposte, ma sceglie quella che conduce ad un'equazione con radice reale positiva. E questo rappresenta un altro esempio delle incertezze che manifesta l'autore per operare in determinate situazioni con nuovi oggetti più astratti.

Bombelli non accetta le radici negative (che chiama "false o fittizie") e complesse (o "sofistici"). Le equazioni in cui le uniche radici sono di questo tipo le considera di impossibile risoluzione. Anche se nella risoluzione di un'equazione ausiliare ammette "transitoriamente" una soluzione negativa perché gli permette di ottenere la radice positiva dell'equazione originale. Inoltre la mancanza di accettazione di questo tipo di radici e la carenza di un linguaggio simbolico adeguato possono essere le cause della difficoltà per relazionare il grado dell'equazione con il numero di radici (Cfr. Colin e Rojano, pag. 151).

Effettuata la soluzione algebrica per ogni tipo di equazione, l'autore fa seguire, se è possibile, la sua costruzione geometrica per giustificare la validità dell'uguaglianza in essa formulata. Tra le dimostrazioni realizzate si trova quella dell'esistenza di radici reali per l'equazione cubica nel caso irriducibile, che è molto importante perché rappresenta la prima di questo genere nella letteratura matematica. Per le equazioni dei primi tre gradi l'autore effettua due tipi di dimostrazioni: uno che associa a x un segmento, ad x^2 un quadrato e ad x^3 un cubo; l'altro invece che viene realizzato usando una rappresentazione "in linea", per le equazioni di primo grado e anche per quelle di secondo grado associando ad x^2 un segmento, o in "superficie piana" associando ad x^3 un parallelogrammo. In tutti questi casi si utilizzano sempre i teoremi della geometria euclidea per stabilire nel contesto geometrico le uguaglianze riportate nelle equazioni. Nel secondo tipo di dimostrazione viene anche coinvolta la teoria delle proporzioni. Per quanto riguarda le equazioni di quarto grado Bombelli realizza delle costruzioni piane che determinano l'uguaglianza tra due quadrati sotto condizioni di valori numerici ricavati per via algebrica. In questo caso la costruzione geometrica ha un ruolo più descrittivo-rappresentativo piuttosto che dimostrativo e quindi non rientra nello stesso schema epistemologico di quelle realizzate per le equazioni di grado inferiore al quarto (Freguglia, pag. 1118).

Nel _Terzo Libro_ Bombelli presenta una serie di 272 problemi che risolve applicando la teoria delle equazioni dei primi quattro gradi. Molti di questi problemi appartengono a Diofanto.

L'obiettivo dell'autore è arrivare ad una generalizzazione dei problemi che affronta; pertanto egli abitualmente risolve il problema aritmetico proposto in forma analitica e poi formula una regola generale di soluzione prescindendo dai valori numerici; quindi questa regola è valida per tutti quei casi simili che differiscono dal problema originale soltanto per i coefficienti. Posteriormente applica la regola ottenuta alla risoluzione di un'equazione analoga con la condizione che i suoi coefficienti siano funzioni di una quantità indeterminata e allora l'incognita verrà espressa mediante una formula dipendente da questa quantità. Così per esempio il problema XLIX bis (pag. 341 - 342) chiede: "Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 104". Bombelli considera le due parti x e $12 - x$, ottiene l'equazione $x^2 + 20 = 12x$ e trova come soluzioni $x = 2$ e $x = 10$. Poi enuncia la regola generale: "Se si haverà a dividere una quantità in due tal parti che li loro quadrati gionti insieme faccino un dato numero, quadrisi detta quantità e del produtto se ne cavi il dato numero e del restante se ne pigli la metà e si cavi del quadrato della metà di detta quantità e del restante se ne pigli il lato e si aggionghi alla metà di detta quantità e la somma sarà una delle parti". Nel linguaggio algebrico moderno la regola viene tradotta così:

Da a si devono fare due parti x e $a - x$ tali che $x^2 + (a - x)^2 = b$ allora

$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - b}{2}} - \frac{a}{2}$ che coincide con la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado di termine lineare $-a$ e di termine noto $\frac{a^2 - b}{2}$. Posteriormente applica questa regola alla risoluzione del seguente problema: "Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino $144 - 2x$". Quindi l'equazione corrispondente è

$y^2 + (12 - y)^2 = 144 - 2x$ e a partire dalla regola precedente si ricava

$y_1 = 6 + \sqrt{36 - x}$ e $y_2 = 6 - \sqrt{36 - x}$.

In questo modo Bombelli raggruppa i problemi simili in famiglie o classi di questioni che si risolvono con la stessa formula, espressa mediante coefficienti generici. E questo dimostra precisamente l'importanza che assume il linguaggio simbolico nei processi di generalizzazione. Quindi si può considerare che l'opera di Bombelli si trova in uno stadio di sviluppo avanzato, sia negli aspetti simbolici e operativi, sia nel grado di generalizzazione degli oggetti algebrici che utilizza. Secondo Bortolotti (1966, pag. LVIII): "Ed ecco un gran passo, che nessun algebrista aveva ancor fatto

... e che di tanto accosta il Bombelli al Viète, che fu considerato come creatore dell'algebra letterale moderna".

Gli ultimi due libri del*L'Algebra* contengono la parte geometrica dell'opera. Il *Libro Quarto* è composto da tre capitoli, il primo viene chiamato da Bombelli "Algebra linearia" e comprende le costruzioni geometriche elementari, le operazioni aritmetiche con i segmenti e la risoluzione geometrica delle equazioni. In questo tipo di risoluzione Bombelli rappresenta con un segmento scelto arbitrariamente la grandezza incognita (o una potenza dell'incognita) ed esegue poi su di esso e sui segmenti rappresentanti grandezze note, le operazioni indicate nell'equazione. A partire dalle relazioni fra gli elementi delle figure risultanti ricava le regole di risoluzione.

Nella seconda parte di questo libro l'autore effettua la trattazione geometrica delle successive estensioni del campo numerico euclideo, che si ottiene mediante l'introduzione delle irrazionalità cubiche. Nel terzo capitolo Bombelli riprende i problemi del Terzo Libro e li risolve geometricamente, utilizzando coefficienti letterali che conferiscono alle questioni massima generalità. Ma il suo procedimento è l'inverso di quello seguito nell'algebra geometrica degli antichi; egli infatti non risolve direttamente il problema geometrico per ottenere la soluzione analitica dalla interpretazione aritmetica della costruzione realizzata, ma si vale della risoluzione algebrica sviluppata nel Terzo Libro per ricavare la costruzione geometrica (Bortolotti, 1966, pag. XLIII).

Nel *Libro Quinto* Bombelli risolve problemi geometrici mediante l'applicazione dell'algebra. E' interessante osservare che l'autore volendo iscrivere l'ennagono regolare nel cerchio, trova la soluzione al problema della trisezione dell'angolo. Dimostra che tale problema porta alla risoluzione di un'equazione cubica nel caso irriducibile.

Dall'esauriente analisi effettuata si può dedurre che Bombelli:

* Utilizza un linguaggio "sincopato avanzato", risultante da una combinazione tra linguaggio naturale e simbolismo "algebrico", per formulare le regole delle operazioni numeriche e con i polinomi ed i procedimenti di risoluzione delle equazioni. Ma gli sviluppi realizzati vengono sempre accompagnati dalla sua versione retorica e la validità delle uguaglianze espresse nei diversi tipi di equazioni viene dimostrata mediante le costruzioni geometriche. Questo dimostra che il linguaggio sincopato avanzato utilizzato da Bombelli non è autosufficiente, perché bisogna ricorrere ad altri linguaggi, naturale e geometrico che sono semanticamente più ricchi, per completare la comunicazione.

* Osserva che per sviluppare certi metodi generali di risoluzioni di equazioni bisogna introdurre nuovi oggetti di natura più astratta:

- le irrazionalità cubiche e i numeri complessi. Ma dall'altra parte i numeri negativi e i complessi non vengono accettati come radici delle equazioni e generalmente i numeri negativi non vengono utilizzati come coefficienti (per questo vengono considerati separatamente tanti casi diversi di equazioni dello stesso grado). Cioè i nuovi enti introdotti e i negativi vengono usati soltanto a livello operativo, ma non vengono accettati come dei "veri" numeri. Però Bombelli non è coerente nel suo modo di operare con nuovi oggetti astratti, ad esempio: accetta in modo "transitorio" la radice negativa di un'equazione ausiliare perché gli permette di ottenere la radice positiva dell'equazione originale; nel calcolo della radice quadrata di una espressione ammette la possibilità di ottenere due radici opposte.

- un' incognita ausiliare, che viene chiamata "quantità" o "numero", per eseguire il procedimento che porta alla soluzione delle equazioni quartiche. E allora ammette come soluzioni intermedie espressioni che contengono questa quantità indeterminata.

* Raggruppa i problemi simili in famiglie o classi di problemi che possono essere risolti applicando la stessa formula, espressa mediante coefficienti generici. E questo dimostra il grado di generalizzazione al quale è arrivato il linguaggio algebrico sviluppato dall'autore.

* Ricava la costruzione geometrica di certe equazioni (di quarto grado) e problemi (Libro IV) a partire dallo loro risoluzione algebrica. Questo indica che l'autore utilizza uno schema di ragionamento "misto" combinando strumenti algebrici ed euclidei.

4. CONCLUSIONI

L'analisi dello sviluppo storico dell'algebra mostra che la costruzione del linguaggio simbolico è stata troppo lenta e difficoltosa, si trovano periodi di miglioramento progressivo ed altri, invece, di regressione e di paralisi. Diofanto introdusse per la prima volta delle abbreviazioni per rappresentare l'incognita e le sue potenze, ma i calcoli venivano effettuati in linguaggio naturale. A partire dal VII secolo gli indiani crearono un linguaggio sincopato abbastanza avanzato, che si evidenziò superiore a quello utilizzato da Diofanto. Gli arabi, invece, non usavano né abbreviazioni né simboli, soltanto alcuni nomi per chiamare l'incognita e le sue potenze e questo rappresentò un passo indietro rispetto all'algebra indiana e perfino a quella di Diofanto. In Europa Leonardo Pisano continuò ad utilizzare fondamentalmente il linguaggio naturale, anche se nelle sue opere si manifestava già una certa tendenza verso il simbolismo perché utilizzava certe parole speciali per denotare l'incognita e le sue potenze. Più tardi da queste parole derivarono delle abbreviazioni che furono usate fino al cinquecento. Con Bombelli si ottenne un salto di qualità perché introdusse dei simboli speciali per l'incognita e le sue potenze, questo simbolismo sincopato avanzato condivide con l'algebra di Viète la caratteristica di "auto-spiegazione", nonostante Bombelli utilizzasse sempre il linguaggio naturale per completare la comunicazione. Viète fu il primo ad usare sistematicamente le lettere per tutte le quantità e i segni per le operazioni, il linguaggio simbolico veniva utilizzato nei procedimenti risolutivi e anche per provare regole generali. Tra il cinquecento e il seicento si introdussero quasi tutti i simboli conosciuti attualmente, ma fu un processo lento, l'algebra simbolica non ha soppiantato di colpo quella sincopata.

Lo studio dei vari procedimenti risolutivi delle equazioni mostra la necessità di ricorrere sempre al linguaggio naturale, ma anche ad altri tipi di linguaggi per esempio: l'aritmetico, utilizzato da Diofanto e dagli indiani. E' interessante sottolineare che l'aritmetica costituisce il fondamento del metodo della falsa posizione che fu applicato dai matematici cinesi, egiziani, indiani, arabi fino a quelli medioevali. Il linguaggio geometrico veniva usato nei metodi risolutivi dai greci classici e da al-Khayyam, mentre alcune nozioni protomatematiche di analisi erano adoperate da al-Tusi (Vedasi Nota 15). In tutti questi casi il livello di sviluppo del linguaggio algebrico era molto scarso e allora si doveva ricorre ad altri linguaggi (naturale, aritmetico, geometrico o analitico) per ottenere la soluzione del problema a partire dell'interpretazione dei procedimenti eseguiti. Anche Bombelli utilizzava la costruzione geometrica per giustificare la validità delle uguaglianze formulate nelle equazioni o per risolvere problemi algebrici, ma la sua procedura era inversa di quella seguita nei casi citati precedentemente, perché egli si valeva della soluzione algebrica per ricavare la costruzione geometrica, cioè il suo schema di ragionamento combinava strumenti algebrici ed euclidei. In questa situazione il rivolgersi ad altri linguaggi, naturale o geometrico, serviva soltanto a completare la comunicazione, non a risolvere il problema.

La semantica del linguaggio algebrico è meno ricca di quelle corrispondenti al linguaggio naturale, aritmetico o geometrico, e allora nella fase sincopata è necessario appoggiarsi in esse per formulare le regole, per dare un'interpretazione adeguata al problema da risolvere, per ottenere la sua soluzione o anche per giustificare i passaggi effettuati algebricamente. Sono precisamente le ambiguità semantiche e la ricchezza di significati quelle che permettono a poco a poco di mettere a punto il linguaggio simbolico.

Anche se da un certo punto di vista l'uso del linguaggio aritmetico favorisce lo sviluppo del linguaggio algebrico, da un altro può rappresentare una forte limitazione. Si suppone, per esempio, che gli estesi e complicati calcoli con le frazioni furono uno dei motivi per cui gli egiziani non portarono la loro algebra ad uno studio più avanzato. La mancanza di accettazione dei numeri negativi da parte di Diofanto, degli arabi e dei matematici europei fino al cinquecento fu la causa per cui non venivano ammesse le radici negative, ovvero venivano considerati tanti casi particolari di equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti fossero sempre positivi. E questo rappresenta un passo indietro rispetto al'algebra indiana nella quale veniva considerata la forma generale dell'equazione di secondo grado ed in alcuni casi (quando era possibile dare un'interpretazione) venivano accettate le soluzioni negative. Nello stesso modo la non accettazione dei complessi come numeri provocava in Bombelli la non considerazione di essi come radici di equazioni. Alcuni autori (Bortolotti, 1966, pag. 182) ritengono che sia possibile che le stesse dimostrazioni o costruzioni geometriche delle soluzioni algebriche delle equazioni, abbiano distolto lo sguardo dei matematici (anche di Bombelli) da questo tipo di radici. Ma nel Libro IV Bombelli introduce i segmenti negativi e le aree negative o nulle per poter operare con essi. Riteniamo che la vera difficoltà per accettare le radici negative si trovi negli stessi numeri negativi come ostacolo epistemologico a livello aritmetico (Cfr. Glaeser).

Leonardo Pisano aveva già fatto qualche osservazione e poi i matematici del cinquecento (tranne Pacioli) si convinsero che l'impossibilità di risolvere certe equazioni del terzo grado dipendeva dall'incompletezza del campo numerico che non conteneva gli elementi idonei per esprimere la soluzione. Così Bombelli effettuò le successive estensioni del campo euclideo di razionalità con l'introduzione prima dei radicali cubici e dopo dei numeri complessi. E' importante sottolineare che la necessità di incorporare i numeri immaginari apparve con la risoluzioni delle equazioni cubiche non di quelle quadratiche, perché nel secondo caso la presenza della radice quadrata di un numero negativo implicava l'assenza di soluzioni. Mentre nelle equazioni di terzo grado si poteva trovare un'espressione immaginaria nel procedimento di risoluzione, anche se tutti e tre le radici fossero reali. Allora l'impossibilità di applicare la formula risolutiva di Dal Ferro-Tartaglia, cioè di eseguire un processo computazionale, creò la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta. Bombelli aveva definito le regole di calcolo con le irrazionalità cubiche e con i numeri complessi ma essi non venivano ancora accettati dai matematici come dei "veri" numeri, cioè "...anche prima che i processi generatori di nuovi numeri fossero considerati come oggetti, i matematici li usavano e li combinavano in operazioni più complesse" (Arzarello *et al.*, pag. 9).

Nello sviluppo storico del linguaggio algebrico spesso si trova che i matematici manifestano delle ambiguità per operare in determinate situazioni con nuovi oggetti astratti, per esempio: da una parte si trova la mancanza di accettazione dei numeri negativi come coefficienti o radici delle equazioni, d'altra, se essi vengono ritenuti necessari per portare a termine il processo di risoluzione di un problema particolare, vengono utilizzati in queste funzioni. Numerosi esempi di questo tipo si trovano nel *Trattato d'Algibra* e nel*L'Algebra* di Bombelli. Ma rimane aperto il problema se queste ambiguità siano o meno dovute all'ostacolo epistemologico che rappresentano i numeri negativi.

Un aspetto molto importante della costruzione del linguaggio algebrico e la possibilità di ipotizzare la generalizzazione di problemi. A partire dalle tre opere analizzate si può osservare che: nel *Liber Quadratorum* di Leonardo Pisano si manifesta già la tendenza di risolvere problemi cercando di inserirli in famiglie o classi di problemi; inoltre l'autore dimostra ogni proposizione applicando le proprietà dei numeri interi e, se è possibile, alcune proposizioni provate precedentemente. Nel *Trattato d'Algibra* l'autore classifica i problemi secondo le regole di risoluzione, sottolineando anche quali regole corrispondenti ad equazioni di terzo e quarto grado si possano ricondurre a quelle di secondo grado. Nel*L'Algebra* di Bombelli si nota il salto di qualità con l'uso di un linguaggio simbolico adeguato. L'obiettivo dell'autore è arrivare ad una generalizzazione dei problemi che affronta: egli risolve il problema aritmetico proposto in forma analitica, poi formula una regola generale di soluzione prescindendo dai valori numerici e finalmente applica questa regola alla risoluzione di un'equazione analoga, i cui coefficienti siano funzione di una quantità indeterminata. E questo dimostra precisamente l'importanza che assume il linguaggio simbolico nei processi di generalizzazione.

Ma dall'analisi precedente risulta che anche Fibonacci e l'autore del *Trattato d'Algibra*, utilizzando soltanto il linguaggio retorico, arrivano a formulare certe generalizzazioni, naturalmente di livello inferiore a quelle di Bombelli. E allora nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo in una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica (Cfr. Colin e Rojano, 158).

A questo punto sarebbe interessante considerare una fase sincopata più ampia che comprenda non soltanto l'introduzione di abbreviazioni per le incognite, le sue potenze e certe relazioni di uso frequente, ma anche il primo livello di generalizzazione di un metodo. Il secondo livello potrebbe appartenere sia alla fase sincopata, sia a quella simbolica dipendendo dal grado di sviluppo del linguaggio simbolico. Quindi anche se Leonardo e l'autore anonimo utilizzano il linguaggio naturale, l'inserire i problemi in classi di problemi (cioè l'essere algoritmisti) ci dà la possibilità di affermare che essi usino l'algebra sincopata. Secondo questa visione il pensiero algebrico comincia prima del simbolismo (Cfr. Arzarello *et al.*, pag. 10).

La Tabella 1 offre uno schema riassuntivo sullo sviluppo storico del linguaggio algebrico fino al cinquecento. Nella Tabella 2 si propone una classificazione delle fasi dell'evoluzione del linguaggio algebrico, più esaustiva di quella di Nesselman, considerando non soltanto l'uso di un simbolismo adeguato, ma anche il grado di generalità del metodo applicato ed il livello di argomentazione delle regole utilizzate.

Questo articolo si pone come contributo di futuri studi sugli ostacoli epistemologici riguardanti il linguaggio algebrico. E allora crediamo opportuno fare alcuni suggerimenti dal punto di vista storico:

* lo sviluppo del linguaggio simbolico è molto lento: si passa da certi nomi per denotare l'incognita e certe relazioni, alle abbreviazioni di queste parole, ai codici intermedi fra linguaggio retorico e sincopato e infine ai simboli. Cioè queste abbreviazione e questi codici si depurano gradualmente fino all'elaborazione di un simbolismo algebrico corretto sintatticamente e più efficiente operativamente, in questo processo si osserva l'abbandono progressivo della lingua naturale come mediatore di espressione delle nozioni algebriche.

* nella fase sincopata è necessario appoggiarsi ad altri linguaggi: naturale, aritmetico o geometrico, semanticamente più ricchi, per formulare le regole, per interpretare e risolvere i problemi. Con la formazione di un linguaggio algebrico adeguato questi altri linguaggi si abbandonano gradualmente.

* nella fase di transizione tra pensiero aritmetico e pensiero algebrico, certi ostacoli a livello aritmetico possono ritardare lo sviluppo del linguaggio algebrico e l'introduzione di nuove strategie e dei nuovi contenuti algebrici possono eclissare le conoscenze aritmetiche precedenti (Cfr. Malisani, 1993).

* la necessità di introdurre nuovi oggetti di natura più astratta appare sempre con l'impossibilità di portare a termine un procedimento risolutivo di un problema particolare, cioè un processo computazionale.

* nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo in una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica.

Dal punto di vista della Ricerca in Didattica si dovrebbero individuare gli ostacoli epistemologici nell'apprendimento dell'algebra ed effettuare la loro verifica sperimentale (mediante l'applicazione del Modello descritto in Spagnolo, 1996, pag. 109 - 111) considerando non soltanto il percorso storico-epistemologico, ma anche altri percorsi significati per la formalizzazione del nuovo linguaggio. Sarebbe anche interessante poter indagare la relazione tra il linguaggio algebrico in costruzione e gli altri linguaggi, naturale, aritmetico e geometrico nella comunicazione delle Matematiche; in che modo questi linguaggi possono contribuire e/o interferire nello sviluppo del linguaggio algebrico, negli aspetti sintassi - semantica e relazionale - procedurale.

5. NOTE

1- Un'accurata analisi sulla scomposizione di frazioni in frazioni unitarie è effettuata da Loria (pag. 41-47).

2- Ippocrate di Chio (V secolo a.C.) mostrò che il problema della duplicazione del cubo può essere ridotto a quello di trovare due medi proporzionali fra il lato dato e il lato di lunghezza doppia. Traducendo il problema in equazioni si tratta di trovare x e y tali che:
$a : x = x : y = y : 2a$.
Ma queste equazioni dicono che $x^2 = ay \quad y^2 = 2ax \quad xy = 2a^2$.
Mediante l'applicazione della geometria analitica si può vedere che x e y sono le coordinate del punto d'intersezione di due parabole o di una parabola e di un'iperbole. Menecmo (IV secolo a.C.) lavorò su questo problema e scoprì entrambi i metodi per risolverlo mediante geometria pura. Archita (428-347 a.C.) trovò geometricamente questi due medi proporzionali mediante l'intersezione di tre superfici: quella generata da un cerchio che ruoti intorno a una sua tangente, un cono e un cilindro.
Dinostrato (IV secolo a.C.) mostrò come usare la quadratrice di Ippia per quadrare il cerchio, questa curva fu introdotta da Ippia (V secolo a.C.) per trisecare l'angolo. Nicomede (c. 200 a.C.) è noto per la sua definizione di concoide che usava per trisecare l'angolo e per duplicare il cubo. Diocle (fine del II secolo a. C.) risolse il problema della duplicazione del cubo introducendo la curva chiamata cissoide.

3- Il teorema di Pitagora era conosciuto dai cinesi per il classico triangolo aventi lati 3, 4 e 5 e veniva applicato per tracciare angoli retti. E' possibile che questo teorema sia stato ricavato dalla figura composta da quadrati e rettangoli, ma è molto discutibile che sia stato "dimostrato" come proposizione. Secondo Loria (pag. 267) per poter asserire che i cinesi sentirono prima dei greci la necessità di "dimostrare" una verità matematica e che essi avevano precorso Pitagora nella più popolare delle sue scoperte, bisognerebbe essere sicuri che quella figura non sia stata aggiunta dai più recenti manipolatori del testo in esame.

4- Un'analisi esauriente sull'evoluzione del termine *al-jabr* è effettuata da Kline (pag. 225).

5- Le descrizioni sui lavori effettuati e sui metodi utilizzati da al-Khayyam ed al-Tusi si basano essenzialmente sul articolo di Ballieu (1993).

6- Nella descrizione della *regola della semplice falsa posizione* si utilizza fondamentalmente l'articolo di Guillemot (1991-92).

7- Queste due proposizioni tradotte al linguaggio simbolico dell'algebra moderna sono le seguenti:
Proposizione XIV: Trovare un numero x tale che le quantità $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ siano numeri quadrati.
Proposizione XX: Trovare tre numeri: x, y e z tale che le quantità $x+y+z+x^2$, $x+y+z+x^2+y^2$ e $x+y+z+x^2+y^2+z^2$ siano numeri quadrati.

8- Secondo Ver Eecke (pag. 44) i numeri *31*, *41* e *49* vengono utilizzati da Diofanto nella sua *Arithmetica* per risolvere un problema di origine babilonese che consiste in trovare tre numeri quadrati in progressione aritmetica, tali che la loro semisomma sia maggiore di ciascuno di essi.

9- Il teorema di Fermat è una semplice conseguenza della Proposizione XI. La relazione $z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$ per x, y e z lati interi di un triangolo rettangolo è in corrispondenza con le equazioni $x^2 + m = a^2$ e $x^2 - m = b^2$. Allora $2xy$ deve essere un numero congruo e pertanto non è un quadrato e nemmeno lo sarà l'area del triangolo uguale a $xy/2$.

10-Per il metodo di moltiplicazione "a crocetta" fra interi consultare Franci e Pancanti (pag. XXVI).

11-Per esempio la regola 6 viene formulata così (pag. 56): *"Quando gli censi sono iguali alle chose ed al numero prima si parta ne' censi poi si dimezi le chose, l'una metà si multripici per se medesimo e quello che fa s'agiungha al numero e lla radice della somma più l'altra metà delle chose chotanto varà la chosa ..."*. La sua traduzione al linguaggio simbolico dell'algebra attuale è la seguente:

$$ax^2 = bx + c \quad \rightarrow \quad x^2 = (b/a)x + c/a \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$$

12- L'autore del *Trattato d'Algibra* utilizza il simbolo $1\frac{1}{2}$ per indicare $1 + \frac{1}{2}$.

13-Questi sono i celebri versi mediante i quali Tartaglia comunicò la formula risolutiva dell'equazione ridotta di terzo grado a Cardano. Comunque per maggior chiarezza si riporta a destra del testo la traduzione al linguaggio simbolico moderno:

"Quando che'l cubo con le cose appresso	$x^3 + px$
Sè agguaglia a qualche numero discreto	$x^3 + px = q$
Trova dui altri differenti in esso	$A - B = q$
Dapoi terrai questo per consueto:	
Che 'l lor produtto sempre sia uguale	$A . B = p^3/27$
Al terzo cubo delle cose note	

A e B si possono essere considerate le radici dell'equazione di secondo grado: $z^2 - qz - p^3/27 = 0$, cioè i numeri :

$$y_1 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

La regola suggerisce poi che l'incognita è determinata dalla differenza fra le radici cubiche di A e B così :

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale"

$$\text{cioè} \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Questa formula è valida soltanto se si considera i valori assoluti di A e B e sempre che si sottragga il minor numero dal maggiore, come faceva Tartaglia (Cfr.Forti, pag. XIX).

14- Perché l'espressione $4x^2 - 2x^2y - 4xy + y^2 + 1 = (4 - 2y)x^2 - 4yx + y^2 + 1$ sia un quadrato si deve verificare: $-4y = 2 \cdot \sqrt{4 - 2y} \cdot \sqrt{y^2 + 1}$, elevando entrambi i membri al quadrato si ricava $(y^2 + 1).(4 - 2y) = 4y^2$.

15-Per *nozioni protomatematiche* si intendono quelle conoscenze che i matematici utilizzano senza chiamarle o definirle in termini matematici (implicite) (Cfr. Spagnolo, 1996, pag. 17).

6. BIBLIOGRAFIA

ANONIMO, 1988. *Il Trattato d'Algibra* (manoscritto del XIV secolo). A cura e con l'introduzione di R. Franci e M. Pancanti. Siena, Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale, 18.

ARTIGUE, M., 1990. Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), pag. 241 - 286.

ARZARELLO,F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.

BALLIEU, M, 1993. Les rapports entre l'algèbre et la géométrie dans l'oeuvre de 'Umar al-Khayyam et Sharaf ad-Din at-Tusi (cinq siècles avant Descartes et Newton). *Mathématique & Pédagogie*, 91, pag. 7 - 21.

BERZOLARI, E., 1950. *Enciclopedia della Matematica Elementare,* Vol. III, Parte 2. (Hoepli: Milano).

BOMBELLI, R., 1966. *L'Algebra.* Con l'introduzione di U. Forti e la prefazione e l'analisi di E. Bortolotti. (Feltrinelli: Milano).

BORTOLOTTI, E., 1950. Storia della Matematica Elementare. In L. Berzolari (ed.). Vol. III, Parte 2.

BORTOLOTTI, E., 1966. Prefazione e Analisi di "L'Algebra". In Bombelli, pag. XXV - LIX.

BOURBAKI, N.,1976. *Elementos de historia de las matemáticas.* (Alianza: Madrid). (Ed. orig.: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Hermann: París, 1969).

COLEBROOKE, H. T., 1817. *Algebra with arithmetic and mensuration from the sanscrit of Brahmagupta and Bhãskara.* (John Murray: London). Op. cit. da M. Guillemot, 1990-91.

COLIN, J. e ROJANO, T., 1991. Bombelli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. *L'educazione matematica*, XII (2) pag. 125 - 161.

EUCLIDE, 1930. *Gli Elementi* , Libri V - IX . Ed. da F. Enriques e collaboratori. (Zanichelli: Bologna).

EUCLIDE, 1932. *Gli Elementi* , Libro X . Ed. da F. Enriques e collaboratori. (Zanichelli: Bologna).

FERRERI, M. e SPAGNOLO, F., 1994. L'apprendimento tra emozione e ostacolo. L'errore nella comunicazione delle matematiche, intersezione tra problemi dell'apprendimento/insegnamento e la neurofisiologia. *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M.*, 4, Numero Monografico, Palermo.

FORTI, U., 1966. Introduzione di "L'Algebra". In Bombelli, pag. XI - XXIV.

FRANCI, R. e PANCANTI, M., 1988. Introduzione di "Il Trattato d'Algibra". In Anonimo, pag. I - XXIX.

FREGUGLIA, P., 1992. Sulle origini della teoria delle equazioni algebriche. *L'insegnamento della matematica e delle scienza integrate*, 14 (11/12), pag. 1110 - 1120.

GLAESER, G., 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2-3.

GUILLEMOT, M., 1990-91. *Entre arithmetique et algebre: les methodes de fausse position*. Fascicule 5: Didactique des Mathématiques. (Institut de Recherche Mathématique: Rennes).

KLINE, M., 1991. *Storia del pensiero matematico*. Vol. I. (Einaudi: Torino).

LEONARD DE PISA, 1952. *Le livre des nombres carrés*. A cura e con l'introduzione di P. Ver Eecke. (Desclée de Brouwer: Bruges).

LORIA, G., 1929. *Storia delle Matematiche*. Vol. I. (Sten: Torino).

MALISANI, E., 1992. Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione. *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M.*, 3, Palermo.

MALISANI, E., 1993. *Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici*. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Palermo.

MARINO, T. e SPAGNOLO, F., 1996. Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B (2), pag.130 - 152.

PELLOS, F., 1492. *Compendion de l'abaco*. Testo curato secondo l'edizione di 1492 da Robet Lafont. Op. cit. da M. Guillemot, 1990-91.

RAPISARDI, F., 1865. Uno sguardo agli algebristi italiani. *Giornale del Gabinetto Letterario dell'Accademia Gioenia*, 4 (3), pag. 165 - 180. (Compilazione su *Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze Naturali*, 24 (338), pag. 41 - 56, 1991).

SPAGNOLO, F., 1995. Lo sviluppo del pensiero algebrico nel periodo Federiciano: Una disputa tra Abacisti e Algoritmisti. *Annali del Centro Scolastico "Altavilla"*, Palermo.

SPAGNOLO, F., 1996. *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede*. Tesi di Dottorato, Università di Bordeaux I. Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., supplemento n. 5. Pubblicata dall'Atelier National de Reproduction des Théses Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).

VER EECKE, P., 1952. Introduzione di: "Le livre des nombres carrés". In Leonard de Pisa, pag. IX - XXV.

ZAPELLONI, M.T., 1930. Commento sulle proposizioni 28-29 del Libro VI degli Elementi di Euclide. In Euclide, pag. 150 - 157.

TABELLA 1: SVILUPPO STORICO DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIONE
BABILONESI (≈2000 a.C.)	Sistema posizionale di basi 60 e 10. Numeri interi, alcune frazioni.	Principale supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Quadratiche Biquadratiche	Completamen-to del quadrato.
EGIZIANI (≈1000 a.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri interi, alcune frazioni.	Principale supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari. Quadratiche della forma $ax^2 = b$	Regola della falsa posizione
EUCLIDE (≈ 300 a.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri razionali e irra- zionali quadratici positivi.	Supporto di espressione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari Quadratiche	Costruzione geometrica
DIOFANTO (≈250 d.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri razionali e irra-zionali quadratici positivi.	Supporto procedurale	-----	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari, quadra-tiche e cubiche determinate e indeterminate.	Aritmetici
CINESI (Sec.III a.C.- Sec. III d.C.)	Numeri razionali positivi. Alcuni irrazionali.	Supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi.	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Primo e secondo grado.	Regola della doppia falsa posizione.
INDIANI (≈5 00 - ≈1200)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi.	Supporto procedurale.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze ed alcune relazioni.	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari e quadra-ti che determi-nate e indeter – minate. Alcune equazioni di grado superiore al secondo.	Aritmetici (regola della semplici falsa posizione)

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIONE
ARABI (≈800 - ≈1300)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Tendenza alla risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche Cubiche	Regola della falsa posizione. Formula risolu-tiva. Geometrici (analitici)
LEONARDO PISANO (≈1170 - ≈1250)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche	Aritmetici (Regola della falsa posizione). Geometrici
IL TRATTATO D'ALGIBRA (Anonimo del XIV sec.)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione e procedurale.	-----	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche Sistemi Alcune equazioni di terzo e quarto grado.	Formali[1] Regola della falsa posizione
ALGEBRISTI DEL 500 (anteriori a Bombelli)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto procedurale.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita, le sue potenze ed alcune relazioni.	Risoluzione di classi di problemi.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali

[1] Per **metodi formali** di risoluzione si intende: il trasporto d termini da un membro all'altro o l'applicazione della stessa operazione ad entrambi i membri per le equazioni di primo grado; la formula risolutiva per le equazioni quadratiche e quelle cubiche incomplete; il procedimento di trasformazione ad un'equazione di secondo grado per quelle quartiche.

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIO-NE
BOMBELLI (≈1526 - ≈1572)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi. Irrazionalità cubiche. Numeri immaginari.	Supporto per completare la comunicazione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei e algebrici.	Introduzione di una notazione particolare per l'incognita, le sue potenze ed le relazioni di uso frequente.	Risoluzione di classi di problemi espressi mediante formule.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali
VIETE (≈1540 - ≈1603)	Numeri reali e complessi	-----	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei e algebrici.	Introduzione di simboli per l'incognita, le sue potenze, i coefficienti generici ed le relazioni di uso frequente.	Risoluzione di classi di problemi espressi mediante formule.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali

TABELLA 2: FASI DELL'EVOLUZIONE DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO

FASI	LINGUAGGIO NATURALE	GEOMETRIA	ARITMETICA	ESEMPI
ALGEBRA RETORICA 1	Si	* Argomentazione con strumenti pre-euclidei. * Risoluzione di un problema per volta.	Linguaggio di supporto procedurale.	Babilonesi, Egiziani, Cinesi
ALGEBRA RETORICA 2	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei. * Risoluzione di un problema per volta.	Linguaggio di supporto procedurale.	Greci classici: Euclide
ALGEBRA SINCOPATA 1	Si	Risoluzione di un problema per volta.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	Diofanto Indiani
ALGEBRA SINCOPATA 2	Si	Risoluzione di classi di problemi.	Introduzione di nomi o di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	*Trattato d'Algibra* (anonimo del XIV secolo). Arabi[1]
ALGEBRA SINCOPATA 3	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei. * Risoluzione di classi di problemi.	Introduzione di nomi o di abbreviazioni per l'incognita, le sue potenze ed alcune relazioni.	Fibonacci[2] Algebristi del 500
ALGEBRA SINCOPATA 4	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei e algebrici. * Risoluzione di classi di problemi espressi medianti formule.	Introduzione di una notazione particolare per l'incognita, le sue potenze e le relazioni di uso più frequente.	Bombelli
ALGEBRA SIMBOLICA[3]	No	* Argomentazione completa con strumenti euclidei e algebrici. * Risoluzione di classi di problemi espressi medianti formule.	Introduzione di simboli per l'incognita, le sue potenze, i coefficienti generici e le relazioni di uso più frequente.	Viète

[1] Utilizzano soltanto alcuni nomi per chiamare l'incognita e le sue potenze, ma argomentano con strumenti euclidei.
[2] Utilizza soltanto alcuni nomi per nominare l'incognita nella parte finale del *Liber Quadratorum*.
[3] Viene presentata l'algebra simbolica senza altri livelli in quanto il presente lavoro si ferma storicamente proprio con l'introduzione del simbolo.