"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n.21, 2011
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

LA PEUR DES MATHEMATIQUES ET LA FEE AUX CHEVEUX BLEUES

Eduardo Caianiello

Abstracts

ITALIANO

Quest'articolo ha per obiettivo di proporre un nuovo orizzonte concettuale per la comprensione del fenomeno della fobia scolare (*school phobia*), del rifiuto della scuola (*truancy*) e di conseguenza della profonda e vasta crisi pedagogica che investe violentemente, nell'epoca attuale, la totalità dei sistemi d'educazione formale del mondo occidentale. Il senso fondamentale di questo re-inquadramento è di rimettere la *scuola* al centro dell'attenzione, mostrando che nella sua radice più originaria e profonda, il nostro spirito è una realtà vivente essenzialmente *filosofica* e *matematica*, cioè naturalmente e innanzitutto proiettata verso l'apprendimento scolare, prima di ogni altra forma d'implicazione pulsionale, affettiva e emozionale nel mondo che lo circonda e lo abita.

Questa **Prima Parte** si compone di un'Introduzione e due Capitoli.

Nell'**Introduzione** comincio col denunciare un'assurdità culturale e epistemologica : la "fobia scolare" nasce ufficialmente nel nostro universo scientifico grazie a una dichiarazione di *non-esistenza* (Johnson 1941). Questo non è d'altra parte che il riflesso di un dato ben più generale e sconvolgente : per il mondo attuale è la *scuola* in quanto tale che non arriva a esistere veramente. Io mi occupo dunque di cercare le radici profonde di una tale situazione, così paradossale, perché è proprio qui che vedo l'origine del terrore sordo e inconfessato che molti giovani provano all'idea della scuola: niente di meglio che un fantasma per terrorizzare un bambino, soprattutto se questo fantasma porta in sé l'archetipo della sua età adulta.

La prospettiva che offro sul problema è quella di un'epoca "panmatematizzante" che ha organizzato tutto il suo sistema educativo su una flagrante denegazione : il discorso matematico che da due secoli penetra tutti i livelli della nostra vita socio-culturale, scientifica e scolare trae la sua linfa e la sua forza di propulsione da un fondo *puramente* filosofico, che potentemente e incontrovertibilmente risuona in ogni orecchio che ne intenda la voce. La natura filosofica di questo fondo è tuttavia costantemente "invalidata" [Laing] e chiunque ne parli apertamente viene duramente sanzionato.

Ora lo strumento operatorio più efficace e diffuso di questa filosofia matematica auto-denegatoria è la struttura del Gruppo, che attraverso l'opera di Jean Piaget ha impregnato tutta l'epoca del costruttivismo pedagogico e della "matematica moderna". D'altra parte, l'elemento mistificatore di quest'organizzazione puramente strumentale dell'insegnamento [non solamente] scientifico è stata largamente vista e denunciata da pensatori della Rivolta come Gregory Bateson e Ronald Laing, i quali si sono tuttavia serviti, per criticare il Sistema… di questa stessa matematica gruppale. La conclusione che ne traggo è che nessuno è andato veramente al fondo della questione, cioè al fondo della paura della scuola, che è essenzialmente il luogo in cui s'impara a imparare, e cioè a diventare "matematici".

Andare al fondo di questa paura significa dunque andare alla radice della struttura del Gruppo, ed è questo che comincio a fare nei capitoli che seguono, dove mi propongo di mostrare che questa nozione è da sola incapace di rappresentare il movimento fondamentale della nostra anima.

In §**1** ripercorro il cammino *storico* che ha condotto Piaget e tutta la sua epoca a formulare la sua ipotesi "imperialista" sul Gruppo. Discuto le posizioni di Jordan, Dedekind e del Programma di Erlangen di Felix Klein, en traggo tre conclusioni: (1) se dalla sua prima apparizione in Jordan, il Gruppo post-galoisiano si radica nell'intuizione ultima del *corpo fisico* e della sua forza di coesione, in Dedekind il "corpo dei numeri" non è in ultima analisi che il matematico in persona che l'incarna ; (2) quando il matematico procede creando via via delle strutture sempre più allargate, il dinamismo di questa emanazione successiva non è di tipo gruppale, in quanto rigorosamente orientato : al passaggio $N \rightarrow Z$ non corrisponde una "operazione inversa" che parte dai Relativi per arrivare ai Naturali *senza presupporli*; (3) l'architettura interna dello spazio di F. Klein

ripete questo stesso orientamento operatorio : la geometria deve necessariamente *cominciare* da un'immagine/figura [*Bild*] euclidea ben determinata, perché nessuna "molteplicità" generale può essere immediatamente attinta senza presupporre che una tale figura sia innanzitutto *data*. Ne concludo che quella del Gruppo è in realtà una *cinematica di superficie* del nostro pensiero – un risultato – e non la *dinamica accelerativa* e formalmente evolutiva che conduce a questo stesso risultato.

In §**2** conduco un'indagine direttamente matematica della possibilità che lo strumento formale del Gruppo possa in effetti rappresentare la sua propria "messa in azione". Analizzo in questo senso il movimento della rotazione, l'angolo euclideo, e il "gruppo" della Trigonometria, e mostro che in nessun caso la "messa in azione" di un gruppo è a sua volta un'operazione gruppale, perché nessuna "operazione inversa" le corrisponde. D'altra parte, come lo "spazio" è *in sé* perfettamente inapprendibile al di qua di una qualche figura, che a sua volta non può trovare le sue coordinate d'orientamento spaziale in un altra figura. Ne segue che l'"orientamento" di una figura *nello* spazio è un fenomeno molto semplicemente *dato* : una totalità insecabile, internamente movente, orientata, e dotata di un inizio.

La conclusione generale è che ogni evento operatorio – per quanto si presenti come "gruppale" sulla sua propria superficie – è dotato di un ineludibile intimo orientamento– un *senso* – che distingue tra la sua provenienza (il suo inizio) e il suo aspetto risultativo : *cominciamo* in tutti i casi da una figura sensibile e euclidea, per propellerci, grazie a questa rampa, negli spazi "transintuitivi" del pensiero astratto. Questo significa da un lato saldare come i due aspetti di una stessa realtà l'anisotropia dello *spazio* e quella del *tempo* delle nostre operazioni (per attingere lo spazio si *comincia* – nel tempo – da una figura, e non l'inverso), e dall'altro lato porre una *dinamica pienamente evolutiva* nel cuore di ogni operazione matematica formalmente definita.

FRANÇAIS

Cet article vise à proposer un nouvel horizon conceptuel pour la compréhension du phénomène de la phobie scolaire (*school phobia*), du refus de l'école (*truancy*) et en conséquence de la profonde et vaste crise pédagogique qui violemment investit, à l'âge actuel, la totalité des systèmes d'éducation formelle du monde occidental. Le sens fondamental de ce ré-encadrement est de remettre l'*école* au centre de l'attention, en montrant que dans sa racine la plus originaire et profonde, notre esprit est une réalité vivante essentiellement *philosophique* et *mathématique*, c'est-à-dire naturellement et préalablement projeté vers l'apprentissage scolaire, avant toute autre forme d'implication pulsionnelle, affective et émotionnelle dans le monde qui l'entoure et l'habite.

Cette **Première Partie** se compose d'une Introduction et de deux Chapitres.

Dans l'**Introduction** je commence par dénoncer une absurdité culturelle et épistémologique : la « phobie scolaire » naît officiellement dans notre univers scientifique grâce à une déclaration de *non-existence* (Johnson 1941). Cela n'est d'autre part que le reflet d'une donnée bien plus générale et bouleversante : pour le monde actuel c'est l'*école* en tant que telle qui n'arrive pas à vraiment exister. Je m'occupe donc chercher les racines profondes d'une telle situation, si paradoxale, car c'est justement ici que je vois l'origine de la terreur sourde et inavouée que maints jeunes ressentent à l'égard de l'école : rien de mieux qu'un fantôme pour terroriser un enfant, surtout si ce fantôme porte en soi l'archétype de son âge adulte.

La prospective que j'offre sur le problème est celle d'une époque « panmathematiste » qui a organisé tout son système éducatif sur une flagrante dénégation : le discours mathématique qui depuis deux siècles pénètre tous les niveaux de notre vie socio/culturelle, scientifique et scolaire tire sa sève et sa force de propulsion d'un fond *purement* philosophique, qui puissamment et incontournablement retentit dans toute oreille qui en entende la voix. La nature philosophique de ce fond est toutefois constamment « invalidée » [Laing] et quiconque en parle clairement en est très durement sanctionné.

Or l'instrument opératoire le plus efficace et répandu de cette philosophie mathématique auto-dénégatoire est la structure du Groupe, qui à travers l'œuvre de Jean Piaget a imprégné toute l'époque du constructivisme pédagogique et des « mathématique modernes ». D'autre part, l'élément mystificateur de cette organisation purement instrumentale de l'enseignement [non seulement] scientifique a été largement vu et dénoncé par des penseurs de la Révolte comme Gregory Bateson et Ronald Laing, lesquels se sont toutefois servis, pour critiquer le Système… de cette même mathématique groupale. La conclusion que j'en tire en est que personne n’est allée vraiment au fond de la chose, c'est-à-dire au fond de la peur de l’école, qui est essentiellement le lieu où l’on apprend à apprendre, c'est-à-dire à devenir des mathématiciens. Aller au fond de cette peur signifie donc aller à la racine de la structure du Groupe, et c’est cela que je commence à faire dans les chapitres qui suivent, où je vise à montrer que cette notion est à elle seule incapable de représenter le mouvement fondamental de notre âme.

En **§1** je retrace le chemin *historique* qui a conduit Piaget et toute son époque à formuler son hypothèse « impérialiste » sur le Groupe. Je discute les positions de Jordan, Dedekind et du *Programme de Erlangen* de Felix Klein, d’où je tire trois conclusions : (1) si depuis sa première apparition chez Jordan, le Groupe post-galoisien s’enracine dans l’intuition ultime du *corps physique* et de sa force de cohésion, chez Dedekind le « corps du nombre » n’est en dernière analyse que le mathématicien en personne qui l’incarne ; (2) lorsque le mathématicien procède en créant au fur et à mesure des structures toujours plus élargies, le dynamisme de cette émanation successive n’est pas de type groupal, puisque rigoureusement orienté : au passage N→Z ne correspond pas une « opération inverse » qui part des Relatifs pour arriver aux Naturels *sans les présupposer* ; (3) l’architecture interne de l’espace de F. Klein répète cette même orientation opératoire : la géométrie doit nécessairement *commencer* par une image/figure [*Bild*] euclidienne bien déterminée, car aucune « multiplicité » générale ne peut être immédiatement atteinte sans présupposer qu’une telle figure soit préalablement *donnée*. J’en conclus que celle du Groupe est en réalité une *cinématique* de surface de notre pensée – un résultat – et non pas la *dynamique accélérative* et *formellement évolutive* qui conduit à ce même résultat.

En **§2** je mène un examen directement mathématique de la possibilité que l’outil formel du Groupe puisse en effet représenter sa propre « mise en action ». J’analyse en ce sens le mouvement de rotation, l’angle euclidien, et le « groupe » de la Trigonométrie, et je montre qu’en aucun cas la « mise en action » d’un groupe est à son tour une opération groupale, car aucune « opération inverse » ne lui correspond. D’autre part, comme l’«espace » est *en soi* parfaitement insaisissable en deçà de toute figure, qui de son côté ne saurait pas trouver ses repères d’orientation spatiale en aucune autre *figure*, il s’en suit que l’ « orientation » d’une figure *dans* l’espace est un phénomène tout simplement *donné* : une insécable totalité, internement mouvante, orientée, et douée d’un début.

La conclusion générale en est que tout événement opératoire – aussi « groupal » soit-il sur sa surface – est doué d’une indépassable orientation intime – un *sens* – qui distingue entre sa provenance (son début opératoire) et son aspect résultatif : nous *commençons* en tous les cas par une figure sensible et euclidienne, pour nous propulser grâce à cette rampe dans les espaces « transintuitifs » de la pensée abstraite. Cela signifie d’un côté souder comme les deux aspects d’une même réalité l’anisotropie de l’*espace* et celle du *temps* de nos opérations (pour atteindre l’espace on *commence* – dans le temps – par une figure, et pas l’inverse), et de l’autre côté placer une *dynamique pleinement développementale* au cœur de toute opération mathématique formellement définie.

PREMIÈRE PARTIE

> « Ils jouent un jeu. Ils jouent à ne pas jouer un jeu. Si je leur montre que je le vois, je briserai les règles et ils me puniront. Je dois jouer leur jeu, qui consiste à ne pas voir que je vois le jeu. » [Ronald Laing, *Noeuds*]

Ce travail s'adresse *tout d'abord* aux didacticiens des mathématiques, pour une raison historique et épistémologique incontournable : aucun psychiatre/psychologue, et en général aucun thérapeute/clinicien qui à l'âge actuel fait face à un élève dégouté par l'école, ne songe même pas pour un instant à lui faire du soutien scolaire, car il n'est pas un enseignant. Un « thérapeute » peut/doit certes accepter d'être un peu mère, un peu père, un peu ami… mais il n'acceptera pas d'être un peu enseignant, car pour ce faire il faut enseigner, et enseigner – éduquer un gosse en lui apprenant une ou plusieurs matières parmi celles imposées par l'éducation nationale – n'est pas une affaire qui relève de ses compétences. En l'occurrence, le psychologue de l'âge actuel peut pénétrer dans une école pour « écouter » les « problèmes psychologiques » des élèves, et en l'occurrence il peut décréter que pour être mieux soigné un élève trop perturbé ne doit plus se rendre à l'école : en aucun cas, toutefois, ce psychologue ne songera à se charger personnellement des cours que son patient devra rattraper, car le soutien scolaire n'est pas son métier. Il est un médecin, pas un enseignant.

De leur part, les professeurs et les didacticiens partagent *de fait* cette vision des choses : lorsqu'il est question d'un « problème psychologique » – ou pire « mental » – leur action a atteint ses limites « naturelles ». A la différence du psychologue pourtant, ils acceptent très consciemment, et jour après jour, d'agir en « psychologues » envers leurs élèves, étant donné l'élément irréductiblement *pédagogique* qui pulse au cœur de toute action didactique, à tous les niveaux… En somme, à présent un psychologue peut se permettre de ne pas être un pédagogue/enseignant, tandis que le contraire est en tous les cas impossible. Pour cette raison je m'adresse *avant tout* au clinicien qui vit dans tout enseignant, plutôt que le contraire.

Pourquoi, en revanche, parmi touts les didacticiens c'est le didacticien *des mathématiques* le destinataire privilégié de mon discours ? La réponse à cette question, je la confie aux pages qui suivent. La seule chose que je demande avec toute l'humilité dont je suis capable, et en considération de l'extrême importance et urgence du problème que je soulève, est de donner une *possibilité de sens* au langage à la fois clinique, mathématique et philosophique que je m'apprête à utiliser.

Introduction. Groupes hors de contrôle.

⟨1⟩ « For years psychiatrists have recognized that there is a type of emotional disturbance in children, associated with great anxiety, that leads to serious absence from school. This is a deep-seated psychoneurotic disorder fairly sharply differentiated from the more frequent and common delinquent variety of school truancy. The syndrome, often referred to as "school phobia" is recognizable by the intense terror associated with being at school. The child may be absent for periods of weeks or months or years, unless treatment is instituted. The children, on fleeing from school, usually go straight home to join the mother. Eventually they refuse to leave the house. When the child is superficially questioned, he cannot verbalize what he fears and the whole matter appears incomprehensible to parents and teachers.lt seems to us that this syndrome is not a clean-cut entity, for one finds overlapping of the phobic tendencies with other neurotic patterns, such as those of an hysterical or obsessive nature. […] Little has been said of the role of the father and treatment of him. The impression has always been gained, however, that though he and his neurosis played into the mother's difficulties and led to greater disturbance and frustration in her, and thus indirectly to greater conflict in the child, still, treatment of the mother with clarification of her feelings about the father has seemed the more direct route to a resolution of the conflicts for the child. Fortunately, from a practical point of view, the mother is freer to come for treatment than would be the average father » [Johnson 1941: 702- 707]

En 2001 j’étais professeur d’histoire/géo dans un lycée parisien spécialement conçu pour les élèves qui ne pouvaient pas se rendre à l’école. Dans la majorité des cas il s’agissait d’un problème psychologique. L’élève était paralysé à l’idée de suivre un cours régulier dans une école ordinaire, et c’était nous, les enseignants, qui par conséquent dévions aller chez eux. L’une de ces élèves était extrêmement angoissée par les maths : la simple présence d’une suite de symboles mathématiques lui provoquait une grande anxiété. Cependant, je suis parvenu, après un bon moment, à la faire s’intéresser à mes cours d’histoire. Malgré cela, un beau jour elle a cherché de se tuer ; on l’a donc amenée dans un hôpital psychiatrique, et nos cours se sont interrompus. Je pense que ce geste a été le résultat de la synthèse, dans son cœur, entre cette angoisse et cet espoir, dans une situation où personne ne veut écouter ni l’une ni l’autre.

En 2007 j’étais assistant d’éducation dans un autre lycée de Paris. J’aidais des élèves handicapés à suivre leurs cours scolaires dans la même classe que tous les autres. Je prenais les notes etc., et je leur faisais aussi des cours de rattrapage. Dans ce lycée, j’ « accompagnais » la scolarisation d’un élève de 17 ans en parfaite santé physique. Son psychiatre avait décrété qu’il avait un problème de « dyscalculie », et un autre syndrome qui lui empêchait d’écrire, malgré toute apparence physique contraire. J’écrivais pour lui, donc, et je lui faisais du soutien scolaire, entre autre de maths et de physique. Je n’ai rien remarqué au niveau de la « dyscalculie » – pendant nos cours tout allait bien (du point de vue des calculs à exécuter), et le professeur en était ravie –, mais je me souviens de la dernière leçon de physique à laquelle j’ai assisté en prenant les notes à la place de mon « handicapé ». La leçon – de *physique* – portait sur l’électricité : il s’agissait de comprendre le cycle de l’électricité depuis sa source (je cite) « l’électricité nous est fournie par l’EDF », jusqu’à la… facturation. Souvent ce garçon restait à la maison, mais je suis convaincu qu’il ne ressentait aucune haine furieuse envers ses parents.

⟨2⟩ « [1] Being home permits the child to reassure himself and check up to be sure his hostile destructive wishes against the parents, particularly the mother, do not ensue. One boy frequently said to his mother with real venom, “You're so old and haggard looking I doubt if you will live long and I want to be with you”. A fundamental step in this vicious circle is finally that of mutual restitution which involves loving, giving, over-solicitousness regarding one another's comforts with the need to be near each other. This constitutes the end and beginning of the circle and they begin again with mutual indulgence of dependence and of all that we now know follows this first step. - [2] Very early in this chain of events there enters as a factor the school itself. When the teacher, as a more consistent disciplinarian, frustrates

> the child, she arouses his rage. Being less dependent on *the teacher, who is a diluted form of the mother*, the child's rage inhibited toward the mother can now find expression through displacement, and the teacher in her milieu becomes the phobic object. To avoid the teacher and school is now the defense against being placed in the situation in which the overwhelming anxiety is aroused. Often a child early complains that the teacher dislikes him. [Johnson 1941: 707 Les crochets et les italiques sont de moi]

Soixante dix ans se sont écoulés depuis l'article fondateur de Johnson – qui anéantit son objet, la peur de *l'école* (pas des parents), au moment même qu'il en dévoile l'existence – et les mots de la psychologie actuelle. Rien n'est changé pourtant quant à crédibilité dont jouit notre invité de pierre : « the teacher is a diluted form of the mother », « non esiste lo stimolo "scuola" » :

> ⟨3⟩ «DISCUSSION AND CONCLUSION. Just how does this neurosis differentiate itself from other childhood neuroses? *The syndrome of school phobia does not seem to us to be a qualitatively new and specific entity*. It is a symptom developing under very definite circumstances. First, it appears to us that there is present a history of a poorly resolved dependency relationship between the child and its mother. […] On the basis of an early poorly resolved dependency relationship, both readily regress to that earlier period of mutual satisfaction. *Now the cycle begins which soon results in the school phobia if the child is of school age, with the teacher, in her milieu, made the phobic object*» [Johnson 1941: 708. Les crochets et les italiques sont de moi]
>
> ⟨4⟩ «Va verificato tutto quanto può essere legato ad una separazione brusca dal contesto familiare, ciò che il bambino sente come particolarmente giudicante, le relazioni con i pari, che soprattutto nell'età evolutiva avvengono all'interno dell'ambiente scolastico. Il termine fobia scolare, se confrontato con altri tipi di fobie, assume una coloritura del tutto particolare: *infatti, non esiste lo stimolo "scuola"* al quale il bambino è esposto passivamente come se si trovasse di fronte ad un pericolo oggettivo: esiste però una sequenza di comportamento che il bambino utilizza per far fronte ad una situazione relazionale che egli sente come minacciosa per il proprio benessere» [Gherardelli 2009. L'italique est de moi]

La conséquence en est que comme enseignant/assistant j'ai été toujours trop dilué pour pouvoir faire quelque chose de réellement efficace pour ces gosses. A y réfléchir, cette situation est bien paradoxale : Pinocchio est certes le menteur le plus célèbre qui soit, mais justement pour cette raison on lui fait immédiatement confiance lorsqu'il nous avoue enfin qu'il *ne veut pas aller à l'école*. Depuis les temps de Johnson au contraire, nos savants accourus à son chevet ont changé d'avis. Ce n'est pas l'école le problème : c'est la fée aux cheveux bleus ! Quant à Geppetto… « little can be said of his role» : on le voit là bas, sur son petit bateau, qui rame vers Pearl Harbor, pour s'y perdre à jamais. Tout cela, j'affirme, est insoutenable et dans cet article je me propose de refaire à rebours le chemin qui nous a conduits à ces absurdités, car je suis persuadé que les psychologues que je viens de citer ratent, et de beaucoup, la cible. C'est bien l'école qui fait peur, car pour l'âme humaine il n'y a rien de plus vertigineux et merveilleux à concevoir que le silence matinal d'une heure de cours. Parmi toutes les écoles, la *notre* est particulièrement adaptée à semer la terreur dans le cœur de nos enfants, et parmi tout ce qui peut être terrorisant dans une telle situation, ce sont *les mathématiques mêmes*, telles qu'on les conçoit et qu'on les propose depuis au moins 150 ans, qui sont les plus effrayantes : car tout ce qui *a* peur *fait* peur.

La mathématique *a* peur ? Certes. « Superficially questioned » pourtant, elle « cannot verbalize what [s]he fears »… car pour qu'une telle verbalisation se produise il faut dans le cas présent que le questionnement soit au moins aussi mathématique que le sujet interrogé. C'est donc cela que je vais faire : j'interrogerai nos mathématiques – celles qu'on nous apprend à l'école – d'une façon assez profonde et pertinente pour qu'on arrive à comprendre (A) qu'il n'y a aucun besoin de mentir ou *se* mentir pour en être effrayés, et (B) qu'aucun psychologue ne pourra rien faire jusqu'au moment où il ne se rendra pas compte que la mère des mathématiques – notre fée aux cheveux bleus – n'est pas une femme frustrée de la *middle class* nord-américaine, mais la Philosophie.

D'abord, toutefois, il faut bien établir la situation dans laquelle cette interrogation prendra corps.

I. A la découverte de la situation : Verdun, Pearl Harbour, Cap Canaveral.

Pour commencer, revenons à l’âge de Pearl Harbour. C’est autour de cette époque – entre 1936 et 1942 – que le père de l’Epistémologie Génétique nous présente l’idée de « Groupe » comme l’archétype fondateur de toute mathématisation de l’âme humaine, expression rationnelle de la vie entière et continue du Cosmos :

> ⟨5⟩ [1] L'activité fonctionnelle de la raison (l’*ipse intellectus* qui ne vient pas de l'expérience) est évidemment liée à l'« hérédité générale » de l'organisation vitale elle-même : de même que l'organisme ne saurait s'adapter aux variations ambiantes s'il n'était pas déjà organisé, de même l'intelligence ne pourrait appréhender aucune donnée extérieure sans certaines fonctions de cohérence (dont le terme ultime est le principe de non-contradiction), de mise en relations, etc., qui sont communes à toute organisation intellectuelle […]. Du simple réflexe à l'intelligence la plus systématique, un même fonctionnement nous paraît se prolonger au travers de tous les stades, établissant ainsi une continuité entière entre des structures de plus en plus complexes. […] Si les structures dont use la pensée varient d'un stade à l'autre et, a fortiori, d'un système mental à un autre, la pensée demeure constamment identique à elle-même du point de vue fonctionnel.
>
> [2] Nous tenterons de trouver dans la notion de groupement construite sur le modèle des groupes mathématiques, l'unité réelle de la pensée. »» [Piaget [1] 1936 : 9, 137 ; 1937 : 77 ; [2] 1942 : 2]

L’unité *réelle* de chacun de nos mouvements – physiques, biologiques, sensori-moteurs, mentaux… – se trouve pour Piaget dans la kleinienne « action d’un groupe ». Autrement dit : l’être humain (corps/esprit) est un groupe en action, car dans notre univers il n’y a aucune forme de réalité scientifiquement détectable qui ne soit, en dernière analyse, une structure groupale. Ceci en 1942.

Presque trente ans – trente *glorieuses* années – s’écoulent, jusqu’aux jours où notre Geppetto a conquis la Lune, tandis que le Groupe de Piaget a conquis la Terre :

> ⟨6⟩ « [1] Le structuralisme est à la mode. C'est un malheur pour lui et pour nous, parce que c'est un mouvement très fécond et qu'il ne faudrait pas le vider de son contenu par des abus de toutes sortes. D'autre part, le structuralisme est essentiellement une méthode, une méthode à la fois précise et générale et il ne faudrait pas en faire une philosophie.
>
> [2] Commençons par la fécondité de l'idée de structure. Une structure suppose tout d'abord une notion de totalité, c'est-à-dire, d'un ensemble d'éléments qui comportent des lois en tant que système et des lois différentes des propriétés des éléments eux-mêmes. [3] Par exemple, la suite des nombres entiers positifs et négatifs y compris le zéro constituent une structure que l'on peut appeler le groupe additif des nombres. La notion de “groupe”, dans le cas particulier, signifie d'abord (A) que si l'on additionne un nombre à un autre nombre on trouve encore un nombre entier et que l'on ne sort pas du système. Elle signifie encore (B) qu'à l'opération d'addition correspond une opération inverse qui sera la soustraction. Elle implique en outre (C) qu'il existe un élément neutre, qui dans le cas particulier, est le zéro et qui ne change rien ajouté ou retranché à un autre. Enfin, elle exprime (D) le fait que les nombres sont associatifs, c'est-à-dire que l'on peut parvenir à la même somme par des additions différentes, donc au même point d'arrivée par des chemins différents. Ce sont là des lois du système. Le groupe constitue une structure parce qu'il comporte de telles lois en tant que système.[…]
>
> [3] Le recours aux structures, ainsi définies est déjà très ancien. La notion de structure est apparue en mathématiques au début du 19e siècle avec la découverte de la notion de groupe par GALOIS et cette notion a conquis toutes les mathématiques au cours des 19e et 20e siècles. C'est la généralisation de cette idée que l'on retrouve dans le structuralisme mathématique contemporain, c'est-à-dire celui des Bourbaki, qui cherchent par une méthode d'isomorphismes à dégager des structures communes à tous les chapitres distincts des mathématiques malgré leurs différences évidentes de contenus. Ils aboutissent ainsi à trois sortes de structures fondamentales d'une part les structures algébriques dont le prototype est le groupe

> et dont la forme de réversibilité est l'inversion, en second lieu, les structures d'ordres dont le prototype est le réseau ou treillis, avec comme réversibilité la réciprocité, et troisièmement les structures topologiques. C'est cette notion de structure qui se retrouve en physique. La notion de "groupes" s'applique en physique depuis des décades et constitue une des pierres angulaires de l'explication en ce domaine. G. Juvet, en son beau livre sur la structure des théories physiques parlait déjà du "magnifique impérialisme de la notion de groupes", qui conquiert les chapitres les plus divers. » [Piaget 1969 :73. Les crochets et la numérotation interne sont de moi.] »[i]

Malgré l'irrésistible expansion impérialiste de son idée de 1942, Piaget *se plaint*, car ce que l'âme tourmentée de ce grand savant redoute le plus, est que sa cosmogonie algébrique soit explicitement déclarée ce qu'elle ne peut néanmoins pas s'empêcher d'être dans toute oreille qui en entende la voix : une *philosophie.* Pourquoi « âme tourmentée » ? Car l'un des *topoi* les plus familiers de la philologie piagétienne est justement ce rapport contrasté et dénégatoire que « Sébastien » – le héro « un peu fruste » de *Recherche* [Piaget 1918] – entretient « secrètement » et pendant toute sa vie avec le *daimon* de Socrate :

> ⟨7⟩ « Je me souviens d'un soir de révélation profonde : l'identification de Dieu avec la Vie même était une idée qui me remua presque jusqu'à l'extase parce qu'elle me permettait dès lors de voir dans la biologie l'explication de toutes choses et de l'esprit lui-même. Avoir eu l'expérience précoce de ces problématiques a constitué, j'en suis convaincu, le mobile secret de mon activité ultérieure en psychologie. [Mais] mes études de zoologie fonctionnèrent si je puis dire comme instruments de projection contre le démon de la philosophie. […] Durant l'année que je passai à la montagne je fus hanté par le désir de créer et je cédai à la tentation. Cependant, afin de ne pas me compromettre dans le domaine scientifique je tournai la difficulté en écrivant – pour le grand public, et non pour les spécialistes – une sorte de roman philosophique [*Recherche*] dont la dernière partie contenait mes idées (1917). Ma stratégie s'avéra efficace : personne n'en parla sinon un ou deux philosophes indignés. » [Piaget 1976 :3]

Moralité : le plus important et influant scientifique de l'éducation que le XXe siècle occidental ait connu et reconnu, a *philosophé* pendant des décennies sur la structure mathématique du Groupe, qu'il s'agissait en conséquence d'enseigner à toute la population scolarisée de la planète grâce à une méthode pédagogique à son tour *groupale*… tout en *niant* ce qu'il était pourtant en train de faire – philosopher – à la fois « secrètement » et manifestement. De quoi avait-il peur, entre autre, ce jeune philosophe ? Entre autre, d'une guerre horrible, dont on ne voyait pas la fin :

> ⟨8⟩ « *Lettre aux jeunes socialistes* **-** Amis, je vous déçois et je vous décevrai encore. J'étais avec vous, au centre de la mêlée, mais vous m'avez soudain perdu de vue, et vous ne me reverrez plus guère. Car je fus blessé et me retirai sur une colline proche**.** Et là, tout en guérissant mon mal je vis un tableau terrible. Je vis que la bataille où nous étions engagés était peu de chose en regard de la lutte à venir. Je vis la guerre tout à l'entour et aux confins même de l'horizon, je vis de nouvelles troupes qui s'avançaient encore… Et alors, je décidai de rester là-haut. […] Et je viens maintenant vous annoncer ce que j'ai vu. Ce que j'ai vu, c'est le résultat de la guerre européenne… » [Piaget 1918 :147]

Voilà, donc, la *situation* depuis l'époque de Verdun/Pearl Harbour/Cape Canaveral, et une telle situation – affirmait Ronald Laing en ce même 1969 – doit tout d'abord être *découverte*, si l'on veut y intervenir pour en faire la base d'une expérience mathématique – en même temps « didactique », « non didactique » et « a-didactique » – vraie, féconde et surtout non effrayante :

> ⟨9⟩ « LA SITUATION DOIT ETRE DECOUVERTE. Il peut se faire qu'aucun des participants d'une situation ne sache ce qu'elle est. Nous ne pouvons jamais présumer que les intéressés ont conscience de la situation. Corollaire : la situation doit être découverte. Cette proposition peut paraître banale, mais qu'on considère ses implications. Les histoires que racontent les

gens (« les gens » étant les parents, les enfants, les assistants sociaux, les psychiatres, nous-mêmes) ne nous disent pas simplement et sans ambiguïté ce qu'est la situation, car ces histoires font partie d'elle. » [Laing 1969a : 47]

Les expressions que j'utilise ci-dessus proviennent évidemment du lexique de Guy Broussau :

> ⟨10⟩ « [1] THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES EN MATHEMATIQUES – La théorie des situations comporte deux objectifs : d'une part l'étude de la consistance des objets et de leurs propriétés (logiques, mathématiques, ergonomiques), nécessaires à la construction logique et à l'invention de « situations », et d'autre part la confrontation scientifique (empirique ou expérimentale) de l'adaptation de ces modèles et de leurs caractéristiques avec la contingence.
>
> [2] Les situations hypothétiques considérées appartiennent à deux catégories : *les situations didactiques* où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s'exprimer en actions, et *les situations « non didactiques* » où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe.
>
> Rq : la dénomination n'est pas heureuse car une telle situation peut servir dans un projet didactique et à ce titre être dite « didactique : qui sert à enseigner », suivant l'usage commun. La modélisation des enseignements effectifs conduit à combiner les deux : certaines situations didactiques ménagent au sujet de l'apprentissage des situations partiellement libérées d'interventions directes : *les situations a-didactiques*.» [Brousseau 1997 : 1. Les crochets sont de moi]

Qu'il soit donc bien établi : la dénégation piagétienne – « il n'y a rien de philosophique à dire là-dedans, ou du moins rien d'essentiellement philosophique ne va se passer pendant le cours de maths » – est *la règle du jeu* fondatrice de toute « situation» de scolarité ordinaire depuis deux siècles, c'est-à-dire depuis l'existence de l'école telle que nous la connaissons, et l'école que nous connaissons est celle des éducations nationales et nationalistes euro-américaines.

II. Projections de Révolte

D'autre part, si en 1969 Ronald Laing fournissait des outils conceptuels précieux pour dire la flagrante « auto-invalidation expérientielle » [Laing 1967a] qui retentit dans la plainte de Piaget, son camarade de lutte Gregory Bateson avait déjà prophétisé, en cette même 1942, que la ruse « stratégique » mise en œuvre par Sébastien depuis la fin de la Grande Guerre ne pourrait jamais raisonnablement s'intégrer aux programmes d'éducation en usage dans nos belliqueuses démocraties, assoiffées de contrôle technocrate, sans se transformer en un boomerang aux effets incontrôlables…

> ⟨11⟩ « Il serait à peine exagéré de dire que, idéologiquement, cette guerre est portée justement sur ce point : le rôle des sciences sociales. Faut-il abandonner les techniques et le droit de manipuler les masses à quelques individus assoiffés de pouvoir, planificateurs aveuglés par le « but », qu'attire l'aspect instrumental de la science ? Maintenant que nous sommes en possession de ces techniques, allons-nous de sang-froid traiter les êtres humains en choses? Ou, sinon, qu'allons-nous en faire ? » [Bateson 1942: 196]

Ce même pseudo-contrôle planificateur exercé en classe, affirme Bateson, n'en est en réalité pas un, étant donné la structure indépassablement multidimensionnelle, et donc « techniquement » immaîtrisable, de tout acte d'apprentissage, en tant que tel :

> ⟨12⟩ « [1] Margaret Mead écrit : " ... *ceux qui se sont consacrés à l'étude des cultures comme ensembles, comme systèmes d'équilibre dynamique, peuvent apporter la contribution suivante : mettre en œuvre des plans pour transformer notre culture actuelle, en reconnaissant l'importance qu'il y a à considérer celui qui s'occupe des sciences sociales*

> *à l'intérieur de son matériel expérimental et en reconnaissant que travailler à des fins déterminées nous conduit à la manipulation des individus et donc à la négation de la démocratie. Ce n'est qu'en travaillant en termes de valeurs, qui se bornent à définir une direction, qu'il nous sera possible d'utiliser des méthodes scientifiques pour contrôler le processus et sans nier l'autonomie morale de l'esprit humain*” […] [2] La solution que M. Mead propose c'est de prendre en considération les « directions » et les « valeurs » implicites aux moyens, plutôt que de courir après un but planifié et d'essayer à chaque moment de voir si ce dernier justifie ou pas les moyens de manipulation. La valeur d'un acte planifié doit être recherchée dans l'acte lui-même, élément qui lui est implicite et simultané, et non pas séparé de lui, comme si l'acte devait tirer sa valeur d'une référence à un but à atteindre dans le futur […]
>
> [3] Dans la manipulation sociale, les outils sont des êtres humains, et ceux-ci apprennent, acquièrent des habitudes plus subtiles et plus insidieuses que les ruses que leur enseignent les planificateurs. En vue d'annihiler les tendances s'opposant à la réalisation de notre plan, nous pouvons, par exemple, avec les meilleures intentions du monde, pousser les enfants à espionner leurs parents; mais il ne faut pas oublier que les enfants, en tant qu'êtres humains, feront plus que d'apprendre cette simple ruse; ils emploieront cette expérience dans l'ensemble de leur philosophie de vie et elle donnera la tonalité de toutes leurs attitudes futures face à l'autorité. […] Le planificateur pourra, au départ, tirer un avantage de la malice des enfants, mais le succès final de son plan risque d'être compromis par les habitudes mêmes qu'ils ont acquises, en même temps que cette ruse. […] Nous traitons, apparemment, d'une sorte d'habitude qui est un produit secondaire du processus d'apprentissage. Lorsque Margaret Mead nous recommande d'arrêter de penser en termes de projets et d'évaluer les actes qu'on planifie en fonction de leur valeur immédiate et implicite, elle veut dire qu'en élevant et en éduquant nos enfants, nous devrions essayer de leur inculquer des habitudes secondaires différentes de celles que nous avons acquises et que nous renforçons chaque jour en nous-mêmes, dans nos contacts avec la science, la politique, les journaux, etc. » [Bateson 1942 : 193 (Note) ; 197-198]

« La valeur d'un acte planifié doit être recherchée dans l'acte lui-même ». L’idée est très simple, et dans ce célèbre essai sur le concept d’ « *apprentissage secondaire* » [*deutero-learning*] cette question éthico/pédagogico/politique est enracinée par Bateson dans le seul terrain des processus évolutifs de la cognition. Son intuition est que le « double fond » d’où jaillissent, chez tout élève scolarisé, les habitudes comportementales (les ruses etc.) qu’il apprend en même temps que les techniques opératoires de surface (matières d’enseignement), ne constitue pas un « inconscient » structurellement étranger aux processus d’apprentissage mêmes, mais bien au contraire la source constamment agissante et propulsive de leur mise en puissance:

> ⟨13⟩ « Dans les laboratoires de psychologie, il se produit communément un phénomène d’un niveau d’abstraction et de généralité supérieur à celui que les expériences – de par leurs projets – sont censées élucider. C’est un lieu commun que le sujet de l’expérience – homme ou animal – devient, à la suite d’expériences répétées, un sujet meilleur : il n’apprend pas seulement à saliver au bons moments ou à réciter correctement des syllabes dépourvues de sens ; qui plus est, il *apprend à apprendre*. Non seulement il résout les problèmes posés par l’expérimentateur – problèmes où chaque solution est un élément d’apprentissage simple – mais, en plus, il devient de plus en plus apte à resoudre des problèmes en général.
>
> Dans une terminologie semi-gestaltiste ou semi-anthropomorphiste, nous pouvons dire que le sujet apprend à s’orienter vers un certain type de contexte, ou qu’il acquiert de la « perspicacité » (insight) dans le cadre défini par la résolution du problème ; ou, dans le langage que nous avons choisi de parler ici, que le sujet a acquis l’habitude de rechercher des contextes ou des séquences d’un certain type plutôt que d’un autre, ou encore l’habitude de « ponctuer » le flux des événements de façon à obtenir la répétition d’un certain type donné de séquence signifiante » [Bateson 1942 :199-200]

Au fur et à mesure qu’il apprend les « matières » qu’on lui propose, l’élève devient lui-même une « matière » meilleure, parce qu’il apprend toujours plus facilement. Conclusion : de même la chute accélérée d’une pierre nous oblige à postuler un fond dynamique à la source de son comportement cinématique, de même le phénomène général de l’école nous conduit à postuler que dans les processus de connaissance vécus par tout homme qui apprend, une *troisième* dimension mentale est toujours présente et agissante, d’où jaillit non seulement l’augmentation de notre « vitesse » opératoire, mais aussi celle de notre capacité d’auto-orientation, sélection, synthèse créatrice etc.

Sur cette base phénoménale incontournable, Bateson formule son hypothèse : c’est bien dans cette troisième dimension purement dynamique (au sens de Galilée) pulsant au cœur de n’importe quel apprentissage « technique », que germera et se développera dans l’âme de l’élève toute forme de « stratégie » implicitement mise en place par son enseignant, autant convaincu que soit ce dernier, de savoir gérer *à la source* la discrimination entre ces deux contenus insécablement présents dans tout geste éducatif. Les élèves, continue Bateson, « emploieront cette expérience dans l'ensemble de leur philosophie de vie » même si l’enseignant de mathématique s’appelle Jean Piaget et qu’il insiste à dire qu’aucune philosophie n’accompagne sa Foi dans la Structure.

La « situation » avait donc été très largement programmée (Piaget 1918), implémentée (Piaget 1942), prophétisée (Bateson 1942) déniée (Piaget 1969) et démasquée (Laing 1969), lorsque la Révolte explose dans les cœurs de tous ces camarades du Pinocchio jonsonien qui en ont assez d’entendre parler de leur mère pendant que c’est tout de même à eux, maintenant, de partir au massacre des énièmes ennemis de son mari absent… et c’était bien cette Révolte le boomerang préconisé vingt-sept ans auparavant par Bateson & Mead : la poudre explosive toujours mêlée aux résidus apparemment anodins du *deutero-learning*.

Par conséquent, l’antipsychiatre en révolte ne se laisse pas tromper par les cages mentales où l’on voudrait enfermer son intervention, lorsqu’on l’appelle pour résoudre une « situation sociale » de crise:

> ⟨14⟩ « [1] Le point commun entre assistants sociaux et psychiatres est l'étude de l'intervention dans des situations sociales. Ce n'est pas là tout ce que font assistants sociaux et psychiatres, mais c'est une chose que nous faisons toujours, quoi que nous fassions d'autre. [...] Depuis quelques années, je me suis beaucoup occupé de l'étude des gens dans de telles situations. [2] Ordinairement, je suis appelé à intervenir dans une « situation » qui a déjà été définie par les personnes qui y sont impliquées (et peut-être aussi par d'autres agents de la société) comme concernant une de ces personnes, les autres ne sachant que faire pour elle.[...] Lorsqu'une situation sociale particulière est définie comme une crise sociale occasionnée par une conjoncture médicale, cette définition appelle un type particulier d'action : il s'agit de « traiter » une certaine personne et, si nécessaire, d'aider les autres personnes impliquées dans la situation à affronter la maladie et ses conséquences secondaires pour le groupe. [3] La définition de la situation et la demande d'intervention sont les deux faces de la même médaille. La stratégie rationnelle adéquate d'intervention est prescrite dans la définition même de la situation. Une grande partie du domaine situé entre l'assistance sociale, la médecine et la psychiatrie concerne de telles situations : la famille d'un enfant arriéré, des familles où une personne manifeste une incapacité physique. Dans beaucoup de cas, nous parlons d'incapacité mentale (excluant l'arriération et d'autres états manifestement organiques) aiguë ou chronique ; nous interprétons la situation en fonction du schéma indiqué plus haut et nous agissons sur elle de la manière qui s'impose. Examinons certaines des conséquences pratiques de l'adoption, par des assistants sociaux, de ce modèle « médical » d'une situation sociale… » [Laing 1969a : 32-34. Les crochets sont de moi]

Avec un tel arsenal d’histoire vécue et de conscience critique en état d’éveil, dirait-on, nous sommes bien à l’abri de toute méprise et de toute mystification. Observons donc Ronald Laing à l’œuvre face à un autre cas johnsonien de père absent, fils rebelle et mère franchement perturbée :

> ⟨15⟩ « Comment tout cela a-t-il commencé ? - Comme je vous l'ai dit. Un après-midi, alors qu'il était censé rentrer pour déjeuner, à une heure, que son père était absent et qu'il n'est rentré qu'à deux heures, je lui ai dit : « Il faut que tu rentres pour prendre tes repas et

> que tu fasses ce que je te dis. » Il m'a répondu : «Non, je ne veux pas. » Je lui ai dit : « Si, tu le feras, sinon je te chasserai. » - « Ça m'est égal. » Elle ne savait que faire. Presque sans réfléchir, elle téléphona à la police devant David et dit : « J'ai un fils qui me désobéit. Je ne sais que faire de lui. » On lui conseilla de conduire David à la clinique en lui donnant l'adresse. Elle l'avait fait trois mois durant, une fois par semaine, mais David continuait à désobéir et paraissait toujours aussi insouciant. Après avoir vu Mme Clark, j'eus une conversation avec David, dans sa chambre, en tête-à-tête. Il me dit ce qu'il faisait : il allait retrouver les ouvriers d'un chantier de construction et les aidait dans leur travail. Lire et écrire ne l'intéressaient pas beaucoup ; ce qui l'intéressait, c'était le travail manuel. A la clinique, la seule chose qui l'amusait était le dessin ; il avait accepté que ses peintures soient exposées avec d'autres travaux d'enfants. Mais, disait-il, la principale raison qu'il avait d'aller à la clinique était une mauvaise raison ; cela lui permettait de ne pas aller à l'école cet après-midi-là » [Laing 1969a : 39]

Nous avons ici un enfant qui – comme la fillette dont j'ai parlé au début – préfère un asile psychiatrique à l'école. Que l'on me concède l'hypothèse que ce cas de *truancy* inavouée contient, entre autre, un dégout sourd et insouciant des mathématiques et du professeur censé les enseigner (cf. le « taureau/lapin » du petit Laing en personne, en ⟨18⟩). Confronté à cette « situation » – mère/père + enfant + école – le psychiatre anti-johnsonien le plus futé, éclairé et courageux que l'on puisse souhaiter fait bien attention à ne pas diriger son diagnostique sur le seul Pinocchio, car cela « laisse de côté le véritable problème, qui est *de diagnostiquer la situation sociale* » [ibid.42]. Or, que fera-t-il Ronald Laing, pour élaborer un tel diagnostique, à savoir une lecture des choses qui soit en même temps aussi ouverte que la situation humaine qu'elle est censée savoir décrire, et aussi ferme et rigoureuse que tout geste scientifique doit l'être? Et bien, il fera intervenir – il intronisera – justement le Groupe de Jean Piaget :

> ⟨16⟩ « [1] La théorie des ensembles trouve son application en matière de linguistique, de mythologie et en d'autres domaines des sciences sociales. Pouvons nous appliquer cette méthode de pensée à l'étude psycho-sociale des familles dans notre société ? J'en suis convaincu. Mais à quoi cela nous conduira- t-il? Sera-ce fructueux? Cela nous rendra-t-il capables de nouvelles découvertes, de voir plus clairement de mieux comprendre? Cela enrichirait-il la thérapeutique et aidera-t-il nos recherches à aboutir? Nous ne le savons pas encore. Il s'agit peut-être d'un cul-de-sac. Je crois pourtant que le risque vaut d'être pris.
>
> [2] LE TRANSFERT DES MODES DE GROUPE. L'enfant est né dans une famille qui est le produit des opérations d'êtres humains déjà en ce monde. C'est un système perçu par la vue, l'ouïe, le goût, l'odorat, le toucher, la souffrance et le plaisir, le chaud et le froid, un océan où l'enfant apprend rapidement à nager. Mais dans tout cela, ce qui est intériorisé ce sont des relations et non pas simplement des objets. [3] La famille ici décrite est un mode de groupe caractérisé par la co-inhérence. Certaines familles sont organisées comme des entreprises, certaines sont des institutions. Du matin au soir, *l'individu se transforme en passant d'un mode de groupe à un autre*, de la famille à la file d'attente de l'autobus, de son milieu professionnel au déjeuner d'amis, avant de réintégrer le groupe familial. Ce transfèrement implique une telle métamorphose, dans la mesure où il signifie appartenance à et intériorisation de différents modes de groupe social. La « famille » est transférée à l'entreprise, ou bien l'homme d'affaires fatigué transpose l'entreprise sur le plan de la famille. L'individu qui, dans une société pluraliste, se meut au sein de pluralités différentes agit selon des modes différents, parfois simultanément, cependant que chaque ensemble interne de structures modales subit une transformation elle aussi différente par son type, son rythme, etc. [...] On est traversé par un ensemble de sous-systèmes et on traverse d'innombrables ensembles de sous-systèmes au sein de l'infinie totalité des systèmes qui, ensemble, composent l'univers, et on occupe d'innombrables positions dans ces innombrables ensembles. [4] La création de la « famille » se produit durant les premières années de la vie. Elle entraîne l'intériorisation, considérée ici comme modulation expérientielle et transformation structurale. L'intériorisation d'un ensemble de relations par chaque élément de l'en-

> semble transforme la nature des éléments, leurs rapports et l'ensemble lui même en un groupe d'une espèce très particulière. Cet ensemble « familial » de relations peut être appliqué à un corps, à des sentiments, des pensées, des imaginations, des rêves, des perceptions ; il peut devenir des scénarios enveloppant les actions de l'individu et il peut être appliqué à n'importe quel aspect du cosmos. *Le cosmos tout entier peut être soumis à un scénario familial procédant de l'ensemble « familial » prototypique de relations et d'opérations*. Ce prototype de groupe «familial » est transféré ou reporté d'un secteur à un autre, tout en restant le domaine d'où procèdent les projections» [Laing 1969a : 83-84 ; 23-24. Les italiques et les crochets sont de moi]

Nous allons bientôt constater avec quelle fidélité cet ensemble de propos traduit la perspective que Felix Klein avait ouvert un siècle auparavant, avec son célèbre *Programme de Erlangen* (1872), sur l'« *Uberträgung duch Abbildung* » : le « transfert par application » d'un groupe géométrique à un autre, grâce au dynamisme opératoire de la *Projektion* (cf.⟨48⟩). Pour l'instant remarquons bien que toute la pensée de Ronald Laing se fonde enfin sur cette même intuition mathématique primordiale :

> ⟨17⟩ « Certaines énigmes posées par le concept de fantasme inconscient peuvent être résolues grâce à la théorie du traçage. J'ai esquissé récemment comment cela pouvait se faire (Laing, 1969). En résumé, si je projette un élément x de l'ensemble A sur un élément y de l'ensemble B, et si nous appelons φ l'opération de projection ou de traçage, *y* est appelé l'image de *x* en φ. L'opération φ est une fonction par laquelle *y* acquiert la valeur φ de *x*. Johnny est l'image de son grand-père. Un ensemble de relations peut être tracé sur un autre ensemble de relations, et des éléments d'un ensemble peuvent être tracés sur eux-mêmes. Ce n'est pas ici le lieu de développer ces idées mais il convient peut être de suggérer simplement que cette formule clarifie, selon moi, le double usage du mot fantasme, soit dans les expressions : le « contenu » du fantasme, et le fantasme en tant que « fonction ». En tant que fonction, le fantasme peut être considéré comme une opération de traçage, de n'importe quel domaine de l'expérience sur n'importe quel champ de l'expérience. Il me paraît même possible de concevoir des désirs (pulsions) qui soient non pas vécus, pour ainsi dire, en eux-mêmes, mais tracés sur l'expérience, de telle manière que le champ de l'expérience ainsi tracé acquière une valeur p (de fantasme), et de concevoir qu'une personne puisse ne pas reconnaître elle-même que le champ de l'expérience a acquis cette valeur p, généralement appelée « contenu » inconscient du fantasme» [Laing 1961 : 10. *Préface à la deuxième édition*, mai 1969].

Un « fantasme », suggère Laing, soit-il conscient ou inconscient, n'est qu'une opération (« application », *Abbildung*, *Projektion…*) du type $y = (\varphi)x$… et toute opération de ce genre est à la fois l'activité opératoire – « projection » comme *nomen actionis* – et son propre résultat – « projection » comme *nomen rei actae* –, de même que la fraction « *m/n* » exprime aussi bien l'opération de fractionner *m* en énièmes que son propre résultat, c'est-à-dire le nombre fractionnaire *n/m*. Nous verrons dans la deuxième partie de ce travail que le « moi divisé » du schizophrène laingien [Laing 1959] n'est rien d'autre – rigoureusement *rien* d'autre – qu'un homme hanté par le « phantasme » impossible d'un auto-fractionnement grâce auquel il prétendrait « à la limite » , se réduire à zéro : ce qui est bien possible et *souhaitable*, certes, quitte à ne pas se laisser avoir par l'identification lourdement paralogique entre le « zéro » limite/point de départ d'une dynamique « convergente », et le Néant d'où rien ne peut sortir, et auquel rien de ce qui existe ne saurait être reconduit.

Or de tout cela, Ronald Laing est bien conscient, car il a personnellement vécu l' « horrible cauchemar » de la dénégation antiphilosophique du « *shunya* » (= vide = « 0 ») brahmaguptien, et qu'il a eu des maîtres postscolaires de très, très haut niveau :

> ⟨18⟩ « [1] Les mathématiques sont le grand regret de ma période scolaire. Jusqu'à la fin de la quatrième, j'eus un seul professeur surnommé « le Taureau », puis j'eus « le Lapin » de la troisième à la première. J'avais eu de bons résultats, mais sombrai dans l'idiotie au départ du « Taureau ». Je pouvais encore faire des calculs arithmétiques, mais je me trompais sou-

> vent. Je n'arrivais pas à comprendre mes opérations. Je ne comprenais pas la multiplication ni la division, ni même l'addition. Je ne comprenais pas comment la distance entre deux points divisibles à l'infini était identique à la distance entre deux points quelconques. Pire, je ne savais pas ce *qu'était* un nombre. Qu'est-ce qu'un nombre? J'essayais bien de me le figurer, mais il existe des nombres inimaginables. Et ainsi de suite. [2] *Je vivais un horrible cauchemar et connus un immense soulagement en rendant mon dernier devoir de mathématiques, pour ne plus jamais infliger à mon esprit cette véritable douleur mentale, ce désarroi*. [3] Vingt ans après, en rencontrant l'un des plus brillants mathématiciens du monde, David George Spencer-Brown, je me rendis compte que mes questions étaient précisément d'ordre mathématique et que cette matière devenait toujours plus mystérieuse à mesure qu'on y progressait. *Cette faculté de ne plus comprendre ce qui est tenu pour acquis est le commencement de la sagesse scientifique ou philosophique*. Dommage que ses manifestations soient souvent tournées en dérision, mal tolérées, méprisées, sanctionnées. Quelle stupidité y a-t-il à ne pas savoir en seconde ce qu'est un nombre et encore moins en quoi les différences entre deux nombres sont égales ou différentes? [4] Ce genre de questions aurait pu me perdre dans n'importe quelle matière. Mais je pense avoir eu la grande chance de ne pas commencer à m'interroger sur l'essence de la grammaire, du mot ou même de la lettre, avant la fin de mes examens. Ma seule préoccupation était la perspective d'échouer » [Laing 1985 : 65-66. Les italiques et les crochets sont de moi]

En fait, ce fut en ce même *mirabilis* 1969 que le grand David George Spencer-Brown publia son *Law of Form,* un ouvrage percutant et génial animé par la haute ambition de chercher, dans la direction à la fois physique et mentale de la méditation descartes/booléenne/indou/bouddhiste cette même « unité réelle de la pensée » que Piaget a cru pouvoir repérer dans la structure du Groupe.

D'après tout cela, nous pouvons enfin constater ce qui suit. (1) Ronald Laing se meut indéniablement et très consciemment sur la directrice de sagesse philosophico/pythagorique qui grâce au Groupe conduit de Galois à Piaget au travers des grand noms : Felix Klein, Richard Dedekind, Henri Poincaré... (2) Il a vécu sur sa peau « cette véritable douleur mentale, ce désarroi » que seuls les nombres ont su provoquer sur les esprits assoiffés de savoir de Socrate, Descartes, Wittgenstein… (3) Une fois appelé à intervenir dans la situation$_0$ d'une « crise sociale » ayant lieu pendant la situation$_2$ d'un cours de maths dans une école ordinaire (situation$_1$), cet antipsychiatre prend, hélas, *sans délai* « le risque » d'utiliser les mêmes concepts qu'un énième lapin à la tête de taureau est entretemps en train de proposer au *petit* David Clark (⟨15⟩) lequel préfère à son tour aller se réfugier dans un asile psychiatrique – grâce à l'intervention providentielle d'une mère nazi –…pour qu'on le laisse enfin dessiner en paix.

Pourquoi « hélas » ? Car cette indiscutable adhérence laingienne aux vertigineuses mathématiques post-galoisiennes enfin émancipées de toute torture scolaire, signifie en même temps que ce même psychiatre ne s'occupera *ni* (1) de donner à ce gosse hospitalisé des cours de soutien mieux conçus, pour réunir ainsi le petit et le grand David en un seul acte d'intellection internement cohérent et évolutif, *ni* (2) de contrôler – tel un médecin du corps qui se préoccupe de la composition des médicaments qu'il va faire avaler à ses patients – si les outils conceptuels dont lui-même est en train de se servir grâce aux suggestions du grand David, ne contiennent peut-être des éléments à corriger avant de les utiliser pour comprendre et soulager la souffrance du petit David. Il ne fera pas cela car (1) il est un psychiatre et pas un professeur ; (2), il est un enthousiaste de la théorie des ensembles et des la notions de Groupe, Projection, Application… telles qu'il les a apprises (ceci est *très* important) *après* la torture scolaire ; (3) à l'encontre de Piaget, il est intensément convaincu que la philosophie/cosmogonie qui indéniablement anime cette « mode » mathématique est un horizon fondamental pour y déployer son œuvre de médecin.

III. Dissoudre la vision de Méduse, redonner des ailes à la Pensée.

Nous arrivons ainsi au cœur de la question, qui nous obligera à quitter le domaine immédiat de la psychologie clinique pour nous projeter directement et définitivement dans l'horizon des mathématiques, à défaut de ne pas pouvoir donner une réponse satisfaisante à la question : de quoi a-t-il peur un enfant qui préfère la mort – sociale, mentale et en l'occurrence physique – à une école où on lui fait subir des tels horribles cauchemars ? Avec son « ça m'est égal » notre petit David nous rassure sur un point : il n'a pas peur de sa mère, malgré ses méthodes staliniennes.

Plongés au cœur de cette situation, remarquons bien que Ronald Laing est certainement capable de déclarer *psychotique* la psychiatrie mécaniste de Freud/Kraepelin, et de décider en conséquence d'intervenir sur les structures profondes de son *langage*, selon la *lectio* wittgensteinienne la plus connue…

> ⟨19⟩ « [1] En tant que psychiatre, je me suis heurté dès l'abord à une difficulté majeure : comme m'approcher des patients si le langage psychiatrique dont je disposais les tenait à l'écart de moi ? […] On sent bien que ce langage ne parvient pas à traduire ce que l'on voudrait vraiment dire. Mais imaginer que l'on puisse dire une chose et en penser une autre est une manière de se leurrer soi même. Il convient dès lors de commencer par regarder de plus près certains des mots en usage. La pensée *est* le langage, comme l'a dit Wittgenstein. Un vocabulaire technique est simplement un langage à l'intérieur d'un langage, de telle sorte qu'examiner ce vocabulaire revient à essayer de découvrir la réalité que les mots dévoilent ou cachent. [2] La plus sérieuse objection formulée à l'encontre du vocabulaire technique couramment employé pour décrire des cas psychiatriques est qu'il *serait constitué de mots qui font « éclater » l'homme d'une manière analogue aux accidents existentiels mêmes que nous avons à étudier*. Mais nous ne pouvons donner une analyse adéquate de ceux-ci qu'à partir du concept d'une totalité unique, et un tel concept n'existe pas plus qu'il ne peut être formulé dans le langage courant de la psychiatrie ou de la psychanalyse. […] [3] Dans les pages suivantes, nous nous intéresserons partiellement à des êtres qui se conçoivent eux-mêmes comme des automates, des robots, des pièces de machines ou même des animaux. De tels êtres sont à juste titre considérés comme fous. *Mais pourquoi alors ne considérons-nous pas comme tout aussi folle une théorie qui s'efforce de transformer les personnes en automates ou en animaux* ? » » [Laing 1959 : 17 ; 22. Les crochets et les italiques sont de moi]

… et toutefois je répète : il ne songe même pas un instant à se demander si le langage mathématique dont il se sert pour mettre en œuvre sa thérapie wittgensteinienne du langage psychiatrique ne contient en lui-même des éléments *tordus*, même si à la rigueur le « thérapeute » Ludwig Wittgenstein n'a fait que cela, et de la seule façon concevable et praticable : c'est-à-dire en se dirigeant en mathématicien sur la mathématique et non pas en médecin sur le mathématicien. Ce dernier constat nous met enfin en condition de tirer une conclusion de synthèse sur tout ce qui précède.

A bien regarder, notre panorama sur la situation$_0$ – johnson/piaget/broussau/laingienne – d'une école qui en 1969 appelle un [anti-]psychiatre éclairé par un génie de l'algèbre, pour qu'il aille au secours d'un élève en révolte est… l'Apocalypse du Groupe : Magnifique Structure Impériale indiscutée et indiscutable, enseignée par les enseignants, apprise par les élèves, utilisée et promue par les pédagogues officiels qui en dénient les évidents retentissements métaphysiques, et finalement célébrée par les [anti]philosophes/[anti]psychiatres qui s'en servent incessamment, sans pourtant se demander *en mathématiciens* si le fait qu'une telle mathématique déborde de « paradoxes » ne signifie pas – peut être – qu'il y a quelque part un problème *mathématique* à résoudre, avant d'arpenter le chemin de l'illumination. *Cette* situation, Ronald Laing ne l'a manifestement pas « découverte », et c'est bien ce dernier point qu'il faut établir avant de quitter le territoire de la psychologie clinique ordinairement conçue. Observons.

Comme il le dit en ⟨16[1]⟩, Ronald Laing prend en effet le risque cartésien de penser le monde au travers des nombres et, comme Descartes, Ronald Laing en arrive à se dire que peut être Dieu est fou, et donc faux.

> ⟨20⟩ «*The paradox of the irrationality of the whole.* It is terrifying that having moved up through die irrationality/rationality of sets of sub-systems until we reach the total social context, we there seem to glimpse a total system that appears to be dangerously out of the control of the subsystems or sub-contexts that comprise it. Here we face a theoretical, logical and practical dilemma. Namely, we seem to arrive at an empirical limit which itself appears to be without obvious intelligibility, and beyond this limiting context we do not know what further context there may be that may help us to set the total social world system in a larger pattern or design in which it finds its rationality. Some people think that it may be possible to

> do this within a cosmic pattern. On the other hand, more than one person has said – and usually been regarded as mad for having said it – that perhaps God is not dead: perhaps God is Himself mad. **»** [Laing 1967b: 15-16]

Il s'arrête pourtant ici : à cette *terrifying* hypothèse, à ce même « intense terror » qui paralyse le petit patient de Adelaide Johnson . Il pourrait sans doute se dire : « essayons alors l'autre hypothèse, peut être ces mathématiques qui me font conclure à la folie de Dieu et des hommes ont un défaut quelque part… allons voir »… mais il ne n'emprunte pas le chemin des Méditations, *tout en adoptant* ces mêmes mathématiques dont il vient de découvrir l'intrinsèque folie. Mais alors, dis-je, pourquoi *craindre* un « cul de sac », lorsqu'on on est bel et bien en train de se jeter dedans ?

Cette même mouvance non pas antipsychiatrique ni antiphilosophique, mais directement et franchement antimathématique, est d'autre part incarnée par le déjà cité compagnon de lutte Gregory Bateson… et enfin par toute cette époque en colère, dont notre présent étouffé se souvient à peine, ne serait-ce qu'au niveau de ces « thérapeutes systémiques » qui avec un tel outillage mentalement suicidaire n'ont aucun espoir de s'en sortir :

> ⟨21⟩ « Selon la Théorie des types logiques, un tel message [ceci est un jeu] est évidemment inadmissible […]. Mais, tout ce qu'une telle critique peut nous apprendre, c'est que ce serait faire de la mauvaise histoire naturelle que de s'attendre à voir les processus mentaux et les habitudes de communication des mammifères se conformer à l'idéal du logicien. Si la pensée et les communications humaines se conformaient toujours à cet idéal, Russell n'aurait pas eu à (et, en fait, il n'aurait pas pu) la formuler. […] Aucune classe ne peut être membre d'elle même. Le cadre du tableau, parce qu'il délimite un fond, est alors considéré ici comme la représentation externe d'un type de cadre psychologique très particulier et important, cadre dont la fonction est de délimiter un type logique. […] Cependant, c'est précisément ce genre de cadre qui précipite le paradoxe. Pour éviter les paradoxes, la règle veut que les éléments se trouvant à l'extérieur d'un contour doivent être du même type logique que ceux de l'intérieur; mais, tel que nous l'avons analysé plus haut, le cadre du tableau est une ligne qui sépare des éléments de type logique différents. Il est intéressant de noter, en passant, que la règle de Russell ne peut pas être appliquée sans être aussitôt enfreinte. Russell insiste pour que tous les éléments d'un type logique impropre soient exclus, à l'aide d'une ligne imaginaire, de l'arrière-fond de toute classe; cela revient à dire qu'il faut tracer une ligne imaginaire du type même de celle qu'il interdit. […] Il établit ainsi un cadre du type justement de ceux qui précipitent le paradoxe : c'est là une tentative de distinguer (tracer une ligne entre) des catégories de .types logiques différents » [Bateson 1954: 220]

Or je répète, pour faire front à des mathématiques défectueuses il n'y a pas moyen de ne pas bouger en mathématiciens, comme Aristote le dirait :

> ⟨22⟩ « Si l'on argumente de cette manière avec un géomètre en tant que géomètre, il est clair que raisonner bien ce sera de démontrer quelque chose en partant de principes géométriques; et que si l'on ne part pas de principes géométriques, ce sera raisonner mal; et il n'est pas moins clair que si dans ce dernier cas on réfute le géomètre, ce n'est que par accident. Il suit de là qu'il ne faut pas discuter géométrie avec des gens qui ne sont pas géomètres; car on ne s'apercevra pas qu'on raisonne de travers [ὁ φαύλως διαλεγόμενος] » [Aristote, *Anal.Post.*XII]

Par conséquent, le thérapeute Wittgenstein, comme je viens de le souligner, s'est occupé *en logicien* d'intervenir non pas sur le psychisme de Bertrand Russell, mais sur « cette saleté de théorie de types » :

> ⟨23⟩ « 5.9.13 - Je suis installé dans un petit village à l'intérieur d'un beau fiord, et réfléchis à cette saleté de théorie des types. Restent encore quelques problèmes *très* difficiles (et aussi très fondamentaux) à résoudre, et je ne veux pas commencer à écrire avant de leur avoir

> donné une solution ou une autre. Je ne pense pas cependant que cela affecte en aucune manière l'affaire de la bipolarité qui me paraît être absolument intangible. » [Wittgenstein 1913 : 223]

Bref, ce que Wittgenstein n’a pas fait, est de chercher à soigner des malades mentaux à l’aide d’une théorie *déclarée logiquement malade,* tandis que les intellectuels dont je suis en train de parler ont tous prétendu faire cela. Ils ont accepté une théorie mathématique telle qu’elle était – explicitement et manifestement lacuneuse – pour la diriger aux situations humainement lacuneuses dont ils se proposaient de donner raison…*grâce aux défauts de leurs théories*. Pourquoi ont-ils fait une chose aussi folle? Mon idée est qu’à partir de la vision piagétienne du 1918 (⟨8⟩) ils n’ont pas résisté au spectacle d’horreur que le monde leur offrait.

> ⟨24⟩ « Hiroshima, Nagasaki, les documentaires sur les camps de concentration. Ces premières photographies de Belsen, de Buchenwald, d'Auschwitz ne me rappelaient rien, ni à personne, quand les Américains et les Britanniques y pénétrèrent. Je n'en croyais pas mes yeux. C'était donc *ça?* Fallait-il s'attendre à d'autres horreurs? Lorsque, enfin, la guerre s'acheva, ce fut un énorme soulagement. Des feux de joie dans les rues toute la nuit, des chansons, danses, beuveries, les foules se tenant par le bras, et dans mon souvenir, aucun vandalisme, aucune violence. Cependant, personne à ma connaissance ne croyait que la fin de cette guerre marquerait la fin des destructions et des massacres. Ça ne s'arrêterait pas à Hiroshima et Nagasaki. Ce ne pouvait être qu'un début. Ce n'était qu'un répit, mais nous priions Dieu pour qu'il le fît durer. L'atmosphère était alors très différente des menaces nucléaires et des crises périodiques des trente-six années qui devaient suivre. Nous nous savions condamnés — à moins d'un miracle. Un certain nombre de gens croyaient aux miracles et des millions priaient pour que par la grâce de Dieu, par un miracle, le coeur des hommes pût enfin s'apaiser, pardonner, se repentir, et tous baisser les armes, cesser leurs hostilités, prendre conscience de notre commune humanité devant Dieu dans une vie de réjouissances, de fêtes et de béatitude. Comme tout le monde, je croyais qu'une autre guerre ou pire encore allait arriver. C'était comme si, prisonniers d'un train filant vers la catastrophe, nous tentions de l'arrêter en sautant à l'arrière de notre wagon. Ou bien nous étions déjà tombés de l'Empire State Building et il ne restait plus que quelques mètres avant l'impact. A moins d'un miracle, nous étions sûrs que notre civilisation touchait à sa fin. » [Laing 1985 : 52]

Dans le passage ci-dessous en revanche, Ronald Laing honore le courage de Sigmund Freud – médecin de guerre pendant l’abattoir du 1914-’18 – en reconnaissant que l’auto-pétrification *logique* peut représenter l’ultime bouclier contre le destin que nous infligerait en tous les cas la Méduse de la maladie *mentale* :

> ⟨25⟩ « Freud a été le plus grand des psychopathologistes. Il a été un héros, descendu dans les « bas-fonds », où il a rencontré des choses terrifiantes. Il avait emporté avec lui sa théorie, telle une tête de Méduse qui pétrifia ces horreurs. Nous, ses successeurs, nous profitons des connaissances qu'il a ramenées de sa descente aux enfers et nous a transmises. Il a survécu.
>
> Il nous appartient de voir maintenant si nous pouvons survivre sans utiliser une théorie qui, dans une certaine mesure, est un instrument de défense » [Laing 1959 : 25]

Je pense enfin que c’est bien cela qui s’est passé : les pensées de ce grand médecin n’ont pas survécu à une telle apocalypse planétaire. En dissolvant en lave phénoménologique, cybernétique, écologique, spiritualiste… les pierres conceptuelles de la pensée mécaniste, ces penseurs se sont enfin égarés au milieu d’une « situation » globale qu’ils ont néanmoins su peindre jusqu’au dernier sommet, avant que le ciel impérialiste des mathématiques occidentales ne se referme – sous forme d’un vrai déluge d’oubli et de désespoir – sur leurs voix effrayés.

Honneur à eux, donc, mais la meilleure façon de vraiment les honorer est de reprendre le fil de leur discours où il s’est interrompu, et il s’est interrompu au niveau de notre situation$_0$: un élève se bloque, paralysé, face aux tâches que lui impose le programme de mathématique, qu’il doit pourtant apprendre – d’une façon ou d'une autre – s'il veut obtenir son diplôme. Il se bloque à un tel point que l'idée nous vient à l'esprit, d'appeler un « psychologue », dont nous savons pertinemment qu'il ne possède aucune compétence dans cette matière, et qu'il ne s'occupera en aucun cas de mettre en place une situation d'ordre didactique (ou « a-didactique » etc.), car il n'est pas prof… et qu'en outre il est furieux et déchainé contre toute expression de responsabilité pédagogique, aussi minimale qu'elle soit:

> ⟨26⟩ « [1] Selon Henry l'éducation, dans la pratique, n'a jamais été un instrument de libération de l'intelligence et de l'âme, mais un moyen de les asservir. Nous croyons souhaiter des enfants à l'esprit créateur, mais que voulons-nous qu'ils créent? "Si dès l'école les jeunes étaient incités à mettre en question les Dix Commandements, la sainteté de la religion révélée, les fondements du patriotisme, le goût du profit, la monogamie, le tabou de l'inceste, etc. alors apparaîtrait une telle créativité que la société ne saurait plus de quel côté se tourner. " […]
>
> [2] Dans une classe de Londres, on avait proposé un concours à des fillettes d'une dizaine d'années. Il s'agissait pour elles de cuire un gâteau, le jury étant formé par les garçons. Une des fillettes l'emporta, sur quoi sons amie révéla qu'elle avait acheté son gâteau au lieu de le faire elle-même. La gagnante fut disqualifiée. Commentaires : 1° L'école, dans le cas cité, installe les enfants dans des rôles en rapport spécifique avec leur sexe. 2° Personnellement, je trouve inadmissible qu'on enseigne à des fillettes que leur mérite dépend de leurs talents culinaires. 3° Des valeurs morales sont mises en jeu dans une situation qui est, au mieux, une mauvaise plaisanterie. S'il est contraint par les adultes à se prêter à de tels jeux, *le mieux que puisse faire un enfant est d'en tourner les règles sans se faire prendre. J'admire surtout la fillette qui a gagné* et j'espère qu'à l'avenir elle choisira mieux ses "amies"… » [Laing 1967a : 53-54. Les crochets et l'italique sont de moi][ii]

Rien que colère et révolte animent ces propos d'un psychologue/médecin qui en aucun cas ne considère la tâche scolaire et pédagogique comme élément *interne* à sa mission, car dans ce cas il ne parlerait pas ainsi. Quant à la grammaire qu'il a eu la « chance » (⟨18[4]⟩) de ne pas interpeller avant le BAC, Gregory Bateson était de l'avis que mieux vaudrait commencer à miauler, car « ces choses-là ne sont que des absurdités » :

> ⟨27⟩ « LA FILLE : Papa, à l'école, lorsqu'on nous apprend le français, pourquoi ne nous apprend-on pas à agiter les mains ? LE PÈRE : Je n'en sais rien, ou pas grand-chose... C'est probablement une des raisons pour lesquelles les gens trouvent que l'étude des langues est difficile. Que la langue est faite de mots est absurde. Et, en affirmant que les gestes ne peuvent pas être traduits en « simples mots », je disais des bêtises, parce qu'il n'existe pas de « simples mots ». *La syntaxe, la grammaire et toutes ces choses-là ne sont que des absurdités* qui reposent sur l'idée que les « simples mots » existent; or, le fait est qu'il n'y en a aucun. LA FILLE : Mais, papa...- LE PÈRE : Je te le dis, nous devons repartir à zéro, et supposer que le langage est d'abord et avant tout un système de gestes. Les animaux, après tout, n'ont que les gestes et les intonations de la voix — les mots ont été inventés plus tard. Bien plus tard. *Et plus tard encore, on a inventé les maîtres d'école…* » [Bateson 1951. Les italiques sont de moi] [iii]

Les conséquences de cette situation culturelle, où un accord unanime règne sur l'idée que la vie cosmique baigne dans l'Océan de la Structure Algébrique, même si cela nous conduit à avouer que la folie collective – des hommes ainsi que des dieux – est la vérité ultime de tout ce qui existe, ont été vraiment catastrophiques. Cet ensemble de propos si violemment anti-pédagogiques se révèle en fait comme un vrai fléau sans rémission dès qu'on les considère à côté de l'*enivrement* qui accompagne les suggestions mathématiques qui jalonnent les écrits de ces mêmes anti-éducateurs. Pourquoi ? Car le résultat scolaire de cette synthèse entre totipotence opératoire et nihilisme logique est celui de la dramatique *neurasthénie* qui afflige à présent une extraordinaire quantité d'hommes, qui ont grandi dans une école qui depuis longtemps a *mathématiquement* renoncé à tout espoir en une solution éducative pensable, donc possible.

Nous résistons par conséquent à la tentation d’appeler un tel psychologue pour débloquer une situation scolaire sous échec, et nous interrogeons *en mathématiciens et en philosophes* non pas l’esprit du gosse bloqué, mais bien celui des mouvements opératoires qu’il s’obstine à ne pas vouloir exécuter. Ce que je vise à montrer est finalement que ce sont bien ces mouvements – ainsi « structurés » – qui sont improposables, et que c’est en eux que se situe la source primordiale de ce blocage et de la peur qui l’accompagne.

Dans cette Première Partie de mon travail, je me concentrerai donc totalement sur la notion de Groupe en son origine historique, sa substance archétypique et sa pertinence directement mathématique. Il en résultera que tout en véhiculant une intuition du monde et de l’homme éblouissante et magnifique comme seul Prométhée a pu l’être, la structure du Groupe est, en elle-même, parfaitement incapable de nous raconter l’histoire passionnante et vitale de l’ « action » que ce même Prométhée a endurée avant se retrouver enchaîné à sa pénible situation, sans savoir pourquoi, et sans même savoir détecter de quelle situation il s’agit en effet. Je veux dire par là que si un Groupe n’existe que dans sa mise en action, nous verrons que cette même mise-en-action n’est pas à son tour un Groupe, car il y a toujours une distance à couvrir – la distance d’une *genèse*, et donc d’une *mémoire* – entre une *actio* opératoire et la *res acta* de son résultat (cf. ⟨17⟩) : quoi qu’ils en pensent nos phantasmes de panmathématisation universelle, qui veulent Tout, et le veulent tout de suite.

Il s’agira finalement de comprendre – dans la Deuxième Partie – que si « la valeur d’un acte planifié doit être recherchée dans l'acte lui-même » (⟨12[1]⟩ il n’y a rigoureusement rien dans une action humaine qui reste « le même » de son début à sa fin, qui ne soit l’homme qui agit car il a le courage de le faire.

1. Le corps et la voix du Groupe

Nous allons maintenant suivre les multiples et mirobolantes transformations que l’Idée de Groupe a vécues à l’époque glorieuse de son intronisation, pour chercher de comprendre d’où elle a tiré son immense autorité sur l’esprit européen contemporain. Dans mon compte rendu je chercherai à montrer, non seulement l’aspect concret de ses facettes conceptuelles et opératoires, mais aussi son dynamisme interne, tant historique que formel. De cette façon, nous pourrons arriver à cerner ses limites d’applicabilité mathématique et expérimentale en montrant en direct le sens de ces mêmes limites et l’origine profonde de l’ambition qui se refuse d’en reconnaître.

Il s’agira de montrer que dans sa forme opératoire effective – celle qui est décrite par Piaget en ⟨6[2]⟩ le Groupe identifie une *cinématique* de la pensée, une forme de surface donc, et non pas de profondeur comme le prétend Piaget en ⟨N1[3]⟩, et que, comme toute autre cinématique, cette forme est en contraste direct avec le *dynamisme* profond, et *essentiellement développemental*, qui en elle se manifeste en la faisant apparaître – le moment venu – devant notre conscience en évolution.

Pour accomplir cette tâche, j’ai choisi une trajectoire historique très précise, qui a la vertu de la distinction et de la pertinence philologique, car ces auteurs s’entre-citent mutuellement et puisent à un même univers de symboles et d’images profondes. Cette trajectoire parcourt la suite Bravais → Jordan → Dedekind → Klein.

1.1 Des cristaux immobiles de Bravais au mouvement cristallin de Jordan

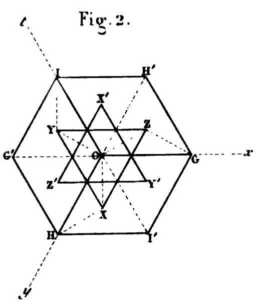


Figure 1 [dans le texte]

⟨28⟩ « Il est admis aujourd'hui, par tous les physiciens, que les corps pondérables sont des agrégations de molécules de même espèce, tenues à distance par des forces attractives ou ré-

> pulsives dont la résultante est nulle, pour chacune de ces molécules, dès que ces corps sont parvenus à leur état d'équilibre interne. […] Non seulement les molécules d'un cristal sont semblables et semblablement orientées ; mais elles sont, de plus, disposées en files rectilignes, et séparées l'une de l'autre, sur chaque file, par des intervalles égaux. […] Le cristal, ainsi réduit par la pensée, n'est plus qu'un système de points mathématiques distribués, suivant la loi de l'équidistance, sur des files rectilignes parallèles entre elles. Cette définition est précisément celle que nous avons donnée des *Assemblages* ou *Systèmes réticulaires de points*. » [Bravais 1866 : 277.]

C’est grâce à Camille Jordan que les cristaux immobiles de Bravais commencent à bouger dans leur propre espace. « Dans toute sa généralité », le polyèdre mouvant du « corps cristallisé » fait ainsi son apparition algébrique en 1867, en légitimant la pensée *pure* d’un système spatial et corporel non seulement statique et combinatoire, mais aussi cinématique et mobile : l’ensemble de « tous les groupes possibles de mouvements » :

> ⟨29⟩ « [1] (A) On sait que tout mouvement d'un corps solide dans l'espace est un mouvement hélicoïdal et sera connu lorsque on donnera : 1° la situation dans l'espace de l'axe A de rotation et de glissement ; 2° l'angle r dont le solide tourne autour de cet axe ; 3° son déplacement longitudinal *t* dans le sens de cet axe. (B) Un mouvement ainsi défini peut être désigné par la notation suivante : $A_{r,t}$. - Imprimons successivement à un même corps solide deux mouvements quelconques $A_{r,t}$ et $A'_{r',t'}$: le déplacement résultant, $A_{r,t}\,A'_{r',t'}$ sera encore un mouvement hélicoïdal, et l'on peut se proposer ce problème : connaissant les mouvements composants $A_{r,t}$ et $A'_{r',t'}$, déterminer le mouvement résultant $A''_{r'',t''}$. […] (C) En faisant varier les mouvements $A_{r,t}$ et $A'_{r',t'}$ qui servent de point de départ, on obtiendra une infinité de groupes de mouvements ; mais nous démontrerons que ces groupes se ramènent tous à un nombre restreint de types différents, dont l'étude détaillée forme l'objet de ce travail.
>
> [2] (A) Cette question pourrait être présentée sous une autre forme plus géométrique que la précédente. Imaginons en effet une molécule quelconque située en un point *m* de l'espace et arbitrairement orientée. Soient *m’*, *m"*. . . les diverses positions que prendrait cette molécule si on lui imprimait les divers mouvements M', M". . . qui font partie du groupe donné. (B) Considérons un système de molécules toutes semblables à *m* et situées respectivement en *m, m’, m’’*, … Le système formé par l'ensemble de ces molécules sera superposé à lui-même par chacun des mouvements du groupe : en effet soit □ la position ou le mouvement M" amène m’, par exemple : le mouvement M', M", amène m en □ : donc □ fait partie de la suite des positions m, m’, m’’… Il y avait donc en m une molécule à la place que vient occuper m’. » [Jordan 1867 : 181. Les crochets et les lettres entre parenthèses sont de moi.]

Ainsi que les polyèdres moléculaires de Bravais, les cristaux de déplacement décrits par Jordan sont un objet pur de la pure pensée.

1) Le « corps solide » ⟨29[1A] ⟩, le « système de molécules » ⟨29 [2AB] ⟩ dont parle ce passage sont des objets purement internes à la construction formelle qui est en train de se réaliser. De même donc, « faire varier le mouvement $A_{r,t}$ » est un geste logique qui s’auto-réalise – comme « soit donné le segment AB » – de même le « point » m peut transmuter en la « molécule » m , et la « position » m' peut être « amenée » en □□sous *l’action efficiente* de son propre… mouvement – « le mouvement M', M", amène m en µ » – : puisque tout cela se passe dans le monde purement mental de la mathématique pure. Autrement dit, cette complète interchangeabilité entre corps, parties-de-corps, positions et points dans l’espace, émane de ce que nous sommes ici dans une *géométrie* cinématique/cristallographique, et non pas dans une cinématique/cristallographie géométrisée. Il s’agit donc toujours de « point de départ » [1C] *a priori*, à savoir d’« hypo-thèses » tant indiscutables que *non* physiques.

2) L’identité individuelle d’un « *même* corps solide », d’un « ensemble de molécules superposé à *lui-même* », l’identité du mouvement donné $A_{r,t}, A'_{r',t'}$ …, de la durée de temps comprise dans l’expression « il y avait donc en *m* une molécule… » représentent une identité « corporelle », « cinématique », « spatiale », « temporelle »… *purement mathématique*, à savoir *totalement disponible* à la décision du mathématicien qui en parle – si le mathématicien dit que *c’est le même* corps/groupe etc., alors *c’est* le même corps/mouvement etc. – et en même temps totalement incapable de nous conduire en dehors de sa dimension purement mentale. De l’intérieur de cet horizon strictement mathématique, Jordan conçoit le programme d’une généralisation dont l’intérêt physique est immédiat et indiscutable :

> ⟨30⟩ « Le problème qu'il s'agit de résoudre, pout donc s'énoncer de l’une ou de l'autre des deux manières suivantes : 1° Former tous les groupes possibles de mouvements ; 2° Former de toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux-mêmes dans diverses positions. C’est sous ce second point de vue que Mr. Bravais a étudié cette question, les cas particuliers qu'il a traités et dont il a fait une remarquable application à la cristallographie sont les plus importants. Je crois néanmoins qu'il y a encore aujourd'hui quelque intérêt à traiter le problème dans toute sa généralité. » [*Ibid.*]

Ce programme de généralisation/épanouissement est guidé par notre première « vision caractéristique » de ce qu’est – à proprement parler – un Groupe :

> ⟨31⟩ « Ce mouvement faisant partie de la suite $A_{r,t}, A'_{r',t'}$, la rotation correspondante $C_{\rho,0}$ fera partie de la suite $B_{r,0}, B'_{r',0}$ …, donc cette suite de mouvements est telle que le mouvement résultant de deux quelconques d'entre eux fait partie de la suite, ce qui est la définition caractéristique d’un groupe de mouvements » [*Ibid.]*

En synthèse, Jordan ressent la présence agissante et efficace – l’action caractéristique – d’un « groupe » algébrique là où un certain « ensemble » de transformations manifeste la même fixité cristalline qui appartient à un polyèdre qui bouge librement dans l’espace : la nouvelle algèbre ne procède donc vers le Corps qu’en ce que le Corps pénètre les formes algébriques grâce à la forme du Groupe.

1.2 Le dynamisme profond et corporel du Groupe de Richard Dedekind

(1) LE CORPS DU NOMBRE – De même que chez Jordan, la perspective *ensembliste* sur les mouvements mathématiques naît chez Dedekind avec la voix impérative d’une exigence *groupale* qui, à son tour, s’enracine dans le caractère profondément *corporel* des phénomènes mathématiques :

> ⟨32⟩ **«** L'introduction des nombres irrationnels en usage jusqu'ici se rattache directement au concept de grandeur extensive - lequel n'est cependant défini rigoureusement nulle part - et elle présente le nombre comme résultant de la mesure d'une semblable grandeur par une autre de même nature. Au lieu de cela, je réclame que l'arithmétique se développe à partir d'elle-même [*die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll*]. » [Dedekind 1872 : 19.]

En se joignant à la perspective « caractéristique » de Jordan, Dedekind « réclame » que les opérations arithmétiques forment un Groupe : l’*autarchie* de l’Arithmétique signifie essentiellement, qu’étant donné la suite de ses mouvements opératoires, « le mouvement résultant de deux quelconques d'entre eux fait partie de la suite ». Autrement dit, l’Arithmétique doit se développer tout en demeurant *en* elle-même [*aus sich selbst heraus*]. *Ressentons* alors *auf das Innigste* le « point de départ » – l’hypothèse fondamentale – d’où démarre cette construction.

Dans le cas de Jordan, le recours à la notion de groupe est légitimé par l’indiscutable existence d’une solidité, une cohésion, une inertie, et donc un *moment* d’inertie. Ce n’est en fait que l’évidence profonde et invincible de sa fermeté, qui nous fait immédiatement prétendre qu’un même corps m soumis à un mouvement $A_{r,t}$, à partir de l’impulsion Ω , traduise l’impulsion Ψ en le mouvement $A'_{r',t'}$ homogène au premier. Également chez Dedekind : c’est la présence d’une valeur évidemment finie et solidement fixée comme l’effet certain – *car déjà présent, ici et maintenant* – d’un processus inconditionnellement disponible à nos mouvements opératoires (= virtuellement infinis) qui fait jaillir dans son âme l’exigence auto-fondée car auto-évidente (Principe de Raison Suffisante) qu’en ce qu’elle est le résultat certain d’une suite de mouvements *numériques*, la valeur en question est *à son tour* [*immer wieder*] un nombre :

> ⟨33⟩ « Pour le concept d'approximation d'une valeur limite fixe par une grandeur variable, et en particulier pour prouver le théorème selon lequel toute grandeur croissant de façon constante, mais pas au-delà de toute limite, doit nécessairement s'approcher d'une valeur limite, je recourus à des évidences géométriques. On peut concéder de façon générale qu'un tel rattachement à des représentations non arithmétiques a été l'occasion première de l'extension du concept de nombre (quoique cela n'ait assurément pas été le cas pour l'introduction des nombres complexes) ; toutefois, ce n'est certainement pas une raison pour admettre ces considérations étrangères dans l'arithmétique, dans la science des nombres. » [Dedekind 1872 : 9.]

(2) LES GRAINES DU NOMBRE – Or, si nous cherchons le *cœur* de cette exigence de solidité groupale et logique, nous le trouvons exprimé en 1863, lorsque Dedekind ressent que l’unité à la fois la *plus haute* [*hohere*] et la *plus profonde* [*innigste*] entre lettres et nombres est justement celle d’un *corps* :

> ⟨34⟩ « Dans les paragraphes qui suivent, j’ai cherché à introduire le lecteur dans un milieu plus haut, où l’Algèbre et la Théorie des Nombres se renouent l’une à l’autre au niveau le plus intime [*auf das Innigste miteinander verbinden*]. Pendant mes cours sur la cyclotomie et l’algèbre supérieure [...] la conviction s’imposa à moi que la chose la plus opportune était de fonder l’étude des parentés algébriques entre les nombres sur un concept attaché aux plus simples principes de l’Arithmétique. Ensuite, j’ai changé le terme “domaine des rationnels” que j’utilisais à l’époque, avec le mot “Corps”. J’entends par ce mot le système d’une infinité de nombres doué de la propriété que la Somme, la Différence, le Produit et le Quotient de deux nombres quelconques de ce système appartiennent encore à ce même système. J’appelle le corps A *diviseur* d’un corps M, et ceci un multiple de A, lorsque tous les nombres contenus en A se trouvent aussi en M. Toute couple de corps A,B possède toujours un plus petit multiple, qui peut être indiqué avec AB, et aussi un plus grand commun diviseur. Lorsqu’à tout nombre *a* d’un corps A correspond un nombre *b*=□(a) de façon que □*(a+a’)*=□*(a)*+□*(a’)* et □*(aa‘)*=□*(a)*□*(a’)*, alors les nombres b forment avec A un corps conjugué B = □(A), qui naît de A grâce à la substitution □□. Du point de vue de l’Algèbre, ces concepts vont dans la direction des principes de Galois, tandis que du point de vue de la théorie des nombres ils vont dans la direction de la création de nombres idéaux. » [Dedekind 1863: 397. Ma trad.]

Nous arrivons maintenant au dynamisme profond du Groupe, tel qu’il apparaît chez Dedekind. Ce passage (⟨34⟩) est cité par Dedekind en personne (et par Felix Klein six mois après) lorsqu’il décrit le chemin évolutif de l’entière Arithmétique dans les termes d’une dynamique opératoire continue, qui à chaque passage ⟨35[1]⟩ *impose* à ce qui suit d’hériter de la forme de ce qui précède et réciproquement ⟨35[2]⟩ impose à ce qui précède la *création/engendrement* de ce qui en hérite en conséquence la forme donnée :

> ⟨35⟩ « [1] Je considère toute l'arithmétique comme une conséquence nécessaire, ou à tout le moins naturelle, de l'acte arithmétique le plus simple, celui de compter, le comptage n'étant rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs, dans laquelle chaque individu est défini par son prédécesseur immédiat ; cet acte le plus simple consiste à passer d'un individu déjà créé à la création de son successeur. [2] Si l'on peut toujours effectuer ces deux opérations [addition et multiplication] les opérations in-

> verses, la soustraction et la division, ne sont admissibles que dans certaines limites. Quelle en a bien pu être l'occasion première, quelles comparaisons ou analogies avec des expériences, des intuitions, ont pu y conduire, cela reste en suspens ; bref : c'est justement cette limitation des possibilités d'effectuer les opérations indirectes qui a chaque fois été le véritable motif d'un nouvel acte de création; c'est ainsi que les nombres négatifs et fractionnaires ont été créés par l'esprit humain et que, dans le système de tous les nombres rationnels, un instrument d'une perfection [*Volkommenheit*] infiniment plus grande a été conquis, une propriété que j'ai désignée en d'autres lieux comme caractéristique d'un corps de nombres [*Zahlkorper*], et qui consiste en ceci : les quatre opérations fondamentales sont toujours effectuables avec deux individus quelconques dans R, c'est-à-dire que leur résultat est toujours [*stets wieder*] un individu déterminé de R, si l'on excepte le seul cas de la division par le nombre zéro. » [Dedekind 1872 :13]

Manifestement, le *Zahlkörper* de Dedekind est défini par sa jordanienne (= corporelle) façon de bouger : la composition de deux quelconques de ses mouvements donne comme résultat un troisième mouvement qui, à son tour, – *stets wieder* – fait partie de la même suite d'où il provient. Ce que Dedekind réclame, est alors que cette *Vollkommenheit* du corps des Naturels → Entiers → Rationnels ne se désagrège pas une fois atteinte la terre des entités incommensurables : ce même corps *doit pouvoir* se conserver, au prix de transmuter la nature de la terre qui l'entoure. Soumise à cette action inséminatrice, la *Vollständigkeit* des Grandeurs devient finalement la *Stetigkeit* d'un nouveau *Nombre* :

> ⟨36⟩ « Si maintenant, comme c'est notre intention, on veut aussi suivre arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffiront pas et il sera donc absolument nécessaire d'améliorer substantiellement l'instrument *R*, élaboré par la création des nombres rationnels, en concevant de nouveaux nombres, de façon à ce que le domaine des nombres acquière la même complétude [*Vollständigkeit*] ou, disons-le de suite, la même [*Stetigkeit*] *continuité* que la ligne droite. […] Autant les nombres rationnels négatifs et fractionnaires sont conçus par une libre création, et autant les lois des calculs effectués avec ces nombres doivent et peuvent être ramenés [*zurückgeführt werden müssen und können*] aux lois des calculs effectués avec les entiers positifs, autant il faut aussi s'efforcer [*streben*] de définir complètement [*vollständig*] les nombres irrationnels par le biais des seuls nombres rationnels. » [*Ibid.* : 19]

(3) LE RENVERSEMENT EVOLUTIF QUI ENGENDRE LE GROUPE – Avec ce dernier passage – au travers de cette impérieuse projection d'homogénéité sur une multiplicité logique internement dispersée – Dedekind *incarne* la puissance cohésive que le groupe jordanien puise à l'hypothèse d'un corps solide *externe*, même si purement mathématique. Dedekind intériorise le geste de Jordan : à partir du corps purement mathématique – mais *interne* – des nombres rationnels, il propulse devant nos yeux le processus de création/solidification *d'un autre* cristal arithmétique dans le vide qui sépare le nombre et *sa* grandeur, et, ce faisant, il donne *sa voix personnelle et clairement écoutable* à l'*action d'un groupe* – l'ensemble des nombres réels – *avant* que le groupe même n'apparaisse dans son espace avec une forme mathématique assez solide pour être formalisée. Ce *groupe en action* n'est donc, finalement, que le mathématicien en personne, et cela permettra à Dedekind de voir reflétée dans son « *eigenes Ich* » [Dedekind 1888 : §66] l'essence transformative de la science : un même acte de *création* de la part *des menschliches Geistes* se répète récursivement – identique à lui-même – à chaque passage évolutif, en intervenant – en parfaite autarchie – sur les résultats de son propre travail.

Maintenant faisons bien attention : en tant que tel, cet élément récursif de création/conservation, caractérise un seul des *deux* traits majeurs du Groupe proprement dit. Pour faire un Groupe, l'existence d'*une seule* opération qui nous garde à l'intérieur de la même suite où nous sommes déjà n'est pas suffisante : une « opération inverse » productrice d'un « élément inverse » *doit pouvoir* correspondre à toute opération réalisée sur n'importe quel élément qui le compose.

Or, si nous écoutons la voix de Dedekind, elle exprime précisément – toujours du côté de la *première genèse* de ces formes mathématiques – ce besoin impérieux de pouvoir *faire aussi l'inverse*. Selon son récit en

⟨35[2]⟩ et sa revendication en ⟨36⟩, l’occasion de l’élargissement progressif du domaine du nombre est en effet, elle aussi, toujours la même, à savoir *l’intolérable impossibilité* d’*inverser le courant* opératoire déclenché par l’acte de création 1) qui soi-disant vient de se réaliser, 2) en obtenant un *résultat inverse* et 3) *nouveau*.

1) « Soi-disant », car comme nous l’avons largement rappelé, *des millénaires* peuvent séparer 2+3=5 de 2–3= –1, ou 3:2 de 3/2, ou √*n*2 de √2, et cela, puisque en mathématique, « $x * y$ =*impossible* » est une expression très répandue et *parfaitement tolérée et tolérable*. S’il ne s’agit que de rester là où nous sommes déjà, alors il est suffisant de se dire : 2–3 *n’est pas possible*, puisque –1 n’a pas la *nature* d’un nombre car ce n’est que l’expression incomplète d’une soustraction décapitée en cours de route. Dans ce cas, la proposition « ceci n’est pas un nombre *naturel* » nous fait bien rester dans le Nombre ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\rightarrow\mathbb{N}$) sans pourtant instituer un Groupe.

2) En outre, dire « dans les nombres naturels la soustraction 2–3 est impossible » est *très ambigu*, car *sans aucun doute* dans le domaine des nombres naturels à toute addition correspond *sa* soustraction inverse : 2+3→2–3. Or, tandis que dans « 2+3=4 » , « 4 » est un *résultat* impossible, l’opération « 2–3 » entre le nombre 2 et le nombre 3 ne donne pas comme résultat un troisième nombre *ainsi que* « 2+3 » *le fait* , mais d’un côté l’opération « 2–3 » est sans doute bien *possible* puisque réelle – la simple écriture « 2–3 » étant sa présence légitime et actuelle devant nous – et de l’autre côté cette même expression en elle-même représente parfaitement son propre *résultat*, ainsi que l’expression «1/2» représente en même temps la division «1/2 » et son résultat « 1/2 » . Donc, l’expression « 2–3 » est sans doute la présence *actuelle* de l’opération inverse de « 2+3 », et son résultat, bien présent et actuel, est que nous restons là où nous sommes déjà, auprès de « 2–3 » à l’intérieur du domaine des Nombres Naturels.

3) Pourtant, les Nombres Naturels *ne sont pas* un Groupe, tandis que les nombres relatifs le sont. Un Groupe ne se présente à notre esprit en conséquence que lorsque nous l’*engendrons*, en concevant l’ambition dédékindienne de *franchir une barrière*, en faisant l’inverse de ce que nous avons toujours fait (soustraire un nombre plus grand d’un nombre plus petit) et en obtenant *effectivement* un résultat, qui est donc *inouï*, *révolutionnaire, magiquement nouveau* : ce qui est le contraire rigoureux de « revenir en arrière ».

Dedekind décrit ainsi, et incarne un processus essentiellement *évolutif*, *polaire* et *trans-modal* – le processus que nous ne cessons de dévoiler comme l’essence même de notre vie mentale – en montrant que tout acte de création qui ouvre un nouveau domaine de l’expérience mathématique répond à l’exigence absolue et non négociable (et en même temps parfaitement libre) de ne pas abandonner la maison du père… que l’on vient pourtant de *vouloir* quitter. Les opérations *inverses* d’entre-diviser deux nombres multipliés (3×2), entre-soustraire deux nombres additionnés (2+3), atteindre l’étalon-racine d’une certaine mesure carrée (A×A=2), en obtenant en effet des résultats nouveaux et inattendus n’existent que parce qu’« à un moment donné » notre esprit *décide* de se rebeller à l’idée que, s’il veut demeurer parmi les nombres, il doit se borner au sens du mouvement qu’il vient d’accomplir, et *délibère* alors de *créer* sur le champ un parcours *inversé* et *efficace* qui, tout en marchant en sens interdit, nous garde pourtant en pleine légitimité dans *le même domaine (le Nombre) où nous nous trouvons déjà* : 3×2→3/2 , 2-3→ -1 , A2→ $\sqrt{2}$. Ce n’est donc qu’en ce que nous *refusons* impérativement d’abandonner le territoire du *nombre arithmétique*, et qu’en même temps nous *prétendons* de le faire, que nous légitimons par là même la création des nouveaux nombres : rationnels, relatifs, irrationnels… à savoir, des opérations inverses de celles qui nous sont disponibles. Aucune des actions légitimes dans le nouveau jardin « infiniment parfait » que nous venons de pénétrer ne doit nous obliger à le quitter : nous *élargissons* donc nos possessions, où nos opérations « doivent pouvoir être re-conduites » [*zurückgeführt werden müssen können*].

Nous pouvons considérer l’intuition de cette liberté autarchique de l’esprit humain, tant indomptable, vivante, spontanée, émanatrice et créative, que solide, ferme stabilisante et auto-conservative, comme la racine vivante de celle que Jordan appelle « l’idée caractéristique du groupe », qui, en elle-même, n’est donc que le fruit déjà mûr de cette graine propulsive : un fruit qui n’apparaît que lorsque le geste interdit de l’opération inverse *n’est plus interdit*. Cette idée devient chez Felix Klein, « *die Identität des Gruppenbegriffs* ».

1.3 Le programme de Felix Klein

(1) LE CRISTAL DE LA GEOMETRIE **-** Avec Felix Klein, le Cristal Mouvant de Jordan – le lieu propre [τόπος ἰδίον] des déplacements des molécules équilibrées de Bravais – éclate sous nos yeux en devenant « en un instant » la Totalité [τόπος κοινόν] de l’Espace Cristallisé ἐν ἑαυτῷ κινουμένον : en même temps mobile en lui-même et inamovible, inaltérable, et aussi *individuel* que l’est toute figure se mouvant dans son horizon infini :

> ⟨37⟩ « (A) Nous pensons que les transformations concernent toujours la totalité des configurations spatiales [*raümliche Gebilde*], et parlons donc purement et simplement de *transformations de l'espace* - (B) Si l'on considère un instant l'espace comme inamovible etc., comme une multiplicité rigide [*starre*], chaque figure possède une individualité propre [*ein individuelles Interesse*] ; des propriétés qu'elle possède comme individu, celles-là seules sont proprement géométriques que les transformations du groupe principal n'altèrent pas. Cette pensée, formulée ici un peu vaguement [*unbestimmt*] se dégagera plus nettement par la suite de l'exposition. » [Klein 1872 : 462, 463. Ma trad. L’italique est de moi]

L’« invariant » de Klein est finalement la vision profonde de cet Individu spatial pur, de ce cristal unique et absolument transparent. La parfaite inter-absorption entre une figure et son espace est au cœur même de l’entreprise kleinienne, qui se propose ainsi de reconduire à une parfaite homogénéité logique *das raumliche Ding an sich* : « la Chose spatiale en soi ». L’Espace [*Raum*] et la Figure [*Figur, Bild*] deviennent alors parfaitement *interchangeables*, grâce à la notion intermédiaire de Configuration Spatiale [*räumliches Gebild*]. Grâce à cette notion/charnière, de même que pour Jordan (⟨29[2AB]) c’est la même chose que de parler d’un point, un lieu, une molécule ou un corps solide qui bougent dans leur polyèdre mathématique, de même pour Klein ce même « espace inamovible » et rigide devient subitement le sujet de *ses propres* déplacements, miroitements, similitudes…

> ⟨38⟩ « Il y a des transformations spatiales [*räumliche Transformationen*] qui laissent inchangées les propriétés géométriques des configurations spatiales [*räumlicher Gebilde*] en général. Par définition [*ihrem Begriffe nach*] ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la position dans l'espace de la configuration [*Gebilde*] considérée, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens dans lequel ses parties sont disposées. Les propriétés d’une configuration spatiale [*eines räumlichen Gebildes*] demeurent donc inchangées au travers de tous les déplacements de l’espace [*durch alle Bewegungen des Raumes*] de ses transformations avec similitude [*seine Ähnlichkeitstransformationen*] et du processus de miroitement [*den Prozeß der Spiegelung*] ainsi qu’au travers des transformations composées avec les précédentes. (B) Nous appellerons Groupe Principal de transformations spatiales [*Hauptgruppe räumliche Änderungen*] l'ensemble de toutes ces transformations : les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal. La réciproque est également vraie : les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal. » [Klein 1872 : 463. Ma trad.]

L’idée fondatrice est donc celle d’une « chose spatiale » individuelle et inaltérable, qui – Espace et Figure à la fois – *essentiellement* se dévoile sur le fond des variations de sens/taille/symétrie qui – « par définition » – n’appartiennent pas à sa nature ultime.

(2) L’UNITE PROJECTIVE DU CORPS DE LA GEOMETRIE **–** La création de ce milieu visionnaire et logique à la fois – où le cristal symétrique d’une figure bouge dans le cristal total de l’espace qui bouge ainsi, sans pourtant bouger, en lui-même – répond chez Klein aux mêmes mobiles profonds qui poussent Dedekind à regrouper toute la Réalité du Nombre dans un même Corps. De même pour Richard Dedekind – avril 1872 – le cristal inviolé de l’arithmétique pure doit pouvoir exister, libre de toute intuition imaginative, malgré l’incontournable fonction didactique de la figure géométrique et l’attrait désagrégeant qu’exerce la méthode *ancienne* de reconduction du nombre à la grandeur spatiale – de même pour Felix Klein – octobre 1872 – la

lumière rayonnante d'une *géométrie* pure et *une* doit pouvoir se projeter dans le monde, indépendant de tout *eidolon* ordinaire, malgré l'indéniable rôle *pédagogique* et *historique* d'un recours aux images de la géométrie intuitive, et malgré l'attrait de la *nouvelle* époque vers la dispersion et la réfraction logiques :

> ⟨39⟩ « (A) La publication de considérations destinées à établir un tel lien a paru d'autant plus justifiée que la Géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée, en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées […] (B) Au point de vue abstrait, il n'eût été besoin, dans ce qui suit, que de parler de multiplicités à plusieurs dimensions ; mais, en rattachant l'exposition aux notions plus familières de l'espace, elle devient plus simple et plus intelligible. En partant de la considération des choses géométriques et en développant sur elles, comme exemple, les idées générales, nous suivons la voie qu'a prise la Science dans son développement et qu'il est le plus profitable d'adopter pour base de notre exposition. (C) Quand, dans le texte, nous parlons de l'intuition de l'espace comme de quelque chose d'accessoire, nous le faisons en raison de la nature purement mathématique des considérations à formuler : pour celles-ci elle n'a que la valeur d'une méthode qui rend les choses sensibles, valeur qui, d'ailleurs, au point de vue pédagogique, doit être estimée d'un grand prix. Mais c'est tout autre chose s'il s'agit de l'importance de l'intuition de l'espace en général… » [Klein 1872, Ed. Fr. : 38,4.]

Et encore, de même pour Dedekind, une arithmétique pure existe en effet, et elle pousse directement comme *émanation – Ausfluss –* de notre esprit, qui enfante le Nombre, grâce à un acte de libre *création* :

> ⟨40⟩ « Je considère le concept de nombre comme entièrement indépendant des représentations ou des intuitions de l'espace et du temps, et plutôt comme une émanation directe des pures lois de la pensée. Ma réponse principale à la question posée dans le titre de cet écrit s'énonce ainsi : les nombres sont des créations libres de l'esprit humain. » [Dedekind 1888 : 61 ;]

… de même pour Klein, une géométrie pure existe en effet, et elle pousse directement comme *projection – Projecktion*[iv] – de notre esprit, qui enfante la *transformation spatiale* au travers d'un acte libre [*Willkürlich*] de position d'un même « Groupe», là où il n'y aurait apparemment qu'une multiplicité dispersée [*Zerfallen*] de figures (et de *géométries*) distinctes. Grâce à cette opération primordiale, la vraie géométrie saisit la vérité ultime de l'Espace d'où jaillissent, non pas des modèles/images, mais des modèles/archétypes qui, pour la géométrie, sont *die Sache Selbst*.

(3) L'ACTION DU GROUPE INTRA-GEOMETRIQUE **-** À cette Géométrie unifiée et unificatrice, Klein donne une personnalité douée sa propre voix et sa propre volonté, en nous disant qu'elle – elle-même, la Géométrie en personne – ne veut pas – « sie *nicht sein will* » – être qu'une suite dispersée d'images sensibles :

> ⟨41⟩ « (A) Je considère l'intuition de l'espace en général comme subsistant par elle-même [*etwas Selbständiges*]. Il existe une Géométrie proprement dite [*eine eigentliche Geometrie*] qui ne *veut* pas [*die nicht sein will*], comme les recherches qui nous ont occupé, n'être qu'une expression intuitive de considérations abstraites. Il y faut concevoir les figures de l'espace dans la pleine vérité de leur forme et (ce qui constitue le côté mathématique) apercevoir leurs relations comme des conséquences évidentes des postulats de l'intuition dé l'espace. Pour cette Géométrie, un modèle, qu'il soit exécuté et examiné ou seulement figuré avec force, n'est pas un moyen pour atteindre au but, mais la chose elle-même [*die Sache selbst*]. Quand nous plaçons ainsi, avec une existence propre [*als etwas Selbständiges*] la Géométrie à côté des Mathématiques pures et sans qu'elle en dépende, nous ne faisons pas quelque chose de neuf. [Klein [F] : 39]. (B) Nous cherchons un principe général d'après lequel on puisse édifier les méthodes [de la géométrie]. Cette question paraît d'autant plus importante que, à côté de la Géométrie élémentaire et de la Géométrie projective, prennent place d'autres méthodes, assurément moins développées, auxquelles il faut accorder le même droit à une existence propre. » [Klein 1872, Ed. Fr. : 4.]

L'objet ciblé par le *Programme d'Erlangen* à partir de l'idée fondatrice de l'Individu Spatial Absolu est donc *la Géométrie* en tant que telle, sa pureté, son unité autarchique et son interne division en *parties légitimes* et l'intervention de Klein, dans ce domaine, est la même *action de groupe* de Dedekind : dirigée à la fois (⟨41A⟩) à préserver créativement (projectivement) la substance pré-imaginative de cette science, et (⟨39A⟩) à inverser un trend opératoire qui traduit la multiplication des méthodes en une désagrégation logique de leurs objets. Cohéremment, les Groupes de Jordan et le Corps de Dedekind seront deux éléments fondamentaux de cette entreprise.

Soulignons bien que Felix Klein est un géomètre, s'il en est un.

Pour son *Programme* la « géométrie même », la « géométrie en elle-même » [*selbst*] ou « proprement [*eigen*] dite » (⟨41A⟩) avec son objet propre [*selbst*] est l'objet d'une réflexion strictement *géométrique*, en ce qu'aucune démarche *irréductible* à la démarche géométrique n'est, ni ne sera, mise en place. Autrement dit, de même Camille Jordan ne procède pas en physicien vers l'objet *physique* « corps solide » ou « molécule », de même lorsque Felix Klein décide de reculer son attention en ciblant la Géométrie elle-même, il n'ouvre pas un domaine du discours *distinctement* méta-géométrique : l'essence (implicite) de son Programme est de traiter la géométrie comme l'un de ses objets internes. Ce recul épistémologique et psychologique sera l'objet de préoccupations du Logicisme, du programme de Hilbert, de Poincaré et Piaget, mais il n'est même pas implicitement envisagé par le *Programme* de Felix Klein. L'identité et unité de *la* géométrie kleinienne est donc instituée par le géomètre en personne, selon la même démarche qui lui permet de décider catégoriquement et impérativement que deux objets intra-géométriques ne sont en réalité que deux occurrences *du même* objet. Cohéremment, ni *la personne* du géomètre n'apparaît comme un foncteur effectif de son discours, ni la Géométrie, tout en étant placée *à côté* des mathématiques pures n'obtient une place déterminée au sein de la totalité de la science.

Cette application de la géométrie en elle-même, s'irradie sur la totalité de ses membres – les différentes sous-géométries (⟨41B⟩) – en fournissant le critère unitaire de leur existence : un même Principe devra identifier l' « *ursprüngliche Figur* » de la Géométrie, et faire de ses émanations internes des « parties stables » sur corps entier, en leur donnant à la fois une légitimation et un critère d'identité individuelle.

Les outils intra-géométriques désignés pour œuvrer cette généralisation interne *de* la géométrie *par* la géométrie, sont ceux (⟨42A⟩) de la *Projektion* et (⟨42B⟩) du *Groupe*. L'unité *projective* de la Géométrie *überhaupt* est pour Klein une propriété de la totalité du sein de laquelle jaillit le Groupe de la Géométrie Projective, qui nous dévoile de la sorte les deux dorsales majeures (*groupe* et *projection*) se sa totalité d'appartenance. Réciproquement, la source d'existence de toute sous-géométrie est l'identité projective – la projection d'identité – d'un *même* groupe de transformations :

> ⟨42⟩ « (A) La Géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme essentiellement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis-à-vis des modifications apportées par la projection. […] Pour chaque espèce de transformation de l'espace, on peut imaginer une marche de développement semblable à celle que nous venons de décrire. […] (B) *A priori*, il n'y a rien de déterminé dans le nombre des paramètres arbitraires dont on fera dépendre cet élément : la ligne, le plan, l'espace, etc. apparaissent, suivant l'élément choisi, comme pourvus d'un nombre quelconque de dimensions. Mais, tant que l'on prend pour base de l'étude géométrique le même groupe de transformations, rien n'est modifié dans cette Géométrie, c'est-à-dire que toute proposition obtenue avec un certain élément de l'espace reste encore une proposition pour tout autre choix de cet élément, l'ordre des théorèmes et leurs liaisons sont seuls changés. Ce qui est essentiel, c'est donc le groupe de transformations. » [Klein 1872, Ed. Fr. : 10, 14.]

Au sein de ce mouvement généralisateur et endo-projectif, l'évidence donnée du groupe algébrique *s'oriente en haut et se condense en bas*.

(3.1) Les repères en haut – Les groupes galoisiens déjà connus (⟨43A⟩) évoquent leur substance logique commune : l'Identité Générale de la Notion de Groupe – *die Identität des Gruppenbegriff* – laquelle (⟨43B⟩) nous renvoie à son tour – par analogie – à une *théorie générale des transformations :*

> ⟨43⟩ « (A) Dans la théorie de Galois comme ici, tout l'intérêt réside dans les groupes de transformations. Mais les objets auxquels se rapportent les transformations sont bien différents : là on a affaire à un nombre limité d'éléments distincts, ici à un nombre indéfini d'éléments d'un ensemble continu ; mais on peut, par l'identité de la notion de groupe [*Identität des Gruppenbegriffes*] pousser plus loin la comparaison. […] (B) Dans la théorie de Galois […] ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions : la théorie des équations n’en découle que comme application. Par analogie, nous voudrions une théorie des transformations, une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par des transformations d'une nature donnée. […] Le traitement d'une multiplicité tiré de la considération d'un groupe fondamental de transformations apparaîtrait comme une application de la théorie des transformations. » [Klein 1872 : 36. Ma trad.]

À son tour, cette Idée nous projette vers les deux derniers échelons de notre montée aux repères ultimes de l’Idée de Groupe, qui ne sont rien de moins que les archétypes originaires de l’Individu (⟨37⟩) et de la Transformation (⟨43B⟩-⟨44⟩).

(3.2) L’Archétype de la Transformation en son Espace – Klein enracine le sens du Groupe galoisien dans l’intuition *noétique* de la Transformation, qui à partir du tremplin préparé par Bravais/Jordan finit ainsi par englober la totalité du monde accessible au scientifique. Si, chez Bravais, le cristal devient mathématique, Jordan distille la forme mathématique même (le Groupe) comme un cristal au sein duquel les polyèdres de Bravais se meuvent. Mais à son tour, *toute* forme mathématique est en elle-même une transformation et le Groupe devient finalement, avec Klein, le représentant mathématique de tout mouvement pensable, à savoir (mais encore implicitement) de *tout* ce qui est en général pensable, puisque *penser* est un mouvement.

Or le premier fruit visible de cette intuition générale est chez Klein l’évidence absolue : « toute suite de transformations est nécessairement *à son tour* une transformation, puisque toute suite de transformations est nécessairement la transformation d’une suite ». C’est dans cette vérité primordiale – récursive, auto-conservative et internement réversible – et dans l’idée d’Espace qui en découle – que le Groupe kleinien puise à sa sève ultime :

> ⟨44⟩ « (A) La composition d'un nombre quelconque de transformations de l'espace redonne toujours une transformation [*ergeben immer wieder eine Transformation*] […] (B) Supposons maintenant qu'une suite donnée de transformations ait la propriété que toute transformation résultant de la composition d'un nombre quelconque d'entre elles appartienne à son tour à la suite [*ihr selbst wieder angehört*] : elle constitue ce que l'on nomme *un groupe de transformations.* (C) Nous pensons que les transformations concernent toujours la totalité des configurations spatiales [*raümliche Gebilde*], et parlons donc purement et simplement de *transformations de l'espace*. » [Klein 1872 : 462. Ma trad.]

Maintenant faisons *bien* attention. Nous contemplons ici la pure et simple *notion* de la Trans-formation [*Um-formung*] : (A**)** en ce qu’une transformation $\square_i$ est donnée, une multiplicité [*Mannigfaltigkeit*] de sous-transformations est donnée, donc à chaque instant où nous considérons cette même suite transformative$\square\square_i$, elle est en même temps la suite qu’elle est, et la transformation de ce qu’elle était il y a un instant. Autrement dit, une suite de transformations est la transformation en acte de cette même suite. La *clôture* et l’intrinsèque *réversibilité* de l’Idée jordanienne de Groupe (⟨31⟩) : « le mouvement résultant de deux quelconques d'entre eux fait partie de la suite, ce qui est la définition caractéristique d’un groupe de mouvements ») est donc ressentie par Klein comme l’expression intra-mathématique de cette intuition primordiale : « *immer wieder* [une transformation] … *ihr selbst wieder angehört* [appartient à elle-même] » En conséquence (C) le milieu parcouru par toute « *trans-»*formation, est l’espace *infranchissable* (qui en réalité, nous le verrons, est un *temps*) de son propre avoir lieu. Toute transformation est porteuse de son espace, au sein duquel elle a lieu[v] , puisqu’en ce que nous contemplons une transformation, nous ouvrons immédiatement l’espace unitaire de ses changements successifs.

La notion *formelle* de Groupe apparaît donc, chez Klein, comme la condensation finale d’un processus qui, de l’unité substantielle de la Géométrie, fait jaillir comme *objet* unique de son *unique* attention, la Totalité Simultanée de l'Espace, ressenti comme le *sujet* unitaire et individuel non seulement de notre *discours*, mais aussi de toute Transformation *dans* l'espace, laquelle à son tour [*immer wieder*] s'impose – elle, la Transformation même – comme l'espace logique où nécessairement toute transformation individuelle a lieu, puisque le résultat de n'importe quelle suite de transformations est *à son tour* une – cette même – transformation. Or, aussi vertigineux soit-il, tout cela demeure néanmoins, hélas, « un peu vague ».

(4) « ETWAS UNBESTIMMT » – En effet, sur la base des passages (⟨44⟩) et (⟨37⟩), la notion d'*archétype* que je viens d'utiliser devient distincte en son rôle de pure *orientation* logique.

La Transformation. Ainsi qu'elle est proposée, l'Idée de la *Transformation-en-son-espace* ne détermine pas le Groupe algébrique proprement dit, car aucune opération déterminée, aucune relation d'ordre et aucune opération inverse ne sont comprises dans son simple concept. Nous disons : toute transformation *est* par là même une suite, et *vice-versa*, donc toute transformation est son propre résultat… mais en ce disant nous avons *pensé* la Transformation *überhaupt*, le *pur concept* de la transformation, interne à toute forme transformative pensable. Nous n'avons donc ni effectivement *donné* une transformation, ni – encore moins – un Groupe. Cet *Urbild* [« Image originaire » Wittegnstein 1918] oriente donc notre discours et son sens, mais le passage ⟨44A→B⟩ « Soit donnée une multiplicité et en elle un groupe de transformations » encore tout à construire, et le géomètre Felix Klein ne fait que le *présupposer*.

L'Individu – De même, Klein a bien raison de préciser (⟨37⟩) que son idée d'un *individu* à la fois spatial et figural est une pensée « un peu vague » [*etwas unbestimmt*], car ainsi qu'une multiplicité en général – saisie en deçà de toute transformation individuelle *donnée* – n'existe que dans notre discours *déjà* géométrique, la présence d'un espace individuel inamovible dans ce même discours est parfaitement incapable de nous adresser sur l'individualité d'une figure déterminée, si la figure ne nous a pas été déjà préalablement *donnée*. Si donc ceci est le Programme d'Erlangen…

> ⟨45⟩ « Faisons maintenant abstraction de la figure sensible [*sinnliches Bild*] qui, au point de vue mathématique, n'est pas essentielle, et ne voyons plus dans l'espace [*erblicken im Raume*] qu'une multiplicité à plusieurs dimensions […] Par analogie avec les transformations de l'espace, nous pouvons parler des transformations de la multiplicité; elles forment aussi *des groupes :* mais il n'y a plus, comme dans l'espace, un groupe qui précède les autres [*eine Gruppe vor den übrigen*] par sa signification : un groupe quelconque n'est ni plus ni moins que tout autre [*gleichberechtigt*]. Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : *étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations dans cette multiplicité, en étudier les configurations du point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.* » [Klein 1872 : 463.Ma trad.]

… ce programme est, ainsi que nous l'avons dit, parfaitement *interne* à la géométrie *donnée* et *existante,* dans laquelle des *figures-Gebilde* nous sont *de fait* données dès le début [*von vornherein*] et aucune opération mathématique n'existe qui ne soit finalement enracinée dans l'une d'elles. Felix Klein est très conscient de cet aspect :

> ⟨46⟩ « Si l'on introduit des configurations [*Gebilde*] quelconques comme éléments de l'espace, il acquiert un nombre quelconque de dimensions. Mais si nous nous plaçons au point de vue habituel [*gewöhnliche Anschauung*] (élémentaire ou projectif), le groupe que, pour la multiplicité à plusieurs dimensions, nous devons prendre pour base est donné *dès le début* [*von vornherein gegeben*] : il n'est autre que le groupe principal ou le groupe des transformations projectives. Si nous voulions prendre pour groupe fondamental un autre groupe, nous devrions quitter le point de vue élémentaire ou projectif. […] Il est important d'ajouter qu'en vue de l'étude de la multiplicité, il faut prendre pour base un groupe déterminé dès le début [*von vorneherein*], ou sinon qu'il faut, pour disposer à volonté du groupe, y adapter convenablement nos conceptions géométriques. Si l'on ne faisait pas cette remarque, on pourrait, par exemple, chercher une représentation de la géométrie de l'espace réglé de la façon suivante. Dans cette géométrie, une droite a six coordonnées ; c'est aussi le nombre des coefficients d'une conique du plan. La reproduction de la géométrie de l'espace réglé serait

> ainsi la géométrie d'un système de coniques […] : mais si nous gardons la façon de voir élémentaire ou projective de la Géométrie plane, nous n'obtenons *absolument aucune* image [*haben wir eben kein Bild*]. » [Klein 1872 : 473.Ma trad. Les italiques sont de moi]

Or, si en manque d’une réadaptation convenable de notre « façon de voir» nous risquons, le long de notre voyage projectif, de perdre tout enracinement imaginatif, nous ne disposons, *a fortiori*, d’aucune image [*Bild*] de support lorsqu’il s’agit de saisir l’*Ur-bild* de la Transformation *en soi*, ou de l’*Urbild* de l’Espace/Multiplicité *en général.* Il faut donc faire bien attention au moment où l’on est soudainement passé du domaine de la simple contemplation d’une Idée mathématique générale (comme « toute suite de transformations est la transformation d’une suite ») à son application opérationnelle, afin de ne pas s’imaginer que cette même application ne demeure pas moins toujours redevable, dès le début, à des formes opératoire déjà existantes et données.

C’est en effet cela que Frege observe lorsqu’il fait remarquer que l’évidence intra-géométrique du parallélisme et la définition *logique* de « parallélisme » sont deux choses non seulement différentes mais inversées l’une par rapport à l’autre :

> ⟨47⟩ « Le jugement : “La droite a est parallèle à la droite b” qu'on écrit symboliquement : a // b peut être compris comme une identité. Une telle interprétation fait apparaître le concept de direction, et on peut dire : “la direction de la droite a est identique à la direction de la droite b”. On remplace le signe // par le signe =, plus général, et on répartit sur a et b le contenu particulier du signe primitif. On obtient ainsi un nouveau concept en analysant le contenu de jugement d'une manière différente. Souvent, d'ailleurs, *on conçoit la chose à l'inverse*, et beaucoup d'auteurs préfèrent la définition suivante : les droites parallèles sont celles qui ont même direction. On démontre alors très facilement la proposition : “si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles” en faisant appel à un théorème d'identité dont l'énoncé est l'analogue exact de celui qu'on vient de lire. *L'ennui est qu'on inverse l'ordre réel des choses*. Car en géométrie tout doit au départ être intuitif. Et je demande si quelqu'un a jamais eu l'intuition de la direction d'une droite. D'une droite oui, mais distingue-t-on dans l'intuition une droite de sa direction ? C'est peu probable ; ce concept provient d'une élaboration intellectuelle greffée sur l'intuition. Mais on a bien une représentation de droites parallèles. La démonstration à laquelle j'ai fait allusion repose sur une subreption ; on suppose ce qu'on veut démontrer en employant le mot “direction”. En effet, à supposer que la proposition : “si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles” soit fausse, on ne pourrait pas convertir a // b en une identité. » [Frege 1884 : 189.]

Notre conclusion bien fixe est donc : *aucune porte* n’est disponible au pan-géomètre kleinien pour « condenser en bas » la dimension purement archétypique du Groupe, qui ne soit l’individualité d’une figure géométrique déjà *préalablement* condensée.

(4.1) La condensation en bas : l’auto-évidence du Groupe en action – La point de départ pour nos opérations [pan-]géométriques *doit pouvoir* être donc déjà donné au sein d’une géométrie déjà existante, et les outils mathématiques qui organisent cette déjà existante géométrie et les images individuelles qui l’habitent sont le Groupe, le Corps, l’*Abbildung* ⟨47⟩, enrichis d’un principe d’auto-évidence opératoire ⟨48⟩ censé garantir la fiabilité de nos mouvements projectifs. Les outils :

> ⟨48⟩ « (A) LE GROUPE – Supposons maintenant qu'une suite donnée de transformations ait la propriété que toute transformation résultant de la composition d'un nombre quelconque d'entre elles appartienne à son tour à la suite [*ihr selbst wieder angehört*] : elle constitue ce que l'on nomme un groupe de transformations. [NOTE - Cette définition a encore besoin d'un complément que voici. Il est implicitement supposé, dans les groupes du texte, que toute opération qui y figure est accompagnée de l'opération inverse ; mais, dans le cas où il y a une infinité d'opérations, ceci n'est nullement une conséquence de la notion même de groupe ; c'est donc une hypothèse qui doit être expressément adjointe à la définition du groupe, telle

> qu'elle est donnée dans le texte.] L'ensemble des déplacements (chaque déplacement étant considéré comme une opération effectuée sur la totalité de l'espace) offre l'exemple d'un groupe de transformations. [NOTE - Camille Jordan a déterminé tous les groupes contenus dans le groupe des déplacements : *Sur les groupes des Transformations* [*ci-dessus* ⟨29⟩] Un groupe qui y est contenu est formé, par exemple, par les rotations autour d'un point. (B) LE CORPS - Soit donné, pour l'espace, un groupe quelconque, par exemple le groupe principal. Faisons choix d'une figure particulière, comme d'un point, ou d'une droite, ou encore d'un ellipsoïde, etc., et effectuons sur elle toutes les transformations du groupe fondamental. On obtient ainsi un ensemble plusieurs fois infini à un nombre de dimensions en général égal au nombre des paramètres arbitraires contenus dans le groupe. […] Chaque ensemble ainsi engendré se nomme, relativement au groupe générateur, *un corps* [NOTE - Ce nom est choisi d'après Dedekind qui, dans la Théorie des nombres, donne à un ensemble de nombres le nom de *corps*, quand il résulte, au moyen d'opérations données, d'éléments donnés Cf. dernière édition des *Leçons* de Dedekind [*ci-dessus* ⟨34⟩]. Si maintenant, d'une part, nous voulons étudier l'espace au sens du groupe, et, dans ce but, spécifier comme élément de l'espace des figures déterminées ; si, d'autre part, nous ne voulons pas que des choses équivalentes soient représentées d'inégale façon, *nous devrons évidemment choisir les éléments de l'espace de telle sorte que leur ensemble forme un seul corps ou puisse être décomposé en corps* [p.18] –
>
> (C) L'AB-BILDUNG - Soit prise en examen une multiplicité A sur la base d'un groupe B. Si au travers d'une transformation quelconque on transforme A en une autre multiplicité A', le groupe de transformations B qui conduisent A en lui-même devient un groupe B' dont les transformations se rapportent à A'. » [Klein 1872. Ma trad.]

Le principe :

> ⟨49⟩ « C'est dès lors un principe auto-évident [*ein selbstverständliches Prinzip*], que *la façon de traiter A sur la base de B conduit à celle de traiter* A' *sur la base de* B', c'est-à-dire que chaque propriété que possède, relativement au groupe B, une configuration [*Geblid*] de A, donne une propriété, relativement au groupe B', de la configuration correspondante de A'. » [Klein 1872 : 469. Ma trad.]

Un *principe auto-évident* nous permet ainsi de projeter/transférer *une même* propriété géométrique d'un lieu à l'autre de notre espace opératoire, grâce à la simple décision de la *voir* [*erblicken*] se déplacer *dürch Abbildung.* Sur cette base, Klein affirme finalement qu'une droite et une conique sont *la même chose* :

> ⟨50⟩ « De l'arbitraire dans le choix de l'élément de l'espace – On peut établir une correspondance entre les points de la droite et ceux d'une conique du plan, en projetant d'un des points de celle-ci. On montre aisément que les transformations linéaires B qui reproduisent la droite *deviennent* les transformations linéaires B' qui reproduisent la conique, c'est-à-dire les transformations de la conique qui correspondent aux transformations linéaires du plan qui reproduisent la conique. Mais […] il revient au même [*ist dasselbe*] d'étudier la Géométrie sur une conique en la supposant fixe et ne considérant que les transformations linéaires du plan qui la reproduisent, ou d'étudier la Géométrie sur la conique en considérant toutes les transformations linéaires du plan, et laissant la conique se modifier avec elles. Les propriétés que nous découvrons aux systèmes de points de la conique sont donc projectives au sens habituel du mot. » [Klein 1872 : 470. Ma trad.]

L'auto-évidence du principe d'*Übertragung durch Abbildung* – en même temps trans-lation projective d'une *même* propriété d'une figure à l'autre, et transformation d'une *même* figure – n'est finalement que l'évidence-pour-nous de notre libre décision [*Willkur*] d'identité opératoire et donc objectuelle, puisque, selon cette même auto-évidence, l'identité de l'opération entraîne l'identité de l'objet de l'opération. Autrement dit, le sujet mathématique est défini par le pouvoir absolu qu'il exerce sur l'identité de ses objets ; il dit « soit le segment U », et le segment U *est* ; ensuite il dit « soit U un cercle vu en perspective », et c'est comme cela.

> ⟨51⟩ **«** Comme élément de la droite, du plan, de l'espace, etc., et en général d'une multiplicité à étudier, on peut employer, au lieu du point, tout élément faisant partie de la multiplicité : un groupe de points, en particulier une courbe, une surface, etc. Comme, *a priori*, il n'y a rien de déterminé dans le nombre des paramètres arbitraires dont on fera dépendre cet élément, alors la ligne, le plan, l'espace, etc. apparaissent, suivant l'élément choisi, comme pourvus d'un nombre quelconque de dimensions. » [Klein 1872, Ed. Fr. : 14.]

À l’intérieur de l’horizon de cet univers d’évidences-pour-moi, le côté *logique* et le côté *projectif* coïncident : un segment *apparaît comme* un cercle si je décide qu’il *est* un cercle, et cette décision d’identité logique coïncide avec le choix d’un certain *point de vue* sur ce même segment/cercle.

2 Evoluer vers un angle absolument droit

Et nous voilà finalement parvenus à notre riposte anti-impérialiste à l’obsession groupale qui hante l’esprit de notre époque, en l’empêchant de *naître* et *commencer*, de se propulser dans le monde et d’y projeter la puissance génératrice de ses opérations.

Chez Piaget, un couple insécable de notions jumelles oriente toutes ses visions d’ensemble : 1) la notion d’une totalité internement articulée comme système de rapports de parfaite réciprocité entre ses parties 2) celle de la nature essentiellement dynamique et réfléchissante de cette même totalité, intimement mouvante et toujours en même temps structurante et structurée. C’est cette double idée que Piaget ressent comme l’essence du Groupe, car « réciprocité absolue » coïncide pour lui avec l’existence efficace d’une « opération inverse », ouvrant à cette « réversibilité opératoire » qui est l’essence même de la pensée.

La vision de cette réciprocité intrasystémique absolue s’exprime très nettement chez Felix Klein, selon lequel nous jouissons de l’arbitraire le plus complet dans le choix de notre *point de vue* géométrique, en ce que ce choix s’opère toujours à l’intérieur d’un système de rapports de *pure réciprocité* – toujours « réversibles » donc – entre les éléments (les points de vue) qui constituent le système que nous décidons de projeter devant nous. Ce principe de relativité intra-mathématique absolue – au cœur du *Programme d’Erlangen* – est ainsi exprimé par Klein :

> ⟨52⟩ « Considérons, par exemple, comme en Trigonométrie sphérique, les choses spatiales avec distinction particulière d'un point. La question qui se pose tout d'abord est celle-ci : développer les propriétés invariantes, relativement au groupe principal, non plus des choses spatiales en soi [*der räumlichen Dinge an sich*] mais du système qu'elles forment avec le point donné. […] Or il revient au même [*es ist dasselbe*] d'étudier, au sens du groupe principal, les figures de l'espace en leur adjoignant le point donné, ou de n'adjoindre aucun point, mais de remplacer le groupe principal par le groupe, en lui contenu, des transformations qui ne changent pas ce point. […] On obtient ainsi ce théorème : Si l'on remplace le groupe principal par un groupe plus étendu, une partie seulement des propriétés géométriques est conservée. Les autres propriétés n'apparaissent plus comme propriétés intrinsèques des choses spatiales en soi [*der raümlichen Dinge an sich*] mais comme propriétés du système obtenu en leur adjoignant une configuration distincte [*ausgezeichnet*]. » [Klein 1872 : 460, 465]

En elle-même, cette idée *pangéométrique* décide d’un Roi qui à l’aube de la modernité française avait été défini « empereur dans son domaine ». Dans la Nation de la Géométrie – une fois qu’elle est formée – nous avons la liberté totale d’élire un « groupe principal », et de le mettre ensuite en disgrâce sur la seule base de nos arrêts indiscutables. Cette même idée absolutiste devient par contre, non pas impériale, mais impérialiste en dehors, et dictatoriale à l’intérieur de ses frontières, dès que ce même Roi oublie l’*histoire* de sa prise de pouvoir et ne ressent aucune dette envers les groupes sociaux qui l’ont aidé en son ascension. Celle-ci n’est pas, d’autre part, qu’une métaphore : elle est une analogie très pertinente entre ce qui se passait à l’intérieur de la science et ce qui passait en dehors d’elle lorsque l’« impérialisme du Groupe » a décidé que ce n’était qu’une « convention commode et opportune » que de mettre la gauche à gauche de la droite et la droite à droite de la gauche. Une droite et une gauche existent pourtant, et même si leur définition doit forcement les instituer par stricte réciprocité : a) en renverser l’ordre est *de fait* impossible, car si on met la droite à gauche, elle devient par là même la gauche, et *vice-versa* ; b) aller de droite à gauche *ce n’est pas la même chose* qu’aller de gauche à droite, et cela est aussi auto-évident (évident pour nous tous) que les plus immédiates vérités de la géométrie kleinienne, lesquelles s’instituent toutefois – ici l’impérialisme dictatorial – sur une définition d’« invariant » qui coïncide avec l’absence de *toute* droite/gauche – haut et bas, avant et arrière – dans l’espace général de la géométrie.

Je vais maintenant montrer que cette vérité aussi banale que définitive n’est pas extra-géométrique car subjective, mais intimement intra-géométrique *justement*, car on n’a pas encore vu ni conçu une géométrie sans un sujet humain qui la mette en marche. D’autre part, une fois que nous mettons consciemment en marche la Géométrie, nous constatons qu’à l’indépassable anisotropie de l’espace où ses enchaînements *formels* se déploient correspond la nature irréductiblement *développementale* de ce même déploiement qui, de fait, doit toujours bien distinguer entre son point de départ et son point d’arrivée, selon un ordre évolutif que ni le didacticien ni le mathématicien ne sauraient légitimement inverser. Je vais donc mener une analyse *dimensionnelle* de l’espace opératoire du géomètre tout à fait analogue à celle que j’ai conduite sur le champ transformatif de l’arithméticien/algébriste.

Étant donné qu’il n’y a rien de plus « groupal » – jordanien, kleinien, poincariste, piagétien… – que la rotation d’une figure euclidienne dans l’espace théorématique où il s’agit, par exemple, de voir si elle est au mois congruente avec une deuxième figure – l’opération essentiellement virtuelle de l’ἐφαρμοττειν : projeter sur la feuille le voyage d’une figure quelconque avec l’intention de la faire coïncider (souvent par l’absurde) avec une deuxième figure – demandons-nous quel genre d’espace opératoire se présente devant notre esprit lorsque nous nous mettons à l’œuvre.

Nous venons de voir que, malgré la façon en soi très trompeuse de s’exprimer du pangéomètre kleinien – par ex. « soit donnée une multiplicité en en elle un groupe de transformations » (⟨45⟩) – la seule chose qui peut être effectivement *donnée* au géomètre est une figure déterminée et individuelle – *ce* triangle, *cet* angle. Pour engendrer, donc, les *invariants* kleiniens qui distillent ce qui correspond à l’essence même de la « chose spatiale en soi » – les « essences » de Piaget, universelles et non-événementielles (⟨N1[3]⟩) – il faut bien que nous fassions tourner *cette* figure. Faisons-le.

2.1 De la rotation aux symboles de son espace

(1) LA CONTRARIETE RECIPROQUE SOUS-DETERMINE LE SENS DE LA ROTATION – Une rotation sans sens n’est que le concept « R » d’une rotation. J’écris donc « $R_i \rightarrow \overleftrightarrow{R_i}$ » : toute rotation déterminée a l’un des deux sens, dextrogyre ou lévogyre, dont l’un est le négatif de l’autre (« $R_i \rightarrow \vec{R}$□$\overleftarrow{R}$», où $\vec{R} = -\overleftarrow{R}$).

Or, le mouvement de rotation – ainsi que tout autre mouvement – se produit entre deux extrêmes A et B : soit de A à B ($(AB)^{\rightarrow}$) soit de B à A ($\overrightarrow{BA}$). Pourtant, dans le cas du mouvement rectiligne sur le segment $\overline{AB}$ [Fig. 2a], l’écriture « $\overrightarrow{AB}$ » détermine parfaitement tant son sens que son extension, tandis que dans le cas du_mouvement rotatoire l’écriture « $\overrightarrow{AB}$ » est insuffisante, car le cercle est une courbe fermée, où les extrêmes A et B coïncident.

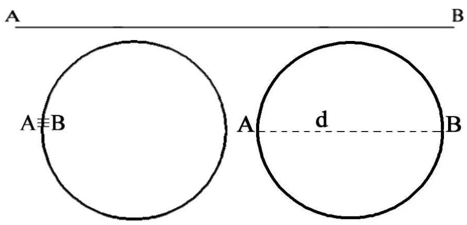


Figure 2abc

Si, en effet, nous faisons du segment AB le cercle AB en le bouclant sur lui même [Fig. 2b], l’écriture « $\overrightarrow{AB}$ » peut signifier tant une rotation [=2□] en sens horaire, qu’une rotation en sens antihoraire que, troisièmement, une rotation purement virtuelle [module=0, sens indéterminé]. La même chose vaut naturellement pour l'écriture « $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ ». Donc, afin de distinguer entre « $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ » et « $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ » plaçons A et B aux deux extrêmes du diamètre *d* du cercle de rotation [Fig. 2c]. Il est maintenant certain que les deux écritures « $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ » et « $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ » indiquent un déplacement non virtuel [module □□ et que l'une en détermine un sens et l'autre le sens opposé. Pourtant, dire que le mouvement $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ est l'« opposé » du mouvement $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ ne nous fait pas avancer, car la simple écriture « $\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ » est incapable de nous dire quel est le sens *effectif* de chacune de ces deux rotations contraires. L'expression $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \pi$ peut en effet s'appliquer tant à la Fig. 3.I [sens horaire] qu'à la Fig. 3.II [sens antihoraire] tout en signalant, dans les deux cas, un mouvement *contraire* au même mouvement $\overrightarrow{\mathbf{BA}} = \pi$.

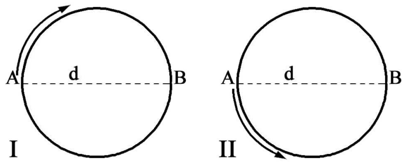


Figure 3

Il est évident que dans ces *deux* cas, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ est la rotation opposée à $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$, et cela montre que la seule contrariété réciproque de ces deux mouvements est incapable de nous indiquer autonomement le sens de chacun d'eux. Par conséquent, dans le mouvement circulaire la contrariété *sous-détermine* les sens.

(2) DES OUTILS OPERATOIRES SANS AUCUNE VALEUR MATHEMATIQUE – Pour sortir de cette impasse, on utilise généralement des repères pragmatiques, comme le sens horaire/antihoraire – qui évoque les aiguilles de la montre – ou la vis droite/gauche – qui évoque la quincaillerie commune – ou la perspective personnelle d'un observateur humain placé sur des coordonnées cartésiennes, où un certain axe « personnifié » sait reconnaître le sens des aiguilles d'une montre, etc.

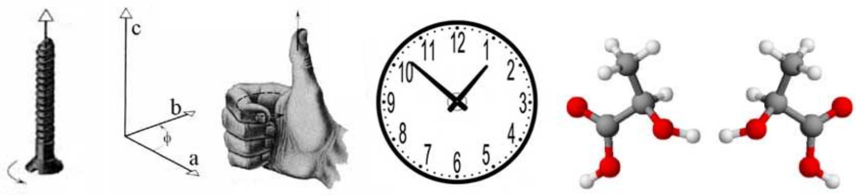


Figure 4abcdef

Ces repères pragmatiques et conventionnels ne font pourtant que reculer le problème. Si quelqu'un n'a jamais vu ni une vis ni une montre, et qu'il ne sait pas distinguer sa main droite de sa main gauche, comment peut-on lui donner une formule *mathématique* pour la détermination du sens d'une rotation, qui soit aussi certaine qu'il est certain que la forme de cette même rotation est celle du cercle? D'autre part, à propos des couples chimiques d'« énantiomères [= parties opposées] chirales [= qui se comportent comme nos mains] » en Fig.4ef on utilise l'opposition dyadique « lévogyre/dextrogyre » à savoir « qui tourne à droite/qui tourne à gauche », mais cette méthode de détermination ne peut nous aider davantage. Même une personne qui sait parfaitement gérer ses propres « énantiomères chirales » (sa main droite et sa main gauche) ne pourra déterminer le sens d'une rotation signalée *seulement* avec les expressions « tourner à droite » et « tourner à gauche ». En effet, lorsque nous appelons « dextrogyre » la rotation $\overrightarrow{AB} = \pi$ en Fig. 5.I et « lévogyre » la rotation « énantiomère » $\overrightarrow{BA} = \pi$ en Fig. 5.II, nous oublions que le mouvement « dextrogyre » (→B) est aussi bien *haut-gyre* (→C), *bas-gyre* (→D), *lévogyre* (→A) , tandis que le mouvement *lévogyre* (→A) est aussi bien *bas-gyre* (→D) *dextrogyre* (→B), *haut-gyre* (→C)…

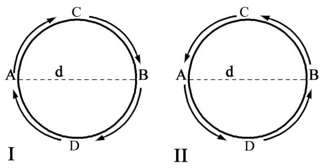


Figure 5

L’opposition « lévogyre/dextrogyre » n’est donc qu’un autre repère purement pragmatique, car même une fois choisies la « droite » et la « gauche », cette simple opposition réciproque demeure par elle-même incapable de déterminer le sens effectif d’un mouvement de rotation.

La même chose vaut pour les flèches  [Fig. 6ab] et les écritures ACB, ADB [Fig. 6c]

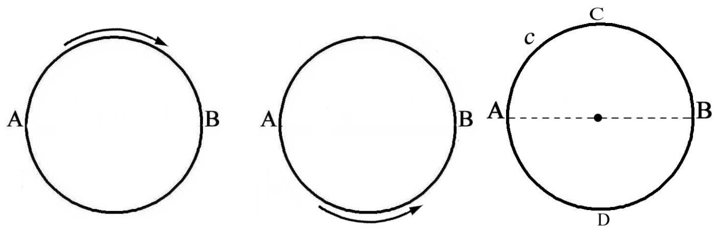


Figure 6abc

Quant aux flèches, elles ne nous signalent une rotation qu’en ce que nous *les faisons tourner*. Indéniablement, les symboles  nous signalent le sens d’une rotation, mais leur efficacité n’est pas due à leur aspect « euclidien ». Du point de vue géométrique, une flèche est l’image d’un triangle isocèle/équilatéral – « T » en Fig. 7a – dont nous produisons la bissectrice *b* [Fig. 7b]. Mais un *triangle* est aussi incapable de déterminer par sa simple présence le sens de la rotation d’un cercle, que l’est le cercle sur lequel nous le superposons.

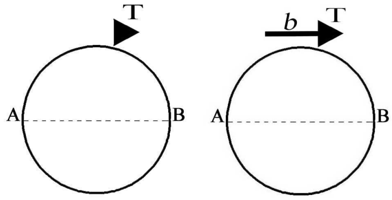


Figure 7ab

Il est donc évident que le triangle T peut nous indiquer le sens d'une rotation seulement en ce que *nous* lui attribuons cette capacité, *à savoir cette même rotation.* Nous imaginons que la « flèche » nous signale le sens de rotation de « son » cercle aussi autonomement qu'elle nous montre la forme triangulaire de sa pointe, mais en réalité *une même rotation* « en sens horaire » est activement projetée par nos yeux tant sur le cercle AB que sur la figure T+*b*.

Quant aux écritures « ACB » et « ADB », elles n'indiquent ni 1) des points *sur* la circonférence, ni 2) des points en dehors de la circonférence.

(A) *« ACB » et « ADB » n'indiquent pas des points sur la circonférence* – Ainsi que les deux flèches, les indications « ACB » et « ADB » sont en effet parfaitement adéquates à signaler deux rotations en sens contraire, et cela nous induit à penser que de même avec ces lettres nous déterminons sans ambiguïté les sommets de deux triangles rectangles diamétralement opposés en Fig. 8a, de même nous déterminons, *grâce* à ces mêmes *points*, le sens de la rotation du cercle en question. Il ne s'agit pourtant que d'une autre illusion.

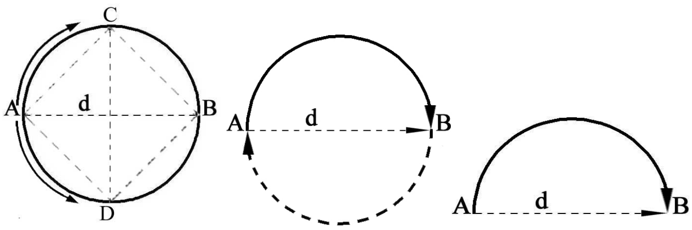


Figure 8abc

Avant tout, n'oublions pas que s'agissant du mouvement d'une *rotation*, nous sommes en train de raisonner sur un cercle nécessairement *entier*, et c'est bien cela qui nous pose problème. Il est évident, en effet que quant à l'hémicycle AB [Fig.8c] – qui, comme *hémi*cycle, peut bien représenter une trajectoire de déplacement de forme circulaire, mais non pas une *rotation* – l'expression « $\overrightarrow{AB}$ » détermine sans ambiguïté tant le sens du mouvement sur le diamètre $\overline{AB}$ que le sens du mouvement sur l'arc AB. Au contraire, dès que l'hémicycle devient la partie d'un cercle de rotation [Fig. 8b], cette sous-détermination apparaît, et l'écriture « AB » cesse de déterminer un sens plutôt que le sens contraire. – Quant au cercle *entier* d'une rotation, donc, l'expression $\overrightarrow{AB}$ est en même temps capable de déterminer le sens du mouvement sur le *diamètre* $\overline{AB}$, et incapable de déterminer le sens du mouvement sur l'*arc* AB, et il faut reconnaître que cette même sous-détermination se répète pour toute corde sous-tendue au cercle entier d'une rotation [Fig. 9].

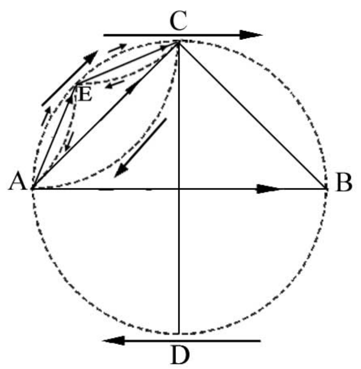


Figure 9

En effet, en Fig.9 l'expression « $\overrightarrow{AC}$ » détermine le sens du mouvement sur la corde $\overline{AC}$, mais sous-détermine le sens du mouvement sur l'arc AC ; l'expression « $\overrightarrow{AE}$ » détermine le sens du mouvement sur la corde $\overline{AE}$, mais sous-détermine le sens du mouvement sur l'arc AE … etc. Conclusion : lorsque nous pensons que la position d'un troisième point C entre A et B sur la circonférence de rotation peut résoudre notre question nous assumons, encore une fois, un outil efficace comme l'explication de son efficacité.

En réalité, avec ces symboles nous ne faisons qu’identifier le *triangle* ACB ou l’*hémicycle* ACB, et ces même expressions sont ensuite aussi *pragmatiquement* capables de nous signaler le sens de la rotation A→C→B, que le sont les expression « dextrogyre » ou « en sens horaire », et le symbole de la flèche ↷. Toutefois, cette pratique ne fonctionne que par ce que nous n’arrêtons pas de présupposer ce que nous devrions démontrer : *puisque* nous présupposons comme déjà déterminé le « sens horaire » de la rotation en question, nous parcourons la corde AC convaincus que notre mouvement *rectiligne* de A à C nous dit quelque chose de plus, sur ce même sens, de ce que le diamètre AB – que nous venons de quitter pour parcourir AC – n’a été en mesure de nous dire : à savoir *rien*. Le mouvement A→C sur la corde AC n’est qu’un mouvement *rectiligne* vers C, ainsi que le mouvement A→E n’est qu’un mouvement *rectiligne* vers E… Si donc la *polygonale* $\overrightarrow{AECB}$ est en mesure de nous signaler le sens de la *rotation* selon le cercle AECBD, cela dépend uniquement du fait que nous avons déjà saisi cette même rotation et son sens, et que nous sommes capables – sans savoir *comment* – de la projeter sur la suite des cordes AB, AC, AE etc.

La fixation géométrique d’un point C *sur* l’arc [*de cercle entier !*] AB, ne fait donc que recréer à propos de l’arc AC le problème que nous cherchons à résoudre à propos de *ce même* arc AB, et dont l’arc AC n’est qu’une partie. Ce ne sont pas les parties et les sous-parties géométriques d’un cercle (les arcs de sa circonférence, déterminés par des points sur cette même circonférence) qui peuvent résoudre la question posée par la rotation à laquelle elles-mêmes sont *évidemment* soumises en tant que parties du cercle qui tourne. Donc, les symboles A, B, C, D en ce qu’ils indiquent des points géométriques *sur la circonférence* et délimitent de la sorte des arcs de cette même circonférence, ne peuvent pas déterminer le sens de la rotation à laquelle ces arcs mêmes participent[vi].

(B) *A, B, C… n’indiquent pas des points en dehors de la circonférence* **–** En ce qu’ils indiquent des points géométriques, les symboles A, B, C, D… ne peuvent déterminer qu’un mouvement rectiligne. Si nous imaginons ainsi que le point géométrique B situé en dehors de la circonférence en Fig.10a détermine *par sa simple position* la rotation du cercle *c* auquel il est superposé, c’est que nous pensons à ce même cercle *c* comme à un corps matériel soumis à des forces réelles, et aux segments □/□ comme les deux bras d’un couple vectoriel [Fig.10b].

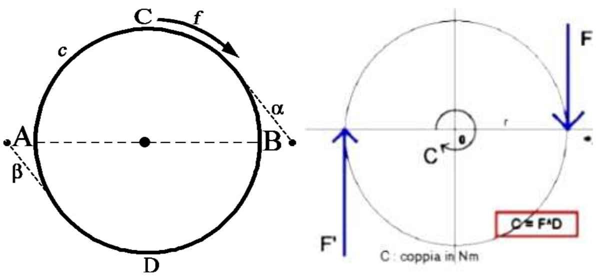


Figure 10ab

Il faut souligner en plus que nous ne savons aucunement *pourquoi* deux forces *rectilignes* appliquées sur un corps engendrent sa rotation. Dans le cas du mouvement physique, l’induction d’une rotation par un mouvement rectiligne n’est qu’un fait, un phénomène donné : ce même qui est présupposé par Camille Jordan lorsqu’il commence son célèbre essai en déclarant « On sait que tout mouvement d'un corps solide dans l'espace est un mouvement hélicoïdal » (⟨---⟩) et dont j’ai déjà parlé en ce sens. À son tour, la gestion mathématique de ce même phénomène physique se sert d’un outil– le calcul des vecteurs – qui encore une fois *présuppose* tant notre capacité de détermination du sens d’une rotation donnée, que l’absoluité régionale de l’espace où cette rotation prend corps.

Cela nous fait rebondir encore une fois sur le simple *fait* que nous sommes capables de saisir le sens d’une rotation.

(3) Le sens d’une rotation ne nous est donne qu’au travers de ses symboles – En synthèse [Fig.11ab] : 1) la dyade « lévogyre/dextrogyre » n’explique pas son efficacité pragmatique : la rotation *dextrogyre* est aussi bien *haut-gyre*, *bas-gyre*, *lévogyre*… tandis que la rotation *lévogyre* est aussi bien *bas-gyre dextrogyre*, *haut-gyre*… Nous pouvons donc nous débarrasser de cette expression ; B) les flèches ne peuvent

nous signaler la rotation de « leur » cercle que parce que nous les faisons tourner avec le cercle même. Nous pouvons donc nous en débarrasser ; C) les « points » A, B, C, D, *en tant que points* ne sont qu’une projection de notre imagination, car ils ne sont ni *sur* ni *en dehors* de la circonférence de rotation. Nous pouvons donc nous débarrasser des symboles qui les signalent.

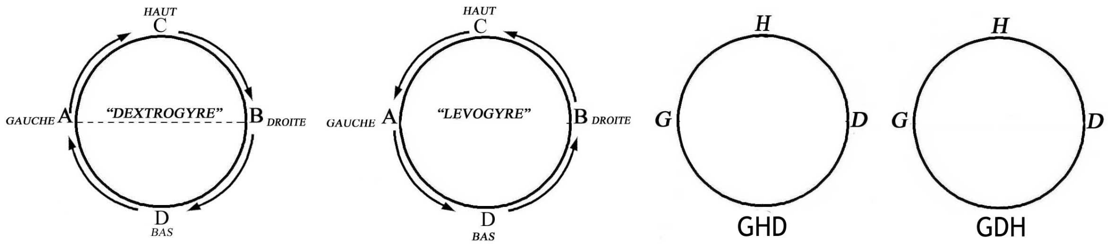


Figure 11abcd

Il ne nous reste donc [Fig.11cd] que *le cercle* du mouvement de rotation et les symboles indiquant *les repères purement régionaux* de l’espace où cette rotation a lieu. Les symboles G, D, H ne sont que des symboles : aucune *image* géométrique en termes de *points-lignes-figures* de ce qu’ils indiquent ne peut être fournie. Ces symboles sont pourtant nécessaires *et suffisants* car, s’ils disparaissent, nous ne restons qu’avec un pur et simple cercle euclidien, qui ne nous offre aucun repère pour la détermination du sens de sa rotation. Or, si une écriture comme « *GD*-Rotation » opposée à « *DG*-Rotation » ne nous dit rien, l’écriture « *GHD*-Rotation / *GDH*-Rotation » est, par contre, parfaitement satisfaisante, car la suite GHD non seulement est opposée à la suite GDH – GHD = –GDH – mais elle détermine le sens de chacune des deux rotations décrites, *une fois donnée* notre capacité de tourner, et de *voir* donc tourner quelque chose sur la feuille (car *voir* tourner est bien *tourner* ses yeux) ainsi qu’il *nous est donné* de savoir lire le symboles A, B, C… et d’en reconnaître l’ordre de succession.

L’écriture « *GHD*-Rotation / *GDH*-Rotation » est donc purement symbolique car les lettres utilisées sont des objets dépourvus de tout caractère imaginatif. Réciproquement, la dyade purement spatiale (« régionale », mais non *figurale*) « GHD ∨ GDH » ne peut représenter le sens d’une rotation *possible* qu’en ce qu’une rotation effective R_i nous est donnée quelque part, car sans une *figure* qui tourne effectivement, nous ne saurions pas faire tourner la pure et simple « régionalité » de l’*espace*.

(4) L’OPERATION DE MISE EN ROTATION N’EST PAS UN GROUPE – En conclusion, le passage « $R \rightarrow \overleftrightarrow{R}$ » (« toute rotation a un sens ») dévoile l’existence, derrière toute R_i déterminée, d’un *espace orienté* $\overleftrightarrow{S}$ (donc « $R_i \in \overleftrightarrow{S}$ ») absolument irréductible à la *figure* qui tourne à son intérieur, et à toute autre figure. Il est donc évident que lorsqu’une rotation R_i est *donnée*, nous *saisissons* (sur son fond) l’espace orienté $\overleftrightarrow{S}$, tandis que nous ne pouvons pas inverser les termes de cette phénoménologie géométrique : aucun espace rotatoire ne peut nous être « donné » avant que nous ne saisissions la figure qui tourne à son intérieur, car nous ne pouvons *atteindre* ce même espace $\overleftrightarrow{S}$ qu’en nous appuyant sur la rotation « figurale » R_i. Cela signifie que le complexe « $R_i \Rightarrow \overleftrightarrow{S}$ », qui nous conduit d’une certaine rotation à son espace, représente une suite rigoureusement non commutative, car à l’opération « $R_i \Rightarrow \overleftrightarrow{S}$ » ne correspond aucune opération inverse. En ce sens, le couple multiplicatif « $R_i \times \overleftrightarrow{S}$ » – « la rotation R_i a lieu dans l’espace » – n’est pas un Groupe.

2.2 De l’angle à sa région.

D’autre part, une rotation donnée R_i a aussi une *ampleur* déterminée en termes angulaires. Si donc une certaine rotation R_i nous est donnée, un certain angle α_i nous est donné. Nous savons par contre que nul angle ne peut nous être donné en dehors d’un mouvement rotatoire : ainsi que tout livre de géométrie élémentaire l’enseigne, aucun angle ne peut être effectivement « donné » sans que nous ne donnions un sens de rotation à ses côtés, car, dans le cas contraire, nous ne pourrions pas situer l’angle dans sa propre région (opposée à la région opposée) ni en conséquence saisir son ampleur. Je vais maintenant analyser les éléments qui composent cette mise-en rotation d'un angle α_i, en ce qu'elle est capable de le situer dans sa propre région. Je montrerai qu'une telle rotation des côtés d'un angle est un mouvement orienté et rigoureusement non réciproque : si un côté tourne par rapport à l'autre, l'autre ne tourne pas par rapport au premier.

(1) L'angle □$_1$ est l'expression de l'*inclinaison réciproque* et de l'*ampleur* engendrées par ses deux côtés AO/OB se touchant en O [Fig.12a] ainsi que le segment *u* sur la droite *d* est l'expression de l'*alignement* des points qui le constituent et de la *longueur* déterminée par ses deux extrêmes A et B [Fig. 12c]. En ce qu'il exprime une ampleur, l'angle AOB est une forme circulaire, ainsi que le segment AB est une forme linéaire. Si donc le segment AB est une partie de la droite *d*, l'angle/arc □$_1$/A_1est un segment du cercle *c*, délimité par ses deux extrêmes, les côtés AO/OB [Fig.12b].

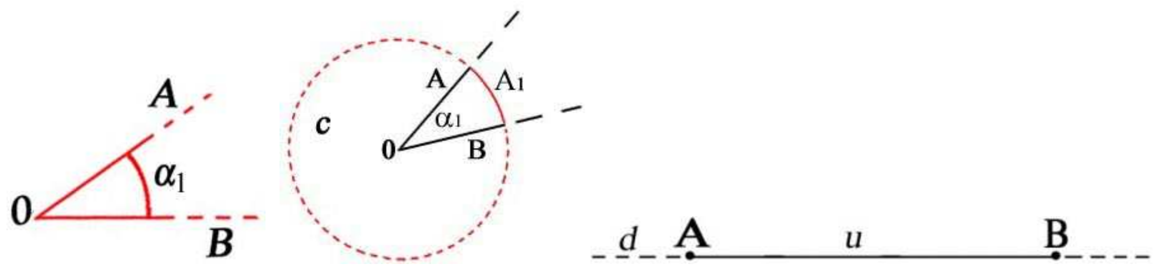


Figure 12abc

(2) Ni l'inclinaison entre les deux droites d_1/d_2 se croisant en 0 [Fig.13b] ni l'inclinaison entre les deux demi-droites dd_1/dd_2 divergeant de 0 [Fig. 13c] ne sont suffisantes pour situer □□□dans sa propre région□plutôt que dans la région □de □$_2$ [Fig. 13a]. Autrement dit, les complexes $\{0 \times d_1 \times d_2\}$ et $\{0 \times dd_1 \times dd_2\}$ sous-déterminent la région d'appartenance de l'angle cherché.

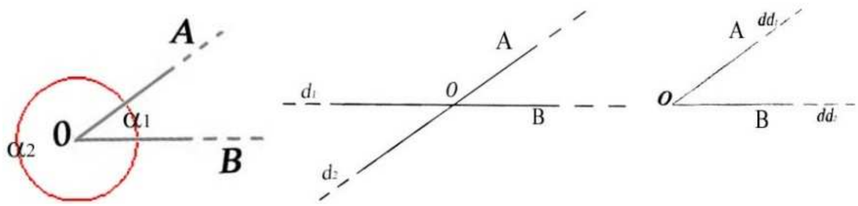
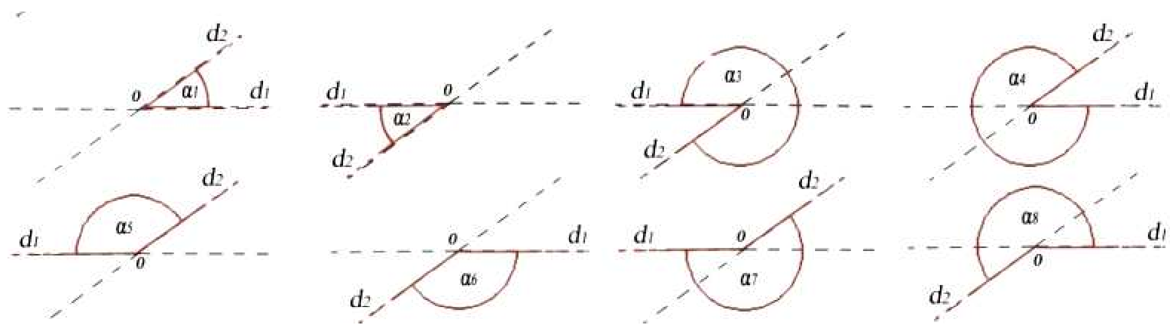


Figure 13abc

On voit bien, en effet, que la pure et simple inclinaison réciproque des droites d_1 et d_2 se croisant en un point 0 n'est pas suffisante à la situation de α_1 car, en tant que tel, le complexe $\{0 \times d_1 \times d_2\}$ identifie un ensemble de huit angles □Fig. 14a]□□De plus, même si nous étions en mesure de distinguer l'*ampleur* de α_1□par rapport à celle de α_3-α_8 , il nous faudrait encore distinguer entre □□□et son opposé au sommet α_2 qui a la même ampleur que α_1□□Fig. 14b]□



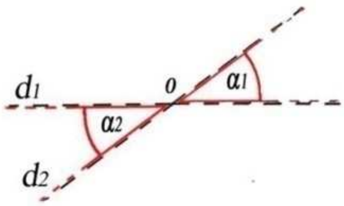


Figure 14ab

Afin de situer α_1□dans sa propre région, opposée à celle où se situe $\alpha_{2,}$ réduisons alors les deux droites d_1 et d_2 aux deux demi-droites dd_1/dd_2 [Fig. 15a]. Apparemment, nous avons obtenu l'effet désiré, mais il n'en est pas ainsi, car la simple *inclinaison réciproque* entre dd_1 et dd_2 sous-détermine la région de l'angle cherché, en ce qu'elle est incapable de distinguer entre □ et □$_2$ [Fig. 15b]. D plus, dans le cas de l'angle plat □ [Fig.15c] ni l'inclinaison réciproque entre dd_1 et dd_2 ni l'ampleur de □ ne sont en mesure de distinguer entre α_1□et α_2 [Fig. 15d].

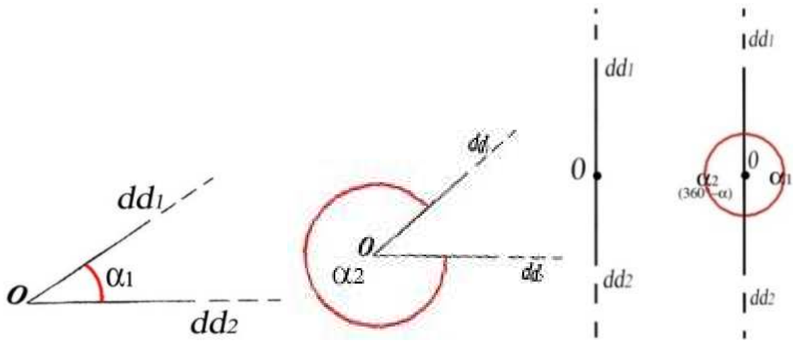


Figure 15abcd

En synthèse, tout angle α_1 ($A\hat{O}B$□ tracé sur la feuille, accompagne toujours son *réciproque* α_2□situé de l'autre côté de son sommet, de sorte que la simple écriture {0×A×B} est insuffisante pour assigner à α_1 sa propre région, qui n'est pas la région de α_2□

(3) Pour situer α_1 dans sa propre région plutôt que dans la région opposée « du côté de » son réciproque α_1, A) il faut faire participer les côtés de l'angle d'*un mouvement de rotation orientée* et B) leur assigner *un ordre*, ce qui revient à leur attribuer une rotation *non réciproque* : l'un des deux côtés tourne et l'autre reste immobile par rapport au premier; C) les deux côtés doivent être deux demi-droites ayant leur origine dans le centre de rotation O.

A) Attribuons au complexe AOB un ordre de succession entre les deux côtés AO et OB. En tant que tel, un tel ordre est incapable de déterminer une région plutôt que sa réciproque, puisque tant « OA-OB » que « OB-OA » déterminent aussi bien α_1 que α_2 [Fig.16]. Pour que l'image en Fig.16 détermine en effet la région d'un angle plutôt que celle de son opposé, il faut donc attribuer aux deux côtés non seulement un *ordre de succession*, mais aussi un *mouvement de rotation* : au sein d'une même rotation lévogyre, le couple AO→OB détermine la région de α_2 (situe l'angle cherché du côté de α_2), tandis que le couple OB→OA détermine la région de α_1 ; le contraire dans le cas de la rotation dextrogyre.

L'angle AOB n'est donc pas qu'un *segment de cercle* ; il est plutôt une partie *de rotation*, en ce que nous pouvons l'identifier uniquement au sein du mouvement circulaire dont il représente une certaine portion.

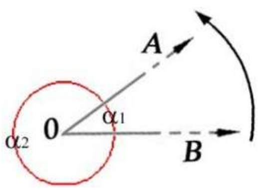


Figure 16

B) La rotation signalée par la flèche en Fig.16 n'est pas réciproque : l'un des deux côtés tourne par rapport à l'autre, tandis que ce dernier ne tourne pas par rapport au premier.

Sans doute, l'idée que l'angle en Fig.16 est engendré par la rotation *réciproque* (autour du même O) de OA par rapport à OB et de OB par rapport à OA nous est suggérée par l'éblouissante évidence *cinématique* qu'un même mouvement peut être décrit *du point de vue* de l'un ou de l'autre des éléments qui le composent [Fig. 17]. Nous disons alors : si OA tourne par rapport à OB, *alors* OB tourne par rapport à OA: « $OA(R)OB \leftrightarrow OB(R)OA$ »

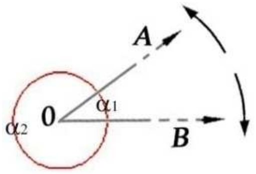


Figure 17

Pourtant, cette « évidence » cinématique ne fait que montrer qu'elle n'est pas applicable dans notre cas, car si c'était ainsi, nous attribuerions à la rotation censée engendrer *un seul* angle un sens en même temps lévogyre et dextrogyre. Mais alors les expressions « OA→OB » et « OB→OA » indiqueraient, chacune, aussi bien une rotation que la rotation opposée, en déterminant de la sorte aussi bien la région de α_1 que la région de α_2. Conclusion : dans tout angle *donné*, l'un des deux côtés tourne par rapport au deuxième, tandis que ce deuxième côté ne tourne pas par rapport au premier : « $OA(R)OB \neq OB(R)OA$ ».

En effet, de même le temps de rotation d'une figure géométrique n'est pas le temps externe d'un mouvement physique, de même l'espace où cette rotation se déploie n'est pas l'espace des interactions corporelles. Faisons donc attention : lorsque nous déduisons le caractère non commutatif du rapport rotatoire qui lie les deux côtés d'un angle AOB, nous ne faisons qu'indiquer analytiquement une propriété inhérente au complexe géométrique {AO×OB}. Le seul espace auquel nous accédons à partir de ces éléments est donc l'espace interne de la forme que ces mêmes éléments composent. Cela signifie que le seul point de vue logiquement légitime dont nous disposons pour accéder aux mouvements internes à ce même espace, est le point de vue de la forme entière qui nous permet cet accès. Imaginer donc que si AO tourne par rapport à OB alors OB tourne par rapport à OA, ne fait que confondre les domaines et effacer la nature purement interne du mouvement géométrique, et de l'espace dans lequel ce mouvement a lieu : feindre le « point de vue du rayon » qui tourne, pour affirmer la présence d'une rotation réciproque des deux côtés autour du même centre/sommet, est en conséquence une opération illusoire, car ce point de vue n'existe pas. Le phénomène n'est ici que la présence géométrique de cet angle identifiable par le sujet individuel (nous-mêmes) qui est en train de l'identifier, et non pas la présence d'un mouvement inhérent à un complexe inter-corporel dans l'espace externe des mouvements physiques, où l'opération mentale de feindre le point de vue du voyageur pour voir la gare bouger par rapport au train, est légitimée par la structure immédiate de la situation envisagée, où des corps extérieurs les uns aux autres modifient dans le temps leurs dispositions réciproques.

C) Les côtés A et B doivent en tous les cas être les deux demi-droites dd_1/dd_2 ayant leur origine en 0, car dans le cas des deux droites d_1/d_2 se croisant en 0 [Fig. 18] même l'indication conjointe de l'ordre des parties de l'angle (AOB ou BOA) *et* de l'orientation de leur mouvement de rotation (lévogyre/dextrogyre) perd sa capacité d'identifier la région de α_1 plutôt que celle de son réciproque α_2. Ces deux demi-droites sont donc irréductiblement les deux *rayons* du cercle de rotation.

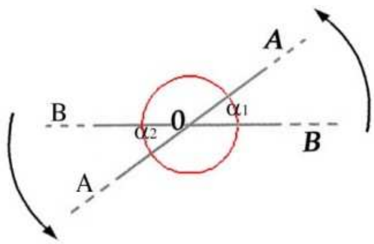


Figure 18

En synthèse, pour situer un certain angle dans sa propre région à l’exclusion de l’autre, nous devons situer en O l’origine *infranchissable* des rayons qui en constituent les côtés, et leur conférer un ordre de succession et un mouvement de rotation orientée, qui s’avère donc non réciproque : l’un des deux rayons/côtés tourne par rapport à l’autre, tandis que ce dernier ne tourne pas par rapport au premier.

Nous avons donc acquis (I) qu’une rotation déterminée R_i ne nous est donnée que dans son espace *régional* $\overleftrightarrow{S}$, et que le couple $R_i \times \overleftrightarrow{S}$ définit une totalité opératoire de réciprocité non groupale, car à l’opération $R_i \Rrightarrow \overleftrightarrow{S}$ qui nous « transporte » d’une rotation à son espace ne correspond pas une opération inverse ; (II) que le complexe opératoire représenté par un angle donné manifeste la présence déterminante d’une rotation non réciproque entre les deux rayons d’un même cercle.

2.3 De l’angle à son ampleur : la graine du cercle et l’arbre des triangles

Un élément nous manque encore pour la détermination complète d’une rotation R_i donnée. Après avoir saisi son espace $\overleftrightarrow{S}$ et la région ou se situe l’angle α_i qui en définit l’ampleur, il nous faut justement cette ampleur. Nous allons voir que l’ampleur de l’angle euclidien donné α_i n’a pas sa source dans ce même α_i mais dans la circonférence trigonométrique (que j’écris comme $\overleftrightarrow{C\oplus}$) où cette même ampleur détermine un *lieu régional absolu*, qui *commence* sur l’horizontale des abscisses, ainsi que tout nombre sur la droite des réels *commence* là où tous les autres commencent, à savoir à 0. Le rapport entre l’angle euclidien donné et les repères trigonométriques d’où il puise son ampleur se révélera, une troisième fois, strictement non réciproque, car les rayons/côtés de l’angle euclidien α_i qui nous sont nécessaires pour accéder à $\overleftrightarrow{C\oplus}$ – ainsi que R_i nous est nécessaire pour accéder à $\overleftrightarrow{S}$ – tout en étant inclinés l’un par rapport à l’autre ne sont pas inclinés par rapport aux axes du cercle goniométrique $\overleftrightarrow{C\oplus}$, qui ne font pas « angle » avec les angles qu’ils mesurent, et qui sont donc *absolument droits*.

C’est enfin cette analyse qui nous ouvrira à la dimension *développementale* de l’opération fondatrice de l’*Abbildung*, de même que l’analyse ensembliste de l’évidence « 1+1=2 » nous a mené à comprendre le passage « $a \rightarrow a'$ » dans les termes de la *naissance* d’une « image », accouchée par la « chose » dont elle est l’image. Comme je l’ai dit, nous allons maintenant constater qu’à l’ordre *évolutif* qui, en un mot, oblige les programmes scolaires à commencer par la géométrie euclidienne pour seulement ensuite parvenir à la trigonométrie, correspond à une *dynamique agissante à l’intérieur de l’espace opératoire* déjà pleinement formé devant le mathématicien expert. Bref, qu’il le sache ou non, tout opérateur qui gère des transformations trigonométriques couvre depuis le début, et à chaque passage, tout le parcours scolaire qui lui a appris à percevoir un triangle rectangle inscrit dans une circonférence comme la composition purement projective d’un *sinus* et d’un *cosinus*. Observons.

(1) LE TRIANGLE EUCLIDIEN EMANE DU CERCLE – Un angle euclidien est une émanation du cercle. Les côtés de α sont des rayons, l’arc A est la distance circulaire entre eux, et les projections Pr_1 et Pr_2 représentent leur distance linéaire [Fig.19abc]. En ce sens, tout angle en tant que tel est *isocèle*[vii].

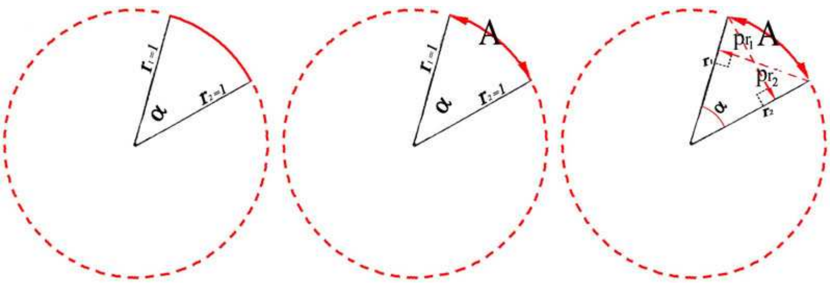


Figure 19abc

En ce qu'il est *un* angle, α est l'expression d'une projection interne et réciproque entre ses deux côtés. La dyade projective $\frac{p_{r_1}}{p_{r_2}}$ [Fig.20a] est donc l'expression univoque d'un même objet : la distance interne entre les côtés de α. Pour savoir que $p_{r_1} = p_{r_2}$ il suffit donc de l'hypothèse « α », c'est-à-dire qu'*un seul et même* angle nous soit donné, car un rapport de correspondance biunivoque – $p_{r_1 r_2} \leftrightarrow (A)$ lie la longueur linéaire des projections $\frac{p_{r_1}}{p_{r_2}}$ à la longueur circulaire de l'arc A.

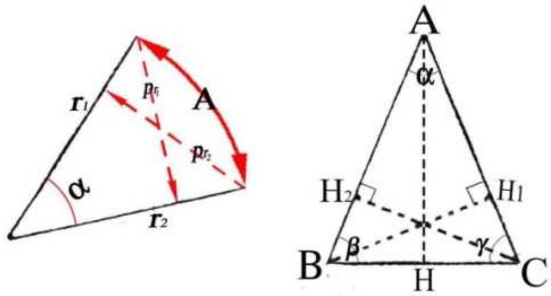


Figure 20ab

Cela révèle deux choses très importantes : 1) que le triangle isocèle en Fig. 20b ne fait qu'exprimer un système de rapports de proportionnalité réciproque $\left\{\alpha\beta\gamma \times \frac{\overline{AB}}{\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}} \times \frac{\overline{AH}}{\frac{\overline{BH_1}}{\overline{CH_2}}}\right\}$ directement émané par le cercle-racine qui l'a engendré ; 2) que l'accès à la circonférence trigonométrique à partir d'un angle euclidien $A\hat{O}B$ n'est enfin que la réciproque de ce que fait Euclide [Fig.21ab] dans sa *Proposition 1* [Livre I des *Eléments*] lorsqu'il produit le premier triangle-étalon à partir du cercle « postulé » un peu plus haut [IIIe Postulat].

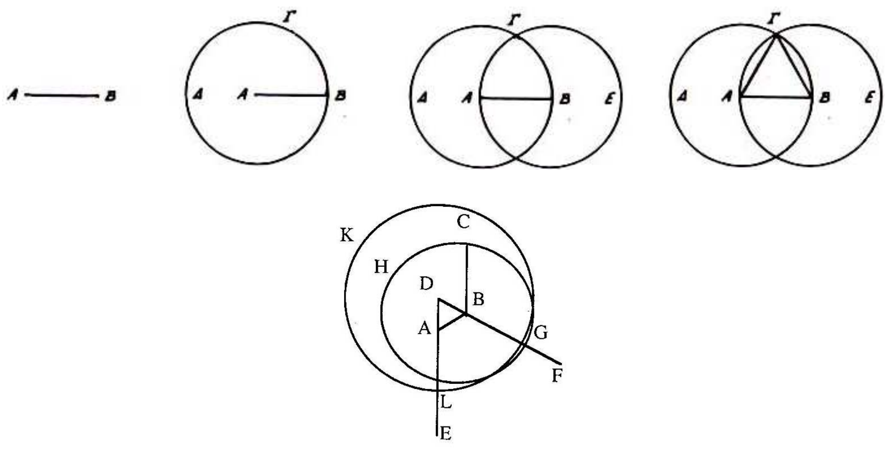


Figure 21ab

Cette première construction euclidienne institue la règle universelle pour toute figure géométrique qui apparaîtra dans les *Éléments* : absolument *toute* grandeur de la géométrie euclidienne est mesurée à cet étalon linéaire originairement émané du Cercle, grâce à la méthode mise au point immédiatement après cette première construction. La *Proposition 2* des *Éléments* [Fig.21b] nous enseigne, en fait, à utiliser le triangle équilatéral DBA construit grâce à la *Proposition 1* comme le terme moyen – l'étalon de mesure – pour *transporter* la longueur AL jusqu'à un B donné, et pour faire ainsi en sorte qu'une comparaison d'étendues géométriques puisse en général avoir lieu. Il faut alors bien remarquer que dans le cas de la géométrie euclidienne la possibilité de ce transport de A à B d'un segment donné, grâce à l'équilatéral DAB construit à l'occasion, vient *après* l'émanation de l'Équilatéral à partir du Cercle, et *que l'on ne peut pas faire autre-*

ment. En ce sens, on peut bien considérer le triangle euclidien comme un fruit poussé de la graine du cercle grâce à l’intervention résolutive du segment (ce qui, nous le verrons, a une importance majeure pour tout ce qui suivra).

(2) LA TRIGONOMETRIE EST LA REABSORPTION DU TRIANGLE EUCLIDIEN DANS LE CERCLE – Réciproquement, les étapes projectives qui, dans tous les livres de lycée, nous conduisent de l’angle euclidien à la circonférence trigonométrique [Fig.22] montrent comment l’angle euclidien peut se réabsorber dans cette même source circulaire en en héritant le pouvoir *métrique*. Je les énumère de façon à visualiser le dévoilement progressif du cercle-racine au fur et à mesure que notre activité projective s’enrichit.

L’angle $A\hat{O}B$ [Fig.22] est a) posé□□b) mis en rotation non réciproque (α apparaît dans sa propre région) ; c) redressé (l’horizontal apparaît) ; d) les projections verticales $PH_1 \rightarrow PH_n$ apparaissent, en exprimant la constance du rapport $OP_i = \sqrt{OH_i^2 + PH_i^2}$; e) α est *situé* dans la circonférence goniométrique où le *sinus* et le *cosinus* apparaissent

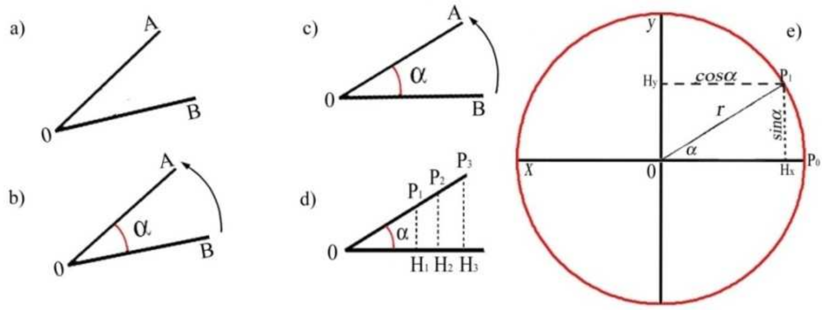


Figure 22

En synthèse : tout angle α est la manifestation d’une rotation de ses côtés, orientée dans un espace régional absolu et non réciproque quant aux parties figurales qui la composent ; il est « isocèle » en ce que ses deux côtés sont deux rayons r_1/r_2 du cercle dont il fait partie ; l’arc A de α représente la distance circulaire qui sépare r_1 et r_2, tandis que le couple de projections réciproques $\frac{p_{r_2}}{p_{r_1}}$ du côté/rayon r_1 sur le côté/rayon r_2 en est la distance linéaire. Il est donc évident que la transformation projective (d’Euclide à la Trigonométrie) « $OA \Rrightarrow 0P_1$, $OB \Rrightarrow 0P_0$ [Fig. 22d], $P_1H_y \Rrightarrow sin\alpha$ et $P_1H_x \Rrightarrow cos\alpha$ [Fig. 22e] » a la nature d’une *réabsorption*, qui appelle à la surface du visible les formes internes de l’Angle, en ce qu’il est une directe émanation du Cercle. C’est cela que montre la Fig.23, où les projections internes de l’angle euclidien se dévoilent comme autant de sinus/cosinus dans le cercle trigonométrique :

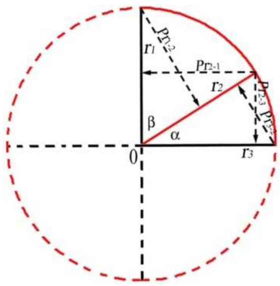


Figure 23

Attribuer un mouvement de rotation orientée et non réciproque aux parties d’un angle, pour ensuite le « placer » à l’intérieur de la circonférence goniométrique après l’avoir opportunément « redressé », et faire ainsi de ses côtés deux rayons de cette même circonférence pour finalement projeter l’un sur l’autre… cette suite opératoire n’est donc pas un simple artifice pragmatique qui nous fournit un outil de calcul. Puisque les deux côtés d’un angle sont *essentiellement* deux rayons du cercle de rotation dont cet angle manifeste la présence, tandis que la projection d’un rayon sur l’autre représente une structure interne de ce même angle, nous devons interpréter la suite en Fig.22abcde comme un dévoilement graduel de la totalité formelle dont l'entité géométrique de départ $A\hat{O}B$ n'est qu'une manifestation de surface.

(3) LE RAPPORT NON GROUPAL ENTRE GEOMETRIE EUCLIDIENNE ET TRIGONOMETRIE – Nous dirons par conséquent que, si d'un côté la géométrie euclidienne sème le cercle qui engendre l'arbre des triangles, de l'autre côté la trigonométrie ramène tout fruit de ce même arbre à sa graine circulaire… *et le rapport entre une graine et sa plante n'est pas réversible.* Autrement dit : si l'angle euclidien et le cercle trigonométrique sont les deux dimensions insécables d'un même phénomène de rotation, la totalité opératoire qu'elles composent n'est pas un Groupe, car à l'opération « $\alpha_i \Rrightarrow \overleftrightarrow{C\,\Theta}$ » qui nous transporte de l'angle à sa mesure trigonométrique ne correspond pas une opération inverse. -

Jetons en effet un autre regard à la Fig.23. Une chose nous frappe : deux angles euclidiens – α et β – nous sont donnés avec leurs projections internes qui forment évidemment un système de *sinus/cosinus*, mais il est évident aussi que les projections *sinα/cosα* qui mesurent α ne coïncident pas tout à fait avec ses propres projections internes car, *incontournablement*, l'un des deux éléments du couple *sin/cos* qui déterminent l'ampleur d'un angle donné tombe *en dehors* de ce même angle, en montrant de la sorte que même la projection qui apparemment tombe à son intérieur (pour l'angle α c'est la verticale $\frac{P_{r_2}}{3}$) ne le fait que parce que nous avons préalablement « couché » l'angle sur l'abscisse de façon que son *premier* côté coïncide en effet avec ce même axe. Regardons cela d'un peu plus de près.

(3.1) La totalité intrasystémique de l'angle euclidien ne s'auto-mesure pas. – Même si le triangle en Fig.24 est internement structuré selon *les mêmes projections* qui sur la circonférence trigonométrique [cf. Fig.23] déterminent en effet sa mesure extensive, cela signifie seulement que les côtés d'un angle euclidien ne font pas « angle » avec les axes du cercle d'où pourtant elles émanent, car lorsque les repères projectifs Pr_1 et Pr_2 sont purement réciproques et internes à la totalité d'un même angle, il perdent toute vertu déterminante quant aux mesures extensives de cette même totalité.

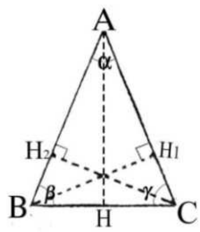


Figure 24

En effet, le système de rapports $\left\{\alpha\beta\gamma \times \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{BC}}}\Big/\overline{CA} \times \frac{\overline{AH}}{\overline{\overline{BH_1}}}\Big/\overline{CH_2}\right\}$ en Fig.24 ne nous dit *rien* sur l'ampleur de α. Un angle euclidien, donc, ne s'auto-mesure pas, même s'il est sans doute internement structuré par les projections intra-angulaires Pr_1 et Pr_2 ; cela signifie que, s'il est sans doute le porteur de son ampleur, il n'en est pas *la source*, qui doit être cherchée directement dans la circonférence trigonométrique, laquelle s'avère être, pour tout angle euclidien, un système de repères externe, absolu, et absolument orienté[viii]. Cela se rend sensible si nous faisons attention à ce que deviennent les projections *internes* de α, (Pr_1 et Pr_2) lorsqu'il est situé dans le cercle trigonométrique.

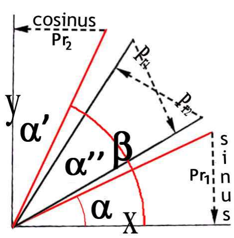


Figure 25

En Fig.25 (où α=α’=α’’) nous voyons que Pr_1 est en même temps le sinus de α et la distance linéaire entre les deux côtés de ce même α ; au contraire Pr_2 – à savoir le « cosinus interne » de *ce même* α – ne mesure pas α mais β en tant que cosβ. Cela montre donc que lorsque l’angle euclidien α en sa totalité systémique tourne autour du 0 (imaginons α, α’, α’’ comme trois places occupées successivement par ce même α en rotation), il peut faire ainsi puisque, entre-temps, son *lieu absolu* (d’où il puise son ampleur) au sein de la circonférence trigonométrique reste fixe et immobile. Si nous voulons donc identifier un angle α, à savoir déterminer son ampleur, nous devons *sortir* de son espace interne (le système clos de relations réciproques qui subsistent entre ses parties) pour le *situer* dans son *lieu* au-dedans de *sa* circonférence trigonométrique, qui se dévoile par contre comme *absolument externe* à ses manifestations euclidiennes.

(3.2) La totalité extra-systémique de la circonférence trigonométrique n’est accessible que grâce à une rotation euclidienne. – D’autre part, nous ne pouvons accéder au cercle trigonométrique (le mesurant) que grâce au triangle euclidien (le mesuré). L’espace *euclidien* où se produit la rotation R(α) de α [Fig. 26b] est parfaitement isotrope et indifférent à toute distinction entre vertical et horizontal, haut et bas, droite et gauche : où que je place et que je déplace, et quelle que soit la manière dont j’incline l’angle euclidien α dans l’espace d’Euclide [Fig. 26a], α garde son ampleur.Au contraire, dans le cadrant trigonométrique l’ampleur déterminée par α « dressé » [Fig. 25] est différente de l’ampleur déterminée par α « couché », car dans ce cadrant « α dressé » est *en réalité* β *couché*.

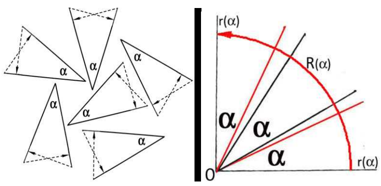


Figure 26ab

Attention pourtant : c’est justement cette isotropie de la transformation euclidienne qui nous permet de tracer le cercle d’*une même* rotation R(α), car, évidemment, si à chaque degré de sa rotation autour du 0 d’origine l’angle α – comme *totalité donnée* – modifiait son ampleur (comme il se passe à l’intérieur du cadrant trigonométrique), cela annihilerait d’un coup la possibilité même de dire qu’un même α a tourné. L’angle euclidien est donc *le compas* dont nous nous servons pour tracer la circonférence trigonométrique, qui, pour sa part, naît dès le début parfaitement anisotrope et rigoureusement orientée selon les repères de l’espace régional (haut/bas, droite/gauche). Cela signifie que nous ne *pouvons pas inverser l’ordre d’apparition de ces deux espaces*, à savoir utiliser un cercle trigonométrique pour tracer un angle euclidien, car pour accéder à la circonférence trigonométrique (anisotrope) nous devons *forcément* utiliser le compas isotrope d’Euclide. – Au sein du même Cercle donc, un fond trigonométrique en soi inatteignable en tant que tel donne un lieu absolu à chaque ampleur euclidienne déterminée, qui, à son tour, nous permet d’accéder à ce même fond grâce aux rapports de réciprocité isotrope qui en soudent les parties. Cela implique que cette totalité est un système *non groupal* de relations réciproques : si les côtés de l’angle euclidien α sont sans aucun doute inclinés l’un par rapport à l’autre, et chacun des deux est incliné par rapport aux axes de la circonférence goniométrique, ces derniers ne sont pas inclinés par rapport aux côtés de tout angle euclidien que pour cette raison ils nous permettent d’identifier, en le situant dans son lieu et en le fournissant ainsi d’une ampleur. En conséquence, si l’angle α_i devant nos yeux s’impose *sans doute* comme l’inclinaison *réciproque* de ses côtés, sa présence ne pourrait même pas être atteinte si α_i n’était *qu’*un système de rapports de réciprocité entre les éléments qui le constituent, car cette même inclinaison réciproque exprime à son tour l’*inclinaison non réciproque* entre α_i – la totalité du système de ses relations internes – et l’espace orienté de la circonférence goniométrique d’où α_i jaillit avec son ampleur et (donc) son lieu. Nous répétons donc : si l’angle α_i est incliné par rapport à la circonférence trigonométrique, la circonférence trigonométrique n’est pas inclinée par rapport à l’angle α_i

(4) L’ORDRE DEVELOPPEMENTAL DE L’ESPACE MATHEMATIQUE – En synthèse, dans ces derniers paragraphes j’ai isolé un seul et même système sphérique et rotatoire *sans aucun doute* « multiplicatif » et « pluridimensionnel », en distillant à son intérieur le système de relations $\overleftrightarrow{S} \times R_i \times \alpha_i \times \overleftrightarrow{C\,\oplus}$. Au sein de ce sys-

tème, j’ai mis en lumière les relations opératoires $R_i \Rrightarrow \overleftrightarrow{S}$, $\alpha_i \Rrightarrow R_i$; $\alpha_i \Rrightarrow \overleftrightarrow{C \oplus}$: d’une rotation à son espace, à l’angle comme rotation non réciproque de ses propres côtés ; de ce même angle à son ampleur comme lieu sur la circonférence trigonométrique. À aucune de ces opérations ne correspond toutefois une opération inverse. Nous ne pouvons pas « donner un espace » purement « régional » pour procéder ensuite à la mise en rotation d’une figure à son intérieur, ainsi qu’une fois mis en rotation l’un des deux rayons/côtés d’un angle par rapport à l’autre, nous ne pouvons pas considérer cet autre côté comme en rotation par rapport au premier, sans par là même faire dissoudre notre angle dans l’indétermination ; finalement, nous ne pouvons pas accéder d’abord à la circonférence trigonométrique pour y puiser l’ampleur d’un angle euclidien en allant le chercher dans son lieu « couché » sur l’horizontale des abscisses, sans préalablement tracer au compas *euclidien* cette même circonférence. – À l’opération *tracer le cercle euclidien de la circonférence trigonométrique* ne correspond donc pas une opération inverse, et ce fait directement mathématique est en même temps un *fait pleinement développemental* : l’ « ordre d’apparition » rigoureusement fixé entre le triangle d’Euclide et le triangle de Pappus signifie qu’à chaque fois que nos yeux se posent sur une hypoténuse euclidienne pour y voir un rayon trigonométrique, ils parcourent en un instant – mais « sans s’arrêter sur aucun d’eux » dirait Galilée – tous les passages «scolaires » que nous avons endurés pour transformer un « côté » en en « sinus ». Toutes ces opérations qui n’ont pas un inverse refont donc à rebours le chemin grâce auquel une certaine totalité *groupale* – comme une rotation ou un angle euclidien – peut nous être *donnée*, en poussant de la sorte dans le jardin de notre expérience mathématique.

Œuvres citées

ARISTOTE (*Anal. Post.*) *Seconds Analytiques*, Paris : Flammarion : 2005

BATESON G. [1971] *Vers une écologie de l'esprit* I-II, Paris : Seuil 1977

[1942] « Planning social et concept d'apprentissage secondaire » dans Bateson 1971, I

[1951] « Pourquoi les Français... ? » dans Bateson 1971,I

[1954] « Une théorie du jeu et du fantasme » dans Bateson 1971, I

BRAVAIS A.(1866) *Etudes cristallographiques*, Paris : Gauthiers-Villars

BROUSSEAU G. (1997) Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, in http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau

COOPER D. [1969] *To free a generation! The dialectics of liberation*, London: Penguin

COURT DE GEBELIN (1778) *Monde primitif, analysé et comparé avec le monde moderne, considéré dans l'histoire naturelle de la parole; ou grammaire universelle et comparative*, Paris : chez Boudet,Valleyre, Veuve Duchesne, Saugrain, Ruault.

DEDEKIND R. [GMW] *Gesammelte Mathematische Werke I-III*, Braunschweig : Robert Fricke (ed.) : 1931

[1863] *Vorwort zur zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie*, GMW III

[1872] *Stetigkeit und irrationalen Zahlen*, GMW III [trad.fr. C. Duverney, « Continuité et nombres irrationnels », in Dedekind 2006];

[1876] « Correspondance de 1876 avec Rudolph Lipschitz sur les nombres irrationnels », *in* Dedekind 2006

[1888] *Was sind und was sollen die Zahlen*?, GMW III [trad.fr. C. Duverney « Que sont et à quoi servent les nombres ? » in Dedekind 2006]

(2006) *Traités sur la théorie des nombres*, Genève, Éditions du Tricorne.

EUCLIDE (*Elem.*) *Euclidis Elementa*, Leipzig: Teubner : 1883-1888.

GHERARDELLI F. (2009) «La fobia scolare», in www.ansiasociale.it/articoli/fobia_scolare.php

JOHNSON A. M., FALSTEIN E. I., SZUREK S. A., SVENDSEN M. (1941) School Phobia. *Amer. J. Orthopsychiat.*, 11;

JORDAN C. (1868) Mémoire sur les Groupes de Mouvements. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* serie 2 : agosto 1868 : 167-215

KLEIN F. (1872) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschunge,*, Erlangen : Andreas Deicher [Trad.Fr. *Le programme de Erlangen*, Paris: Gauthier-Villars 1974]

LAING R. [1959] *Le moi divisé*, Paris : Stock : 1980

[1961] *Soi et les autres*, Paris : Gallimard : 1971

[1967a] *La politique de l'expérience*, Paris : Stock : 1980

[1967b] *The Obvious*, in Cooper 1967

[1969a] *La politique de la famille*, Paris : Stock+Plus : 1979

[1969b] « Préface à la deuxième édition » de Laing 1961

[1985] Sagesse déraison et folie, Paris : Seuil 1986

PIAGET J. (1918) *Recherche*, Lausanne : Edition La Concorde

[1936] *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris : Del.& Niestlé : 1959

(1942) *Classes, relations et nombres*, Paris : Vrin

(1969) Le structuralisme. dans *Cahiers internationaux de symbolisme*, 17-18

(1976) Autobiographie. *Cahiers Vilfredo Pareto* (Genève) 14, 38/39 : 1-43

SPENCER-BROWN G.D. (1969) *Laws of Form*, London: Allen and Unwin

WITTGENSTEIN L. (2005) *Carnets 1914-1916*, Paris : Gallimard

[1912] « Extraits de lettres de Ludwig Wittgenstein à Russell 1912-1920 », in Wittgenstein 2005

[1913] « Notes sur la logique », in Wittgenstein 2005

[1914a] « Notes dictées à G. E. Moore » in Wittgenstein 2005

[1914b] « Carnets 1914-1916 » in Wittgenstein 2005

[1918] *Tractatus Logico-Philosophicus*, London, Routledge & Kegan Paul Ltd,1922 [Trad.fr. G. G.Granger, Paris : Gallimard : 1993]

Notes

[i] ⟨N1⟩ «[1] Une structure est un système de transformations. Ce n'est pas un système statique, ou simplement une forme sans quoi il faudrait y faire rentrer tous les formalismes ou toutes les philosophies de la forme à partir du platonisme. La structure permet de passer de l'un de ses éléments à un autre grâce à certaines transformations bien déterminées. Par conséquent, la structure est structurante en même temps que structurée. Elle est en état perpétuel de recombinaison et permet d'engendrer sans cesse de nouveaux éléments à son intérieur. Même en géométrie, ou en apparence nous n'avons à faire qu'à des descriptions figurales et statiques, il existe aujourd'hui, comme vous le savez bien, toute une hiérarchie de groupes ; chaque géométrie pouvant être réduite à un groupe fondamental et certaines lois permettant de passer de l'un des sous-groupes à un autre : même dans ce domaine, nous avons donc à faire à un système de transformations et de constructions continuelles et non plus du tout à de simples analyses statiques. [2] Le troisième caractère des structures auquel on songe un peu moins, mais qu'il faut souligner, c'est son autoréglage. Les transformations du système ne sont pas quelconques. Elles obéissent aux deux propriétés suivantes. Premièrement, elles ne sortent pas des frontières du système et ceci est fondamental : en combinant ses éléments, on reste à l'intérieur du système et l'on n'est pas conduit à franchir ses limites. Deuxièmement, il n'y a pas d'appel à des éléments extérieurs au système : par exemple, nous n'avons pas besoin d'intuitions géométriques ou temporelles, pour construire le groupe des nombres entiers. [3] La structure autrement dit, est en un sens analogue à ce que les philosophies classiques appelaient l'essence par opposition aux phénomènes. La structure est en effet à chercher sous les phénomènes dans tous les domaines, y compris psychologiques ou sociologiques : elle ne se confond pas avec l'observable, ni avec ce qui est donné dans la conscience des sujets ou, avec l'`événement" (comme le rappelait Bernard MOREL, tout à l'heure) : elle est située sous les phénomènes et demeure inconsciente, tout en expliquant les comportements, mais elle ne constitue nullement, pour autant, une simple construction du théoricien : elle existe indépendamment de lui en tant qu'individu. » [Piaget 1969 :73. Les crochets sont de moi.]

[ii] En anticipant le contenu de la Deuxième Partie, considérons les deux règles ci-dessous, et la façon dont Laing et Bateson en critiquent le bienfondé : REGLE 1 : dans la proposition « ceci est faux » l'expression « ceci » est un pronom, et non pas un adjectif démonstratif. – Réponses « *Il est intéressant de noter, en passant, que la règle de Russell ne peut pas être appliquée sans être aussitôt enfreinte* » (⟨9⟩) ; « *La syntaxe, la grammaire et toutes ces choses-là ne sont que des absurdités* » (⟨12⟩). - REGLE 2 : il ne faut pas tricher. – Réponse « *Le mieux que puisse faire un enfant est d'en tourner les règles sans se faire prendre…*» ⟨11 [2]⟩.

La REGLE 1 est une règle de *grammaire*, qui exprime la façon dont, incontournablement, tout être doué de parole interprète l'affirmation « *ceci* est faux ». Dire que « ceci » est ici entendu comme un pronom signifie que l'esprit de personne ne cherche l'objet indiqué par ce mot au-dedans de la phrase où il le trouve placé, et c'est justement ce fait (le fait que personne ne reste au-dedans de cette même phrase pour donner un sens à… cette même phrase) qui fonde la gloire millénaire du Crétois qui le premier a eu l'idée de *forcer* les oreilles des interlocuteurs pour les convaincre à concéder – ne serait-ce que pour un court instant – que ce « ceci » est un adjectif démonstratif dirigé sur lui-même. Ce Crétois a donc « tourné les règles » de notre grammaire naturelle qui – de même que le nombre naturel 2, incontournablement connu avant que $\sqrt{2}$ ne puisse faire sa mystérieuse apparition – *hurle* au cœur de ce pseudo-adjectif tricheur et tordu, pour nous en faire bien entendre la nature irréductiblement *artificieuse*. Pourquoi artificieuse ? Car nous ne tolérons la possibilité que le pronom « ceci » soit entendu comme un adjectif dirigé sur lui-même que dans la mesure où ce court instant de tolérance envers l'intolérable infraction à cette règle de grammaire n'est que le début – l'élan initial – d'une passionnante enquête grammaticale, logique et épistémologique sur l'univers des mots et de leur sens.

Lorsqu'une règle aussi impérative comme la REGLE I est enfreinte par notre façon d'interpréter nos mots, ou d'organiser nos systèmes de signes, eh bien ce que notre esprit est *naturellement* mené à faire, est démarrer une enquête pour aller voir où se cache l'erreur. Pendant tout le temps que dure l'enquête, notre esprit contemple la mystérieuse présence d'un tel « paradoxe » jaillissant du fait que nous avons enfreint notre règle, en en faisant éclater, d'une façon d'autant plus évidente, l'ineffaçable force normative. Dirons-nous que « le paradoxe est la règle », ou que « la règle est le paradoxe » ? Naturellement non ! Si le paradoxe était la règle et/ou vice-versa, comment pourrions-nous démarrer notre enquête, et la suivre en toutes ses passionnantes évolutions, si nourrissantes pour notre âme assoiffée de savoir ?

[iii] Quant à ce que Bateson affirme ici à propos des français, *contre* la grammaire et au nom du « geste » – « et supposer que le langage est d'abord et avant tout un système de gestes » – je me lève à la défense à la fois des français, de la grammaire et du geste, en rappelant l'existence d'une tradition – bien française –

d'études linguistiques, qui avaient cherché le « monde primitif » de la grammaire *et* du geste en une direction bien plus bienveillante tant envers l'homme qu'envers ses mots :

⟨N2⟩ «CHAPITRE VIII. DIVERSES MANIERES DONT ON PEUT PEINDRE LES IDEES – Tel est le Génie de l'Homme, telles sont les ressources immenses que lui ménagea la Divinité, afin qu'il pût pourvoir à tes besoins, de quelque nature qu'ils furent, que l'on pût peindre les idées d'un grand nombre de manières différentes. A ceux qui sont près de nous, nous les peignons de deux manières. Par des sons que nous prononçons, composés d'une suite de mots ou de signes vocaux qui correspondent parfaitement aux idées que nous voulons peindre, qui en tracent l'imitation fidèle dans leur esprit. Nous les peignons, en second lieu, par des gestes de la main, de la tête, etc. qui correspondent également à nos idées, et qui font connaitre, à ceux qui les aperçoivent, les idées dont nous voulons leur donner la communication. Ces gestes sont même de deux espèces très différentes : les uns libres et naturels, tels que ceux qu'on emploie dans la conversation, ou dans les récits. Les autres, plus approfondis, plus recherchés, et qui tiennent lieu de mots, de syllabes et de tout signe vocal, par leur parfaite correspondance avec ces signes. L'on se sert de ces derniers avec les sourds, tandis qu'on emploie les premiers avec ceux qui entendent, afin qu'ils comprennent mieux : souvent même on ne les emploie qu'avec ceux-là seuls qui peuvent les voir, afin qu'ils tachent notre idée de préférence à tous ceux qui les entendraient si on les peignait par des signes vocaux. Ces deux sortes de signes, ceux de la parole et ceux du geste naturel, sont aussi différents par leurs effets qu'ils le sont par leur nature. Les derniers sont plus prompts, plus animés, plus rapides dans leurs effets : les premiers sont plus exactes, plus fermes, plus développés : ils détaillent mieux l'idée : ils la présentent avec plus de précision et la font infiniment mieux connaître. – CHAPITRE IX. QUE LA GRAMMAIRE UNIVERSELLE PRESIDE A CES DIVERSES MANIERES DE PEINDRE – Mais de quelque manière qu'on peigne ses idées, il faut qu'elles soient toujours asservies aux règles de cette Grammaire Universelle qui préside à la peinture des idées, qui nous apprend en quoi consiste, à cet égard, l'imitation la plus parfaite de la Nature. En effet, les règles à suivre dans toutes ces Méthodes doivent être les mêmes, puisque ce ne sont que diverses manières de peindre le même objet : il doit se retrouver dans toutes, toutes doivent exprimer la manière dont il nous affecte, les idées que nous nous en faisons, les qualités que nous y voyons : toutes doivent mettre l'accord le plus parfait entre ces diverses parsies d'un même tout» [Court de Gebelin, *Monde primitif, analysé et comparé avec le monde moderne, considéré dans l'histoire naturelle de la parole; ou grammaire universelle et comparative*, 14 ; 16]

[iv] A la *Schöpfung* dédékindienne correspond donc la *Projektion* kleinienne ainsi que cantorienne :

⟨N3⟩« Puisque tout élément *m* devient une Unité [*Eins*] lorsque l'on fait abstraction de sa propre nature, le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$ est un certaine totalité d'unités distinctes, qui a son existence dans notre esprit, comme image ou projection intellectuelle [*intellektuelles Abbild oder Projektion*] de la totalité donnée M » [Cantor 1895 : 85]

Schöpfung/Projektion signifie notre puissance de *Uberträgung*/traduction/transmutation. Une réalité concrète nous est donnée, enclose dans les limites imaginatives et sensibles de sa présence immédiate, et notre esprit est capable de la transformer en une entité pure de la pensée. Le dernier niveau sera la notion wittgensteinienne de *Projektionmethode*, qui accompagne la notion de *Logisches Bild*

⟨N4⟩« 3.1.1 - Nous usons du signe sensible (sonore ou écrit, etc.) de la proposition comme projection de la situation possible. La méthode de projection est la pensée du sens de la proposition.» « 2.1.8.1 - Si la forme de représentation est la forme logique, l'image est appelée image logique.[*Ist die Form der Abbildung die logische Form, so ist das Bild das logische Bild - 2.19 Das logische Bild kann die Welt abbilden*.] [Wittgenstein 1918]

[v] Ceci et le sens du ἐν ᾧ dont parle Aristote comme l'une des trois dimensions nécessaires de la κίνησις :

⟨N5⟩ «Les éléments concernés lorsque nous parlons d'un mouvement sont toujours trois : ce qui [ὅ] bouge, ce en quoi [ἐν ᾧ] le mouvement a lieu, et le moment où il a lieu» [Arist. *Phys*., E 4, 227b23]

[vi] En *géométrie*, la même chose se passe dans le cas de la méthode de rectification d'une circonférence donnée comme limite d'un rapprochement infini entre la polygonale inscrite et la polygonale circonscrite au cercle même qui doit nécessairement être présupposé comme limite de ce rapprochement mutuel, puisque aucune suite de segments ne pourra jamais donner comme résultat une courbe. – En *dynamique*, de la même façon, nous ne pouvons attribuer une direction et un sens au dernier point P_2 d'un mouvement curviligne P_1-P_2 qu'en présupposant le déploiement déjà réalisé de son entière trajectoire, et seulement grâce cette décomposition rétrograde, qui présuppose le mouvement achevé, nous pouvons reconduire la courbe donnée à une composition de segments vectoriels. – Nous venons donc de retrouver cette même nécessaire présupposition dans le cas du mouvement rotation, qui concerne essentiellement la totalité ache-

vée d'une courbe circulaire, dans ce sens que toutes les parties du corps qui tourne sont simultanément concernées, en remplissant de la sorte, et dès le début, l'espace entier de cette « trajectoire ».

vii Cette circonstance primordiale fonde la fois la méthode euclidienne d'engendrement de la première figure géométrique [Fig.21a : le triangle équilatère étalon mesure de toute la géométrie euclidienne émane du cercle du IIIe Postulat], et la notion trigonométrique « $1=sin^2+cos^2$ » d'une circonférence de «rayon unitaire » comme espace de détermination quantitative des angles (espace goniométrique). En trigonométrie, « r = 1 » signifie préalablement *un* [quantum de] rayon. « A/α » et « r_1/r_2 » [Fig.23b] représentent donc des *quanta formels* [des *parties formelles*] de circularité. En conséquence, lorsque nous pensons l'entité « $r=A$ », à savoir la grandeur « ρ » – le *radians* « l/r » – nous instituons la *ratio* d'une correspondance biunivoque $r \leftrightarrow A$ entre les deux éléments constitutifs du Cercle, dont l' « équation dimensionnelle » est « $C = [\bar{r}] \times [\hat{l}]$ » : à chaque élément de circularité « $\hat{l}$ » correspond un élément de linéarité « $\bar{r}$ » . Poser « $\widehat{l} = \bar{r}$ » signifie donc instituer l'unité de mesure *interne* du cercle, à savoir l'étalon capable de mesurer exactement toute partie-de-cercle en ce qu'il est une partie *du* cercle. Le nombre « 2π » n'est en conséquence que le *nombre interne* du cercle, la proportionnalité arithmétique irréductiblement liée à la dimension C, qui nous permet l'énumération [l'identification quantitative] de toutes ses parties.

viii Nous avons donc à faire avec une *extériorité opérationnelle* qui a lieu *internement* à une même configuration formelle. L'opération *interne* au cercle C « détermination de la mesure de la partie « α_i/A_i » est *externe* au système de relations réciproques {$\alpha_i/A_i \times Pr_1/Pr_2$} dont cette partie se compose. Cette *extériorité interne* à une même forme géométrique est une circonstance tout à fait spéciale, qui n'affecte que le cercle parmi toutes les figures de la géométrie : de même un triangle est fait de 3 cotés, un carré de 4 côtés, un pentagone de 5 côtés… de même un cercle est fait de *2π radias*. Mais tandis qu'*un* côté-de-carré détermine par là même 1 quart de son périmètre total, *un* arc de cercle est dépourvu, en tant que tel, de tout pouvoir immédiat de détermination, et doit donc être *mesuré*. Cette extériorité opérationnelle explique la présence du *radias* parmi les « unités SI» comprises dans le *Système International*, où « *rad* » apparaît comme l'unité de mesure de l'*angle plan* « dérivée »par rapport à celle de la *longueur* – le *mètre* – défini comme le trajet d'un rayon de lumière dans le vide pendant un certain 1/n[ième] de seconde : comme si l'attribution d'une quantité déterminée à une partie « α_i/A_i » de cercle, qui nous rend capables de l'identifier au sein de sa totalité formelle d'appartenance, était aussi extérieure et conventionnelle par rapport à « α/A » – et donc au cercle C – que l'est une lueur dans le vide ou une barre en platine par rapport à la longueur d'un objet physique quelconque.

Mise à part l'utilité pragmatique de la décision de mesurer les angles en mètres, cette idée d'extériorité matérielle est évidemment trompeuse : certes, nous ne pouvons pas énumérer les [parties de] *radias* d'un[e partie de] cercle un[e] par un[e] pour en obtenir la mesure, ainsi que nous le faisons avec les côtés d'un polygone quelconque car on vient de voir que lorsque nous disons « ce côté du carré » nous savons déjà qu'il s'agit de ¼ de son périmètre, tandis que la seule indication « cet arc de cercle » ne nous dit aucunement quelle fraction de périmètre nous sommes en train d'indiquer avec cette expression. Cela n'empêche pourtant que la mesure *en* radias de ce côté de cercle qu'est l'ampleur/inclinaison/distance de l'arc quelconque α_i/A_i soit une opération strictement *interne* à l'identité formelle du cercle même en ses éléments constitutifs, et qui ne peut pas être comparée à l'apposition d'un mètre sur une étendue quelconque. – Evidemment, ce même discours vaut dans le cas de la mesure en degrés. Pour obtenir la 360[ième] partie d'un cercle, il faut d'abord avoir le cercle, et ensuite une méthode de cyclotomie issue de son interne composition formelle, grâce à laquelle nous intervenons sur le cercle en sa totalité, en y appliquant la ratio correspondante à l'une de ses parties. Nous pointons par exemple sur la circonférence le même compas qui vient de dessiner le cercle, et nous répétons cette opération jusqu'à une première cyclotomie complète en 6[èmes] ; nous appliquons ensuite, sur la circonférence ainsi partagée, une deuxième procédure de cyclotomie… etc. jusqu'à l'obtention d'une circonférence divisée en 360 α/A. Le « degré » ainsi obtenu sera donc le résultat final d'une application interne du cercle C à lui-même {C×C} manifestant ainsi l'un des complexes formels qui en font partie : le complexe *angle-α/corde-a/arcA* =1/360°C .

Or, ce qui peut induire en erreur est que, pour savoir que l'entière ampleur/circonférence du cercle C équivaut à un certain nombre de fois le « coté » quelconque « α_i/A_i », nous devons nous diriger sur α_i/A_i avec une méthode de mesure (en radias ou degrés) qui dépasse ce que nous savons sur le cercle grâce sa simple présence, et donc apposer sur sa circonférence un gonio-*mètre*, qui paraît en conséquence autant externe au cercle que la règle graduée en centi-*mètres* est externe à la longueur d'un segment quelconque, tracé sur la feuille. Il ne s'agit pas, cependant, du même genre d'extériorité : la *droite infinie* ne participe aucunement à la détermination, parfaitement conventionnelle, du *centi*-mètre, tandis que l'unité de mesure qui apparaît sur notre *gonio*-mètre est, dès le départ, une partie formelle (un certain degré d'ampleur/distance/inclinaison) du *cercle* entier, qui est donc présupposé en sa totalité comme la source de cette opération, tout à fait apriori et intra-géométrique, qui est la mesure – l'identification au sein du cercle même – de « α_i/A_i »..