

Actes / Proceedings

CIEAEM 66

Lyon

21-25 juillet / July 2014



Dessin de Victor Bousquet

Editor : Gilles Aldon

Editor of the Journal : Benedetto Di Paola and Claudio Fazio

International program committee : Gilles Aldon (F), Peter Appelbaum (USA), Françoise Cerquetti-Aberkane (F), Javier Diez-Palomar (ES), Gail Fitzsimmons (AU), Uwe Gellert (D), Fernando Hitt (Ca), Corinne Hahn (F), François Kalavasis (Gr), Michaela Kaslova (CZ), Corneille Kazadi (Ca), Réjane Monod-Ansaldi (F), Michèle Prieur (F), Cristina Sabena (I), Sophie Soury-Lavergne (F).

Chapitre 2

Semi-Plenaries

2.1 Learning with touchscreen devices : the manipulation to approach and the game-approach as strategies to improve geometric thinking

Ferdinando Arzarello*, Marcelo Bairral** & Carlotta Soldano*

*Università di Torino, **Federal Rural University of Rio de Janeiro

Résumé : La capture et l'analyse des différentes utilisations de l'écran tactile peuvent contribuer à une nouvelle façon d'étudier la géométrie dynamique avec la technologie *multi-touch*. Nous discutons ici les données de trois expériences d'enseignement : deux avec élèves italiens de l'école secondaire et une avec élèves brésiliens de mathématiques du premier cycle. Toutes les expériences ont été filmées. Les étudiants ont travaillé sur les tâches proposées sur un périphérique tactile en ligne : le logiciel Géométrie Constructeur (GC). Nous supposons que la manipulation sur la tablette est différente d'un clic de souris. Sur la base de ces hypothèses nous observons deux domaines (constructifs et relationnels) concernant le développement de la pensée géométrique sur GC. Par conséquent, nous pouvons constater que le dragging-approche et le jeu-approche permis par l'environnement multi-touch peuvent convenablement soutenir et améliorer les activités des étudiants qui visent à prouver et justifier.

Mots-clés : Appareil à écran tactile. Software constructeur géométrique. Glisser pour approcher. Jeu approche. Justifier.

Abstract : Capturing and analyzing different ways of touchscreen this study contributes with a new stream on dynamic geometry in multi-touch technology. We discuss data from three teaching experiments : two with Italian High School students and one with Brazilian undergraduate mathematics students. All experiments were videotaped. The students worked on tasks proposed on a free online touch device : the Geometric Constructor (GC) software. We assume that manipulation on tablet is different from a mouse click. Based on this we observe two domains (constructive and relational) regarding the development of geometrical thinking on GC. This allows us to ascertain that the drag-approach and the game-approach allowed by the multi-touch environment can suitably support and improve students' justifying and proving performances.

Keywords : Touchscreen device. Geometric Constructor software. Dragging to approach. Game-approach. Justifying.

Introduction

The emergence of multi-touch devices - such as iPods, iPhones and iPads - will promote new impact and challenges in learning and instruction in general, and in mathematics in particular. Although in Mathematics Education some touch devices have been developed (for instance, Geometer Sketchpad Explorer, Geometric Constructor, Sketchometry and Math Tappers apps) research is still scarce concerning mathematical learning through touchscreen.

In our current research project we are interested in the way of manipulation of tablet resources as iPad. Particularly, how ways of manipulation can enrich the multimodality of communication in instruction that touch devices provide. In this paper we are addressing issues regarding the question : during the process of solving geometric problems using the software GC which ways of manipulation touchscreen could be fruitful to improve student's strategies for justifying and proving?

As a methodological strategy to achieve this aim we construct a timeline illustrating those ways of touchscreen and describing geometric aspects from students' interaction on the Geometry Constructor touchscreen software (Arzarello,

Bairral & Dané, 2014). Assuming that mathematics used by students to solve a mathematical task in a paper-and-pencil environment is different from what they use in a touchscreen device, in this paper we will address contribution on CIEAEM65 subtheme 3.

Interaction, task design and geometric learning in touchscreen devices

Regarding their usage, environment mobile touchscreen user interfaces employ a specialized interaction model. Interaction through current mobile touchscreens basically occurs with the computer recognizing and tracking the location of the user's input within the display area. In other words, interactivity occurs in response to two dimensions of the input action (Yook 2009 ; Park 2011). This enables six basic finger actions (manipulation) for input : tap, double tap, long tap (hold), drag, flick, and multi-touch (rotate). In agreement with Arzarello & al. (2002) within dynamic geometry software (GDS) the interaction concerns deeply perceptual aspects, which involve not only the objects (e. g. drawings) but also the physical perceptions of students, their motions, gestures, languages etc. and the artifacts that they use as mediating instruments. Perceptual aspects which must be analyzed concern many components, i.e. visual phenomena, motion, kinesthesia, inner time(s) ; on the other hand, the most typical theoretical features are the structured mathematical objects, their invariant properties, conjectures, theorems, proofs.

The role of the gesture, particularly the touchscreen, in supporting mathematical reasoning in technological context is an emerging field of research in mathematics education. Adopting an embodied cognition perspective we highlight reciprocal connections between ways of touchscreen and cognition. Even though we are not looking only for ways of touch that represent mathematical concepts (for instance, rotation) we agree with Boncoddò & al. (2013) that a particular way of manipulation may serve as an important function of grounding mathematical ideas in bodily form and they may also communicate spatial and relational concepts. Specifically for geometrical thinking, inspired in Hostetter and Alibali (2008), we consider important to stress that, in touchscreen devices, manipulations are based on visuospatial images, linguistic factors influence gestures and ways of touchscreen are communicatively intended.

Another relevant issue to consider is the way using a multi-touch-screen allows changing the task design in a substantial way. More precisely, multi-touch screen devices allow designing geometrical problems in a different way from the usual one, which would be very difficult within non-multi-touch screens environments. The design is inspired by game theory and for this reason we call it “game-approach”. The space allows us only to illustrate it through an elementary example.

Data collection and analytical process

We conducted three teaching experiments (TE) : 1) five High School students (16-17 years old) at Liceo Volta (Turin, Italy) were enrolled on the three-research sessions, 2) seven High School students (15-16 years old) at Liceo Maria Immacolata (Pinerolo, Italy), and 3) four undergraduate mathematics students (23-26 years old) at UFRRJ (Rio de Janeiro, Brazil) were enrolled on the two-research sessions. All of them had previous experience with GDS. Each session took about two hours long. For the three TE the analytical process was based on the videotape.

In each session the students worked out on proposed activities with Geometric Constructor (GC). The GC is a free dynamic geometry software developed in Japan by Yasuyuki Iijima at Aichi University of Education (Iijima (2012)). With the GC we may construct basic geometrical objects (points, segments, lines, circles), measure them, drag and make traces of geometrical objects and so on. Below we summarize students (from TE1 and 3) dealing with Varignon Theorem task and we illustrate some aspects of their geometrical thinking captured throughout their manipulation, as we show in the following chart.

After identifying each type of manipulation (Arzarello & al. 2013) we constructed a timeline to gain information of the global cognitive movement throughout interaction on GC software. We built on the two types (basic or active) of finger actions to say that the cognitive process within GC could be seen in two interrelated domains of manipulation : the construction domain, where students basically refer to tap and hold which are the basic or isolated ways of constructing geometric objects (point, line, circle, shape etc.) with a touch interface. The relational domain is a combination of this constructional and the performed touchscreen that includes drag, flick, free or rotate. The chart below illustrates how we can move from a global observation (timeline) to a descriptive one and focusing on some cognitive process concerning the two domains of touchscreen.

Task	Screen example	
	High School student (TE1)	Undergraduate student (TE3)
Varignon Theorem		
Geometric strategy	Student construction of the diagonals AC and BD tapping with one finger on point A and C, and then on point B and D	Student using different colors to edit the construction and measuring internal angles from the quadrilateral EGHF

TABLE 2.1 – Example from students working on Varignon Theorem

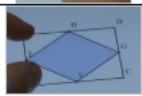
Domain of manipulation	Geometric process	Motion	Example of touchscreen and student strategy description	
Construction	Discrete construction and "isolated" observation (perception)	Closed, predetermined (specific goal, basically construction)		Student constructing angle to observe relation among diagonals and the side of quadrilateral ABCD
Relational	Related construction and global observation	Open, but focused on emergent conceptual demand of the task		Student using two fingers and dragging (to the left) point AB to transform the initial shape (square) into rectangle and to observe what happens with shape EFGH

TABLE 2.2 – Relating domains of touchscreen, cognitive process and motion

Even though in the relational domain students also construct geometric objects we observed (Arzarello, Bairral & Dané, 2014) that it is in this particular domain where they show more interacting and reflecting about the construction. Due to the nature of the geometrical proposal tasks we identified the predominance of touchscreen types on the relational domain and touch such drag free, flick or rotate occurred few times. The usage of drag to approach was dominant.

The dragging to approach works as a refreshing, a quite stabilizing and reflecting area for deep understanding of the geometric properties that emerge from the manipulation on drag free or other way of touchscreen. Since the drag to approach is an active action (Yook 2009) it seems to be an appropriated moment to improve justification and proving.

While in construction domain students act as discrete observation (focused on some specific construction or constructed object or even doing some touch on the screen) in the relational domain their manipulation seemed more focused on their questioning, conceptual understanding and other emergent demands concerning their manipulation as a whole construction.

Manipulation on construction domain seems focused on only predetermined motion although motion through relational manipulations provides motion open in a sense that they can generate more unpredictable processes. By the way, we still have to go further on the issue of open motion. To summarize the reflection above we illustrate how we related the two domains of touchscreen with geometrical thinking and the motion through touchscreen.

For the second teaching experiment, two students, X and Y use a single tablet : they are asked to open a file where they find the situation of fig. 1 in a DGS that allows dragging several points simultaneously. Student X can change the length of the segment AB. When doing this, she sees that the circle changes also : in fact its radius has the same length as AB (but this is not made explicit). Student Y can change the length of the segment CD. When doing this he sees that the line moves : in fact its distance from the center O of the circle is the same as the length of CD (but this is not made explicit).

The goal for X is to change the length of AB so that the circle and the line intersect, while that for Y is to change the length of CD so that the two figures do not intersect : the two goals are so conflicting. After they have played they are asked to explain together when X wins and when Y wins. The result is the statement that a line intersects a circle if and only if its distance from the center is not greater than the radius. In general, we can suitably design the tasks, so that two students can work together on a problem (and one shared tablet), where each of them has a specific goal to achieve. Sometimes the two goals are conflicting; like in the example (2-players game) sometimes they share the same goal (collaborative game).

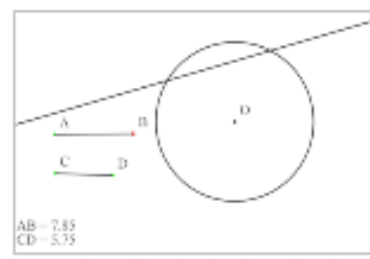


FIGURE 2.1 – Example of task design for 2-players game

Previous results on discussion

We would say that cognitive process within GC could be seen in two intertwined domains of manipulation (Arzarello & al. 2014) : the construction domain (it refers to tap and hold which are the basic or isolated ways of constructing geometric object, and the relational domain (it is a combination of the constructional and the performed touchscreen). Although students had dealing naturally with the device, their manipulation apparently was related with the software constrains (or advantages) or with the proposal task. By the way, we still have to go further on the issue the two domains of manipulation on GC software.

For the TE 1 and 2 we think that manipulation that promotes open motion (relational ways of touching) can be appropriate to provide new epistemological challenges regarding geometric knowledge and different ways of proving. Since the drag to approach is a relational action it seems to be an appropriated moment to improve justification and proving within mathematics classrooms using touchscreen devices. But we would say that, depending on the aim of the teacher, the nature of the task is important and the teacher may let students work freely on the task and using naturally their own way of touch.

The result of the exploration in TE3 brings to some conjecture of the type : why is the requested construction not possible? Or when can player X lose? This approach changes the task design and also the logic and epistemological background behind the exploration. In particular the game-approach (Gura and Maschler, 2008) is very appealing for students and the first results of the teaching experiment are showing how it helps them in making explicit the geometrical properties they enter into through this approach.

REFERENCES

- Arzarello, F., & al. (2014). *Moving from dragging to touchscreen : geometrical learning with geometric dynamic software*. Teaching Mathematics and its Applications 33(1) : 39-51. doi : 10.1093/teamat/hru002
- Arzarello, F., & al. (2013). *Ways of manipulation touchscreen in one geometrical dynamic software*. International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT11), Bari, Italia.
- Arzarello, F., & al. (2002). *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*. ZDM 34(3) : 66-72.
- Boncoddo, R., Williams, C., Pier, E., Walkington, C., Alibali, M., Nathan, M., Dogan, M.F. & Waala, J. (2013). *Gesture as a Window to Justification and Proof. Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. M. C. S. Martinez, A. Chicago, IL, University of Illinois at Chicago : 229-236.
- Gura, E.-Y. and Maschler, M. B. (2008). *Insights into Game Theory*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Hostetter, A. B. and M. W. Alibali (2008). *Visible embodiment : Gestures as simulated action*. Psychonomic Bulletin & Review 15(3) : 495-514.
- Park, Doyun, Lee, Ji-Hyun, & Kim, Sangtae. (2011). *Investigating the affective quality of interactivity by motion feedback in mobile touchscreen user interfaces*. International Journal of Human-Computer Studies, 69(12), 839-853. doi : 10.1016/j.bbr.2011.03.031
- Yook, HJ. (2009). *A study on the types of interactive motions in Mobile touch interface*. PhD Dissertation. Hongik university, Korea.

2.2 La diversité empirique pour faire exister les objets mathématiques

Thierry Dias

Haute Ecole Pédagogique, Lausanne

Résumé : Le propos de cet article est d’interroger le mode d’existence des objets mathématiques au sein de situations d’apprentissages scolaires spécifiques proposées à des élèves ayant des difficultés ou des troubles de l’apprentissage. Ce contexte est choisi pour son « effet de loupe » sur un environnement scolaire plus ordinaire également porteur de ce type de problématiques pédagogique et didactique. Nous présenterons les environnements d’apprentissage que nous proposons aux élèves afin qu’ils s’appuient sur une diversité empirique dans leurs mises en actes susceptibles à la fois de révéler leurs connaissances mais aussi de faire exister de façon explicite les objets mathématiques qui sont les enjeux de savoirs de ces situations. Concernant les liens entre les objets mathématiques et la réalité, nos travaux s’inscrivent dans un double ancrage épistémologique et didactique, ils s’appuient sur la dimension expérimentale des mathématiques (Dias, 2008) et sur son étude au sein de situations d’apprentissages dédiées à la mise en évidence des potentiels d’acquisition et de compréhension de tous les élèves.

Des expériences pour faire exister les objets mathématiques

Nous n’inscrivons pas nos travaux dans une école de pensée épistémologique concernant la réalité des objets mathématiques (empirisme ou platonisme), nous préférons laisser la question ouverte sur ce sujet. Nous nous contenterons de dire que non seulement les débats sur ce sujet ne sont pas clos, mais aussi qu’ils ne concernent pas seulement les mathématiques. Dans la suite de cet article, nous utiliserons la définition de « l’objet » comme ce qui est placé devant, ce que l’on vise, soit pour l’atteindre soit pour le connaître. Nous posons dès lors le problème de la représentation de ces objets dans un langage (les exprime-t-il ou les détermine-t-il ?) et donc de leur mode d’existence : des constructions de l’esprit humain (Gardies, 2004) ou des idéalités (Desanti, 1968).

Notre étude fait référence au contexte scolaire dans lequel le mode d’existence des objets mathématiques nous semble très spécifique. Ainsi, même si nous revendiquons un ancrage épistémologique pour mieux comprendre les rapports que les individus entretiennent avec les mathématiques, nous n’établissons aucun *a priori* au sujet du lien avec la réalité des objets de cette discipline. Nous essayons plutôt de comprendre comment les mathématiques peuvent faire l’objet d’une didactique prenant en compte la dimension expérimentale et ainsi analyser la dialectique sensible/théorique relative à ses objets de savoir (Dias, 2008). Selon nous, recourir à la dimension expérimentale c’est permettre de nombreux allers et retours entre des objets sensibles (plus ou moins familiers) et des objets théoriques (plus ou moins formalisés) par des confrontations (adéquates ou non), des vérifications, des argumentations (prouver, convaincre). Les va-et-vient se font entre les faits objectifs et les savoirs conceptuels par divers processus tels que l’interprétation et la modélisation.

Nous explorons la mise en œuvre d’environnements didactiques propices aux expériences des sujets, en pariant sur leur rencontre possible avec la diversité des phénomènes empiriques puis sur leur capacité à comprendre notamment par le biais de la stabilisation des invariants dans les actes, les signes et les objets rencontrés. Ces rencontres et leurs conséquences étant à inscrire dans une dialectique expérience/intuition (Gonseth, 1936). Selon nous, expériences individuelles et expression langagière sont des supports pour les manifestations des « intuitions ». Le divers empirique dont nous parlons doit se comprendre comme un ensemble d’éléments symboliques d’abord mis à disposition des élèves, mais également progressivement enrichi par les actions et les expressions langagières qui les accompagnent. Phénomènes et faits sont le substrat de cette diversité empirique qui ne se limite donc pas aux objets réels puisqu’il s’étend aux expériences de pensée toujours envisageables dans de tels contextes d’apprentissage.

Nous nous accordons à dire que l’existence des objets mathématiques relève pour partie des interprétations que les sujets en font : les élèves agissent sur des signes, sur du matériel et éventuellement en parlent. Le professeur qui sait des choses sur ces actes ou ces mots décide (ou non) de qualifier de mathématique ces actes et ces mots, et ainsi participe au processus d’exhibition des savoirs.

Confrontation à la contingence des besoins spécifiques des élèves

Notre objectif est de montrer que, pour des élèves catégorisés « en difficulté », leur potentiel à apprendre en mathématiques est d’une certaine manière sous-estimé dans les activités qui leur sont généralement proposées en classe. Des activités que l’on peut caractériser globalement comme des tâches relativement ordinaires (souvent peu

problématisées) privilégiant des supports écrits (sous forme de fiches), et qui offrent une schématisation (Descaves, 1992) très formelle des concepts mathématiques. L'écueil principal étant que cette schématisation reste trop souvent non transparente pour les élèves ainsi privés de la dimension significative et donc assez facilement prisonniers de techniques ou de savoir-faire assimilable à des outils d'application. En surcroît de cette non transparence, les formes symboliques formelles utilisées par l'enseignement ne sont souvent pas mises en lien avec les faits empiriques qui permettraient aux élèves d'accéder à un degré minimal de compréhension des enjeux de ces tâches scolaires.

Nous savons que les élèves ayant des besoins spécifiques que nous rencontrons dans l'enseignement spécialisé entretiennent des relations particulières avec les objets mathématiques qu'ils ne reconnaissent et n'utilisent souvent que très mal dans les tâches ordinaires qui leur sont proposées. Ainsi, même si les connaissances sont bien là pour de nombreux élèves, la reconnaissance par le professeur de ces acquisitions est déficiente : ils ne montrent pas toujours ce qu'ils savent.

En offrant une rencontre médiatisée avec les objets mathématiques sous forme d'un environnement proposant un ancrage esthétique et technologique, nous espérons restaurer ces potentiels de développement mais également permettre aux élèves d'en prendre connaissance. Les situations didactiques que nous mettons en œuvre proposent des interactions entre des individus, des choses, et des signes sur ces choses. Pour nous, le développement des connaissances dans un tel contexte doit être assimilé à un processus dynamique garantissant sans cesse le pari de l'éducabilité.

Quels types de situations mettons nous en œuvre ?

Les tâches que nous mettons à disposition des élèves relèvent selon nous de la terminologie de situations puisque ce sont des environnements matériels et symboliques adaptés suscitant des relations et des interactions entre les protagonistes. On peut raisonnablement parler de situations d'apprentissages car elles sont reproductibles et permettent à moyen terme l'acquisition ou pour le moins l'utilisation de connaissances. Du fait de leur problématisation, les tâches comportent à la fois un certain nombre de contraintes (par exemple des questions) mais également des ressources permettant leur résolution. Le rôle de l'enseignant accompagnateur relève le plus souvent d'un étayage discret et adapté (Dias & Tièche, 2012) aux difficultés des élèves, et doit garantir essentiellement l'absence de décrochage définitif dans la résolution des problèmes rencontrés. Nous pouvons résumer cela en trois temps :

- nous proposons aux élèves des milieux matériels (sémiotiques) spécifiques et adaptés nous paraissant susceptibles de provoquer des expériences et des créations personnelles et/ou collectives,
- nous ajoutons parfois dans ces environnements des contraintes spécifiques au cours de la résolution,
- nous observons et interagissons avec les propositions faites par les élèves.

Nous travaillons essentiellement avec des constructions géométriques dans l'espace afin d'ancrer les expériences dans des dimensions esthétiques et culturelles porteuses de sens et de plaisir pour les élèves, et dans une dimension technologique (également culturelle) toujours motivante et souvent facile à dévoluer (Durand Guerrier, Dias & Pelay, 2010). Nous avons par exemple choisi plusieurs situations de manipulation et construction autour des polyèdres réguliers dont la densité didactique a été montrée (Dias, 2011). La mise en œuvre dans le contexte scolaire spécifique a elle aussi fait l'objet de travaux d'études (Serment, 2012a, 2012b), et de recherche (Dias & Serment, 2013). À chaque expérimentation menée, que ce soit en classe, en formation ou avec un public plus large, nous avons constaté que les protagonistes de ces interventions étaient à même de convoquer une certaine notion de réalité dans leurs actes et dans leurs mots. Cette notion de « réalité » ou « d'adéquation matérielle » ne se limite pas aux objets matériels, mais comprend les objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que les rétroactions du milieu, consécutives à ses actions, lui fournissent des informations fiables sur lesquelles s'appuyer pour émettre des conjectures et/ou s'engager dans un processus de preuve.

Vers un réel partagé

Comme nous l'avons annoncé dès le début de cet article, nous ne souhaitons pas prendre partie dans la dualité historique et ontologique des objets mathématiques opposant irrémédiablement le nominalisme matérialiste et le réalisme platonicien. Nous inscrivons nos recherches dans l'idée d'un processus dynamique ; d'une dialectique reliant le sensible au théorique (Dias, 2009). La réalité peut s'envisager comme un univers de significations possible, qu'elle soit objective ou seulement de pensée. Ainsi, la notion de réel perçu nous paraît limitative et nous lui préférons celle de

réel partagé (Lelong, 2004) dont le point de départ n'est pas forcément sensible. A minima, la seule volonté de faire, l'intention de réalisation de quelque chose est déjà une manifestation de réalité. Ce réel est dit partagé car il est à replacer dans le cadre spécifique d'une communauté d'individus (d'élèves par exemple si on s'en tient au contexte scolaire) qui collaborent dans leurs actes et leurs mots en vue de catégorisations permettant l'élaboration de concepts (Descaves, 1992). À la manière de Granger (1999), nous pensons que la réalité doit être entendue comme la notion de véracité : les choses et les pensées sont, ou peuvent devenir.

L'idée du réel partagé est à associer avec celle de la co-construction dans les interactions de connaissances et nous semble particulièrement appropriée pour décrire et comprendre ce qui est en jeu dans des situations d'enseignement/apprentissage autour des notions mathématiques. Nous sommes conscients que la diversité empirique que les enseignants doivent proposer à leurs élèves est une question professionnelle didactique délicate qui peut entraîner des situations de déstabilisation pédagogique. Cependant, le but que nous ne cessons de poursuivre dans nos recherches est entièrement dédié à l'étude des potentialités à apprendre de tous les élèves, cette fin justifie quelques moyens. . .

Bibliographie

- Desanti, J.-T. (1968). *Les idéalités mathématiques*. Paris : Le Seuil.
- Descaves, A. (1992). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Hachette Education.
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage (thèse de doctorat). *Université Claude Bernard Lyon 1*, Lyon. Retrieved from <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00635724/>
- Dias, T. (2009). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In é. La pensée sauvage (Ed.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques*.
- Dias, T. (2011). *À la recherche des polyèdres réguliers*. Nouveaux Cahiers de La Recherche En Éducation, 14(1), 29-48.
- Dias, T. & Serment, J. (2013). Jeux de constructions géométriques dans l'espace. Présenté aux *Journées Internationales de Etudes Scientifiques*, Chamonix.
- Dias, T., & Tièche Christinat, C. (2012). *Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé*. Présenté à Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social, Genève.
- Durand-Guerrier, V., Dias, T., & Pelay, N. (2010). *Mathématiques et réalité, une problématique centrale dans l'apprentissage des mathématiques à l'école.*, Des mondes bricolés ', Arts et sciences à l'épreuve de la notion de bricolage.
- Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris : Vrin
- Gonseth, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité*. Paris : Blanchard.
- Granger, G.-G. (1999). *La pensée de l'espace*. Paris : Odile Jacob.
- Lelong, P. (2004). Le réel et les concepts en mathématiques : une stratégie de création. In *Le réel en mathématiques*. Paris : Agalma.
- Serment, J. (2012a). *Sections du cube en version géante*. Math-Ecole, 218, 35-39.
- Serment, J. (2012b). Les constructions géométriques dans l'espace pour l'apprentissage de la géométrie (mémoire de master of arts en enseignement spécialisé). *Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud de Lausanne*, Suisse.

Table des figures

2.1 Example of task design for 2-players game	60
---	----