Actes / Proceedings

CIEAEM 66

Lyon

21-25 juillet / July 2014

Dessin de Victor Bousquet

Editor : Gilles Aldon
Editor of the Journal : Benedetto Di Paola and Claudio Fazio

Chapitre 7

Workshops / Ateliers

7.1 Mathematics used by the graphic register within the physics class / Mathématiques convoquées par le registre graphique au sein du cours de physique

Céline Renkens et Valérie Henry

Université de Namur

Résumé de l'atelier : Par diverses mises en situation, nous voudrions mettre en évidence certaines difficultés auxquelles sont confrontés les élèves lorsque des notions mathématiques sont convoquées, parfois implicitement, dans des représentations graphiques au cours de physique.
Nous situerons nos recherches en exposant les programmes de physique en Belgique et nous expliciterons nos choix afin d'éclaircir l'optique dans laquelle nous travaillons.
Nous argumenterons par des observations trouvées dans les manuels de référence belges.
Enfin, nous apporterons les éléments épistémologiques et didactiques qui alimentent actuellement notre réflexion.

Workshop Summary : Through various simulations, we would like to highlight some of the difficulties faced by the students when mathematical concepts are convened, sometimes implicitly, in graphical representations in physics courses.
We situate our research by outlining the physics programs in Belgium and we will explain our choices to clarify how we work.
It is argued by observations found in the Belgian reference manuals.
Finally we will make some epistemological and didactic elements that drive our thinking.

Présentation du problème dans son contexte d'enseignement

L'enseignement secondaire actuel est fortement cloisonné. Chaque enseignant est responsable de l'apprentissage de sa propre discipline sans qu'aucune interaction avec les autres disciplines ne soit institutionnellement organisée. Les échanges interdisciplinaires sont donc, dans le contexte actuel, laissés à la charge des initiatives personnelles de quelques professeurs motivés.

Or, les mathématiques sont un savoir fondamental, au sens d'Artaud [10], pour de nombreuses disciplines et pour la physique en particulier, au niveau de l'enseignement secondaire. La transposition didactique institutionnelle de savoirs mathématiques vers la classe de physique est donc une réalité, comme le montrent plusieurs recherches (notamment [1] à [9], voir section suivante).

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons plus particulièrement aux notions mathématiques convoquées, parfois implicitement, par l'utilisation de représentations graphiques dans l'enseignement de la physique. Une première revue des programmes belges de l'enseignement secondaire nous a conduit à explorer plus spécifiquement les chapitres portant sur la cinématique en sciences générales, sujet très représentatif de notre problématique.

État des articles publiés sur le sujet

[1] Rosenquist M.L. - McDermott L.C., *A conceptual approach to teaching kinematics*, Department of Physics FM-15, University of Washington, Seattle, Washington 98195, 1986.

[2] Genin C. - Pellet A. - Michaud-Bonnet J., Représentation des élèves en mathématiques et en physique sur les vecteurs et les grandeurs vectorielles lors de la transition collège lycée, *Petit x*, n°14-15, 1987.

[3] Artigue M. - Menigaux J. - Viennot L., *Questionnaires de travail sur les différentielles*, Irem et Université de Paris VII, 76, 1989.

[4] Lounis A., *L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques : conceptions et difficultés des élèves, essai et remédiation*, Thèse en Didactique des sciences physiques, Université de Provence Aix-Marseille 1, 1989.

[5] Ba C., *Étude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique ? lien entre mouvement de translation et translation mathématique*, Thèse en Didactique des mathématiques, Université de Lyon 1, 2007.

[6] Groupe mathématiques-sciences physiques, *Les fonctions en mathématiques et en sciences physiques*, Publications de l'IREM de Besançon, 2008.

[7] Coste R., Méthodes et pratiques scientifiques - un espace pour un enseignement scientifique interdisciplinaire en seconde, *Bulletin de l'APMEP*, n°496, 2011.

[8] Castela C., Des mathématiques aux sciences physiques - exemples d'effets transpositifs, *Actes de l'EMF à Genève*, 2012.

[9] Gantois J.-Y., *Un milieu graphico-cinétique pour l'apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation" : potentialités et limites*, Thèse en didactique des mathématiques, Université de Liège, 2012.

Lors de l'atelier, nous avons détaillé succinctement les résultats des deux premières recherches citées ci-dessus.

Ayant identifié l'interprétation des graphiques des mouvements comme une difficulté rencontrée par les élèves, Mark L. Rosenquist et Lilian C. McDermott ont montré que des instructions basées sur l'observation de mouvements réels peuvent aider les élèves à une compréhension plus profonde des concepts.

Dans le deuxième article, les auteurs observent que pour la majorité des étudiants testés, la grandeur vectorielle est considérée avec toutes ses caractéristiques spatiales dans un contexte mathématique, alors que dans un contexte physique, elle est plutôt considérée comme une réduction scalaire, c'est-à-dire réduite à sa norme uniquement. Ainsi, pour ces étudiants, deux vecteurs de sens opposés ne seraient pas identiques en mathématique alors que deux forces (ou vitesse) opposées le seraient en physique.

Hypothèses et objectifs du travail

Trois hypothèses sont à la base de notre travail. Nous employons ici le terme hypothèse dans le sens des éléments sur lesquels nous nous baserons et que nous ne pensons pas remettre en question.

Premièrement, nous supposons que l'utilisation conjointe de graphiques de trajectoire et de graphiques horaires est une source de difficultés pour l'élève. En effet, dans le chapitre de cinématique, pour certains exercices le premier type de graphiques est utilisé et pour d'autres exercices c'est le deuxième type de graphique qui est utilisé sans expliquer pourquoi choisir l'un ou l'autre. L'élève est donc mis en difficulté lorsqu'il est amené à choisir seul le type de graphique approprié à la situation à laquelle il se retrouve confronté.

Parallèlement, nous pensons que c'est le graphique de trajectoire qui est le plus prégnant chez l'élève, ce que confirment les observations de Lillian C. McDermott.

Enfin, nous considérons que la relation entre un concept (signifié [17]) et la façon de le désigner (signifiant) au sein des deux disciplines peut constituer un frein à l'apprentissage du signifié en question. En effet, nous avons déjà constaté que, pour un signifié, les signifiants peuvent être différents dans les deux disciplines, et inversement, que le même signifiant peut représenter des signifiés différents en mathématiques et en physique.

Notre travail vise principalement à explorer trois questions : « Quelles notions mathématiques sont mises en jeu lors de l'utilisation du registre graphique en physique ? », « Comment ces notions mathématiques sont-elles abordées dans le cours de mathématiques ? », et « Quels décalages peut-on identifier entre les transpositions au sein de chaque institution ? ».

Des éléments de réponse à ces questions, nous espérons pouvoir dégager des pistes pour l'enseignement, tant de la physique que des mathématiques.

Cadre théorique

Le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard [12], et en particulier le modèle praxéologique, servira de base à notre analyse des programmes et des manuels. Nous chercherons à explorer les différentes étapes de la transposition didactique et ce, dans les deux disciplines. Dès lors, nous aurons également recours aux travaux de M. Artaud sur les praxéologies mathématiques mixtes [10].

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau [11] nous servira de guide dans l'élaboration des pistes didactiques, prévues dans la deuxième partie de ce travail de thèse.

Déroulement de l'atelier

Pendant l'atelier, nous avons dans un premier temps discuté de trois types de difficultés rencontrés par les élèves de 16-17 ans lors de l'apprentissage de la cinématique.

Première difficulté : les grandeurs sont-elles vectorielles ou scalaires ?

Les grandeurs de la cinématique sont vectorielles au sein de la sphère savante. Cependant dans l'enseignement de la cinématique, même à partir du moment où elles sont définies comme telles, dans certaines situations comme pour le mouvement rectiligne uniforme, les vecteurs sont remplacés par des grandeurs scalaires. Cette simplification lors de la transposition didactique a une explication mais celle-ci n'apparait pas clairement dans les manuels. De plus, nous retrouvons ce manque de technologie dans les termes utilisés au niveau des exercices proposés. Une fois les manuels parlent de la grandeur du vecteur vitesse moyenne, une fois ils parleront de la vitesse moyenne. Pour l'élève, le caractère vectoriel des grandeurs n'est donc pas évident et pourtant cette prise de conscience est indispensable pour la compréhension des graphiques.

La notion de vecteur à transférer du cours de physique au cours de mathématiques ou du cours de mathématiques au cours de physique a déjà été traitée par Cissé Ba dans sa thèse [5].

Deuxième difficulté : deux types de graphiques de position à utiliser à bon escient.

Nous distinguons deux types de graphiques de position : les graphiques de trajectoire et les graphiques horaires de position.

Le premier type de graphique permet de représenter le mouvement dans un plan, ainsi nous pouvons observer les variations de direction du mobile. Cependant, comme les deux axes représentent les deux dimensions du plan, le temps n'est pas présent sur le graphique, nous ne pouvons donc pas savoir à quel instant le mobile se trouve à un endroit précis. À partir de ce graphique nous ne pouvons retrouver que les caractéristiques d'orientation du vecteur vitesse instantanée.

Le deuxième type de graphique permet lui de déterminer la grandeur de ce vecteur. En effet, sur le graphique horaire, le déplacement (ou une partie de celui-ci : le déplacement horizontal ou vertical) est repris sur un seul axe. Il est représenté en fonction du temps. En observant le graphique nous pourrons déterminer quelle distance est parcourue après un certain temps, cependant, nous ne retrouverons pas les indications liées à la direction du mouvement dans le plan.

Nous pensons que l'élève est confronté au bon graphique au bon moment dans ses cours de physique et dès lors qu'il n'est pas conscient du graphique à utiliser en fonction de ce qu'il recherche.

Les outils d'interprétation graphique vus en mathématiques sont également associés au graphique qui convient. En effet, l'interprétation d'une dérivée par rapport à une variable, se fera toujours sur le graphique d'une fonction de cette variable et pas sur un graphique d'une courbe paramétrée par rapport à la variable. Est-ce que les conditions d'utilisation de ces outils sont suffisamment explicites pour que l'élève puisse utiliser ceux-ci en dehors du cours de mathématiques ?

Troisième difficulté : le signe de la vitesse et de l'accélération

Passer d'un graphique horaire de position, de vitesse ou d'accélération à un graphique horaire de position, de vitesse ou d'accélération (dans un MRUA) est une compétence attendue par les programmes de l'enseignement belge. Cela revient à pouvoir interpréter un mouvement rectiligne à partir d'un seul graphique et d'en tirer un maximum d'informations. Pour ce faire, les deux points précédents sont importants.

Savoir différencier un graphique horaire d'un graphique de trajectoire, permettra de ne pas chercher à interpréter un graphique de trajectoire en terme de temps écoulé et donc en terme de grandeur des vecteurs vitesse et accélération.

Sur le graphique horaire de la vitesse, les grandeurs attribuées aux ordonnées sont en réalité les grandeurs du vecteur vitesse si le mouvement suit le sens de l'axe, et l'opposé des grandeurs de ce vecteur si le mouvement est de sens opposé à celui de l'axe. Autrement dit, c'est la grandeur et le sens du vecteur qui sont repris sur l'axe des ordonnées.

Sur le graphique horaire de l'accélération, c'est la grandeur avec son signe et le sens du vecteur qui sont repris sur l'axe des ordonnées. Cela se complique ici car une accélération négative à un sens physique : si le mouvement s'effectue dans le sens de l'axe, une accélération positive signifie que la grandeur du vecteur vitesse augmente et une accélération négative signifie que cette grandeur diminue. Si maintenant le mouvement s'effectue dans le sens opposé à l'axe, un signe « - » sera ajouté à la valeur caractérisant l'accélération. Dans ce cas, le signe attribué à l'accélération sera négatif pour une accélération et positif pour une décélération.

L'interprétation d'un graphique peut donc vite devenir assez complexe. Les notions mathématiques de dérivées, de limites, de fonctions cachées derrière ces interprétations, sont ici utilisées dans un autre contexte que celui du cours de mathématiques, avec des conventions différentes.

En temps que professeur de mathématiques, il est intéressant de se rendre compte et de réfléchir aux conventions des autres disciplines utilisant les mathématiques, afin de pouvoir mieux préparer nos élèves à transférer leurs connaissances dans des domaines variés.

Deux manières d'introduire la cinématique

Après cette réflexion sur les difficultés, nous nous sommes penchés sur les manuels de référence de l'enseignement belge [14], [15], [16] et nous nous sommes intéressés aux deux manières d'introduire la cinématique en Belgique. Dans un type d'enseignement, la cinématique est introduite de manière vectorielle, alors que, dans l'autre, elle est vue dans un premier temps de manière scalaire. Nous avons relevé certains avantages et inconvénients de ces deux approches.

L'introduction à la cinématique de manière scalaire simplifie les choses dans un premier temps. Une seule caractéristique du vecteur est prise en compte. Par contre, comme l'aspect vectoriel n'est pas détaillé, on ne dispose pas des éléments technologiques nécessaires à la justification de l'apparition du signe « - ». Cet élément technologique est donc manquant à ce stade de l'apprentissage.

Le manuel de référence [15], qui suit cette approche, présente la vitesse comme une dérivée symétrique (définie dans [6]), qui semble plus cohérent avec l'approche expérimentale et la réalité de l'expérience des élèves.

L'introduction à la cinématique de manière vectorielle, nécessite dans un premier temps des graphiques de trajectoire afin de représenter les caractéristiques d'orientation des vecteurs position, vitesse et accélération. Ceci peut expliquer l'ordre proposé par le manuel de référence [14]. Le chapitre commence par traiter les mouvements en général avant de revenir aux MRU et MRUA. Ceci provoque l'arrivée plus tardive des graphiques horaires, comme nous avons pu le constater au sein du manuel.

Conclusion

La transposition disciplinaire traitée ici induit une série de difficultés pour l'élève. La prise de conscience de ces dernières permettra-t-elle aux enseignants d'influer sur le savoir à enseigner pour en faire un savoir plus facilement transférable ?

Bibliographie

[10] Artaud M., *Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes*, Actes du Colloque EMF 2003, Tozeur.

[11] Brousseau G., *Théorie des situations*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1996.

[12] Chevallard Y., *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.*, Recherche en didactique des mathématiques, 19(2), pg 221-265, 1999.

[13] Chevallard Y., Passé et présent de la théorie anthorpologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. García (Eds.),*Sociedad, escuela y matemáticas. aportaciones de la teoría antropológica de la didáctica*, Jaén : Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, pg 705-746, 2007.

[14] Manuel *Physique 5 - sciences générales*, de boeck, 2011.

[15] Manuel *Physique 4 - Tome 1 : Cinématique*, Centre technique et pédagogique de l'Enseignement de la Communauté française, 2004.

[16] Manuel *Physique 5 - Tome 1 : Mécanique*, Centre technique et pédagogique de l'Enseignement de la Communauté française, 2007.

[17] Vergnaud G., Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la représentation. *Les Sciences de l'Education*. Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation. l, 3, pp 9-16, 1993.

7.2 How a street lamp, paper folding and GeoGebra can contribute to teachers' professional development

Cristina Bardelle & al.

Cristina Bardelle, Università del Piemonte Orientale "Amedeo Avogadro"
Silvia Beltramino, L. S. S. "Maria Curie", Pinerolo (TO)
Agnese Berra, L.S. "Manzoni", Suzzara (MN)
Marina Dalè, L.C. "Arnaldo", Brescia
Elisabetta Ferrando, Università degli studi di Genova
Elisa Gentile, S.S. di I grado "Holden", Chieri (TO)
Carlotta Idrofano, L.S.S. "Maria Curie", Pinerolo (TO)
Monica Mattei, I.S. di I grado "Don Bosco", San Benigno Canavese (TO)
Monica Panero, Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Lucia Poli, L.S.S. "Maria Curie", Pinerolo (TO)
Ornella Robutti, Dipartimento di Matematica, Università di Torino
Germana Trinchero, I.I.S. "Santorre di Santarosa", Torino

Abstract : Professional development of the mathematics teacher is explored through activities addressed to students and proposed to teachers in order to discuss them from different points of view : mathematical, educational and technological. The activities belong to a wide research project carried out in Italy and Australia bounded to teachers. The data collected from the research were discussed during the workshop, analysing the shared praxeologies emerged.

Introduction

The activities proposed to the teachers belong to an international research project, named "Problem Solving with GeoGebra", which involves two different countries, Australia and Italy (and in Italy University of Torino, Valle d'Aosta, Bari). The aim of the project is to engage in-service secondary school teachers in professional development based on best practices in mathematics with GeoGebra. The activities are in the spirit of the methodology of "Mathematics Laboratory" (UMI, 2003). The teachers are observed during the project and data are analysed according to "the Meta-Didactical Transposition" framework (Arzarello et al., 2012).

This research project is connected to a national teachers' education programme, named PLS (Piano Lauree Scientifiche), born in 2004 from the collaboration among the Ministry of Education, the National Conference of Headmasters of Science and Technology University Faculties, and Confindustria, with the aim of promoting the cooperation between school teachers and university teachers in education, working together to design didactical activities, and of orienting students towards scientific choices at University.

Rationale of the workshop

The current Italian paradigm for the research in Mathematics Education is "Research for innovation" (Arzarello et Bartolini Bussi, 1998), integrated with the new paradigm of Meta-Didactical Transposition (Arzarello et al., 2014 ; Aldon et al., 2013). The first paradigm is based on teaching experiments in classroom that involve teachers in every phase of the research, with different rôles : teacher-researchers (working with the group of researchers), teacher-trainers (doing education programmes for teachers) and teachers (involved in teacher programmes as learners, and working in class as teachers). Sometimes the same teachers may have different rôles in different phases of the project : for example, a teacher-researcher can be also teacher-trainer during the process of professional development in the education programme for teachers. The second paradigm is the theoretical background to the design phase and the teacher education phase, when the cooperation and collaboration between teachers and researchers is particularly meaningful. The theoretical framework for data analysis is based on the Meta-Didactical Transposition, an innovative model elaborated in 2012 by the research group of Torino and Modena and presented in the National Seminar of Mathematics Education (http ://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php).

In this model the teachers are observed during their training process in order to check whether the traditional methodologies are transformed in order to give space to laboratorial activities, using technologies.

The Meta-Didactical Transposition model is based on the Anthropological Theory of Mathematics Education (Chevallard, 1999) but it refers to the specific context of teachers' training (considering the actions of researchers, teacher-researchers, teacher-trainers and teachers) and focuses mainly on the "meta" aspects, which are related to the reflection on the process of formation itself. Two are the communities involved in the formation process : the community of the researchers (who organizes and directs the activities) and the community of teachers (who are in training). Each of these communities has got its own praxeologies. The praxeologies are declined through two main aspects (Garcia et al., 2006) : the "know how" (the praxis) which includes a family of similar problems to be studied, as well as the techniques available to solve them and the "knowledge" (the logos) that is the "discourses" that describe, explain and justify the techniques that are used. The "knowledge level" can be further decomposed in two components : Technologies and Theories.

A praxeology consists in a Task, a Technique, and a more or less structured Argument that justifies or frames the Technique for that Task. The MDT model considers the meta-didactical praxeologies, which consist of the tasks, techniques, and justifying discourses that develop during the process of teacher education.

Meta-Didactical Transposition considers the mechanism in which the praxeologies of the researchers' community are transposed to the community of teachers, and how this implementation transforms the professionalism of teachers. In that way, we can observe a shift from the "savoir savant" to the mathematical and pedagogical knowledge necessary for teaching (Arzarello et al., 2014 ; Arzarello et al., 2013 ; Aldon et al., 2013).

The purpose of the "Problem solving with GeoGebra" project is to transform the teachers' praxeologies in new praxeologies, which are the fusion of the praxeologies of the two communities involved, becoming at the end the shared praxeologies. The "broker" (mediator) is the person who belongs to more than one community and is able to create new connections between them and opens new possibilities for the construction of meanings (Rasmussen et al., 2009). The rôle of the broker (the teacher-trainers in our project) is fundamental for the creation of the shared praxeologies.

The synergic interaction between the two communities (the researchers' community and the teachers' community) can be declined through different phases. In the design phase we can see the university researchers working together with the teacher-researchers and the teacher-trainers in order to construct the project and the activities, involving both poor materials and technological tools, such as GeoGebra. The use of a Dynamic Geometry Software (DGS) has the power to mediate the construction of knowledge transferring the manipulation of the poor materials in the dynamic sketch, and favouring the exploration and the conceptualisation. The research phase concerns all the research aspects related to the international project with Australia. The main actors are the researchers, they define the framework of the research itself and the main aspects to analyse.

The dissemination phase, which is deeply connected to the others, concerns the education of in-service secondary school teachers in the national programme PLS. In this phase the actors involved are : the teachers and the teacher-trainers (the same involved in the design phase, as teacher-researchers). Teacher-trainers are the "brokers" between the two communities. The teachers are involved in two different ways : the first one concerns their professional development in a blended modality (exchanging ideas, results and practices during face-to-face meetings and through an on-line platform) and constructing a community of practice (Wenger, 1998). The second one concerns the teaching experiment in their classroom.

In the data analysis phase, teacher-trainers, teacher-researchers and university researchers are involved in recognizing the introduction of shared praxeologies between the two communities, thanks to the action of the brokers.

Activity of the workshop and discussion

The workshop was mainly focused on the "Streetlamp problem", an open ended problem designed in order to give students a meaningful situation for reasoning, arguing, discussing and proving.

In the design phase we chose (as researchers) an item of OECD tests involving geometry and we tried to transform it from a closed problem, with a unique expected answer, to an open ended one.

This is the item we started from : "The City council has decided to place a streetlamp in a small triangular park so that the whole park is lit. Where should the streetlamp be placed ?"

Changing the formulation of the problem, according to our project, we gave more space to the exploration phase with GeoGebra, more space to different solution and more space to discussing, arguing, justifying and proving. This is the new text :"The City Council has decided to build a small triangular pedestrian area planned by the previous administration, the registered project foresees only one street lamp as illumination for the whole area. Can you help the technician, who will have to deal with the installation, to find the exact point where the street lamp should be placed ? Now open the file GeoGebra Lampione.ggb. You will find the area to be lit. Together with your group find a solution to the problem, giving reasons for your choices. In your opinion does the position depend on the shape of the pedestrian area ? What happens if the triangle changes ? Answer and give reasons for your answers".

The problem is related to the exploration of a contextualized situation that leads to the discovery of geometrical properties. The aim of the problem is to have a meaningful problem, powerful in engaging students into a specific context and stimulate their problem-solving competences, not to have a real-life problem. This problem is characterized by the openness that allows students to do maths and to build a piece of knowledge finding solutions by themselves, exploring, arguing and giving the reason of their choices. The power of open-ended problems is that the solution depends not only on the problem itself, but also on the interpretation of the problem that students have, on the constraints they fix, on the assumption they make.

The activity has been designed for grade 7 to 11, but it is enough open to be used at different grades or educational contexts, and to be solved with several strategies. The participants to the workshop were asked to identify which was the suitable position to place a lamp to enlighten the square, exploring the problem with poor materials and then to think about representing the situation with GeoGebra, finding a suitable solution and give reason for their choices as they were students (first level, the student side). Then, they were asked to think about their students (second level, the professional side). The problem was also discussed under other different levels : the technological point of view (thinking about potentialities and limits of technology and instruments) and the (meta)didactical transposition level (thinking about the activity and the mathematical concepts involved and about the praxeologies). The activity offered several points of discussion in the workshop regarding the use of poor materials (like paper folding, a torch, ...) and the different use of software and their strong and weak points.

During the workshop participants worked in small groups, as students in a classroom, using in each one a different triangle, a torch and then GeoGebra. Some teachers, during the exploration phase, tried to find the best triangular shape to fit a given circle (in order to waste the minimum amount of light) instead of looking for the best point to put the lamp in.

The discussion was so rich that there was not enough time to discuss all the points the participants were asked to reflect on. We mainly focused on the problem, the materials and the technology.

While discussing about the aims of the problem, some participants underlined that this problem seems to be not a real problem, according to Paul Drijvers' (2013) meaning, but it represents a very good problem for discussion and arguing. The added value of the problem stands in the use the teacher makes of it. The discussion went on trying to contextualize in real life the problem and some participants suggested to make clear the measure of the square's edges in order to create a real-life situation.

Some cultural differences emerged during the discussion by some Poland and Czech sharers : in their country the flowerbeds are not pedestrian, so they had some difficulties to understand which whose the pedestrian area to enlighten. This made us to discuss about the cultural context and its importance when posing a problem.

The importance of poor materials such as paper folding, paper triangles and the torch has been underlined during the discussion, furthermore some participants argued that this kind of materials are instead very "rich" because allow students to experience mathematical concepts with their bodies.

Since we did not have many computers, participants used a little technology, but pointed out that the dynamic geometry software are useful in the process of generalization and abstraction, but they focused their attention to the problem, not to the students.

Data analysis

The data collected during the project have been analysed in order to check if the brokering had been performed and to recognize the shared praxeologies arose by the interaction between the two communities.

We analysed the behaviour of the teachers during the training meetings and we noticed that while they were solving the problem as if they were students, simultaneously they were thinking with the "mind of the teacher", imagining how their students would have solved the same problem and reflecting about the possible processes of the students.

During the workshop we showed some excerpts from the professional development of teachers in contact with the community of researchers, you can find an example in the image below.

This is an example of how praxeologies of teachers can change through the brokering of the teachers-researchers. On the left we have the starting point of the teacher about teamwork and the use of GeoGebra. In the middle we can see what he said to his students during the teaching experiment. At the end, on the right side we can see the final point of view the teacher wrote in the relation about his work. So we can notice that there is a development in

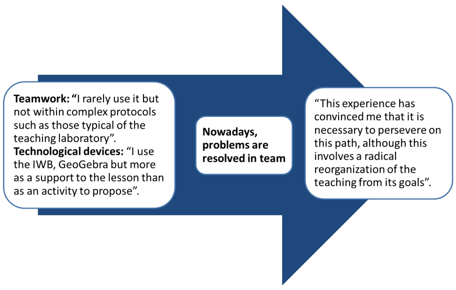


FIGURE 7.1 – The development of a teacher

the professionalism of the teacher, thanks to the brokering of the teacher-researchers and teacher-trainers during the educational activity.

Among the praxeologies of the researchers we chose to analyse the Design of a task for the teachers and we declined it under the four elements identified in didactic transposition theory (Chevallard, 1999) :

Task : designing the activity for teachers and students ;

Technique : finding a problem considered linked to the topics of Curriculum ; opening a close-ended problem, adapting it to the aims of the project, the methodology to induce, the use of GeoGebra, and the institutional constrictions ;

Technology : institutional (the new curriculum), from research about exploring, conjecturing, arguing, proving, the use of mathematics laboratory and use of GeoGebra ;

Theory : research elements such as : open problem, conjecturing and arguing, mathematics laboratory, meta-didactical transposition, communities of inquiry, with the related literature as background.

This praxeology can become a shared praxeology when teachers, during the educational course, designed tasks for their own students.

REFERENCES

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C., & Soury-Lavergne, S. (2013). The Meta-didactical transposition : A model for analysing teacher education programs. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 1, 97-124). Kiel, Germany : PME.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-Didactical Transposition : A Theoretical Model for Teacher Education Programs. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era.* Berlin, Germany : Springer, 347-372.

Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., Martignone, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2012). Vent'anni dopo : Pisa 1991 - Rimini 2012 Dalla ricerca in didattica della matematica alla ricerca sulla formazione degli insegnanti, *XXIX SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA* (http ://www.seminariodidama.unito.it/mat

Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education : a national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain : a search of identity.*, Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 243-262.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*19, 2, 221-266.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM.* 38(3), 226-246.

OCSE PISA. (2006). *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica.* Pisa, Italia : Armando Editore.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go ? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture*, 171-218. Charlotte, NC : Information Age Publishing.

UMI. (2003). Matematica 2003. La Matematica per il cittadino : attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica - Ciclo Secondario.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht, Heidelberg, New York, London : Springer.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice : Learning, Meaning and Identity.* trad. it. Comunità di pratica. Apprendimento, significato e identità, Milano, Italia : Cortina, 2006.

7.3 The toolbox : objects and tools for doing mathematics / La boîte à outils : objets et outils pour faire des mathématiques

Alessio Drivet

Abstract : The workshop was divided into two parts. In the first half, I have presented some items that often we carry with us, emphasizing the mathematical content. In the second part I have presented some of the objects that have been at the basis of interventions in schools, I asked to the participants to fill out a card to discuss what could be the issues involved. In this paper, I report the workshop and take into account the discussions occurred during the session.

Résumé : L'atelier a été divisé en deux parties. Dans la première moitié, j'ai présenté quelques objets mettant l'accent sur le contenu mathématique que nous portons sur nous. Dans la deuxième partie, j'ai présenté quelques-uns des objets qui ont été à la base des interventions dans les écoles, j'ai demandé aux participants de remplir une carte de discuter de ce qui pourrait être les enjeux. Dans cet article, je fait rapport de l'atelier et prend en considération les discussions qui ont eu lieu au cours de la session.

Introduction to the objects

How much math is with us ? was the title of the first part. The artefacts served as an introduction to the topic (fig.1). The methodology has been to a lesson dialogued with the objective to create a climate of involvement.

The goal was to simulate an experience, gained over several years of teaching, designed to lead students to understanding mathematics through concrete demonstration of the pervasiveness of this discipline.

The questions posed by the participants revealed that the use of this approach could be useful to overcome the traditional suspicion in mathematics.

Specifically, a special appreciation was reserved for Calendar and Shoelaces, whose mathematical content was unknown to the participants.

Introductions aux objets

Combien de mathématiques sont avec nous ? était le titre de la première partie. Les objets ont servis comme une introduction au sujet. La méthodologie a été une leçon dialoguée avec l'objectif de créer un climat de participation.

L'objectif était de simuler une expérience, faite sur plusieurs années d'enseignement, conçue pour amener les élèves à comprendre les mathématiques grâce à des démonstrations concrètes de l'omniprésence de cette discipline.

Les questions posées par les participants ont révélé que l'utilisation de cette approche peut être utile pour surmonter la méfiance traditionnelle en mathématiques.

Plus précisément, une satisfaction particulière a été réservée pour le calendrier et les lacets, dont le contenu mathématique était inconnu des participants.

The workshop

The workshop continued developing two themes : "Prediction or forecasting ?" and "Numbering Systems."

The participants received two cards (Table 1 and 2), they had to write, for each object, the hypothesis that they could formulate on the mathematical content of the artifacts.

In reality, this did not occur and the attendees have preferred to ask questions about the individual objects (features, the method of acquisition, etc.).

The second column was intended for participants to take notes, make calculations, or write their comments.

This phase was found to be the most interesting and engaging, full of questions and requests for further information. A common request was referring to the manner of obtaining the objects and the link between artefacts and digital objects.

At the end of the session, the project was to collect the cards for later analysis, in reality everybody preferred to keep them.

L'atelier

L'atelier a continué à développer deux thèmes : « Prédiction ou prévision ?" et « Systèmes de numération ».

Les participants ont reçu deux cartes (Tableau 1 et 2), ils devaient écrire, pour chaque objet, l'hypothèse qu'ils pourraient formuler sur le contenu mathématique des objets.

En réalité, cela n'a pas eu lieu et les participants ont préféré poser des questions sur différents objets (caractéristiques, méthode de l'acquisition, etc.).

La deuxième colonne a été conçu pour que les participants puissent prendre des notes, faire des calculs, ou écrire leurs commentaires. Cette phase a été jugée la plus intéressante et attrayante, pleine de questions et de demandes d'informations complémentaires. Une demande commune faisait allusion à la manière d'obtenir les objets et le lien entre les artefacts et les objets numériques.

À la fin de la session, le projet était de rassembler les cartes pour une analyse ultérieure, en réalité, tout le monde a préféré les garder.

Prediction or forecasting ? - Prédiction ou prévision ?		
Object - Objet	Hypotheses about the mathematical content Hypothèses sur le contenu mathématique	Remarks after the presentation Commentaire après la présentation
Anklebone - Astragale		
Bingo - Tombola		
Pass the pigs - Porker		
Darts - Fléchettes		

TABLE 7.1 –

Numbering Systems - Systèmes de numération		
Object - Objet	Hypotheses about the mathematical content Hypothèses sur le contenu mathématique	Remarks after the presentation Commentaire après la présentation
Matryoshka - Matriochka		
Rice - Riz		
Horus		
Mayan calendar - Calendrier Maya		

TABLE 7.2 –

Conclusion

I take this opportunity to thank those who gave me the opportunity to present this work, but especially the participants. They have provided me valuable suggestions for future developments, but mainly have provided me further incentives for the continuation of this path.

Conclusion

Je profite de cette occasion pour remercier ceux qui m'ont donné l'occasion de présenter ce travail, mais surtout les participants. Ils m'ont fourni de précieuses suggestions pour les développements futurs, mais surtout m'ont fourni des incitations supplémentaires pour la poursuite de ce sentier.

7.4 Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème

Marie-Line Gardes et Sonia Yvain

I3M, Université Montpellier 2, IREM de Montpellier

Résumé : Appuyer l'enseignement des mathématiques sur la recherche de problèmes permet d'envisager autrement l'apprentissage des mathématiques en développant notamment la dimension expérimentale et le processus de mathématisation. Les équipes DREAM à Lyon et ResCo à Montpellier mènent conjointement mais chacune avec ses spécificités des recherches dans ce sens. Dans cet article, nous présentons celles de l'équipe ResCo. Après avoir précisé nos hypothèses de recherche, nous décrivons brièvement le dispositif du travail collaboratif dans les classes et entre les classes puis nous proposons aux participants de vivre chaque étape du dispositif et en particulier celle de la mathématisation du problème. Ces réflexions sont étayées par des analyses de productions d'élèves.

Abstract : Built the teaching of the mathematics on the research for problems allows to envisage differently the learning of the mathematics by developing in particular the experimental dimension and the process of mathematisation. Equip DREAM in Lyon and ResCo in Montpellier leads jointly but each with the specificities of the researches in this sense. In this workshop, we present the work of the ResCo team. After specify our hypotheses of research, we describe briefly the device of the collaborative work in the classes and between the classes then we suggest to the participants living every stage of the device and in particular that of the mathematisation of the problem. These reflections are supported by analyses of students' productions.

Introduction

Les problèmes de recherche sont une façon différente d'envisager l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans le cours ordinaire de la classe. Ils permettent de mettre en évidence et en pratique les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique sur des connaissances mathématiques en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement ; les démarches d'investigation redonnent du sens aux mathématiques en interrogeant leur pratique en classe ; les équipes DREAM (Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) et ResCo (Résolution Collaborative de problèmes) mènent des recherches dans lesquelles les problèmes sont centraux. Dans cet article, nous rendons compte de l'atelier animé par l'équipe ResCo de l'IREM de Montpellier.

Hypothèses de recherche

Pour l'équipe ResCo, être en situation de recherche de problèmes donne aux élèves les possibilités d'agir, de décider, d'anticiper, notamment grâce à la mise en œuvre d'un processus de mathématisation. En nous référant à Israël, nous définissons la modélisation mathématique comme « un nouveau type de mathématisation », un modèle mathématique est alors « un fragment de mathématiques appliqué à un fragment de réalité » (Israël, 1996). En suivant Chabot et Roux (2011), nous retenons quatre formes de mathématisation : la quantification, l'axiomatisation et la formalisation, la mathématisation à proprement parlé et la modélisation. Nos hypothèses de recherche s'appuient sur le processus de mathématisation (sous toutes ses formes).

Hypothèse 1 : La dévolution du processus de mathématisation aux élèves leur permet de comprendre la nécessité de faire des choix.

Nous faisons également l'hypothèse que mettre en œuvre un processus de mathématisation favorise le questionnement sur les rapports entre mathématiques et réalités, ce qui fonde notre seconde hypothèse de recherche :

Hypothèse 2 : Ce processus de mathématisation, inscrit dans des situations d'appréhension du réel, optimise le questionnement des élèves sur les rapports qu'entretiennent les mathématiques et le monde.

Notre objectif est alors le suivant : nous cherchons à construire des situations de recherche d'appréhension du réel permettant la dévolution du processus de mathématisation aux élèves. Nous faisons l'hypothèse que le dispositif proposé par ResCo, et mis en œuvre dans les classes, permet d'approcher cet objectif et amène les élèves à comprendre la nécessité de faire des choix en mathématiques.

Présentation du dispositif ResCo

Le dispositif de résolution collaborative de problèmes repose sur des échanges entre des classes qui travaillent sur le même problème de recherche. Pendant cinq semaines, les élèves échangent des questions, des réponses, des idées, des procédures et des conjectures. Ces échanges sont pris en charge par les enseignants sur une plateforme internet dans un forum privé dédié au groupe. Nous présentons ci-dessous quatre spécificités du dispositif.

La fiction réaliste

Les problèmes proposés pour une session de résolution collaborative sont issus de situations concrètes, pour lesquelles plusieurs modèles mathématiques sont envisageables. On attend des élèves qu'ils explorent la situation, fassent des choix permettant un traitement mathématique du problème, utilisent ou élaborent des concepts mathématiques pour modéliser les objets concernés par cette situation, mettent au point des procédures de résolution et de validation, vérifient la vraisemblance et la cohérence des solutions. La mathématisation de problèmes réels (tels que l'on peut les rencontrer au niveau de la recherche) étant généralement beaucoup trop complexe pour être prise en charge au niveau de l'enseignement secondaire, les situations proposées ne sont pas directement issues de la réalité mais elles relèvent de la réalité et sont posées complètement hors du cadre mathématique. C'est la raison pour laquelle elles sont qualifiées de « fictions réalistes » (Ray, 2013).

Le temps long

Pour qu'une démarche d'investigation vive dans les classes, il faut lui donner du temps. La recherche collaborative, organisée sur cinq semaines à raison d'une séance hebdomadaire permet aux élèves de s'approprier le problème, prendre des initiatives, développer des stratégies de résolution.

Une collaboration entre classes et dans la classe

Plus de 80 classes soit environ 2400 élèves francophones de la 6ème à la Terminale se sont engagés dans le dispositif en 2014. Des travaux de groupes alternent avec du travail individuel. Les élèves échangent dans leur classe, mais aussi entre classes (par groupe de 3 classes) via une plateforme favorisant ainsi l'émergence de débats scientifiques.

La relance

Il s'agit d'un texte rédigé par l'enseignant-chercheur du groupe ResCo qui vise à orienter la recherche vers un problème mathématique commun, en prenant en compte les propositions des élèves pour fixer des choix de mathématisation de certains éléments de la fiction réaliste initiale. Nous appelons fiction réaliste relancée l'ensemble de la fiction réaliste et de la relance. C'est un nouveau document, qui comprend un énoncé précisé du problème mathématique à chercher, et sur lequel les élèves s'appuient pour continuer (ou amorcer) leur recherche du problème initial.

Atelier mis en œuvre

Afin de mettre en évidence le travail de mathématisation possible dans les problèmes proposés par ResCo, nous avons invité les participants à vivre les différentes étapes du dispositif : échanges de questions et réponses, la relance, la recherche mathématique et la clôture du problème. Ces différents temps ont été illustrés par des productions d'élèves que nous présentons ci-dessous.

La fiction réaliste initiale qui a été proposée est celle de 2014, elle figure en annexe 1. Dans un premier temps, nous avons fait vivre aux participants de l'atelier la première phase du dispositif : l'appropriation du problème par les élèves. Elle se déroule sur les deux premières semaines et est consacrée à l'exploration du problème et aux premières pistes vers une mathématisation selon cette organisation :

– première semaine : recherche en groupe dans la classe et envoi de questions aux autres classes du groupe.
– deuxième semaine : recherche sur les questions reçues des autres classes et envoi des réponses.

D'une classe à l'autre, les questions varient peu : cela impose souvent aux élèves de répondre aux questions qu'ils se sont eux-mêmes posées. Ils doivent s'interroger sur l'influence de certains paramètres sur des solutions, et faire des choix parmi des modalités possibles. Ci-dessous, nous présentons quelques exemples de questions et réponses d'élèves.

Exemple 1 : une question pour préciser l'énoncé et nécessaire pour s'engager dans la résolution du problème.
Est-ce qu'il y aura toujours des micros fuites, ou les réparent-ils au fur et à mesure ?
On pense qu'il fait qu'aspirer et qu'il ne répare pas.(Élèves de quatrième)

Exemple 2 : une question où la réponse appelle un choix de mathématisation.
Quelle est la forme de la piscine ? Quelles sont les dimensions ? ***On peut supposer*** *que la piscine est de forme rectangulaire, de grande taille et profonde comme on a vu sur Internet (une très grande piscine municipale). (Élèves de sixième)*

Exemple 3 : une réponse où les élèves font de véritables choix.
Où se situe la base de chargement par rapport à la forme et à la taille de la zone ? ***On considère*** *que la zone est rectangulaire de longueur 30m et de largeur 15m (suite à des recherches sur la taille d'une piscine de refroidissement) et que la base de chargement est située au centre celle-ci :* ***ce choix*** *nous arrange pour la suite de la recherche. Le robot serait un carré surmonté d'un réservoir permettant le stockage des gouttes.(Élèves de terminale)*

Nous avons ensuite donné la relance aux participants (voir annexe 2). Elle a été rédigée par l'enseignant-chercheur du groupe ResCo, en appui sur les questions et les réponses des élèves. Nous avons invité les participants à réfléchir aux réactions et actions possibles des élèves face à la fiction réaliste relancée, lors de la seconde phase du dispositif (semaines 3 et 4). Ces deux semaines sont consacrées à la poursuite des recherches et des échanges. Les élèves élaborent alors des conjectures, échangent des pistes de solutions et argumentent pour défendre et justifier leurs raisonnements et leurs résultats. Les recherches en classe s'effectuent, en général, en groupe. Les conjectures et les résultats sont discutés entre les élèves et envoyés aux autres classes. Pour infirmer les conjectures, les élèves font un travail très important sur la notion de contre-exemple. Pour les valider, ils sont sensibilisés à la nécessité d'argumenter.

A partir de la fiction réaliste relancée, les élèves poursuivent leur travail de mathématisation sous plusieurs formes dont voici deux exemples :

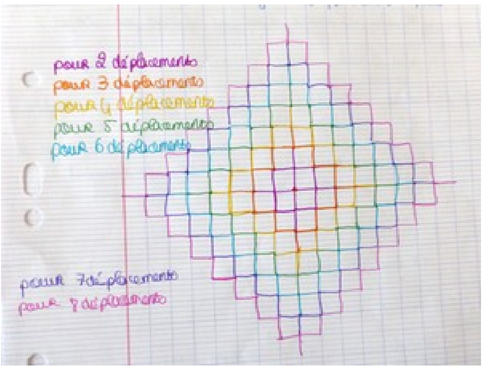


FIGURE 7.2 – un exemple de schématisation

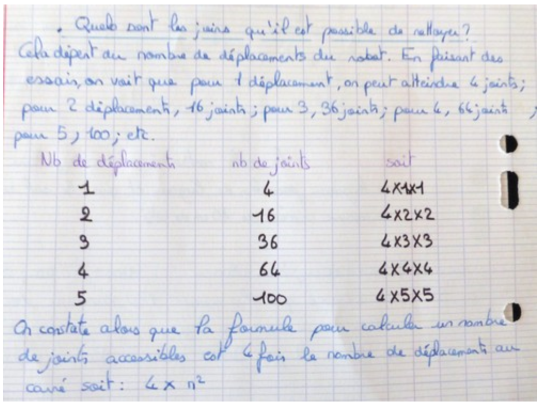


FIGURE 7.3 – un exemple de formalisation

Nous avons abordé rapidement, lors de l'atelier, la phase de débat de validation des résultats et de clôture du problème (semaine 5). L'enseignant-chercheur du groupe propose des éléments de solutions au problème et chaque enseignant l'adapte à sa classe et à son niveau. Enfin, nous avons présenté la dernière étape, étape essentielle du dispositif, qui est l'acquisition et la structuration des connaissances. Après cinq semaines de recherche en classe, un bilan est indispensable pour clore ce travail. Élèves et enseignants prennent alors conscience du travail accompli. En plus d'un travail sur la démarche scientifique (conjectures, contre-exemple...) suivant leur niveau, les élèves ont réinvesti des notions déjà abordées et acquis des connaissances qu'ils pourront approfondir. Il est donc important à la fin de la recherche de faire le point avec les élèves pour mettre en évidence toutes les notions mathématiques que le problème a permis de mettre en œuvre.

Conclusion

Nous envisageons de poursuivre nos recherches avec pour objectifs de :

– Développer des ressources à partir des problèmes déjà étudiés pour permettre aux enseignants une plus grande autonomie. Nous souhaitons en particulier intégrer des éléments d'analyse de captures audio et vidéo de débats mathématiques et de copies complètes d'élèves.
– Approfondir notre réflexion sur la question des fictions réalistes en mathématiques, en particulier sur les effets concernant la dévolution, la créativité et le travail sur les liens entre objets réels et objets mathématiques.
– Accompagner les enseignants dans la mise en place de dispositifs de résolution de problèmes lors du stage PAF, en particulier sur la gestion de la classe lors de travaux de groupe.
– Chercher des outils d'analyse pour mesurer l'impact sur les élèves du travail collaboratif en liaison avec le pilier 7 du socle commun et l'évaluation par compétences, approfondir notre réflexion sur les compétences complexes (compétences métamathématiques) : quelles compétences sont mises en œuvre lors des différentes phases de résolution collaborative (situation de classe singulière) ? Quels outils concevoir pour les évaluer ?

Nous prévoyons également de poursuivre le travail engagé avec l'équipe DREAM (IREM de Lyon, IFE) [1]. En nous appuyant sur des expériences de plusieurs années, le groupe DREAM-ResCo développe un questionnement qui doit permettre, parallèlement à l'étude de l'élaboration et de la diffusion des problèmes de recherche, d'approfondir l'analyse des effets des mises en œuvre sur les élèves. Les questions suivantes font désormais parties du développement de la recherche.

1. Quelles sont les connaissances, les compétences transversales et méta-mathématiques qu'il est possible d'évaluer dans une pratique de recherche de problème ? Et quels sont les indicateurs qu'il est possible de mettre en place ?

2. La créativité et l'invention mathématique développées dans les problèmes de recherche modifient elles l'image des mathématiques chez les élèves (et leur envie de faire des mathématiques), les professeurs ?

3. Les problèmes de recherche qui développent une forme d'acquisition des savoirs font ils progresser les élèves dans les autres domaines de l'activité mathématique ? Comment les élèves réinvestissent-ils dans d'autres cadres les compétences et les connaissances développées ?

Une expérimentation, actuellement en cours, vise notamment à proposer des éléments sur la diffusion des compétences travaillées dans ces activités de recherche aux autres cadres de l'activité mathématique et à construire des propositions d'organisation du curriculum fortement en appui sur ces situations de recherche (cf. Krierger & Guise et Front & Gardes dans ces mêmes actes).

Bibiographie

Chabot, H. & Roux, S.(2011). *La mathématisation comme problème*, Archives contemporaines.

Ray, B.(2013). Les fictions réalistes : un outil pour favoriser la dévolution du processus de modélisation mathématique ? Une étude de cas dans le cadre de la résolution collaborative de problème. *Mémoire de Master Histoire Philosophie et Didactique des Sciences. Université Montpellier 2.* En ligne : https ://www.irem.univ-montp2.fr/Lan-notion-de-fiction-realiste.832

Ray B., Azziz S., Couderc G., Durand-Guerrier V., Saumade H., Sauter M., Virducci S., Yvain S.(2012). Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel. *In J.L.Dorier et S. Coutat, Enseignement des mathématiques et contrat social Enjeux et défis pour le 21 siècle, Actes du colloque EMF 2012, Université de Genève.*

Israël, G (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique.* Paris, Seuil.

1. http ://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/problemes-et-enseignement-des-mathematiques/

Annexe 1 : la fiction réaliste proposé lors de l'atelier

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

IREM 2013-2014
Résolution de problèmes
Etienne Mann
etienne.mann@math.univ-montp2.fr

Fuites à Fukushima

Sous la piscine de refroidissement du réacteur 4 de la centrale nucléaire de Fukushima, des ingénieurs de Tepco dirigés par Toshio Nishizawa, constatent l'existence de micro-fuites d'eau contaminée par du césium 137 hautement radioactif. Ils décident alors d'envoyer un robot pour aspirer ces gouttes radioactives. Hélas, son module de guidage a été endommagé par la radioactivité présente dans ce lieu, il avance alors par déplacements de 10 cm dans les directions Est, Ouest, Nord ou Sud qu'il choisit au hasard. Les ingénieurs ont seulement la certitude que le robot démarre de sa base de chargement et qu'en raison de son autonomie, il ne pourra faire qu'un nombre limité de déplacements. Quelles sont les zones qui seront nettoyées ?

Annexe 2 : la relance

IREM 2013-2014
Résolution de problèmes
etienne.mann@math.univ-montp2.fr

Fuite à Fukushima : Relance

Vous avez bien cherché le problème « Fuites à Fukushima » dans plus de 80 classes (environ 2 000 élèves) de la 6-ième à la terminale. Vous vous êtes posé beaucoup de questions intéressantes. Pour traiter mathématiquement le problème, nous devons faire des choix. On supposera que :

- La piscine ne fuit plus.
- Le robot est dans une pièce rectangulaire de 12 m sur 8 m avec au sol du carrelage dont les carreaux sont des carrés de 10 cm de côté. **Les gouttes d'eau** se situent **uniquement sur les joints** (dont **la largeur sera négligée**) du carrelage et **elles recouvrent tous les joints de la pièce**. Ainsi, la **zone qui sera nettoyée** sera l'ensemble des **joints nettoyés**.
- La base de chargement est au **centre de la pièce**.
- Il n'y a pas d'obstacle (chaise, table, poutre,...) gênant le déplacement du robot.
- Quand il est au bord d'un mur, il ne peut plus aller que dans 3 directions et s'il est dans un coin dans 2 directions.
- La pièce est orientée Nord-Sud, ainsi le robot se déplace en suivant les joints et sa largeur ne lui permet d'aspirer qu'un joint à la fois.
- Le robot peut repasser plusieurs fois au même endroit, il n'a pas de mémoire.
- Il n'est pas limité dans la quantité de gouttes à aspirer.
- Il n'est pas obligé de revenir à sa base et s'il y repasse, il ne s'y recharge pas.

Après ces premiers choix, il reste une question importante que vous avez tous posée :

Combien de déplacements le robot peut-il faire ? C'est-à-dire son autonomie.

Je vous propose pour la suite de **fixer le nombre de déplacements pour les questions (1), (2), (3), (4) et (5).**

(1) Quels sont les joints qu'il est **possible** de nettoyer ?

Remarques : « **Possible** » ne signifie pas forcément qu'ils sont « **atteints** ». Certains joints ont plus de chances d'être nettoyé que d'autres.

(2) Où le robot peut-il finir son trajet ?

(3) Pour chaque terminus, combien y a-t-il de chemins possibles ?

Pour les élèves plus avancés deux questions de probabilité :

(4) Quelle est la probabilité d'atteindre chaque terminus ?

(5) Pour chaque joint, quelle est la probabilité d'être nettoyé ?

Une dernière question plus délicate où le nombre de déplacements **n'est plus** fixé et où l'on pourra supposer la pièce de taille infinie.

(6) Si l'on suppose que le robot peut se recharger lorsqu'il repasse par sa base, quelle doit être son autonomie pour être sûr à 99 % qu'il se recharge au moins une fois ?

Bonne recherche, j'attends avec impatience vos résultats

Etienne Mann
Maître de conférences
à l'université de Montpellier 2

7.5 Investigative work in the classroom - How to integrate previously acquired knowledge in the curriculum / Situation de recherche en classe et intégration des savoirs institutionnalisés dans un curriculum

Antoine Guise et Didier Krieger

Irem de Lyon & Ifé

Résumé : Appuyer l'enseignement des mathématiques sur la recherche de problèmes permet d'envisager autrement l'apprentissage des mathématiques en développant notamment la dimension expérimentale de cette discipline. Les équipes DREAM à Lyon et ResCo à Montpellier mènent conjointement, mais chacune avec ses spécificités, des recherches dans ce sens. Nous avons proposé aux participants de cet atelier dans un premier temps de travailler sur un problème de recherche, dans un second temps de voir les savoirs institutionnalisés et enfin dans un dernier temps de voir comment ces savoirs peuvent s'intégrer dans un curriculum, en particulier dans les programmes d'enseignement français.

Abstract : *à traduire*

Sommaire / Énoncé

Sommaire :

- Problème de recherche : les nombres trapézoïdaux
- Proposition de mise en œuvre en classe et posture de l'enseignant
- Étude de production d'élèves de 16-17 ans
- Analyse des éléments mathématiques et méthodologiques potentiellement travaillés
- Intérêts des situations de recherche en classe
- Intégration des savoirs institutionnalisés dans une progression

Énoncé du problème :

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

Chercher le problème et identifier les objectifs que l'on peut assigner à la recherche d'un tel problème par des élèves en classe

Proposition de mise en œuvre / Productions d'élèves

Proposition de mise en œuvre

Temps de présentation des enjeux de la séance Il est important d'expliquer aux élèves le principe général de la séance étant donné le changement de contexte par rapport à un enseignement plus traditionnel. Ce temps est d'autant plus important si c'est la première fois qu'une telle mise en œuvre est pratiquée en classe.

Temps de familiarisation avec le problème L'enseignant expose l'énoncé du problème, questionne les élèves sur le sens des mots importants et s'assure de la compréhension de l'énoncé par chaque élève, éventuellement en faisant relire l'énoncé à certains.

Temps de recherche individuelle Il faut laisser un temps individuel de réflexion pour que les élèves puissent s'approprier le problème et commencer à l'élaborer des stratégies personnelles. Pendant ce temps, le professeur peut circuler dans la classe et s'assurer que chaque élève s'est approprié l'énoncé. A ce propos, plusieurs cas sont possibles

- Si un élève est bloqué, incompréhension partielle ou totale de l'énoncé, une remédiation individuelle est envisageable.
- Si un élève se construit malgré le temps de familiarisation une mauvaise représentation de l'énoncé (contre-sens des mots ...), le temps de travail en groupe qui va suivre doit permettre de lever les dernières ambiguïtés.

Attention, durant les échanges, à ne pas fermer le problème.

Temps de travail en groupe

Phase de recherche Durant ce temps, les élèves sont regroupés par 3 ou 4 et confrontent, mettent en commun leurs idées de départ et approfondissent celles qui leurs semblent prometteuses. De son côté, l’enseignant doit éviter les interventions qui influencerait les élèves ou qui auraient tendance à fermer le problème. Il est important de d’encourager les élèves qui en auraient besoin et de favoriser l’auto-critique des propositions élaborées par les élèves.

Phase de synthèse et de rédaction d’une solution Une fois la phase de recherche terminée, les élèves mettent en forme sous forme d’affiche, transparent ou autre support, une synthèse de leur recherche avec les résultats obtenus ou les conjectures formulées. Le professeur tente de s’assurer que tous les élèves participent à l’élaboration de la proposition commune.

Temps de mise en commun et de débat Cette phase est fondamentale mais souvent délicate. Il est nécessaire que les temps précédents soient suffisamment réussis pour que les élèves puissent s’engager dans un réel débat, que les productions bien que différentes soient compréhensibles par tous. Il est important de se convaincre qu’une phase essentielle se joue ici et qu’un temps minimum est indispensable pour sa mise en œuvre.

L’organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d’approfondir autour des résultats proposés.

Durant cette phase, l’enseignant doit jouer le rôle de médiateur et d’animateur. C’est à lui d’orienter et de cadrer les discussions, de dynamiser le débat et de guider la classe si une piste intéressante émerge de la discussion. Toutefois, c’est un exercice difficile car il ne faut pas influencer les élèves ni leur donner soi-même des pistes mais simplement les orienter sur les conséquences de leurs résultats. Les conjectures, preuves et résultats doivent être produit et formulés par les élèves.

Temps de synthèse Il est important pour les élèves d’avoir une conclusion à apporter à ce travail. Cependant, faire une synthèse ne signifie pas apporter la solution finale au problème mais ce temps permet de faire un état des travaux et résultats effectués. Une discussion peut s’engager sur les éléments mathématiques ou heuristiques travaillés, qui méritent d’être mis en valeur. Durant cette phase d’institutionnalisation, le professeur est de nouveau acteur et meneur. C’est lui qui apporte le cadre des savoirs mis en jeux.

Le contenu de cette synthèse peut être écrit dans le cahier de l’élève et pourra être de nouveau exploité lors de futurs problèmes ou chapitre en lien avec les notions étudiées.

Productions d’élèves

Identifier les savoirs mathématiques travaillés et anticiper les savoirs méthodologiques pouvant être mis en œuvre

Savoirs méthodologiques et mathématiques

Savoirs méthodologiques :

- expérimenter sur des valeurs numériques à la main et à la calculatrice
- conjecturer
- dégager des sous-problèmes, que l’on s’attache à démontrer
- se poser le problème de la démonstration, de la preuve
- observer des invariants et/ou des relations de récurrence
- mettre en place un procédé algorithmique pour définir les nombres trapézoïdaux
- revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples « génériques ») qui ne donne pas une démonstration
- critiquer une démonstration, en percevoir les limites
- analyser les conditions de validité d’un calcul
- se poser un nouveau problème : pour un entier donné, combien a t-il de décompositions en somme d’entiers consécutifs ?
- utilisation d’un outil informatique : le tableur (adresses absolues et relatives)

Problème : " Trouver tous les entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs. "

Voici les résultats de nos recherches : (suites arithmétiques)

Suite	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2 entiers naturels consécutifs	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
3 entiers naturels ...		3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	

On remarque que certaines valeurs ne sont pas dans le tableau :
2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 ...

On en a déduit une suite de ces chiffres que l'on ne trouve pas :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

On la nomme (U_n). Elle est géométrique avec $q = 2$

0 ne fait pas partie de la suite non plus car on ne peut pas additionner des chiffres et avoir 0.

La solution du problème est : $\mathbb{N} - \{(U_n) ; 0\}$

Trouver tous les entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins 2 entiers naturels consécutifs.

2 termes

$0 + 1 = 1$ Déjà, tous les nombres impairs,
$1 + 2 = 3$
$2 + 3 = 5$
$3 + 4 = 7$
$4 + 5 = 9$
$5 + 6 = 11$

3 termes

$0 + 1 + 2 = 3$ multiples de 3.
$1 + 2 + 3 = 6$
$2 + 3 + 4 = 9$

4 termes

$0 + 1 + 2 + 3 = 6$ à partir de $x = 1$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$2 + 3 + 4 + 5 = 14$ → multiples de 4 + 2 ↳ $4x + 2$.

5 termes : multiples de 5 > 10. $x = 2$

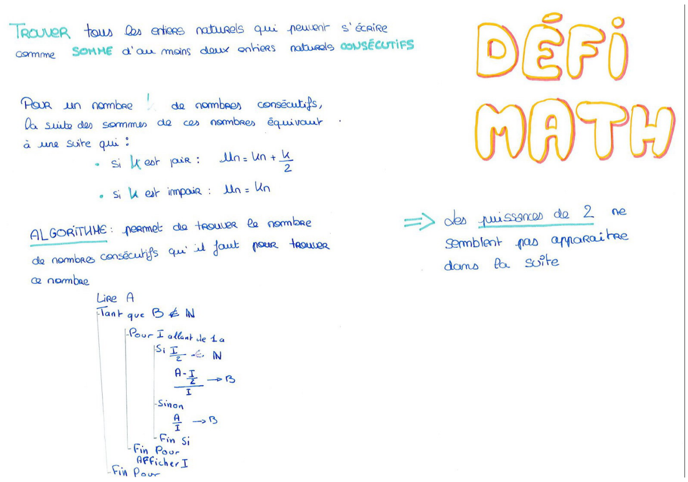
6 termes

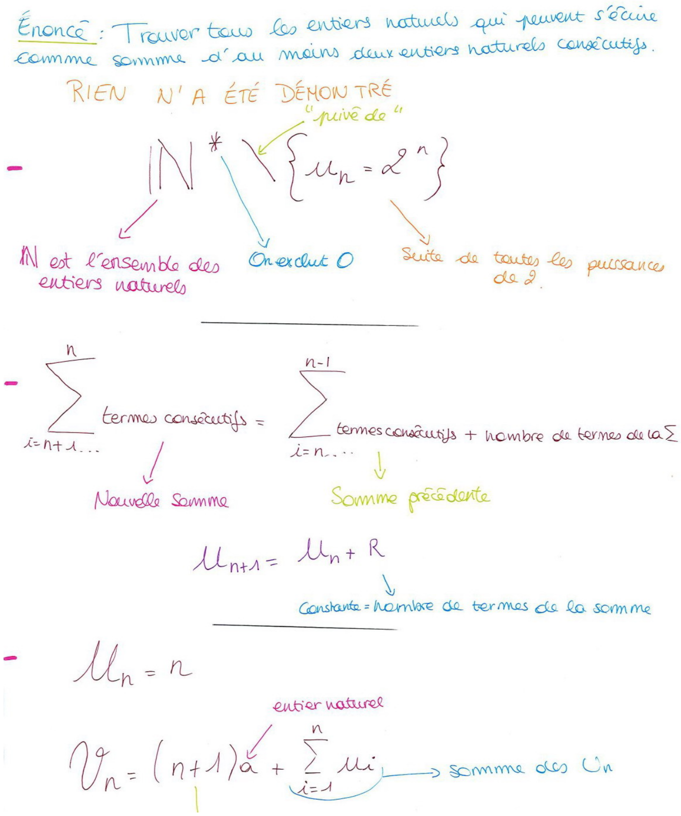
$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ → nombres impairs (pas tous)

2 → impossible
4 → idem
8 → idem
16 → idem
32 → idem
64 → idem.

exprimer l'inverse : $n > 0$

les non-décomposables : $u_n = 2^n + 0$


TROUVER tous les entiers naturels qui peuvent s'écrire comme SOMME d'au moins deux entiers naturels CONSÉCUTIFS
DÉFI MATH
Pour un nombre k de nombres consécutifs, la suite des sommes de ces nombres équivaut à une suite qui :
• si k est pair : Un = Un + k/2
• si k est impair : Un = Un
ALGORITHME : permet de trouver le nombre de nombres consécutifs qu'il faut pour trouver ce nombre
Lire A
Tant que B ∉ ℕ
Pour I allant de 1 a
Si I/2 ∈ ℕ
(A - I/2)/I → B
Sinon
A/I → B
Fin Si
Fin Pour
Afficher I
Fin Pour
⇒ des puissances de 2 ne semblent pas apparaître dans la suite


Énoncé : Trouver tous les entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
RIEN N'A ÉTÉ DÉMONTRÉ
" privé de "
- ℕ* \ {Un = 2^n}
ℕ est l'ensemble des entiers naturels
On exclut 0
Suite de toutes les puissance de 2.
- Σ (i=n+1…, n) termes consécutifs = Σ (i=n…, n-1) termes consécutifs + nombre de termes de la Σ
Nouvelle Somme
Somme précédente
Un+1 = Un + R
Constante = nombre de termes de la somme
- Un = n
entier naturel
Vn = (n+1)a + Σ (i=1, n) Ui
somme des Un

Savoirs mathématiques :

- nombres entiers naturels
- entiers pairs, impairs (caractérisation « algébrique »)
- calcul algébrique
- arithmétique : divisibilité (ici par 2)
- somme des n premiers entiers naturels (ou suite arithmétique) et à ce propos, anecdote sur Gauss
- raisonnement par analyse-synthèse
- raisonnement « par le pair et l'impair » : raisonnement par exhaustion des cas
- raisonnement par l'absurde
- fonction de deux variables et tableau de valeurs de cette fonction sur un tableur

Intérêts des situations et intégration dans une progression

Intérêts des situations :

- Modification du rapport aux mathématiques, activité comparable à celle du mathématicien ; chercher (plutôt que trouver), prendre des initiatives ...
- Mobilisation et acquisition de connaissances mathématiques
- Essayer, formuler et tester des conjectures, organiser sa démarche, mettre en œuvre une méthode originale, vérifier la solution, argumenter ...

Premier essai d'intégration de situations de recherche en classe durant l'année 2013-2014 ... d'où quelques questions :

- Durant l'essai le choix a été fait d'entrer par les notions (choix d'une notion PUIS choix d'un problème). L'idée d'intervertir le processus (choix d'un problème POUR travailler potentiellement plusieurs notions) est-il envisageable dans une progression annuelle ?
- Qu'atteint-on avec les problèmes de recherche ?
- Que n'atteint-on pas avec les problèmes de recherche ?
- Comment articuler ces problèmes avec les autres savoirs ou savoirs-faire du programme qui ne sont pas atteints ?
- Comment articuler ces problèmes avec l'entrainement technique nécessaire à l'acquisition de certaines capacités exigibles du programme ?

Quelques pistes pour l'intégration des problèmes de recherche dans une progression :

Schéma d'intégration d'un problème (de recherche) dans une progression :

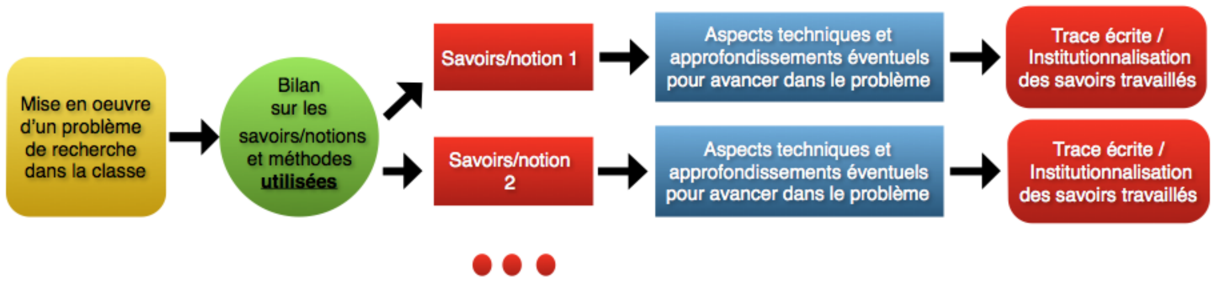
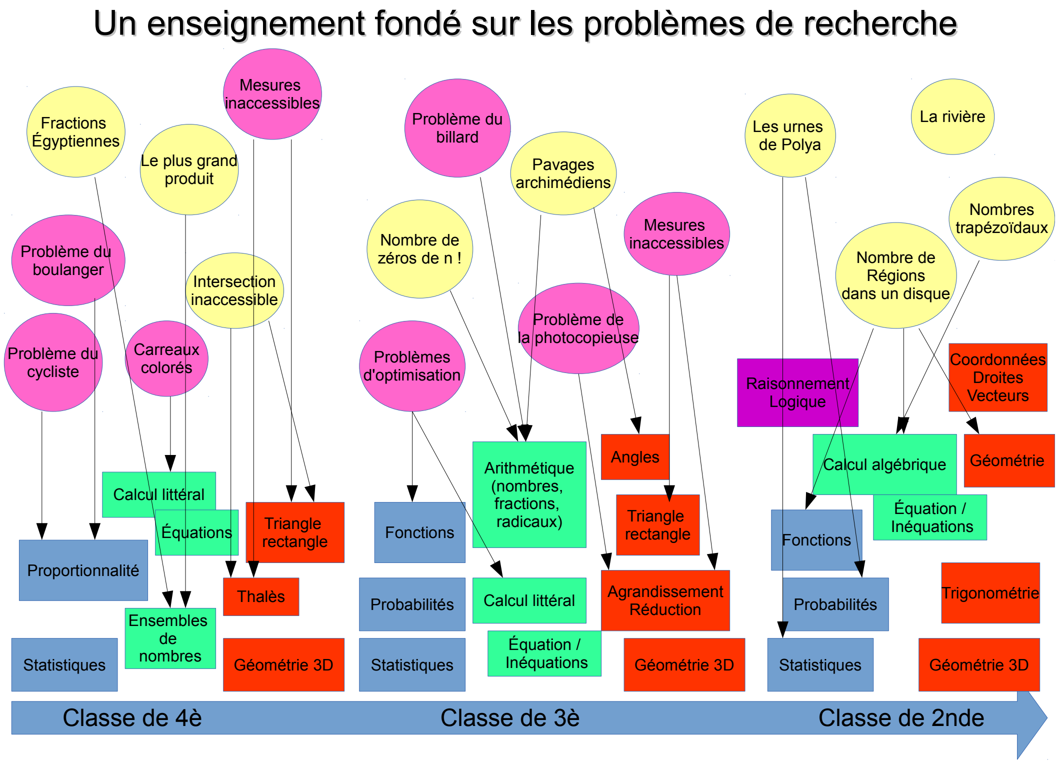


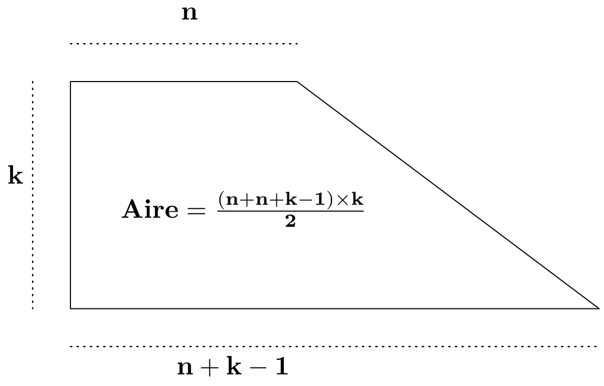
Schéma d'articulation de différents problèmes autour d'une progression sur 3 ans :



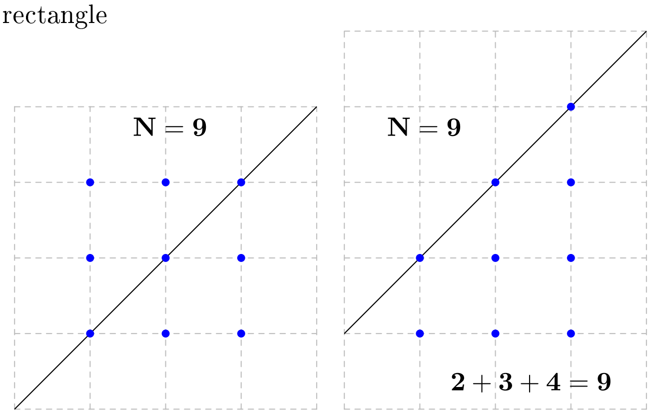
Durant l'année scolaire 2014-2015, une expérimentation sera menée sur les niveaux troisième (14-15 ans) et seconde (15-16 ans) autour de ces problèmes en suivant les pistes précédemment citées et en essayant de répondre aux questions posées.

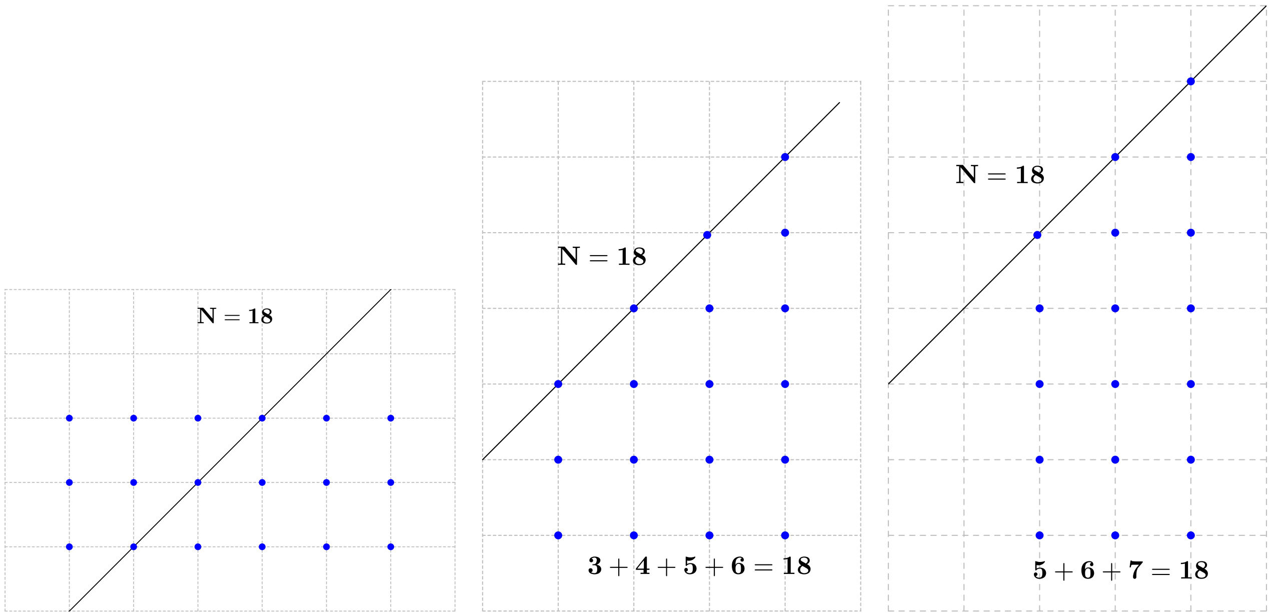
Compte-rendu de l'atelier avec deux nouvelles solutions rencontrées :

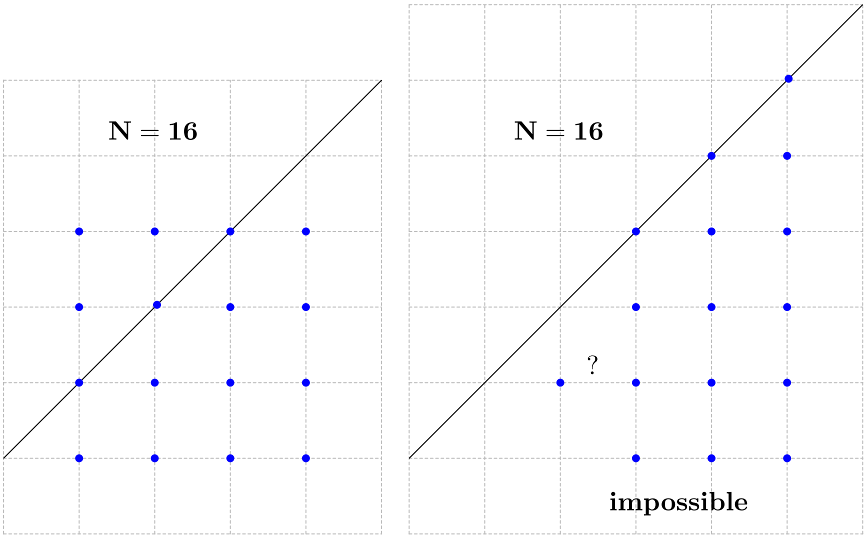
- à l'aide de l'aire d'un trapèze : on construit un trapèze rectangle dont les côtés parallèles mesurent le nombre de départ et le nombre d'arrivée, et la hauteur mesure la différence entre ces deux nombres



- à l'aide de points à déplacer : on dispose d'un nombre de points N, on trace une droite et on déplace les points pour construire un trapèze rectangle







Une solution :

Elle utilise le résultat suivant : si n est un entier naturel, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On peut noter S_n cette somme.
(cette démonstration permet de revoir ou d'introduire ce résultat, comme outil de résolution de problème)

N étant un naturel, on cherche s'il existe deux entiers naturels a et n tels que :
$N = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1)$
$N = S_{a+n-1} - S_{a-1}$
$N = \dfrac{(a+n-1)(a+n)}{2} - \dfrac{(a-1)a}{2}$
Soit : $2N = (a+n)^2 - a - n - a^2 + a = n(2a+n-1)$
On peut alors raisonner sur la parité de l'entier n :
si n est pair : $2a+n-1$ est impair
si n est impair : $2a+n-1$ est pair

Par conséquent, des deux entiers n et $2a+n-1$, l'un est pair et l'autre impair : leur produit étant égal à $2N$, cela entraîne que N possède un facteur premier impair : N n'est pas une puissance de 2.

Autre raisonnement, par l'absurde : si $N = 2^m$ alors on cherche a et n tels que : $2^{m+1} = n(2a+n-1)$, ceci est impossible car l'un des deux facteurs du second membre est impair.

Il reste encore à démontrer que tout nombre N qui n'est pas une puissance de 2 peut s'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

$2N$ est donc le produit d'un nombre impair i par un nombre pair p.
Alors : $2N = ip$ et $2N = n(2a+n-1)$ et
si : $i < p$, alors il suffit de poser : $n = i$ et $p = 2a+n-1$, soit : $a = \dfrac{p-i+1}{2}$
si : $i > p$, alors il suffit de poser : $n = p$ et $i = 2a+n-1$, soit : $a = \dfrac{i-p+1}{2}$

La conjecture est ainsi complètement démontrée, et cette démonstration donne un procédé pratique pour déterminer a et n entiers naturels tels que : $N = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1)$.

7.6 La classe d'accueil et la classe « post accueil »

Isabelle Jordi

Université de Montréal

Résumé : La classe d'accueil et la francisation sont au Québec des sujets d'une grande importance. Dans les régions densément peuplées, il est fréquent que plus du 50 % des élèves n'ait pas le français comme langue maternelle. A quel niveau doit-on intégrer les nouveaux arrivants ? Comment peut-on développer l'apprentissage de la langue française et celui des mathématiques ? Pour répondre à ces questions, nous présenterons l'outil diagnostique développé par l'Université de Montréal, puis une série d'activités multi-niveaux utilisant peu ou pas de vocabulaire.

Introduction

Les pays de grande immigration ont développé des modèles différents pour intégrer les jeunes d'immigration récente. Au Québec, le choix qui a été fait, lorsque le nombre d'élèves le permet, est celui de la classe fermée, nommée classe d'accueil.

Dans une grande ville comme Montréal, le développement rapide de l'immigration entraîne des conséquences auxquelles les enseignants n'étaient pas préparés. Pour en donner deux exemples, actuellement, à la CSDM [2] et à la CSMB [3] plus d'un élève sur deux a une langue maternelle autre que le français.

Commission scolaire CSDM	Commission scolaire CSMB
228 classes d'accueil 27% des élèves sont nés à l'extérieur – 4 % en Algérie – 2 % au Maroc – 2 % en Haïti – 2 % en Chine – 18 % autre 54% des élèves ont une langue maternelle autre que le français (156 langues maternelles / 133 parlées) – 10% arabe – 8% espagnol – 5% anglais – 4% créole 27% d'autres	33 % des élèves sont nés à l'extérieur du Québec : – 1,7 % États-Unis, Maroc, Chine ; – 1,6 % Algérie, Égypte ; – 1,2 % France, Moldavie ; 48 % des élèves sont allophones [a] ; 11 % anglophones

a. Elève dont la langue maternelle n'est ni le français ni l'anglais.

TABLE 7.3 –

Nous pourrions ajouter d'autres chiffres pour montrer l'extrême diversité de la population des écoles québécoises, mais nous croyons que ceux-ci suffisent à montrer l'ampleur du problème.

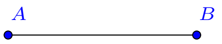
Le premier défi pour les écoles, lors de l'arrivée de ces jeunes dans le système d'éducation, est de déterminer le niveau scolaire qu'ils ont atteint dans leur pays d'origine.

Afin de faciliter la tâche aux écoles, et d'uniformiser la procédure de « classement », le Ministère de l'Éducation des Loisirs et des Sports (MELS) confia à l'Université de Montréal (Poirier, L, Armand, F., Laurier, M., 2003) la tâche de construire un test diagnostique en mathématiques, unique discipline où il est possible d'évaluer les connaissances de l'élève sans être confronté à la non-connaissance de la langue.

2. Commission Scolaire de Montréal, Regroupement d'écoles de l'île de Montréal comptant environ 70 000 élèves.
3. Commission scolaire Marguerite Bourgeois qui se trouve aussi sur l'île de Montréal et compte environ 42 000 élèves.

Comment évaluer la connaissance mathématique de l'élève en mathématiques ?

Commençons par les items qui concernent les notations mathématiques utilisées par l'élève. Exemples :
Complète :
1, 2, 3,. . .
997, 998, 999,. . .
9997, 9998, 9999, . . .
24 ? 6 = 4
25@2 = ?



$AB =\ldots$ cm

La manière de former les chiffres, de tenir le crayon, donne des indications précieuses.

Comment passera-t-il de 999 à 1000 ? Écrira-t-il 1.000 ? 1'000 ? 1,000 ? 1 000 ? 1000 ?

Ces indications permettront à l'interviewer de modifier les questions qui suivent afin que l'élève ne rencontre pas de difficulté dans la lecture des énoncés.

Quel signe de division utilise-t-il ?

Une fois le signe de division déterminé (@), comment indique-t-il la virgule ?

Parviendrons-nous à savoir :
– Comment note-t-il les segments ? les connaît-il ?
– Comment note-t-il la mesure d'un segment ?
– Comment manipule-t-il la règle ?

Les exemples ci-dessus ne sont qu'une petite partie de tout ce qu'il faut ajuster pour juger le mieux possible les connaissances d'un élève. Il a été nécessaire d'interviewer plusieurs centaines d'élèves pour créer un test de qualité.

Puis est venu le temps d'aborder quelques activités que l'on peut réaliser en classe d'accueil.

L'enseignement des mathématiques en classe d'accueil

L'enseignement des mathématiques en classe d'accueil se doit :
– d'utiliser le moins de vocabulaire possible, au moins au début ;
– de pouvoir être accessible à divers niveaux scolaires ;
– à être valorisant pour l'élève ;

Afin d'illustrer notre propos, nous proposerons trois activités :
– L'étude de différents systèmes de numération (Maya, Chinois, Egyptien)
– L'activité « Dites-le avec des fleurs » illustrée ci-dessous et l'activité des Casse-têtes illustrée plus loin.

Nous avons aussi brièvement parlé de l'utilisation de matériel divers comme les Blocs Mosaïques ou les Tangram pour travailler les fractions, les pavages du plan, les développements de solides, etc.

Dites-le avec des fleurs [4]

Cette activité peut être résolue de différentes façons et s'adapte bien à des classes multiniveaux. Le partage des solutions est facile permettant ainsi de développer le langage mathématique et le langage naturel, qui est le principal objet d'étude de la classe d'accueil.

Les casse-têtes [5]

Dans une grande enveloppe, les pièces de plusieurs casse-têtes sont mélangées. Le nombre de casse-têtes est connu des élèves (nous pouvons considérer ce nombre comme une variable didactique).

Chaque casse-tête a une forme géométrique. Carré, triangle, rectangle, etc.

Sur chaque pièce d'un casse-tête est écrite la fraction représentant l'aire de la pièce par rapport à l'aire totale.

Le nombre de pièces de chaque casse-tête est aussi une variable didactique.

4. Une situation problème à intérêts multiples, Geneviève Lessard, Université du Québec en Outaouais (UQO).
5. Blouin, Pascale : Jeu de fractions

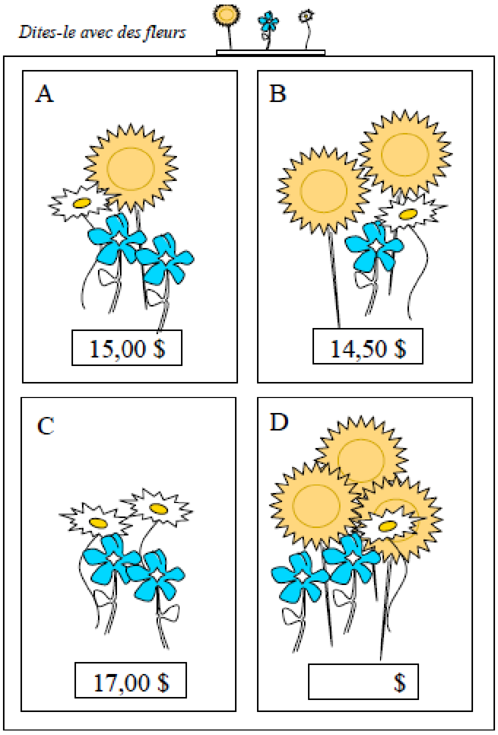


FIGURE 7.4 – Dites-le avec fleurs

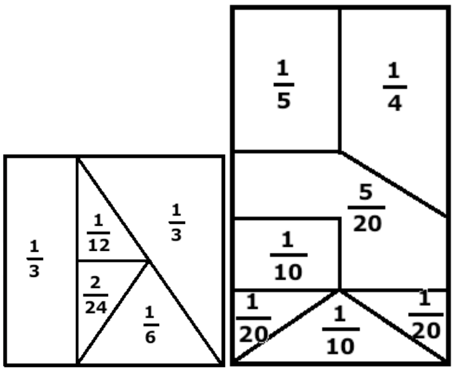


FIGURE 7.5 – Exemple de deux casse-tête reconstitués.

Malheureusement, lors de l'atelier, nous n'avons pas eu le temps de parler de ce que nous pourrions appeler le « post accueil », c'est-à-dire le temps où l'élève quitte la classe d'accueil pour aller dans une classe « régulière » son niveau de français étant jugé suffisant. Pour lui, une nouvelle étape commence : Celle où tous donnent pour acquis qu'il comprend le français, mais où ce n'est pas toujours le cas (et il ne les détrompera pas).

Références

Poirier, L, Armand, F., Laurier, M. (2003). *Outil diagnostique en mathématique pour les élèves immigrants nouvellement arrivés en situation de grand retard scolaire.* Direction des services aux communautés culturelles. Ministère de l'Éducation du Québec. 216 pages. ISBN 2-550-40984-1.

7.7 Activités favorisant la pensée logique chez les enfants pre-scolaires et les élèves de l'école primaire

Michaela Kaslová

Résumé : L'atelier partagé en deux suivant le développement de la pensée logique montre les possibilités et les limites dans la vie de l'enfant/l'éleve. La théorie et la pratique - sont-elles en coordination ? Comment l' enseignant met-il a profit la théorie ? Nos manuels de mathématiques offrent-ils assez de stimulants pour le travail systématique ou dépendent-ils de la philosophie d'éducation de l'enseignant et de son travail créatif ? Comment pouvons-nous stimuler les capacités de l'enfant d'aujourd'hui en concurence avec les nouvelles technologies qui facilitent considérablement le processus de la solution ? Dans les différents groupes de cet atelier nous allons construire en chaîne des problemes gradués.

Introduction

La notion « logique » d'après différentes sources de notre histoire humaine a plusieurs significations : le raisonnement, la raison, la langue. Le dictionnaire de la langue française presente le terme « logique » comme : a) adjectif - qch qui répond aux règles de la logique ; b) nom féminin - science qui étudie les démarches de raisonnement, cohérence ou enchaînement. Pour les raisons suivantes, nous ne parlerons pas de la logique formelle ni de la logique mathématique mais de la logique dans l'enseignement de prépa-mathématique ou des mathématiques a l'école.

La pensée logique chez les adultes et chez les enfants diffèrent selon leur expérience et leur potentiel. La pensée logique chez les enfants dépend de leur vie courante, ne touche pas le monde abstrait, les notions en train de se développer - elles ne sont pas encore stabilisées ni même relativement, la question de la vérité/la véracité varie, les instruments de la décision (vérité ou non) ne sont pas encore entièrement constitués, les enfants n'opèrent pas avec les notions ou ils se trouvent à l'étape pré-opératoire ou de l'opération concrète, le processus de généralisation diffère d'un cas à l'autre (voir Piaget et al.). Pour notre travail il suffira de constater que la pensée logique s'occupe des structures logiques. Quand on parle de la pensée pré-logique, on accepte qu'elle possède certains aspects de la pensée logique et qu'il faut en accepter les limites, données par l'age de l'enfant. L'analyse des matériaux didactiques destinés aux enfants des maternelles montre qu'il existe des activités à base écrite qui peuvent stimuler la pensée logique. Le terme « peut » veut dire que l'application de la pensée logique est conditionnée. Parfois ces activités sont présentées isolément comme « des bonbons », il y manque deux principaux aspects : A) Introduction didactique décrivant/caractérisant les activités précédentes, nécessaires pour créer une bonne expérience dans le monde réel sur la base de la manipulation, de la kinésie, ...et qui soutient la nécessité du développement de la graphomotorique (niveau où l'enfant n'a plus besoin de se concentrer sur la façon de bien tenir son crayon, où il peut dessiner ce qu'il veut). B) Le travail dans le cahier doit aussi être accompagné/terminé par une offre de dialogue ; ce mode de travail doit être aussi suivi dans d'autres activités (modifiées, semblables, graduées, ...) en respectant les besoins psychiques (principe de la nouveauté/l'information, de la stimulation adéquate, de la raison d'être, ... ou de la sécurité - donné dans ce cas par la connaissance des règles, du matériel, du contexte... ; voir Maslow, Henderson,., Langmaier, Matejček, ...). Le marché des jouets nous offre un grand éventail de jeux qui servent, entre autres, au développement de la pensée logique (classification, identification, raisonnement,....), les règles de jeu sont d'habitude concentrées sur un des processus logiques que, dans certains cas, on peut même ignorer. D'une certaine façon, ces jeux nous influencent non systématiquement. isolation des problèmes qui peuvent stimuler la pensée logique, absence de système où un problème contribue au développement d'un autre. On pourrait avancer comme argument que chaque manuel de maths développe la pensée logique. On est d'accord que l'enfant doit utiliser la pensée logique mais cela peut se passer de manière intuitive. Par exemple, l'analyse des problèmes verbaux est basée sur l'évaluation des données afin de déterminer si nous en avons besoin ou non pour la solution ; ce jugement est suivi par la sélection des informations et par leur structuration afin de pouvoir décider de la méthode de solution ou la découvrir (sauf en cas de solution par perspicacité).

Atelier et trois mythes

Le pilotage parmi les parents des élèves tchèques surdoué(e)s a montré que la majorité des parents est persuadée que la « pensée logique se développe indépendamment de l'enseignement » - spontanément et où la pensée logique est donnée - née comme partie du caractère exceptionnel de leurs enfants sans être nécessairement développée. L'usage spontané est évalué comme un des attributs de l'être surdoué pour les maths. Dans certains articles (écrits en majorité par ceux qui enseignent les maths aux élèves surdoué(e)s ou par les auteurs des tests logiques) on peut noter une certaine tendance à « présenter les problèmes logiques comme des problèmes purs, non complexes, indépendants d'autres capacités ou connaissances ». On peut aisément prouver que chaque solution d'un problème logique dépend non seulement de certaines qualités de jugement ou de raisonnement, mais aussi du niveau de développement d'autres capacités et de conditions telles que les dimensions du dessin, des lettres, etc. La pensée logique est considérée comme « un processus éloigné de la créativité » mais en réalité elle en est partie intégrante - par exemple la création des stratégies de jeu. Notre travail en groupe montre incontestablement que les mythes sont erronés.

Limites et développement

Topisme, syncrétisme, présentisme, égocentrisme - caractéristiques typiques pour l'enfant de l'école maternelle et décrites dans les manuels de psychologie évolutionnaire et cognitive - correspondent-elles aux caractéristiques de l'enfant d'aujourd'hui ? Existent-ils d'autres limites ? Nous avons suivi pendant quinze ans comment les enfants apprennent à comprendre le processus de négation et comment ils interprètent le mot « non ». Nous avons de même analysé les dialogues/monologues des enfants et nous avons décrit les différents rôles joués par le terme « non » dans leur langue parlée. Si l'utilisation du « NON » est presque interdite dans la communication (voir certains courants pédagogiques), l'enfant arrive à l'école avec une expérience réduite et dans ce cas le développement de la pensée logique se trouve limité. « Malcompréhention » du mot « non » dans le contexte linguistique où du processus de négation influe sur le succès dans le processus d'apprentissage des mathématiques.

Si l'on veut stimuler la pensée logique, il faut réduire les émotions (voir psychologie cognitive ou neurologie : la stimulation de l'amygdala dans le cerveau bloque la pensée rationnelle et stimule la pensée associative ; par ex. Atkinson), mais à l'école maternelle les activités sont basées sur le jeu où par contre on suppose la participation des émotions.

Le style de travail de l'enseignant(e) a plusieurs caractéristiques, l'une d'elles est le style transmissif où la discussion est exceptionnelle, le travail avec diverses possibilités et alternatives est rare. Le style éducatif autoritaire au sein de la famille a un effet semblable. L'acceptation de l'existence des possibilités (point de vue philosophique) représente une des bases favorisant le développement de la pensée logique.

Caractère des activités

Supposons que la pensée logique utilise divers processus tels que le jugement, la classification (les stratégies du choix et de l'exclusion), le raisonnement (utilisation de la phrase conditionnelle - prémisses et conclusion). Ces activités peuvent stimuler ce genre de pensée logique, développée ou elles peuvent être orientées vers certaines composantes de ce processus afin de « préparer » l'enfant. Quelles sont ces composantes ? Compréhension du mot parlé non seulement dans le cadre de phrases mais aussi de complexes - compréhension des conjonctions ; compréhension de la communication mixte (par ex. langage et image) ; compréhension non pas dans le cadre du discours (dans le contexte donné - en général) ; différentiation entre négation et antinomie ; compréhension de la condition tout en sachant la respecter ; compréhension des liaisons y compris les phrases conditionnelles ; comparaison et décision concernant la véracité/correction de la chose communiquée/de l'information ; apprécier si l'information est complète et objective (prédicat) ; acceptation de l'existence de plusieurs possibilités ; capacité de juger les possibilités au moyen d'un critère objectif évaluable ; classification (même réitérée) au moyen de l'arbre de classification en vue de l'identification ; généralisation - rechercher les caractéristiques essentielles communes y compris la compréhension des quantificateurs et se rendre compte de ce qui est important ou non ; déduction, application, ... ; correction des conclusions sur la base des informations nouvelles ; dépistage de l'erreur dans le raisonnement ; preuve et argumentation.

Sur divers cas, nous avons montré comment développer les différentes composantes, et cela non de manière isolée mais dans le cadre de la chaîne de gradation.

Activités

Sur divers cas, nous montrerons comment développer les différentes composantes, et cela non de manière isolée mais dans le cadre de la chaîne de gradation.

1. JEUX « VRAI OU FAUX »

Auteur : M. KASLOVÁ

Code de communication : oral et gestuel ; Espace : non défini ; Matériel : un objet vert symbolisant la réponse *vrai*, un objet rouge symbolisant la réponse *faux* ; Caractère du jeu : cyclique ; Aptitudes : développement de l'esprit de décision ; acceptation de la nécéssité de la preuve ; travail l'information complete et objektive ; Age des joueurs : à partir de 4,5 ans ;

Règles - VARIANTE 1 : A) Les joueurs ont devant eux ces deux objets. Note : Ces deux objets peuvent servir à tout le groupe ou chaque joueur possède les deux couleurs. B) Le meneur précède par phrases entières (proposition) soit décrivant le milieu dans lequel se déroule le jeu soit concernant les connaissances des joueurs. C) Les joueurs évaluent la valeur positive ou négative de la phrase sans parôle en touchant un de ces deux objets. D) Note : le jeu peut avoir un caractère compétitif - rapidité de la réaction. E) Le meneur peut demander la raison de ce choix (épreuve locale).Note : Modification - le vainqueur remplace le meneur.

VARIANTE 2 : Matériel : on objet vert, un objet rouge et un objet jaune symbolisant la réponse *non évaluable* - c'est à dire qu'il est impossible de décider si la phrase est juste parce que par exemple la phrase n'est pas complete ou qu' elle contient des éléments subjectifs ; il y comparatif ou superlatif sans précisant avec quoi on a fait la comparaison.

La pratique a montré la différence entre les réactions des enfants et des adultes : Pour l'enfant préscolaire le processus de la vérification dépend souvent si l'objet est visible ou non (ce qui se trouve maintenant et ici). Pour la compréhension des règles de jeu et le passage des premiers pas vers la solution dure deux ou trois fois plus longtemps. Les enfants ont besoin de la preuve immédiate en montrant pourquoi oui/non. En utilisant la variante 2 les adultes ont tendance a beaucoup discute, les enfants on besoin d'un arbitre qui donne un exemple, pourquoi on doit toucher « jaune » (Marc est plus grand. Plus grand que qui ?Mais : Marc est plus grand que moi. Dans ce cas, on peut évaluer. ...Il est bleu.Il faut toucher jaune comme nous ne savons pas Qu'est-ce qui est bleu ? Si on dit : Ton pull est bleu. Vous pouvez répondre : oui/non.)

2. JEUX MATH LOGIQUE

   Code de communication : graphique (peut être combiné avec code oral) ; Espace : autour du tableau noir ou d'une grand feuille de papier ; Matériel : des billes : a) deux rouges et deux bleus ; b) trois rouges, trois bleus et trois jaunes ; c) quatre groupes de billes chacune d'une couleurs différente ; Aptitudes : différentiation entre : deviner et juger, « je pense » et « je sais » ; « vrai » et « faux » ; méthode d'exclusion ; recherche des possibilités ; preuve ; différentiation entre le voeu et la réalité ; Age des joueurs : a partir de 4,5 ans ;

   Règles : Un des joueurs - le meneur choisi et cache deux billes sans les montrer aux autres. Les joueurs présentent leurs idées graduellement, le meneur les *inscrit* sur le tableau (la feuille de papier) sur la base des dessins en couleurs.Chaque idée est immédiatement évaluée par un signe convenu a l'avance (par ex. +/- ou O /N). Les joueurs doivent tenir compte de l'évaluation préalable dans la recherche de la « vérité ». Si un joueur devine le couple des couleurs le meneur doit montrer les billes choisies. Note : Il convient de répéter le jeu trois fois au minimum sans passer a une variante plus difficile. Les billes peuvent être remplacées par des objets répondant aux conditions du jeu (par ex. deux boutons ronds et deux boutons carrés).

   Ce jeu est mieux accepté par les enfants que par les adultes parce que les adultes savent que trouver la bonne réponse est une question de temps, alors que l'enfant est limité par la caractéristique de son age.

3. DÉCOUPAGE DE L'ESPACE

   Auteur : M. KASLOVÁ ; Code de communication : gestuel ; Espace : fermé (pièce, classe, sale de gymnastique, etc.) ; Aptitudes : orientation dans l'espace ; évaluation de la situation ; communication au moyen d'un code ; compréhension de *non* ; réduction de l'espace - décomposition du tout ; Joueurs : trois au minimum âgés de 5 ans et plus ; un dans le rôle de *devineur*, les autres dans le rôle d'évaluateurs ;

   Règles : a) Un joueur quitte la salle, c'est le devineur, les autres joueur choisissent un objet ou une personne se trouvant dans la pièce ; cet objet doit avoir les dimensions suivant s 20 cm x 20 cm x 20 cm au minimum ; a partir de ce moment il est interdit de regarder l'objet. b) Le devineur entre dans la pièce et choisi son poste en écartant les bras il découpe l'espace de la salle en deux parties ; après avoir placer le paumes de la main vers le haut / vers le bas / ou vers l'avant le devineur demande a l'auditoire dans quelle parité se trouve l'objet en question ; les joueurs inclinent la tête en signe d'affirmation ou de négation ; le devineur de place et utilise la même stratégie et pas a pas il réduit l'espace jusqu'au moment ou il est sur d'avoir identifier l'objet.

4. LOGIQUE ARITHMÉTIQUE

   Joueurs : depuis 7 ans Espèce : fermé ; Aptitudes :

Règles : VARIANTE A Enseignant : « Nous avons des nombres allant de 0 a 20 (100 ou 1000). Je choisie un numéro et je l'écrirais dans mon cahier (personne ne le poie pas). Vous devez découvrir quel est le numéro que j'ai choisi. Il faut formuler les question fermées et je réponds oui ou non jusqu'au moment où vous êtes sur que vous avez identifié un seul numéro possible qui possède tous les cahactéristiques vérifiés. » Note : les questions et les réponses peuvent être enregistré dans le code arbitraire. VARIANTE B Les joueurs sont partagés en deux groupes G1 et G2. G1 joue un rôle de l'eseignant et G2 le rôle des éleves. Les deux groupes doivent changer le rôle après chaque tour.

5. LABYTINT DES FLECHES

   Auteur : M. KASLOVÁ ; Code de communication : kinésie ; Matériel : de 30 a 60 flèches déssinées sur une feuille de papier (5cm x 20 cm). Conditions : Les participants posent les flèches sur terre en respectant le systeme du quadrillage (voir photo). Aptitudes : orinetation dans l'espace ; évaluation de la situation structurée ; Règles : VARIANTE A Les joueurs cherchent le voi depuis la rentré jusqu'a la sortie. Ils peuvent trouver un chemin quelconque ; ou il faut qu'ils doivent trouver le voi le plus court ou il n'y a que deux tournant a gauche au maximum. Les chercheurs peuvent jouer individuellement l'un après l'autre ou simultanément ou par groupe de deux. VARIANTE B : les joueurs sont divisé en deux groupes : G1 (2-4 joueurs) a la rôle de constructeurs de labyrinthe. Il doit respecter dans la construction une des conditions suivantes : a) il existe qu'une seul voie ; 2) il y a 2 (3, 4) voies seulement ; 3) il y a 2 (3) voies au minimum / au maximum. G1 doit contrôler le travail de la groupe G2. Note : Les préscolaires doivent s'arrêter a chaque carrefour et annoncer toutes les possibilités acceptables. Ensuit ils doivent annoncer quelle de ces possibilités ils ont choisi. Il doivent distinguer l'offre et le choix.

6. QUADRETTE - TERCET (TRITET)- BITET (DUO, COUPLE)

   Code de communication : orale ; Espace : fermé (pour une meilleur concentration) ; Matériel : Cartes composés de groupes par quatre (trois, deux). Chaque groupe a une caractéristique commune (signe), les cartes en groupes différant par un détail important pour le jeu. Joueurs : age minimum 5 ans, nombre de joueurs 3 au minimum. Aptitudes : mémoire orale et spatiale ; vérification, information complete, existence des possibilités, jugement, probabilité, raisonnement, déduction, notion du nombre naturel, comparaison,. . .Règles : Distribuer toutes les cartes entre les joueurs. Le jeu est ouvert par le joueur qui est a la gauche du distributeur ou celui qui a le moins de cartes. Le jeu a pour but d'obtenir le plus grand nombre de groupes de cartes du même signe. Le joueur dont c'est le tour s'adresse a un autre joueur et demande une carte dont il a besoin pour compléter le groupe des carte (il doit avoir au moins une carte de ce groupe). Si l'interrogé possède cette carte il doit la lui remettre et le joueur continue a interroger. Si la réponse est négative le joueur interrogé prend la relève.

   Dans l'atelier nous avons commencé par le jeu BITET. Les participants ont objecté que ce jeu était injuste parce que certains joueurs pouvaient être avantagés lors de la distribution des cartes. Cet argument ne correspond pas a la façon dont les enfants réagissent. Ce jeu sert pour l'introduction des règles (trois joueurs et trois répétitions). Comme ce jeu se déroule rapidement dans ces conditions l'enfant apprend facilement la structure des règles. Le passage du BITET au TERCET ce fait plus facilement.

7. SUDOKU, SAFARI, ZEBRE - les jeux recommandés en tant que partie de la chaîne didactique.

Conclusion

L'atelier a montré l'enseignant doit être capable de voir le jeu/l'activité sous deux aspects : du point de vue du curriculum et du point de vue de l'enfant. Comme cela n'est point aisé, il convient d'y préparer le futur enseignant des le début de sa formation.

REFERENCES

ATKINSON & col . (2003) *Psychologie*. Praha : Victoria Publishing.

LAFON, R. (2001). *Vocabulaire de psychologie et de psychiatrie de l'enfant*. Paris : Quadrige PUF.

KASLOVÁ, M. (2011). Didaktické prostředí a tvořivost žáka (Milieux didactique et la créativité de l'élève) In Tvořivost v počátečním vyučování matematiky. Ed. *Š. Pěchoučková*. Plzeň : ZČU.

KASLOVÁ M. (2010). *Předmatematické činnosti (Activités prépa-maths)*. Praha : RAABE.

KASLOVÁ, M. (2014) *Stimulace logického myšlení (Stimulation de la p.logique)*. Praha : MŠMT.

KASLOVÁ, M. (2005). Trasformace mluveného kódu do matematického symbolického a naopak (Transformation du code oral en code mathématique symbolique et vice versa). In : *Multidisciplinární problémy komunikace - problém všeobecného vzdělávání.* Ed. Jan Slavík. Praha : UK PEDF. pp. 266-282.

KASLOVÁ, M. (2003). Trudnosti zwiazane z transformacija slow na symboliczny kod matematyczny. In Studia matematyczne Akademii Swietokrzyskej, roč. 10. p. 129-134.

Table des figures