LOS OBSTACULOS EPISTEMOLOGICOS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

VISION HISTORICA

Elsa Malisani[*]

Articolo pubblicato nella "Revista IRICE" del "Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación" di Rosario – Argentina, nel N° 13 del 1999, in lingua spagnola.

ISSN 0327-392X

[*] G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche – Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università – Via Archirafi, 34 – 90123 Palermo – Italia.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la construcción del lenguaje algebraico, con su ambigüedad semántica y su riqueza de significados, en relación a la evolución de los métodos y de las estrategias de resolución de ecuaciones en los dos períodos históricos anteriores a la formalización: retórico y sincopado. Porque es precisamente en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico donde se encuentra el pasaje entre un campo semiótico significativo (la ***aritmética****) y el tentativo de poner a punto un nuevo lenguaje (el* ***álgebra****) relativo a una cierta clase de problemas (la* ***resolución de ecuaciones****). Los obstáculos epistemológicos están relacionados precisamente con este pasaje.*

Los obstáculos epistemológicos reconocibles en la historia de la Matemática permiten comprender ciertas dificultades (obstáculos) que se evidencian en el aprendizaje de este conocimiento. Por ello, este artícilo debe entenderse como una contribución tanto a la historia como a la didáctica de esta disciplina.

Palabras clave: epistemologia / historia de la matemática / álgebra / didáctica / paradigma

Abstract

The purpose of this work is to study the construction of the Algebraic language, with its semantic ambiguity and the richness of its meanings. The construction of this language is studied in relationship to the evolution of the methods and strategies used to solve equations in the two historical periods before formalization: retoric and syncopated. It is precisely in the transition phase between the Aritmetic and the Algebraic thought where the passage between only meaningful semiotic field (the ***arithmetic****) and another one which aims at tuning up a new language (the* ***algebra****) relative to a new kind of problems (the* ***resolution of equations****) is found. The epistemological obstacles are precisely related to this passage.*

Keywords: epistemology / history of mathematics / algebra / didactics / paradigm

1- INTRODUCCION

En los últimos quince años se han realizado numerosas investigaciones sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra; muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra. Kieran y Filloy (1989) y Malisani (1993) presentan un resumen bastante completo sobre las principales investigaciones relativas: a los errores que efectúan los alumnos cuando resuelven ecuaciones y problemas algebraicos y a los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la duda o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación.

En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico desarrollada por Bachelard (pág. 15-16):

"... se conoce afrontando un conocimiento anterior, destruyendo los conocimientos mal adquiridos o superando aquéllo que en el espíritu mismo obstaculiza la espiritualización. Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación".

Según Brousseau (1986), la noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. Ciertos conocimientos del alumno están ligados a otros conocimientos anteriores que a menudo son provisorios, imprecisos y poco correctos.

Duroux (1983) establece una serie de condiciones que debe satisfacer un obstáculo para que sea considerado de tipo epistemológico:

- Un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad o falta de conocimiento;
- Este conocimiento produce respuestas correctas en un determinado contexto que el alumno encuentra a menudo;
- Pero genera respuestas falsas fuera del contexto;
- Este conocimiento se manifiesta resistente a las contradicciones (a las cuales se confronta) y a la sistematización de un conocimiento mejor;
- Después de la toma de conciencia de su falta de precisión, este conocimiento continúa a manifestarse de manera intempestiva y obstinada.

Algunas investigaciones de la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas [Cornu (1983), Sierpinska (1985)] han demostrado que ciertas dificultades de los alumnos **se pueden** encontrar entre los obstáculos detectados en la historia (Cfr. también Arzarello *et al.*, pág. 7-8). Más precisamente, los elementos que permiten identificar estos obstáculos se deben buscar en el análisis de las **resistencias** que surgieron en el desarrollo histórico y en los debates que les han permitido superarlas. Pero la historia sola no es suficiente, el análisis histórico-epistemológico se debe completar con un estudio de los fundamentos de las matemáticas.

Spagnolo (pág. 81) completa la definición de obstáculo epistemológico, citada más arriba, utilizando una interpretación semiótica de los Lenguajes Matemáticos:

"*El obstáculo epistemológico está relacionado con el pasaje entre el campo semántico significativo en una cierta época histórica de la comunidad matemática y el tentativo de la misma de poner a punto un nuevo lenguaje relativo a una cierta clase de problemas.*

Los objetos matemáticos de los campos semánticos anteriores que podrían servir para la construcción sintáctica (en los fundamentos del nuevo lenguaje), son los obstáculos epistemológicos".

En el caso específico que estamos analizando, el campo semántico anterior está representado por la *aritmética*; el nuevo lenguaje, es el *álgebra*; la clase de problemas: es la *resolución de ecuaciones*.

Según Spagnolo (1995, pág. 80),

> *"... un lenguaje nace con ambigüedad semántica y riqueza de significados al interno de la gramática. Cuando el lenguaje se formaliza se asigna un significado a cada fórmula y se pierden los significados anteriores. El estudio de las concepciones históricas no es otra cosa que el estudio de los significados ligados a un cierto lenguaje en un determinado período histórico".*

El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, por este motivo en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos (Arzarello *et al.*, pág. 10 -11). Según Nesselman se pueden determinar tres períodos distintos:

1- FASE RETORICA: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.), en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo;

2- FASE SINCOPADA: desde Diofanto hasta fines del Siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural.

3- FASE SIMBOLICA: introducida por Viète (1540-1603), en la cual se usan letras para todas la cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales.

El objetivo de este trabajo es estudiar la construcción del lenguaje algebraico con su ambigüedad semántica y su riqueza de significados, en relación a la evolución de los métodos y de las estrategias de resolución de ecuaciones en los dos períodos históricos que preceden la formalización: retórico y sincopado, porque en ellos se desarrollan precisamente los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

El artículo se divide en cuatro partes. En la primera, se presenta la construcción histórica del lenguaje simbólico del álgebra; en la segunda, se describen los principales métodos de resolución de ecuaciones utilizados hasta el 1500; en la tercera, se muestra cómo inciden ciertos aspectos del lenguaje aritmético en el desarrollo del lenguaje algebraico; y en la cuarta, se ilustran los distintos niveles de generalidad de un método de resolución.

Este trabajo pretende ser el punto de partida de futuros estudios sobre los obstáculos epistemológicos que encuentran los alumnos en las situaciones de aprendizaje del lenguaje algebraico. Desde un punto de vista general constituye un aporte a la Historia y a la Didáctica de las Matemáticas.

2- SIMBOLISMO

El análisis del desarrollo histórico del álgebra muestra claramente que la construcción del lenguaje simbólico ha sido muy lenta y dificultosa, se alternan períodos de mejoramientos progresivos con otros de regresión y parálisis. Así por ejemplo, los babilonios (≈2000 a.C.), los egipcios (≈1700 a.C.), los griegos (600-200 a.C.) y los chinos (300 a.C.-300 d.C.) utilizaban exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a algún signo. Se registraron intentos aislados de introducir algún nombre o alguna abreviatura para representar la incógnita, pero estas pruebas no fueron efectuadas de manera sistemática [(1)].

Diofanto (250 d.C.) introdujo, por primera vez en la Historia de las Matemáticas, abreviaturas (letras griegas) para indicar la incógnita de una ecuación y sus potencias:

x	$\rightarrow \zeta$	llamada	*"il número del problema"*
x^2	$\rightarrow \Delta^{\Upsilon}$		*"cuadrado" o "potencia"*
x^3	$\rightarrow K^{\Upsilon}$		*"cubo"*
x^4	$\rightarrow \Delta^{\Upsilon}\Delta$		*"cuadrado-cuadrado"*
x^5	$\rightarrow \Delta K^{\Upsilon}$		*"cuadrado-cubo"*
x^6	$\rightarrow K^{\Upsilon}K$		*"cubo-cubo"*
$1/x$	$\rightarrow \zeta^{\chi}$		

(Cfr. Kline., pág. 162-163).

Este autor indicaba la adición escribiendo los términos uno a continuación del otro, la resta con el símbolo /|\ y la igualdad con ι^{σ}, no utilizaba algún signo para representar la multiplicación, la división y los coeficientes genéricos. Desarrollaba los cálculos usando el lenguaje natural y escribía las soluciones en un testo continuo.

A partir del siglo VII los hindúes crearon un simbolismo algebraico bastante eficiente que les permitió desarrollar nuevos procedimientos de resolución de ecuaciones. En la obra de Brahmagupta (598-?) se encuentran algunas abreviaturas para representar la incógnita y sus potencias, así por ejemplo (Cfr. Bortolotti, 1950, pág. 637):

$x \rightarrow$ *ya* [primera sílaba de la palabra *yavattavat (tanto-cuanto)*]
$x^2 \rightarrow$ *va*
$x^3 \rightarrow$ *gha*
$x^4 \rightarrow$ *vava*
$x^9 \rightarrow$ *ghagha*
$x^{1/2} \rightarrow$ *ka* [primera sílaba de la palabra *karana (raíz cuadrada)*].

Los hindúes no contaban con algún símbolo para indicar la adición y el producto; para la resta, en cambio, utilizaban un punto sobre el sustraendo y para igualar dos cantidades se limitaban a escribir los dos miembros en dos líneas consecutivas. Cuando en un problema aparecían varias incógnitas, una de ellas se representaba con la sílaba *ya* y las otras con objetos de diversos colores: en general, usaban la primera sílaba de la palabra relativa al respectivo color. Este simbolismo, si bien rudimental, resulta suficiente para catalogar el álgebra hindú como "casi-simbólica", es decir, de un nivel superior al álgebra sincopada de Diofanto.

Los árabes (≈800-1300 d.C.), herederos de las obras griegas e hindúes, no utilizaban símbolos. Algunos autores como al-Khowârismî (≈780-≈850) empleaban ciertos nombres particulares para representar la incógnita y sus potencias, pero en general ellos desarrollaban un álgebra íntegramente retórica y esto representa un paso atrás respecto al álgebra diofantina e hindú.

En el siglo XII, Leonardo Pisano [(2)] introdujo en Occidente los procedimientos aritméticos utilizados por los árabes y como consecuencia de ello, las características del álgebra árabe se transmitieron en Europa y tuvieron una fuerte influencia durante más de tres siglos. En las obras de Leonardo y en el tratado de ábaco llamado *Trattato d'Algibra* (Anónimo del Siglo XIV) [(3)], se puede observar que los desarrollos algebraicos utilizaban fundamentalmente el lenguaje natural. Pero es interesante destacar que en el *Trattato d'Algibra* ya se comienza a evidenciar una cierta tendencia hacia el simbolismo, porque el autor usa sistemáticamente ciertos nombres especiales para denominar la incógnita y sus potencias:

x → *cosa (o chosa)*
x^2 → *censo*
x^3 → *chubo*
x^4 → *censo di censo*
x^5 → *chubo di censi*
x^6 → *censo di chubo (chubo di chubo).*

Más tarde, de estas palabras derivaron las abreviaturas que fueron usadas hasta el Siglo XVI. Por ejemplo, en la obra de Pacioli (1445- 1514?) la incógnita y sus potencias vienen representadas de este modo:

x	*co*	de *cosa*
x^2	*ce* o *Z*	de *censo*
x^3	*cu* o *C*	de *chubo*
x^4	*ce ce*	de *censo di censo*
x^5	*p° r°*	de *primo relato* etc. (Loria, pág. 476).

Este autor utilizaba también otras abreviaturas tales como: *p* de *più* (más), *m* de *meno* (menos), *ae* de *aequalis* (igual). R^2 y R^3 (atravesadas por una barra oblicua) indicaban raíz cuadrada y raíz cúbica y la *m* delante de un número señalaba que éste era negativo.

Con Bombelli (≈1526-≈1572) se produjo una verdadera transformación del lenguaje algebraico, con la introducción de símbolos especiales para representar la incógnita y sus potencias: una *semicircunferencia* sobre la cual escribía un número para indicar el exponente de la potencia (en este artículo la circunferencia reemplazará la semicircunferencia para simplificar la notación), así por ejemplo:

x	①	*tanto*

x^2	②	*potenza*
x^3	③	*cubo*
x^4	④	*potenza di potenza*
x^5	⑤	*primo relato* etc. (Bombelli, 1966).

Esto representa una gran evolución en el uso del lenguaje simbólico, porque la mayor parte de los cambios efectuados hasta ese momento eran fundamentalmente abreviaturas de palabras del lenguaje natural. Bombelli utilizaba un lenguaje *Sincopado-Avanzado*, resultante de una combinación entre *lenguaje natural* y *simbolismo algebraico*, para formular las reglas de las operaciones numéricas y con polinomios y los procedimientos de resolución de ecuaciones. Este simbolismo comparte precisamente con el álgebra de Viète (1540-1603) la característica de ser *auto-explicativo*; aunque Bombelli necesite siempre acompañar los desarrollos efectuados con su versión retórica y demuestre la validez de las igualdades implicadas en diversos tipos de ecuaciones mediante la construcción geométrica. Esto demuestra que este lenguaje sincopado-avanzado *no era autosuficiente* porque necesitaba recurrir a otros lenguajes, natural o geométrico, que son semánticamente más ricos, para completar la comunicación.

Es importante observar que, muchos de los cambios de notación realizados hasta el 1500 fueron efectuados accidentalmente y con frecuencia los estudiosos de esa época no eran capaces de apreciar lo que el simbolismo podía significar para el álgebra. Entre el 1500 y el 1600 fueron introducidos casi todos los símbolos conocidos en la actualidad, pero fue un proceso lento, el álgebra simbólica no suplantó de golpe al álgebra sincopada.

Algunos autores (Kline, pág. 303; Loria, pág. 468) sostienen que los signos + y - fueron introducidos por los alemanes para indicar los pesos en exceso o en defecto de los cajones y posteriormente fueron adoptados por los matemáticos Widman (Siglo XV) y Stifel (≈1486-1567); Rapisardi (pág. 169), en cambio, atribuye el invento de estos signos a Leonardo da Vinci (1452-1519). Para indicar la igualdad, Recorde (1510-1558) -que escribió el primer tratado inglés de álgebra- introdujo el signo = en el 1557, Viète al principio utilizaba la palabra *aecqualis*, después adoptó el signo ~ , mientras Descartes (1596-1650) usaba α. El signo $\times$ del producto fue utilizado por Oughtred (1574-1660) y los signos > y < para indicar las desigualdades fueron introducidos por Harriot (1560-1621). Los paréntesis se conocieron en el 1544, los corchetes y las llaves, alrededor del 1593. La raíz cuadrada $\sqrt{}$ y la raíz cúbica $\sqrt{}c$ aparecieron en el Siglo XVII con Descartes (Cfr. Kline, pág. 304). Los exponentes fueron introducidos gradualmente: Chuquet (1445?-1500?) escribía 8^3, 10^5, 12^0 e 7^{1m} para indicar $8x^3$, $10x^5$, 12 e $7x^{-1}$; Bombelli usaba una semicircunferencia sobre la cual escribía el exponente y Stevin (1548-1620) utilizaba también los exponentes fraccionarios: *1/2* para la raíz cuadrada y *1/3* para la raíz cubica.

Con Viète se produjo el cambio más significativo en la construcción del lenguaje simbólico. Este autor fue el primero que utilizó sistemáticamente las letras para todas las cantidades (la incógnita, sus potencias y los coeficientes genéricos) y los signos para las operaciones, empleaba este lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales. Viète llamaba a su álgebra simbólica *logística especiosa* en oposición a la *logística numerosa*: consideraba el *álgebra* como un método para operar sobre las especies o las formas de las cosas, y la *aritmética*, la *numerosa*, como una técnica que se ocupaba de los números. De este modo el *álgebra* se transformó en el estudio de los tipos generales de formas y de ecuaciones, porque lo que es aplicable al caso general es válido para los infinitos casos particulares (Kline, pág. 305; cfr. Colin y Rojano, pág. 126).

3- METODOS DE RESOLUCION DE ECUACIONES

El desarrollo del simbolismo algebraico fue muy lento y dificultoso; en ausencia de un lenguaje adecuado y de ciertos conocimientos sobre los conjuntos numéricos, cómo se representaban los distintos tipos de ecuaciones?, qué algoritmos de resolución utilizaban los pueblos antiguos, orientales y medievales?, cómo influyeron los conocimientos aritméticos y geométricos en el desarrollo de las técnicas resolutivas?. El objetivo de esta sección es encontrar respuestas a alguna de estas cuestiones.

3.1- EL PROCEDIMIENTO GEOMETRICO DE EUCLIDES

En los *Elementos* de Euclides, se encuentran algunos resultados fundamentales para álgebra moderna tratados desde el punto de vista geométrico, por ejemplo la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

La proposición 12 del Libro VI de los *Elementos* (pág. 107) consiste en calcular el cuarto proporcional de tres segmentos dados.

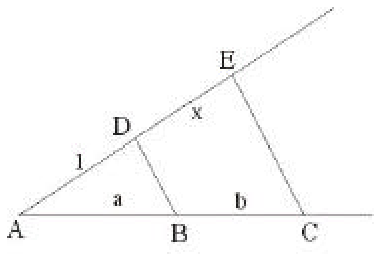


Fig. 1

$AB:BC = AD:DE$

La aplicación de esta propiedad permite resolver "geométricamente" ecuaciones del tipo $ax = b$ con coeficientes positivos, considerando como segmentos: $AB = a$, $BC = b$, $AD = 1$ e $DE = x$.

A partir de las proposiciones 28 y 29 del Libro VI (pág. 146-150) se pueden resolver "geométricamente" las ecuaciones de segundo grado que admiten al menos una raíz positiva [(4)]. Así por ejemplo, la ecuación $ax - x^2 = b^2$ corresponde al problema geométrico: *"Sobre un segmento dado (a) construir un rectángulo (de altura x), que exceda al cuadrado de la altura (x^2) en un área equivalente a un cuadrado dado (b^2)* (Cfr. Zapelloni, pág. 150-151). Para resolverlo se procede en este modo: sean a el segmento dado y C el cuadrado de área b^2:

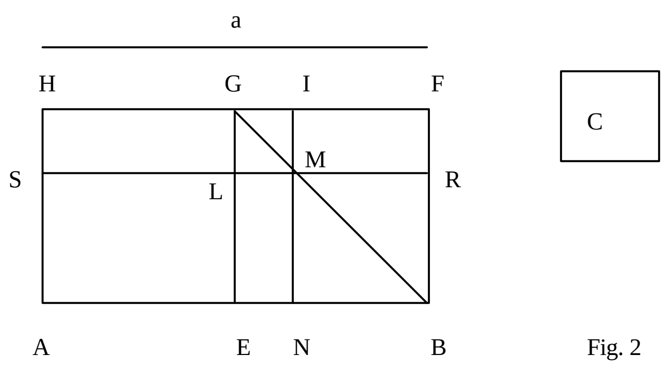


Fig. 2

1- Se determina el punto medio del segmento $a = AB$, sea E ; sobre EB se construye el cuadrado $EBFG$ y se completa el cuadrado $AEGH$. El área del cuadrado $AEGH$ debe ser mayor o igual que b^2, de lo contrario el problema no tiene solución.
2- Si el área del cuadrado $AEGH$ es b^2, entonces $x = AH$ y *el problema está resuelto.*
3- Si el área del cuadrado $AEGH$ es mayor que b^2, se construye el cuadrado $LMIG$ de área igual a la diferencia de estas áreas. Por la proposición 26 del Libro VI, los cuadrados $LMIG$ y $NBRM$ tienen una diagonal sobre la recta GB y de este modo se completa la figura.
4- El área de la figura $LEBFIM$ es igual a b^2 por construcción; fácilmente se demuestra que las áreas del rectángulo $ANMS$ y de la figura $LEBFIM$ son iguales y de aquí se deduce que $x = SA$.

3.2- EL PROCEDIMIENTO DE AL-KHOWARISMI

Los árabes resolvían las ecuaciones de segundo grado considerando separadamente cinco casos distintos, de manera que los coeficientes fueran siempre positivos. Este modo de proceder era similar al de Diofanto, pero representa un paso atrás respecto al álgebra hindú que consideraba la "forma general" de la ecuación de segundo grado, porque admitían los coeficientes negativos. Los árabes utilizaban fundamentalmente el *lenguaje natural* para describir todas las operaciones algebraicas. Por ejemplo, al-Khowârismî [(5)] presentó una ecuación de segundo grado de este modo: *Un cuadrado y diez de sus raíces son iguales a nueve y treinta* (por treinta y nueve) *dirhems, es decir tú sumas diez raíces a un cuadrado y la suma es igual a nueve y treinta* (Kline, pág. 226). Este enunciado, traducido al lenguaje simbólico del álgebra, corresponde a la ecuación: $x^2 + 10x = 39$. El autor obtuvo la solución completando el cuadrado:

Notación de al-Khowârismî:	Notación algebraica moderna:
"Considera la mitad del número de raíces, en este caso cinco, después multiplícalo por sí mismo, el resultado es cinco y veinte" (por veinticinco).	$\frac{b}{2}$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
"Suma este número a nueve y treinta (por treinta y nueve), *que da sesenta y cuatro.*	$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$
Calcula la raíz cuadrada, es decir, ocho; del resultado,	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$
resta la mitad del número de raíces, es decir, cinco; quedan tres".	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$
"Esta es la raíz".	$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$

3.3- EL PROCEDIMIENTO DE AL-KHAYYAM

Uno de los aportes más interesantes de la matemática árabe es la resolución de ecuaciones de tercer grado mediante la intersección de curvas cónicas. Después de la difusión del *Tratado de Algebra* (*Al-jabr w'al muqâbala*) de al-Khowârismî se generaron dos corrientes de ideas:

* ciertos problemas geométricos se pueden resolver a partir del desarrollo de ecuaciones algebraicas con una incógnita;

* la(s) solución(es) de determinadas ecuaciones de tercer grado se pueden obtener mediante la construcción geométrica.

Según Rashed, el aporte más importante de la matemática árabe es, precisamente, haber desarrollado esta correspondencia entre geometría y álgebra cinco siglos antes de Descartes y Fermat (cfr. Ballieu, pág. 9).

Con al-Khayyam (1038-48 -1123) el *Algebra* se transformó en *la teoría general de las ecuaciones algebraicas* con coeficientes positivos y de grado menor o igual que tres. Este autor resolvió las *ecuaciones de segundo grado* con raíces positivas utilizando el procedimiento geométrico de Euclides. Obtuvo, además, la solución general de las *ecuaciones de tercer grado* (con raíces positivas y no reducibles a ecuaciones de segundo grado) mediante la intersección de curvas cónicas. Así por ejemplo, para resolver la ecuación:

$x^3+ax = b$ con a y b positivos, escribió la forma homogénea: $x^3 + p^2x = p^2q$ con $p^2 = a$ y $p^2q = b$.

Al-Khayyam construyó la parábola de ecuación $y = x^2/p$ y la circunferencia de diámetro QR igual a q (cuya ecuación es $x^2+ y^2- qx = 0$). P era el punto de intersección de las dos curvas, diferente del origen de coordenadas. Por P trazó la perpendicular PS y demostró que QS es la solución del ecuación. A partir de la construcción geométrica dedujo que este tipo de ecuaciones admite siempre una raíz positiva.

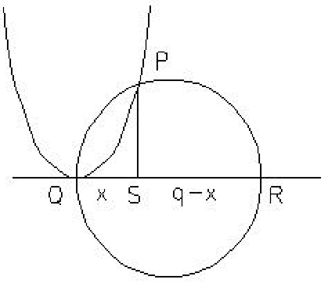


Fig. 3

Al-Khayyam realizó una demostración de tipo sintético utilizando la teoría de las proporciones. Aplicó la propiedad de la parábola (que obtuvo Apollonio): $x/PS = p/x$. [1]

Consideró el triángulo rectángulo QPR, en el cual la altura PS es medio proporcional entre QS y RS:

$x/PS = PS/(q-x)$. [2]

De las igualdades [1] y [2] obtuvo que: $p/x = PS/(q-x)$. [3]

A partir de la ecuación [1] dedujo que $PS = x^2/p$. Sustituyendo este valor en la [3] demostró que x satisface la ecuación: $x^3 + p^2x = p^2q$.

Al-Khayyam resolvió también ecuaciones del tipo: $x^3+a = bx$ con a y b positivos, utilizando la parábola: $y = x^2/\sqrt{b}$ y un brazo de la hipérbola equilátera: $x^2 - y^2 - (a/b)x = 0$. Demostró que este tipo de ecuaciones puede admitir: dos soluciones positivas, una o ninguna (no consideraba las raíces negativas).

Determinó, además, la soluciones positivas de la ecuación: $x^3 + ax^2 = c^3$ mediante la intersección de una hipérbola y de una parábola y las correspondientes a la ecuación: $x^3 \pm ax^2 + b^2x = b^2c$ utilizando una hipérbola y una elipse (Kline, pág. 228).

3.4- EL PROCEDIMIENTO DE AL-TUSI

Al-Tusi (1130 - ?) clasificó las ecuaciones de grado menor o igual que tres según la existencia o no de raíces positivas. En particular, estudió 5 tipos de ecuaciones con coeficientes positivos que *admiten* -utilizando su propios términos- "casos imposibles" , es decir, aquellos casos en los cuales no existen soluciones positivas:

$x^3 + c = ax^2$	$x^3 + c = bx$	$x^3 + c = ax^2 + bx$
$x^3 + ax^2 + c = bx$	$x^3 + bx + c = ax^2$	

Cada una de estas ecuaciones se puede escribir del siguiente modo: $f(x) = c$ donde f es un polinomio. Al-Tusi caracterizó los "casos imposibles" estudiando la intersección de la curva $y = f(x)$ con la recta de ecuación $y = c$ para $x > 0$ y $f(x) > 0$. La existencia de soluciones depende de la posición de la recta con respecto a $f(x_0)$, siendo x_0 el máximo de la función polinómica. Si la recta interseca la función, determina las raíces de $f(x) = 0$, y de este manera puede encuadrar las raíces de $f(x) = c$; es decir, las raíces de $f(x) = 0$ determinan el intervalo que contiene a las raíces de $f(x) = c$. Para calcular estas raíces utilizó un método aproximado al *método de Ruffini-Horner*. Algunos autores (Ballieu, pág. 16) suponen que en el siglo XI este método fue aplicado a la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, y que luego al-Tusi lo generalizó para poder utilizarlo en la resolución de ecuaciones polinómicas.

De este modo, al-Tusi introdujo el análisis local: para determinar el máximo de la función $f(x)$ resolvió una ecuación, que traducida al lenguaje simbólico del álgebra, corresponde a $f'(x) = 0$. Es decir, introdujo la noción de derivada que utilizó solamente en algunos casos particulares, sin llegar a la formalización del concepto y, es probable que esto haya sucedido debido a la carencia de un lenguaje simbólico adecuado. Ballieu (pág. 16) supone que es la primera vez -en la Historia de las Matemáticas- que se encuentra la idea de determinar el máximo de una función polinómica; y para poder calcularlo al-Tusi estudió la variación de la función precisamente en los puntos próximos al máximo. Al-Tusi manipuló conceptos nuevos, obviamente no lo hizo con todo el rigor de un Newton, pero recordemos que esto sucedía en el siglo XII !

3.5- LOS METODOS DE LA FALSA POSICION

Durante le Edad Media estos procedimientos recibían el nombre de *regula al-chataim* (término oriental) o *regula falsorum*. Su origen es muy antiguo y se encuentra exactamente en los matemáticos chinos y egipcios. Fueron utilizados con frecuencia por los hindúes y los árabes en la resolución de problemas y aparecen en la mayor parte de los textos de aritmética escritos en el período comprendido entre la Edad Media y el comienzo de nuestra era (Cfr. Guillemot, pág. 1).

Las técnicas de la falsa posición se utilizaban para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita y, en ciertos casos, sistemas lineales de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. Pueden ser de dos tipos: *simple y doble falsa posición*.

- **El método de la simple falsa posición**

Este procedimiento consiste en asignar *un valor particular a la incógnita* y efectuar los cálculos necesarios para obtener el resultado exacto: de aquí el nombre de *simple falsa posición*. Esta regla se aplicaba fundamentalmente a problemas lineales, por este motivo, en los cálculos se utilizaba el concepto de proporcionalidad directa.

El origen de este método se encuentra en el papirus Rhind (1700 a.C. aproximadamente). Su autor, Ahmes, lo aplicó para resolver una serie de problemas del tipo: $x + (1/n)x = b$, con n y b enteros positivos y $x \in E$, siendo E el conjunto numérico que usaban los egipcios, compuesto por los números naturales no nulos, la fracción $2/3$ y las fracciones del tipo $1/n$ con n entero positivo [(6)].

Por ejemplo, el enunciado del problema 24 del papirus es el siguiente: "Encontrar un número que sumado a su séptima parte sea igual a 19". El mismo traducido al lenguaje simbólico del álgebra moderna corresponde a la ecuación: $x + (1/7)\,x = 19$. Ahmes lo resolvió de esta manera:

1- Adoptó la *falsa posición 7*, esto es $x = 7$ y obtuvo: $7 + (1/7).7 = 8$ en vez de *19*.

2- Dividió *19* por *8* y al resultado lo multiplicó por *7*, es decir, aplicó la proporcionalidad directa: $19:8 = x:7$ (Cfr. Guillemot, pág. 3).

La manipulación con las fracciones del conjunto *E* resultaba bastante complejo para los egipcios, por eso trataban de evitarlas efectuando el menor número posible de cálculos. Precisamente el método de la simple falsa posición aplicado al problema descripto más arriba, permite sustituir la división *19* por $(1+1/7)$, muy difícil utilizando las reglas egipcias, por aquélla más simple de *19* por *8*. Esto demuestra que las dificultades para efectuar cálculos con fracciones condujo a los matemáticos antiguos a buscar métodos alternativos, mediante los cuales podían resolver los problemas planteados en un modo más simple.

· El método de la doble falsa posición

Este procedimiento consiste en considerar *dos valores particulares de la incógnita* (de aquí el nombre de *doble falsa posición*), efectuar los cálculos necesarios para encontrar los errores cometidos utilizando estos valores y por último aplicar la fórmula de interpolación lineal. Este método se aplicaba generalmente a la resolución de: ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos miembros, sistemas lineales di ecuaciones y ecuaciones de segundo grado (de manera aproximada).

Los árabes Al-Qalasadi (1423-1494/5) y Beda Eddin (1547-1622) propusieron problemas simples que resolvían aplicando esta regla. Así por ejemplo: "Encontrar un número que sumado a sus *2/3* y a *1* sea igual a *10*". Algebraicamente corresponde a la ecuación: $x + 2/3\, x + 1 = 10$ con $x \in Q$, que fue resuelta de este modo:

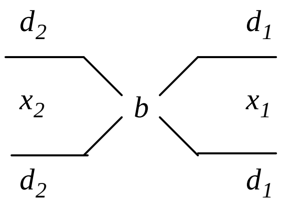
1- Adoptando la falsa posición: $x_1 = 9$, el primer miembro es igual a *16* y la diferencia con il segundo miembro es $d_1 = 6$.

2- Considerando la falsa posición: $x_2 = 6$, el primer miembro es igual a *11* y la diferencia es $d_2 = 1$.

3- Aplicando la fórmula de interpolación lineal:

$$x = (x_2\, d_1 - x_1\, d_2)/(d_1 - d_2) = (6.6 - 9.1)/(6 - 1) = 5 + 2/5.$$

Como los árabes no disponían de la fórmula usaban un esquema gráfico en el cual representaban los signos, positivo o negativo, de las diferencias (Loria, pág. 345 - 346):

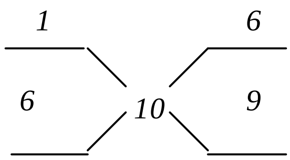


posición de las diferencias con signo positivo

posición de las diferencias con signo negativo

Fig. 4

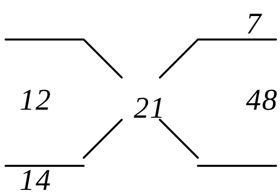
El ejemplo anterior responde al esquema siguiente:



$x = (6 \,.\, 6 - 9 \,.\, 1)/(6 - 1) = 5 + 2/5.$

Fig. 5

Al-Qalasadi propuso el problema: "Si se suman la tercera y la cuarta parte de un número se obtiene 21. ¿Cuál es el número?", que traducido al lenguaje algebraico corresponde a la ecuación: $x/3 + x/4 = 21$. Si se consideran $x_1 = 48$ e $x_2 = 12$ se obtienen respectivamente las diferencias $d_1 = 7$ e $d_2 = -14$, y como consecuencia el esquema correspondiente es el siguiente:



$x = (12 \,.\, 7 + 48 \,.\, 14)/(7 + 14) = 36$.

Fig. 6

El autor del *Trattato d'Algibra* (obra del siglo XIV) (3) resolvió sistemas di ecuaciones lineales mediante la aplicación de este algoritmo. Así por ejemplo, utilizando el lenguaje simbólico moderno, el problema 38 se puede traducir en un sistema di cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que el autor transformó mediante sustituciones sucesivas en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del tipo (Cfr. Franci e Pancanti, pág. 145 - 150):

$7\,y = 13\,x + 4$ [1]

$4\,y = 2\,x + 176$ [2]

que resolvió de este modo:

1- Adoptó la falsa posición $y_1 = 40$ y en la ecuación [1] calculó $x_1 = 21 + 3/13$.

2- Sustituyó estos dos valores en la ecuación [2] obteniendo 160 en el primer miembro y $218 + 6/13$ en el segundo miembro. Como los dos miembros deben ser iguales, la diferencia es $d_1 = 58 + 6/13$.

3- Igualmente adoptando la falsa posición $y_2 = 80$, calculó $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.

4- Aplicó la fórmula de interpolación lineal y obtuvo:

$y = [80.\,(58+ 6/13)+ 40\,.(58+ 6/13)]/(58+ 6/13 + 58+ 6/13) = 60$.

5- Sustituyendo $y = 60$ en la ecuación [1] encontró $x = 32$.

3.6- LOS METODOS EUROPEOS HASTA EL 1500

En su obra el *Liber Abaci* (1202), Fibonacci resolvió numerosos problemas de tipo práctico (relativos a transacciones comerciales), mediante la aplicación de la sucesión que lleva su nombre o de procedimientos relativos al análisis indeterminado de primer y segundo grado. Es interesante destacar que, para resolver ecuaciones de segundo grado, Leonardo siguió el estilo diofantino y árabe considerando separadamente cinco casos distintos, de manera que los coeficientes resultaran siempre positivos y, para cada uno de ellos, encontró la solución utilizando los razonamientos geométricos de Euclides. Para encontrar la solución de los problemas de análisis indeterminado aplicó distintos artificios de tipo aritmético utilizados por Diofanto o el método de la "falsa posición" (Cfr. Loria, pág. 386-391).

El autor del *Trattato d'Algibra* (siglo XIV) estableció 25 reglas para resolver ecuaciones de los primeros cuatro grados, considerando separadamente varios casos particulares de ecuaciones del mismo grado, superior al primero, de modo que los coeficientes resultaran siempre positivos [(7)]. Siguió, además, la tradición árabe de aceptar solamente las soluciones reales positivas no nulas. Resolvió las primeras 22 ecuaciones aplicando la transposición de términos (esto es, "cambiar de lado-cambiar de signo") o la fórmula resolutiva para las ecuaciones de segundo grado, que en algunos casos debió adaptar para encontrar solamente la solución positiva. Transformó las ecuaciones bicuadráticas en cuadráticas y ciertas ecuaciones cúbicas y cuárticas en ecuaciones de segundo grado, dividiéndolas por la incógnita o su cuadrado. Es interesante subrayar que, estas observaciones pueden parecer obvias para la persona que está acostumbrada a utilizar el simbolismo algebraico, pero en realidad eran mucho menos triviales para el autor que las formuló disponiendo sólo del lenguaje natural.

Las tres reglas restantes corresponden a ecuaciones de tercer grado del tipo $ax^3 \pm bx^2 \pm c = 0$. Para calcular este tipo de raíces, el autor efectuó sustituciones adecuadas ($x = \pm y \pm b/3a$) transformando dichas ecuaciones en otras del tipo: $x^3 = px + q$, que después resolvió mediante tentativos porque no conocía la fórmula resolutiva. Según Franci y Pancanti (pág. XX), la importancia de las reglas en cuestión es todavía mayor si se considera que la resolución de la ecuación general de tercer grado: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pasa precisamente a través de la resolución de ecuaciones del tipo: $y^3 + py + q = 0$, a las cuales se arriba mediante la sustitución $x = y - a/3$, que es aquélla propuesta por nuestro autor y es la primera de este tipo en la literatura matemática.

Alrededor del 1500 Scipione Dal Ferro enunció la fórmula resolutiva de la ecuación $x^3 + px = q$ con p y q positivos, utilizando el lenguaje natural. Dicha fórmula traducida el lenguaje simbólico del álgebra corresponde a la expresión:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}$$

En el 1535, de manera independiente, Tarataglia descubrió la fórmula resolutiva de las ecuaciones cúbicas con coeficientes positivos: $x^3 + px = q$ y $x^3 + q = px$, que fueron publicadas en el 1545 por Cardano en su obra l'*Ars magna*. En este texto, el autor expuso el método de resolución de las ecuaciones cúbicas y, siguiendo la tradición árabe, realizó una demostración geométrica para cada una de las reglas obtenidas. Describió también el método de solución para algunas ecuaciones cuárticas, descubierto por Ferrari. Estableció las condiciones para que el número de raíces de una ecuación (de segundo o tercer grado) sea igual a su grado, junto con las reglas para bajar el grado de una ecuación de la cual ya se conoce una raíz (Cfr. Bortolotti, 1950, pág. 656-657). En su obra *L'Algebra* (1966), Bombelli desarrolló la teoría de la ecuaciones de los primeros cuatro grados [(8)]. Consideró separadamente tantos casos particulares de ecuaciones del mismo grado, superior al primero, de manera que los coeficientes fueran siempre positivos. Para cada tipo de ecuación enunció (en lenguaje retórico) una regla práctica de resolución, realizó la construcción geométrica (en lo casos posibles) para justificar la validez de la igualdad formulada en la ecuación y analizó la naturaleza y la multiplicidad de las raíces. Siguió, además, la tradición árabe y medieval de aceptar solamente las soluciones reales positivas no nulas, porque las raíces negativas o complejas resultaban difíciles de interpretar de modo adecuado, en relación con los problemas que permitían resolver.

Bombelli utilizó la construcción geométrica para resolver problemas algebraicos, pero su procedimiento era inverso del que se encuentra álgebra geométrica de los antiguos, porque este autor no resolvió directamente el problema geométrico para obtener la solución analítica de la interpretación aritmética de la construcción realizada, sino que utilizó precisamente la resolución algebraica para deducir la construcción geométrica.

3.7 CONCLUSIONES SOBRE LOS METODOS DE RESOLUCION

El análisis histórico de los distintos procedimientos utilizados para resolver ecuaciones muestra la necesidad de recurrir siempre a otros tipos de lenguajes: natural, aritmético o geométrico. El lenguaje aritmético fue utilizado por Diofanto y los hindúes y constituye, además, el fundamento de la regla de la falsa posición, que fue aplicada por los matemáticos chinos, egipcios, hindúes, árabes y medievales. El lenguaje geométrico fue utilizado por los griegos y al-Khayyam, mientras algunas nociones protomatemáticas de análisis fueron aplicadas por al-Tusi [(9)]. En todos estos casos, el nivel de desarrollo del lenguaje algebraico era muy escaso, entonces era necesario recurrir a otros lenguajes (natural, aritmético, geométrico o analítico) para obtener la solución del problema, a partir de la interpretación de los procedimientos efectuados. También Bombelli utilizaba la construcción geométrica para justificar la validez de las igualdades formuladas en las ecuaciones o para resolver problemas algebraicos, pero su procedimiento era inverso de aquellos seguidos en los casos anteriores. En esta situación, el apoyo de otros lenguajes, natural o geométrico, servía solamente para completar la comunicación, no para resolver el problema, porque Bombelli empleaba un esquema de razonamiento diferente, combinando instrumentos algebraicos y euclídeos.

La semántica del lenguaje algebraico es menos rica de aquéllas correspondientes al lenguaje natural, aritmético o geométrico; por lo tanto, en la fase sincopada es necesario apoyarse en ellas para formular las reglas, para interpretar adecuadamente el problema a resolver, para obtener su solución o para justificar los pasajes algebraicos. Son precisamente la ambigüedad semántica y la riqueza de significados las que permiten poner a punto poco a poco el lenguaje simbólico.

4- LOS NUMEROS NEGATIVOS COMO OBSTACULO. EL CAMPO NUMERICO INCOMPLETO.

Por un lado, el uso del lenguaje aritmético favorece el desarrollo del lenguaje algebraico, pero por el otro, puede representar una fuerte limitación. Así por ejemplo, se supone que los laboriosos y complicados cálculos que los egipcios efectuaban con las fracciones fueron uno de los motivos por el cual el lenguaje algebraico utilizado no pudo superar el primer nivel de desarrollo (6). La falta de aceptación de los números negativos por parte de Diofanto, los árabes y los matemáticos europeos hasta el 1500 fue la causa por la cual estos autores evitaban los coeficientes negativos en la formulación de las reglas de resolución y admitían sólo las soluciones positivas (las raíces negativas resultaban difíciles de interpretar adecuadamente, en relación con los problemas que permitían resolver). Esto representó un paso atrás respecto al álgebra hindú que consideraba la forma general de la ecuación de segundo grado y, en algunos casos, admitía las raíces negativas (cuando era posible darles una interpretación). De la misma manera, la falta de aceptación de los números complejos hizo que Bombelli no los haya considerado como raíces de ecuaciones. Algunos autores (Bortolotti, 1966, pág. 182) piensan que: "...tal vez las mismas demostraciones y las construcciones geométricas de las soluciones algebraicas de las ecuaciones hayan desviado la atención de los matemáticos (también de Bombelli) de este tipo de raíces". Pero en el Libro IV de *L'Algebra*, Bombelli introdujo los segmentos negativos y las áreas negativas o nulas para poder operar con ellos. Creemos que la verdadera dificultad para aceptar las raíces negativas se encuentre precisamente en los mismos números negativos como obstáculo epistemológico a nivel aritmético (Cfr. Glaeser).

Si bien Fibonacci ya había anticipado alguna observación al respecto, recién en el 1500 los matemáticos comprendieron que la imposibilidad de resolver ciertas ecuaciones de tercer grado dependía del campo numérico que resultaba incompleto, es decir, no contenía los elementos idóneos para expresar la solución. Bombelli efectuó las sucesivas extensiones del campo euclídeo de racionalidad con la introducción, primero, de los radicales cúbicos y después, de los números complejos.

Es importante destacar que *la necesidad de ampliar el campo numérico con los números complejos no apareció con la resolución de las ecuaciones cuadráticas, sino de aquellas cúbicas*. Es decir, el obstáculo del número complejo no dependía del tipo de ecuación o de problema, sino del *procedimiento* efectuado en la resolución. Porque hasta ese entonces, la presencia de la raíz cuadrada de un número negativo en las ecuaciones de segundo grado implicaba la ausencia de solución; mientras que en las ecuaciones de tercer grado no sucedía lo mismo: a veces, se podía encontrar una expresión imaginaria en el procedimiento de resolución, aunque las tres raíces fueran reales (10). Esto significaba tener que dejar el procedimiento de resolución incompleto por falta de transformaciones algebraicas adecuadas que permitieran concluirlo; por consiguiente, en los casos señalados, la fórmula resolutiva de Dal Ferro-Tartaglia no ofrecía la posibilidad de encontrar la raíz positiva, cuya existencia muchas veces se podía comprobar mediante una simple sustitución. Es decir, la imposibilidad de efectuar un proceso computacional hizo sentir la necesidad de introducir objetos algebraicos de naturaleza más abstracta: los números complejos. Bombelli definió las reglas de cálculo con las irracionalidades cúbicas y con los números complejos, pero los matemáticos de la época no los aceptaban como "verdaderos" números, es decir, como objetos abstractos. Más precisamente, en *L'Algebra* se encuentra todavía una concepción *operativa* de los números irracionales y complejos, la concepción *estructural* de estos números (como verdaderos objetos) arribará en los siglos sucesivos (Cfr. Arzarello *et al.*, pág. 9).

En el desarrollo histórico del lenguaje algebraico, encontramos con frecuencia que los matemáticos manifiestan ciertas ambigüedades para operar en determinadas situaciones con nuevos objetos abstractos, por ejemplo: por un lado, observamos la falta de aceptación de los números negativos como coeficientes o raíces de las ecuaciones, por el otro, si esos números son necesarios para completar el proceso de resolución de un problema entonces vienen utilizados en esta función. Numerosos ejemplos de este tipo se encuentran en el *Trattato d'Algibra* y en *L'Algebra* de Bombelli. Desde el punto de vista de la investigación histórico-epistemológica, sería interesante estudiar si estas ambigüedades operativas se manifiestan debido al obstáculo epistemológico que representan los números negativos.

5- GENERALIZACION DE PROBLEMAS

Un aspecto muy importante en la construcción del lenguaje algebraico es la posibilidad de expresar simbólicamente la generalización de problemas. Los matemáticos antiguos y orientales no disponían de métodos generales, resolvían cada problema de una modo diferente, es decir, no intentaban buscar analogías para clasificarlos en grupos de problemas semejantes. Por el contrario, en el *Liber Quadratorum* (1225) de Fibonacci se manifiesta ya una cierta tendencia a resolver problemas tratando de incluirlos en familias o clases de problemas (Cfr. Leonard de Pisa, pág. 43). Mientras que el autor del *Trattato d'Algibra* clasificó los problemas según las reglas de resolución y transformó las ecuaciones bicuadráticas en cuadráticas y determinadas ecuaciones de tercer y cuarto grado en ecuaciones de segundo grado, dividiéndolas por la incógnita o su cuadrado. En *L'Algebra* de Bombelli se observa un notable progreso con el uso de un lenguaje simbólico adecuado. El objetivo del autor fue lograr una generalización de los problemas que se había planteado, para lo cual: resolvió el problema aritmético en forma analítica, después formuló una regla general de solución prescindiendo de los valores numéricos y por último, aplicó esta regla a la resolución de una ecuación análoga (con coeficientes en función de una cantidad indeterminada). Esto demuestra, precisamente, la importancia que asume el lenguaje algebraico en los procesos de simbolización.

A partir del análisis efectuado, notamos que también Fibonacci y el autor del *Trattato d'Algibra*, utilizando solamente el lenguaje retórico, llegaron a formular ciertas generalizaciones, naturalmente de nivel inferior a aquéllas de Bombelli. Por consiguiente, en el proceso de construcción del lenguaje algebraico es posible distinguir dos niveles de concebir la generalidad de un método: uno relativo a la posibilidad de aplicarlo a una serie de casos específicos y el otro, referido a la posibilidad de expresarlo a través el lenguaje del álgebra simbólica (Cfr. Colin y Rojano, pág. 158).

Creemos que sería interesante considerar una fase sincopada más amplia que comprenda no sólo la introducción de abreviaturas para las incógnitas, sus potencias y ciertas relaciones de uso frecuente, sino también el primer nivel de generalización de un método. El segundo nivel podría pertenecer tanto a la fase sincopada como a aquélla fase simbólica, dependiendo del grado de desarrollo del lenguaje algebraico. Aunque Leonardo y el autor del *Trattato d'Algibra* hayan utilizado fundamentalmente el lenguaje natural, el agrupar los problemas en clases de problemas nos da la posibilidad de considerarlos en una de las fases del álgebra sincopada. De acuerdo con este punto de vista, el pensamiento algebraico comienza antes del simbolismo (Cfr. Arzarello *et al.*, pág. 10).

6- CONCLUSIONES

Como Anexo I se agregan dos cuadros. El Cuadro N° 1 presenta un esquema del desarrollo histórico del lenguaje algebraico hasta el 1500. En el Cuadro N° 2 se propone una clasificación más detallada de las fases de la evolución del lenguaje algebraico, considerando no sólo el uso de un simbolismo adecuado, sino también el grado de generalidad del método aplicado y el nivel de argumentación utilizado en la resolución de ecuaciones (Cfr. Malisani, 1996, pág. 74-77).

Este artículo pretende ser el punto de partida de futuros estudios sobre los obstáculos epistemológicos relativos al lenguaje algebraico. En consecuencia, creemos oportuno formular algunas sugerencias desde el punto de visto histórico:

* el desarrollo del lenguaje algebraico ha sido muy lento y dificultoso: se pasa de ciertos *nombres* para designar a la incógnita y algunas relaciones, a las *abreviaturas de estas palabras*, a los *códigos intermedios* entre el lenguaje retórico y el sincopado y por último, a los *símbolos*. Es decir, estas abreviaturas y estos códigos se van depurando gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas.

* en la fase sincopada es necesario apoyarse en otros lenguajes: natural, aritmético o geométrico, semánticamente más ricos, para formular las reglas, para interpretar y resolver los problemas. Con la elaboración de un lenguaje algebraico adecuado, los otros lenguajes se abandonan progresivamente.

* en la fase de transición entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico, ciertos obstáculos a nivel aritmético pueden retardar el desarrollo del lenguaje algebraico y la introducción de nuevas estrategias y de nuevos contenidos algebraicos puede eclipsar los conocimientos aritméticos anteriores (Cfr. Malisani, 1990 y1993).

* la necesidad de introducir nuevos objetos de naturaleza más abstracta aparece siempre con la imposibilidad de completar un procedimiento resolutivo de un problema particular, es decir, un proceso computacional.

* en el proceso de construcción del lenguaje algebraico es posible distinguir dos niveles de concebir la generalidad de un método: uno relativo a la posibilidad de aplicarlo a una serie de casos específicos y el otro, referido a la posibilidad de expresarlo a través el lenguaje del álgebra simbólica.

Desde el punto de vista de la investigación en Didáctica, se deberían individuar los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del álgebra y efectuar un estudio experimental, considerando no sólo el camino histórico-epistemológico, sino también otros caminos significativos para la formalización del nuevo lenguaje. También sería interesante poder investigar la relación entre el lenguaje algebraico en construcción y los otros lenguajes -natural, aritmético y geométrico- en la comunicación de las Matemáticas y de qué modo estos lenguajes pueden contribuir y/o interferir en el desarrollo del lenguaje algebraico, en los aspectos sintaxis-semántica y relacional-procedural.

NOTAS

(1) Los babilonios usaban las palabras *us* (largo), *sag* (ancho) y *asa* (área) como incógnitas, no porque las incógnitas representaran necesariamente estas cantidades geométricas, sino que probablemente muchos problemas algebraicos habían nacido de situaciones geométricas y de este modo, la terminología geométrica se había vuelto standard.

(2) Leonardo Pisano (≈1170-≈1250), llamado Fibonacci, escribió dos obras de fundamental importancia: el *Liber Abaci* (1202) y el *Liber Quadratorum* (1225). El objetivo de la primera era introducir en Europa el sistema de numeración indo-arábico y los métodos de cálculo hindúes. La segunda contiene importantísimos resultados sobre la Teoría de Números y por este motivo, algunos autores (Bortolotti, 1950) consideran este trabajo como el de mayor valor -en el dominio de esta teoría- realizado durante los quince siglos que separan Diofanto de Fermat. Desafortunadamente esta obra permaneció desconocida durante más de seis siglos y ciertos resultados de relevancia tuvieron que esperar la llegada de Fermat.

(3) El *Trattato d'Algibra*, escrito a fines del siglo XIV, representa mucho más que un clásico tratado de ábaco, es un testo de álgebra amplio y orgánico: ya que no sólo desarrolla todos los temas mercantiles que caracterizan este tipo de tratado, sino que también contiene una entera sección dedicada al álgebra. La misma constituye un importante aporte a la teoría de la resolución de ecuaciones. Franci y Pancanti (1988, pág. VI) consideran que es uno de los mejores textos medievales y renacentistas que ellas hayan analizado y señalan que los capítulos correspondientes al álgebra son esenciales para la reconstrucción de la historia de esta disciplina entre los siglos XIII y XVI.

(4) **Proposición 28**: *Dados un paralelogramo y un polígono, construir sobre una recta* (por segmento) *otro paralelogramo que supere a un tercer paralelogramo semejante al paralelogramo dado, en un área igual a la del polígono dado. Es necesario que el área del polígono dado no sea mayor que la correspondiente al paralelogramo construido sobre la mitad de la recta dada y semejante al paralelogramo dado.* Este teorema es el equivalente "geométrico" de la resolución de la ecuación de segundo grado: $ax - (b/c)\,x^2 = S$ donde a es la recta dada, S es el área del polígono dado, b y c son los lados del paralelogramo dado. La segunda parte: $S \leq a^2c/4b$ es la restricción necesaria para que las raíces de la ecuación sean reales.

Proposición 29: *Dados un paralelogramo y un polígono, construir sobre una recta otro paralelogramo tal que su área sumada a la de un tercer paralelogramo semejante al paralelogramo dado sea igual al área del polígono dado.* En términos algebraicos este teorema corresponde a la ecuación: $ax+(b/c)x^2= S$ con $a, b, c,$ e S números positivos dados. S no está sujeta a ninguna restricción (solamente debe ser positiva) porque la ecuación admite siempre una solución real .

(5) **Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî** (≈780-≈850) escribió un tratado de aritmética llamado: *Algorithmi de numero indorum*. El vocablo *"Algoritmo"* proviene precisamente de la alteración del nombre *al-Khowârizmî* atribuido a Mohammed. Este término, después de haber sufrido numerosas variaciones tanto de significado como de denominación, comenzó a utilizarse para designar un constante procedimiento de cálculo (Loria, pág. 336-337). Al-Khowârizmî escribió también un libro de álgebra: *Al-jabr w'al muqâbala* y en este

título indicó precisamente las dos operaciones fundamentales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. El vocablo *al-jabr* significa "restablecer", es decir, restablecer el equilibrio entre los miembros de una ecuación mediante la transposición de términos y la palabra *al muqâbala* significa "simplificación", esto es, el agrupar los términos semejantes. La palabra *al-jabr* se transformó en *algebrista* en España, se convirtió en *algebrae* traducida en latín y por último, fue abreviada en *álgebra* para indicar el nombre de la disciplina.

(6) Los egipcios escribían las fracciones de numerador distinto de 1 y diferente de 2/3 como sumas de fracciones unitarias (con numerador igual a 1). Su aritmética era esencialmente aditiva, porque efectuaban las cuatro operaciones con fracciones utilizando precisamente la descomposición en fracciones unitarias. De este modo, los cálculos se volvían laboriosos y complicados en su ejecución. Un análisis detallado sobre este tema se encuentra en Loria (pág. 41-47) y Malisani (1996, pág. 27-28).

(7) El elenco de los 25 tipos de ecuaciones resueltas en el *Trattato d'Algibra* es el siguiente:

1. $ax = b$	9. $ax^3 = bx^2$	17. $ax^4 + bx^3 = c\,x^2$
2. $ax^2 = b$	10. $ax^3 + bx^2 = c\,x$	18. $ax^4 + cx^2 = b\,x^3$
3. $ax^2 = bx$	11. $ax^3 + cx = b\,x^2$	19. $ax^4 = b\,x^3 + cx^2$
4. $ax^2 + bx = c$	12. $ax^3 = bx^2 + cx$	20. $ax^4 + bx^2 = c$
5. $ax^2 + c = bx$	13. $ax^4 = b$	21. $ax^4 + c = b\,x^2$
6. $ax^2 = bx + c$	14. $ax^4 = bx$	22. $ax^4 = bx^2 + c$
7. $ax^3 = b$	15. $ax^4 = bx^2$	23. $ax^3 + bx^2 = c$
8. $ax^3 = bx$	16. $ax^4 = bx^3$	24. $ax^3 = bx^2 + c$
		25. $ax^3 + c = bx^2$.

(8) *L'Algebra* de Bombelli (escrita aproximadamente en el 1550 y publicada en parte en el 1572 y en el 1579) representa una obra de gran importancia y se distingue de cualquier otro texto de la época. Se compone de cinco libros, en los tres primeros el autor presenta en modo sistemático la teoría de la resolución de las ecuaciones de los primeros cuatro grados; y en los dos últimos (publicados recién en el 1929) efectúa la demostración geométrica de los resultados obtenidos en los primeros tres libros y la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del álgebra. Es interesante observar que la disposición y el orden de los temas tratados, los procedimientos constructivos y demostrativos seguidos y el nivel del lenguaje utilizado representan un paso importantísimo hacia la construcción del álgebra simbólica.

(9) Las *nociones protomatemáticas* son aquellos conocimientos que los matemáticos utilizan sin haberles dado una denominación o haberlos definido en términos matemáticos (implícitos) (Cfr. Spagnolo, 1996, pág. 17).

(10) Las ecuaciones del tipo: $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$, se resuelven aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \pm\left[\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}}\right]$$

precisamente cuando $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2 < 0$, aparece la raíz cuadrada de un número negativo, es decir, un número imaginario. Sin embargo, cuando las dos raíces cúbicas que componen la solución resultan números complejos conjugados, dicha solución es un número real.

BIBLIOGRAFIA

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.

BACHELARD, G., 1972. *La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo.* (Siglo XXI: Buenos Aires).

BALLIEU, M, 1993. Les rapports entre l'algèbre et la géométrie dans l'oeuvre de 'Umar al-Khayyam et Sharaf ad-Din at-Tusi (cinq siècles avant Descartes et Newton). *Mathématique & Pédagogie*, 91, pág. 7 - 21.

BERZOLARI, E., 1950. *Enciclopedia della Matematica Elementare.* Vol. III, Parte 2. (Hoepli: Milano).

BOMBELLI, R., 1966. *L'Algebra.* Con la introducción de U. Forti y el prefacio y el análisis de E. Bortolotti. (Feltrinelli: Milano).

BORTOLOTTI, E., 1950. Storia della Matematica Elementare. In L. Berzolari (ed.). Vol. III, Parte 2.

BORTOLOTTI, E., 1966. Prefacio y Análisis de "L'Algebra". En Bombelli, pág. XXV-LIX.

BROUSSEAU, G., 1986. *Theorisation des Phenomenes d'Enseignament des Mathematiques.* These d'Etat. (Bordeaux).

COLIN, J. y ROJANO, T., 1991. Bombellli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. *L'educazione matematica, XII* (2), pág. 125 - 161.

CORNU, B., 1983. *Apprentissage de la notion de limite. Conception et Obstacle.* IREM Grenoble.

DOUROUX, A. , 1983. La valeur absolue: difficultes majeurs pou une notion mineure. *Petit X,* (3).

EUCLIDE, 1930. *Gli Elementi,* Libro V - IX. Ed. por F. Enriques y colaboradores. (Zanichelli: Bologna).

FRANCI, R. y PANCANTI, M., 1988. Introducción de "Il Trattato d'Algibra". En Anónimo, pág. I - XXIX.

GLASER, G., 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2-3.

GUILLEMOT, M., 1990-91. *Entre arithmetique et algebre: les methodes de fausse position.* Fascicule 5: Didactique des Mathématiques. (Institut de Recherche Mathématique: Rennes).

IL TRATTATO D'ALGIBRA, 1988. (manuscrito anonimo del Siglo XIV). A cargo y con la introducción de R. Franci y M. Pancanti. Siena, Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale, 18.

KIERAN, C. y FILLOY, E., 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), pág. 229 - 240.

KLINE, M., 1991. *Storia del pensiero matematico.* Vol. I. (Einaudi: Torino).

LEONARD DE PISA, 1952. *Le livre des nombres carrés.* A cargo y con la introducción de P. Ver Eecke. (Desclée de Brouwer: Bruges).

LORIA, G., 1929. *Storia delle Matematiche.* Vol. I. (Einaudi: Torino).

MALISANI, E., 1990. Incidencia de distintos tipos de estructura lógica de un problema sobre la conducta de resolución. *Revista Irice, 1,* pág. 41 - 59. (Traducción italiana en *Quaderni di Ricerca in Didattica G.R.I.M., 3,* pág. 65 - 86, 1992).

MALISANI, E., 1993. *Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici.* Tesi di Laurea, Università degli Studi di Palermo.

MALISANI, E., 1996. Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. *Quaderni di Ricerca in Didattica G.R.I.M., 6,* pág. 26 - 77.

RAPISARDI, F., 1865. Uno sguardo agli algebristi italiani. *Giornale del Gabinetto Letterario dell'Accademia Gioenia,* 4 (3), pág. 165 - 180. (Recopilación sobre el *Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze Naturali,* 24 (338), pág. 41 - 56, 1991).

SIERPINSKA, A., 1985. Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6(1).

SPAGNOLO, F., 1996. *Obstacles Epistemologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede.* Tesis de Doctorado, Universidad de Bordeaux I. Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., Supplemento n. 5. Publicada por el Atelier de Reproduction des Théses Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).

ZAPELLONI, M.T., 1930. Comentario sobre las proposiciones 28 - 29 del Libro VI de los Elementos de Euclides. En Euclide, pág. 150 - 157.

CUADRO N° 1: DESARROLLO HISTORICO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

REPRESEN-TANTES	CONOCIMIENTOS ARITMETICOS	LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE GEOMETRICO	SIMBOLISMO	NIVEL DE GENERALIZACION	TIPOS ECUACIONES	METODOS DE RESO-LUCION
BABILO-NIOS (˜ 2000 a.C.)	Sistema posicional de bases 60 y 10. Nú-meros enteros, algunas fracciones.	Principal soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----	Resolución de problemas individuales.	Cuadráticas. Bicuadráticas.	Completar el cuadrado.
EGIPCIOS (˜1700 a.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números enteros, algunas fracciones.	Principal Soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----	Resolución de Problemas individuales.	Lineales. Cua-dráticas del tipo: $ax^2 = b$.	Regla de la falsa posición.
EUCLIDES (˜300 a.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números Racionales e irracionales cuadráticos positivos.	Soporte de expresión.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	-----	Resolución de problemas individuales.	Lineales. Cuadráticas.	Construcción geométrica.
DIOFANTO (˜250 d.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números Racionales e irracionales cuadráticos positivos.	Soporte procedural.	-----	Introducción de abreviaturas para la incógnita y sus potencias.	Resolución de problemas individuales.	Lineales, cuadráticas y cúbicas: determinadas e indeterminadas.	Aritméticos.
CHINOS (Sig. III a.C.- Sig. III d.C.)	Números racionales positivos. Algunos irracionales.	Soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----	Resolución de problemas individuales.	Primero y segundo grado.	Regla de la doble falsa posición.
HINDUES (˜500 – ˜1200)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos.	Soporte procedural.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	Introducción de abreviaturas para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones.	Resolución de problemas individuales.	Lineales y cuadráticas determinadas e indeterminadas. Algunas ecuaciones cúbicas y cuárticas.	Aritméticos (regla de la simple falsa posición).

ARABES (˜800 – ˜1300)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).	Soporte de expresión.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	Introducción de nombres especiales para la incógnita y sus potencias.	Tendencia a la resolución de clases de problemas.	Lineales. Cuadráticas. Cúbicas.	Regla de la falsa posición. Fórmula resolutiva. Geométricos (analítico)

REPRESEN-TANTES	CONOCIMIENTOS ARITMETICOS	LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE GEOMETRICO	SIMBOLISMO	NIVEL DE GENERALIZACION	TIPOS ECUACIONES	METODOS DE RESOLUCION
LEONARDO PISANO (˜1170 - ˜1250)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).	Soporte de expresión.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	Introducción de nombres especiales para la incógnita y sus potencias.	Resolución de clases de problemas.	Lineales. Cuadráticas.	Aritméticos (Regl de la falsa posición). Geométricos.
IL TRATTA-TO D'ALGIBRA (Anónimo del Siglo XIV)	Números racionales e Irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).	Soporte de expresión y procedural.	-----	Introducción de nombres especiales para la incógnita y sus potencias.	Resolución de clases de problemas.	Lineales. Cuadráticas. Sistemas. Algunas ecuacior cúbicas y cuártic	Formales[1]. Regla de la falsa posición.
ALGEBRIS-TAS DEL 1500 (anteriores a Bombelli)	Números racionales e Irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).	Soporte procedural.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	Introducción de abreviaturas para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones.	Resolución de clases de problemas.	Ecuaciones de los primeros cuatro grados.	Formales.

[1] Por **métodos formales de resolución** entendemos: la transposición de términos de un miembro al otro o la aplicación de la misma operación a ambos miembros para las ecuaciones de primer grado; la fórmula resolutiva para las ecuaciones cuadráticas y la cúbicas incompletas; el procedimiento de transformación a una ecuación de segundo grado para las ecuaciones bicuadráticas.

BOMBELLI (˜1526 - ˜1572)	Números racionales e Irracionales cuadráticos. Números negativos. Irracionales cúbicos. Números imaginarios.	Soporte para completar la comunicación.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos y algebraicos.	Introducción de una notación particular para la incógnita, sus potencias y las relaciones de uso frecuente.	Resolución de clases de proble-mas expresados mediante fórmulas.	Ecuaciones de los primeros cuatro grados.	Formales.

VIETE (˜1540 - ˜1603)	Números reales y complejos.	-----	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos Euclídeos y algebraicos.	Introducción de símbolos para la incógnita, sus potencias, los coeficientes genéricos y las relaciones de uso frecuente.	Resolución de clases de proble-mas expresados mediante fórmulas.	Ecuaciones de los primeros cuatro grados.	Formales.

CUADRO N° 2: FASES DE LA EVOLUCION DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

FASES	LENGUAJE NATURAL	GEOMETRIA	ARITMETICA	EJEMPLOS
ALGEBRA RETORICA 1	Si	* Argumentación con instrumento pre-euclídeos. * Resolución de un problema a la vez.	Lenguaje de soporte procedural.	Babilonios, egipcios, chinos.
ALGEBRA RETORICA 2	Si	* Argumentación completa con instrumentos euclídeos. * Resolución de un problema a la vez.	Lenguaje de soporte procedural.	Griegos clásicos: Euclides.
ALGEBRA SINCOPADA 1	Si	Resolución di un problema a la vez.	Introducción de abreviaturas para la incógnita y sus potencias.	Diofanto, hindúes.
ALGEBRA SINCOPADA 2	Si	Resolución de clases de problemas.	Introducción de nombres o de abreviaturas para la incógnita y sus potencias.	*Trattato d'Algibra* (Anónimo del Siglo XIV), arabes[2].
ALGEBRA SINCOPADA 3	Si	* Argumentación completa con instrumentos euclídeos. * Resolución de clases de problemas.	Introducción de nombres o de abreviaturas para la incógnita, sus potencias \y algunas relaciones.	Fibonacci[3], Algebristas del 1500.
ALGEBRA SINCOPADA 4	Si	* Argumentación completa con instrumentos euclídeos y algebraicos. * Resolución de clases de problemas expresados mediante fórmulas.	Introducción de una notación particular para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones de uso frecuente.	Bombelli.
ALGEBRA SIMBOLICA[4]	No	* Argumentación completa con instrumentos euclídeos y algebraicos. * Resolución de clases de problemas expresados mediante fórmulas.	Introducción de símbolos para la incógnita, sus potencias, los coeficientes genéricos y algunas relaciones de uso frecuente.	Viète.

[2] Utilizan solamente algunos nombres para llamar a la incógnita y sus potencias, pero argumentan con instrumentos euclídeos.
[3] Usa solamente algunos nombres para denominar a la incógnita en la parte final del *Liber Quadratorum*.
[4] No hemos considerado diferentes niveles para el *Algebra simbólica*, porque el análisis histórico efectuado en este trabajo se interrumpe precisamente con la introducción del símbolo.