UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO
Facoltà di Scienze della Formazione

Lectio

Magistralis

« L'enseignement des mathématiques et l'acculturation à ses pratiques, dans la scolarité obligatoire »

Guy Brousseau

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO
Facoltà di Scienze della Formazione

L'enseignement des mathématiques et l'acculturation à ses pratiques, dans la scolarité obligatoire

Guy Brousseau

Monsieur le recteur, Messieurs et mesdames les doyens,
Distingués Invités, Chers Collègues et Chers Amis,
Merci de me recevoir dans cette dignité, au sein du savant collège de cette Université connue entre autres, pour la qualité de ses mathématiciens.
Je serais fier de rejoindre Giovani Prodi et de porter le titre dont vous m'honorez aujourd'hui… si j'en étais digne. Car je dois avouer, à ma honte, mon incompétence dans les questions de formation dans les autres disciplines que les mathématiques, et hélas aussi mon amateurisme dans les autres domaines des sciences de l'éducation.
Mais je suis fier et très heureux de vous voir mettre l'accent sur ce qui a été ma passion professionnelle et l'objet principal de mes travaux et de mes recherches : *l'enseignement des mathématiques et l'acculturation à ses pratiques, dans la scolarité obligatoire*. Je vais donner un aperçu des difficultés de ce domaine.

1) La double contrainte à propos des connaissances sur l'enseignement primaire.

La société attend que les enseignements à ce niveau assurent la culture nécessaire à sa cohésion ; ils doivent suffire aux travaux et aux échanges utiles à la totalité de la population. L'enseignement doit donc à la fois, transmettre la culture commune léguée par l'histoire, et diffuser les bases solides et correctes des sciences actuelles. Or ces deux ambitions sont concurrentes, souvent opposées et même incompatibles, car d'une part, la culture charrie nombre d'erreurs et d'errements dont la science s'est débarrassée en se corrigeant et en se réorganisant, et qui encombrent les études, et d'autre part, la science produit sans cesse des concepts nouveaux qui tardent à être disponibles dans la culture commune.
Je veux illustrer par des exemples les difficultés que rencontre l'enseignement à aligner ses objectifs sur ces deux ambitions.

Exemple 1. *La numération orale irrégulière*

Une partie des français conserve jalousement une irrégularité dans la numération orale. Entre 60 et 100 la dénomination reprend l'ancien système de numération à base vingt et soixante. Le nombre qui suit soixante neuf se dit « soixante-dix », la dizaine suivante est celle des « quatre-vingt » pour 80, suivie des « quatre vingt dix ». Les enfants doivent lire quatre-vingt-treize un nombre où ne figure aucun des chiffres quatre, vingt ou treize, et où on ne prononce ni neuf ni trois ! Cette irrégularité ridicule aux yeux des étrangers agace les étudiants en français et bloque la progression des enfants dans la connaissance des nombres pendant environ deux mois en première année de primaire. Le siècle des lumières l'a bannie et a recommandé la régularisation en « septante », « octante » et « nonante ». La révolution de 1789 l'a imposée, des pays francophones et des régions entières l'ont adoptée et améliorée (huitante). Jusque dans les années 1970 les instructions ministérielles la recommandaient… rien n'y a fait ! Voilà une réforme dont les avantages ne font pas de doute, qui ne demande ni recherches, ni formation des professeurs, ni matériel nouveau, et sur laquelle tout le monde est d'accord. Qu'est-ce qui résiste donc ?

Exemple 2. *Le symbole* « = »

L'arithmétique élémentaire n'a aucun besoin du symbolisme algébrique. Mais à l'inverse de l'exemple précédent, l'enseignement a cru préparer l'apprentissage de l'algèbre en introduisant dès la première année de primaire, des écritures comme « 3 + 4 = 7 ». Or, dire « 3 et 4 sont 7 », interprété au 19ième siècle par « 3 et 4 font 7 » est déjà différent et plus clair que « 3 plus 4 égale 7 ». L'usage des signes d'opérations et des parenthèses pourrait être une sténographie utile puisque l'arithmétique du primaire s'occupe essentiellement de termes numériques qui, comme « (70 x 3) + 12 », expriment des mesures ou des scalaires que l'on calcule et compare.

Par contre, dans ces usages, le calcul formel sur des relations, même sans lettres, n'a pas d'utilité, celui sur des expressions littérales est renvoyé à plus tard.

Pourquoi obscurcir les études primaires avec des enseignements précoces inappropriés ?

Car en plus, il a des inconvénients : les signe « = » de l'école primaire exprime l'identification d'un nombre avec son écriture canonique. Elle est une relation dissymétrique 7=3+4 n'y a pas de sens car pour les élèves, « = » signifie « on trouve »). Elle est plutôt pensée et utilisée par les élèves comme une fonction +(3,4) → 7 ou (fonction +4)(3) → 7.

Par suite, toutes les égalités algébriques, seront, non seulement lues de gauche à droite, mais elles seront considérées implicitement de façon dissymétrique, par exemple lors de la recherche des démonstrations.

Les errements à ce propos ne sont pas des caractéristiques de l'école primaire. L'écriture = dans l'expression $9x^2 = 4$ n'est toujours pas symétrique (on ne peut pas en général remplacer 4 par $9x^2$). Il faudrait utiliser le symbole d'attribution « := ». Et lorsqu'il s'agit d'une véritable égalité comme dans $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a.b$, on l'appelle équivalence et on met un autre signe : « $\equiv$ »! Cette cocasse anomalie est encore usitée par beaucoup de mathématiciens. Quand l'anomalie n'a pas de conséquences locales visibles, elle est conservée et mentalement corrigée par les experts. Mais dans l'enseignement, les élèves, par définition, ne sont pas des experts et ni les professeurs ni le public ne sont en mesure de rectifier les interprétations malignes.

Est-il désespéré d'introduire des connaissances correctes pour les notions indispensables à l'école primaire ?

Exemple 3. *Les rationnels*

Evidemment l'expression mathématique de ce qui est enseigné à l'école primaire n'est pas simple. Par exemple : « symétriser le monoïde multiplicatif opérant dans N » est une expression exacte pour dire « définir les fractions positives », mais elle ne semble pas de nature à faciliter ni l'enseignement ni l'apprentissage.

Pourtant, mes collaborateurs et moi avons montré qu'elle permet de concevoir ce que les élèves vont apprendre et comment ils vont le comprendre en attendant de pouvoir éventuellement le formuler– mais bien plus tard - de cette manière. Le vocabulaire n'est pas du niveau primaire mais la construction elle-même si !

Nous avons ensuite – je garde la formulation mathématique - considéré le groupe linéaire de la structure ainsi obtenue –elle n'a pas de nom canonique - afin d'aider les élèves à comprendre dans toute leur généralité les produits de rationnels et le calcul des fonctions linéaires. Puis nous avons montré que les calculs dans le monoïde des rationnels et dans son dual étaient équivalents et nous avons pu unifier explicitement la structure, en ayant visité la foule des vocabulaires liés aux vestiges des multiples approches des fractions subsistant dans la culture. Parallèlement nous avons introduit les décimaux comme filtre de Fréchet pour approcher les rationnels et nous en avons déduit leurs propriétés topologiques et algébriques.

Explicitées en 500 pages, les 65 leçons qui correspondent à ce programme ont pu être réalisées avec succès pendant vingt ans dans une école presque ordinaire avec des enfants ordinaires.

Nous avons fait aussi cette opération pour tous les concepts mathématiques introduits à l'école primaire : les naturels et leurs opérations, les mesures, les rationnels et les décimaux, les statistiques et les probabilités, l'espace et la géométrie, etc.

Nous avons ainsi montré qu'il existe des constructions qui respectent la signification actuelle des concepts mathématiques, que tous les élèves peuvent les utiliser pour apprendre les connaissances visées, que certaines des limitations montrées par Piaget étaient basées sur des pratiques didactiques implicites mais qui n'ont rien d'inéluctables et que ces enseignements ne prennent pas plus de temps que l'enseignement « classique ».

Mais il est vrai que les conditions actuelles et les connaissances disponibles dans nos sociétés ne permettent pas l'extension ni même la réplication de cette expérience (qui n'était d'ailleurs pas conçue pour cela) dans des classes ordinaires.

2) Même alternative pour les méthodes d'enseignement

Le dilemme est le même pour les méthodes d'enseignement. Chacun a appris des autres à peu près tout ce qu'il sait et se sent capable d'en enseigner la plus grande partie. La culture qui soutient ce sentiment est aujourd'hui basée sur les conceptions de Comenius, illustrées et durcies par des rationalisations behavioristes.

D'autre part, aujourd'hui, une énorme quantité de connaissances disparates, issues de toutes sortes de sciences et de techniques, proposent des modifications de tous les aspects du système d'éducation. La psychologie, la sociologie la linguistique… ne forment que le premier rang derrière lequel se presse un univers de techniques et d'intentions diverses. La plupart des suggestions tirées de ces travaux conduisent à des mesures en contradiction avec le modèle de Comenius et avec l'épistémologie naïve qui lui est associée.

Il en résulte des cascades de réformes qui, malgré les efforts de nombreux enseignants, sont perçues comme décevantes parce qu'elles s'opposent finalement au modèle ancien.

Le contrôle social de l'éducation est importé d'une conception naïve de l'économie libérale. Ce modèle prévoit qu'en fonction du résultat, les décideurs se contentent de répercuter leur mécontentement en exerçant des pressions sur les agents du système, ici les professeurs, qui font pareil avec les élèves. Mais si ces corrections sont par essence inopérantes, le modèle de contrôle ne fonctionnera pas. Des cochers peuvent fouetter les locomotives, et même les conducteurs, elles n'iront pas plus vite.

Les changements ne peuvent s'effectuer avec succès que si une connaissance scientifique des processus didactiques permet d'en contrôler l'importation, d'en prévoir les effets et la façon d'y remédier. Mais elle ne peut être mise en œuvre que si la culture didactique correspondante est partagée par les professeurs, les populations et par les scientifiques. En fait, les décalages sont irrémédiables : le processus didactique dans les écoles est conditionné par le processus didactique relatif à la culture mathématique dans la société toute entière.

3) Les institutions

Qui détient le pouvoir de modifier la culture commune sur l'éducation, de réduire les divergences, de concilier les pratiques d'enseignement, d'arbitrer les oppositions décrites ci-dessus ? Qui peut faire évoluer les fondements épistémologiques sur lesquels une société base sa gestion de l'éducation commune de ses membres ?

A mon avis, personne ou tout le monde :

Les politiques ? Leur marge de manœuvre est très faible. Ils ne peuvent prendre de décisions que s'ils croient qu'elles peuvent être désirées ou au moins « comprises ». Ils doivent suivre les « demandes » de leurs mandants, ou ne les précéder que de peu. Je ne parle pas ici des manipulations où l'éducation n'est qu'un plastron, un argument rhétorique ou même un instrument purement politique ou économique.

Les médias ? Eux aussi sont assez largement assujettis à l'opinion commune : ils ne peuvent que répercuter des évènements qui existent ou semblent exister.

Les professionnels de l'enseignement ? En particulier les professeurs ? Ils sont en première ligne, soumis aux appréciations des élèves, des parents et du public. Ils sont aujourd'hui bombardés par tous les messages venus de toutes les institutions qui peuvent tirer un bénéfice quelconque de l'extension de leur intervention dans le circuit éducatif. Pensons-y un peu… nous y trouvons vraiment beaucoup de monde !

Les scientifiques ? lesquels ? Nous voyons tour à tour la pédagogie, la psychologie, la sociologie, la médecine, l'économie, les neurosciences et la multitude des autres spécialistes etc. se présenter en chevalier blanc, mais aucun domaine ne propose un moyen de contrôler a priori l'utilisation de ses connaissances en prenant appui sur une connaissance scientifique de l'acte d'enseignement lui même. Mais la didactique n'est pas soluble dans la réunion des sciences classiques.

4) La didactique

Sans renoncer à aucun des apports des autres sciences, j'ai choisi pour mes travaux dans les années 60, un rattachement aux sciences mathématiques. En 1975, ils pouvaient se situer dans l'épistémologie expérimentale, mais j'ai voulu relever le défi d'un vieux terme très péjoré et j'ai choisi le terme de « didactique des mathématiques ». Les mathématiciens ont vaillamment essayé de mettre en œuvre une réforme des contenus de l'enseignement pour l'adapter au langage, à l'organisation et aux sujets des mathématiques que les ambitions de la société scientifique et industrielle de l'époque appelaient. Ils ont même créé des Instituts (IREM), pour réaliser les dispositifs nécessaires, pour contrôler et accompagner leur réforme, mais aussi pour effectuer les recherches qui devaient éclairer les mathématiciens sur leurs projets en éducation. Ces actions ont eu leurs succès et leurs déboires, les deux à la mesure des efforts accomplis et de l'ignorance du domaine de la didactique.

J'ai utilisé les moyens qu'ils m'ont offerts pour organiser une institution dédiée à *l'observation de l'enseignement* des mathématiques dans des classes : le COREM ; un lieu destiné à familiariser les mathématiciens avec l'enseignement primaire et surtout conçu comme un dispositif pour faire apparaître inéluctablement des connaissances de didactique, pour les rendre nécessaires au fonctionnement de l'institution, pour les soumettre à l'épreuve de l'expérimentation et à l'occasion à celle de l'expérience. Conçue suivant les principes de la théorie des situations mathématiques, cette institution était un véritable « didactron ». Grâce aux efforts de nombreux valeureux collaborateurs de diverses professions il a fonctionné pendant 25 ans.

Voilà qui devrait placer ces recherches dans le domaine de l'anthropologie. Mais la création et l'étude de dispositifs nouveaux ou bien l'ingénierie didactique, y paraissent un peu singulières. Et surtout, l'objectif avoué de l'utilisation de nos connaissances n'est guère compatible avec l'anthropologie. En effet, la didactique est l'étude des conditions de diffusion d'informations vers des récepteurs *qui par définition, ne sont pas demandeurs de cette information et qui n'en voient pas la nécessité*. Il faut assumer le fait que l'enseignement veut changer les élèves, et qu'il les manipule, certes sous le mandat d'une société qui légitime cette action. Mais, comme en médecine, la seule contemplation des phénomènes n'est pas suffisante, alors que le respect de l'objet étudié est la règle en anthropologie. Et ceci parce que la didactique des mathématiques reste toujours un moyen de renseigner les mathématiciens sur la façon de diffuser leurs connaissances.

En didactique, pour la scolarité obligatoire, les problèmes éthiques sont la première condition et le premier moteur des recherches.

5) Les dérives

Je veux terminer en présentant un exemple qui donne une idée des enjeux de la didactique. Ce phénomène n'est pas spécifique des mathématiques mais il est particulièrement important pour leur enseignement. Nous avons pu le détecter et l'étudier sur une longue période..

Exemple 4 : *le mésusage didactique, social et politique de l'évaluation*

En 1979 dans une communication à IACME j'ai dénoncé les méfaits déjà observés de l'évaluation par des tests de contrôle *au cours* des processus d'apprentissage, quand ils étaient associés à des décisions didactiques de type behavioriste. Après avoir modélisé les réactions des professeurs aux échecs des élèves, je prévoyais à long terme des effets comme la centration sur les objectifs de bas niveaux taxinomiques, l'augmentation des échecs dans la résolution des problèmes, l'allongement du temps d'enseignement et donc la réduction des objectifs, le maintien et même l'augmentation des taux d'échecs,...

Des analyses plus récentes montrent par quels mécanismes l'usage sans frein de ces méthodes conduit à des inconvénients plus graves et plus tenaces :

- l'effacement de l'évaluation humaine des résultats au profit d'images réduites et faiblement informatives,
- le détournement de la fonction des problèmes d'une façon qui empêche l'acculturation tranquille des élèves aux pratiques mathématiques en augmentant leur angoisse de façon insoutenable,
- une pratique des mathématiques et donc de leur apprentissage, totalement individuelle, ce qui constitue une erreur épistémologique et surtout didactique.

Le système est récursif : l' « abaissement du niveau » et l'impuissance structurelle du système à le corriger et à échapper à ses causes, renforce ces dernières. Aux Etats-Unis, sous l'influence du behaviorisme et de l'idéologie libérale, l'instrumentalisation politique radicale de l'inquiétude créée par cette pratique d'évaluation (Hight Stakes Tests) appuyée par la loi No Child Left Behind, conduit à des « dommages collatéraux » qui inquiètent et scandalisent tous les professionnels de l'enseignement. (Les conséquences sociales et culturelles en sont démontrées et dénoncés dans un ouvrage de Nichols et Berliner).

Conclusion

J'arrête ici cet aperçu du domaine que j'essaie de servir, avec l'aide de nombreux collaborateurs, en particulier celle de mes amis de Palerme et que votre récompense distingue et honore avec moi. Monsieur le Recteur, Monsieur le doyen, mes chers collègues et amis, je tiens à nouveau à vous exprimer ma gratitude et ma fierté d'être admis parmi les docteurs Honoris Causa de cette honorable Université.

Et de me permettre de passer en quelque sorte, de l'enseignement primaire au collège… de cette assemblée.