

**Un percorso introduttivo alla
meccanica quantistica basato
sugli stati di *spin*.**

A cura di Fabio Ciralli

ITIS A. VOLTA - PALERMO

Breve premessa storica

Alla fine dell'800 la comunità scientifica si dovette confrontare con alcuni processi che non ammettevano spiegazione all'interno del paradigma della "fisica classica". Si trattava in particolare di processi che coinvolgevano l'interazione della radiazione con la materia e dei tentativi di trovare un modello consistente per i sistemi atomici.

1900. Il problema dello spettro di radiazione termica emessa da un corpo, a temperatura T , spinse Planck ad introdurre una ipotesi di quantizzazione per gli scambi di energia tra campo elettromagnetico e pareti del corpo: l'energia scambiata, ad una data frequenza f , è un multiplo intero della quantità $E=hf$.

1905. All'epoca, un altro puzzle era costituito dal cosiddetto effetto fotoelettrico: illuminando un metallo, sotto opportune condizioni, vengono emessi elettroni. Einstein assume che l'energia della luce è distribuita nello spazio con discontinuità. La radiazione elettromagnetica viene assimilata ad una collezione di corpuscoli, i fotoni, ciascuno di energia $E=hf$ e momento $p=h/\lambda$. L'ipotesi corpuscolare della radiazione riceve grande slancio nel 1923 con lo studio della diffusione di raggi X da parte di elettroni (effetto Compton).

1913. Il fisico danese Bohr, per primo, introduce una ipotesi di quantizzazione dei sistemi atomici che apre la strada alla moderna interpretazione della struttura atomica.

1924. De Broglie avanza, nella sua tesi di dottorato, una ipotesi: così come le onde elettromagnetiche presentano aspetti corpuscolari, i corpuscoli presentano aspetti ondulatori: ad una particella di massa m e momento p si associa una lunghezza d'onda $\lambda = h/p$, dove $p = mv$.

1925-1926. Schroedinger (meccanica ondulatoria) ed Heisenberg (meccanica delle matrici) giungono a due formulazioni indipendenti, ma equivalenti, della meccanica quantistica.

1925. Goudsmit e Uhlenbeck avanzano una ipotesi per spiegare alcune caratteristiche delle righe spettrali emesse da un atomo e che rende conto dell'inaspettato risultato dell'esperimento di Stern e Gerlach: ogni elettrone possiede un momento angolare intrinseco (spin).

Premessa all'esperimento di Stern e Gerlach

Consideriamo un semplice modello classico in cui l'elettrone si muove nell'atomo su un'orbita circolare attorno al nucleo.

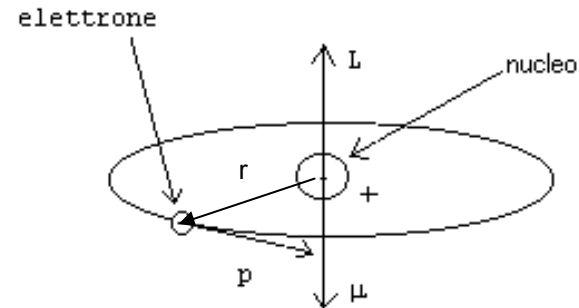
Definizioni:
Quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$

dove m è la massa dell'elettrone
e \vec{v} è la sua velocità

Momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
dove \vec{r} è il vettore posizione..

Momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = i\vec{A}$
dove i è la corrente elettrica

\vec{A} è un vettore di modulo pari all'area del cerchio delimitato dalla traiettoria dell'elettrone e che ha la stessa direzione del momento angolare e stesso verso se la carica che circola è positiva, verso opposto se la carica è negativa.



Magnetismo atomico

Esprimiamo il momento di dipolo magnetico in termini del momento angolare:

$$i = \frac{e}{t} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{ve}{2\pi r} \quad A = \pi r^2$$

$$\mu = iA = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{erv}{2} = \frac{e}{2m} L$$

Dove si è considerato il fatto che il modulo del momento angolare è $L = mvr$.

Infine considerando la natura vettoriale, il momento di dipolo magnetico legato al moto orbitale è dato da:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

Magnetismo atomico, continuazione

Se un dipolo magnetico è posto in un campo magnetico \mathbf{B} esso è sottoposto ad un momento torcente dato da:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

e acquisisce una energia potenziale data da:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \vartheta$$

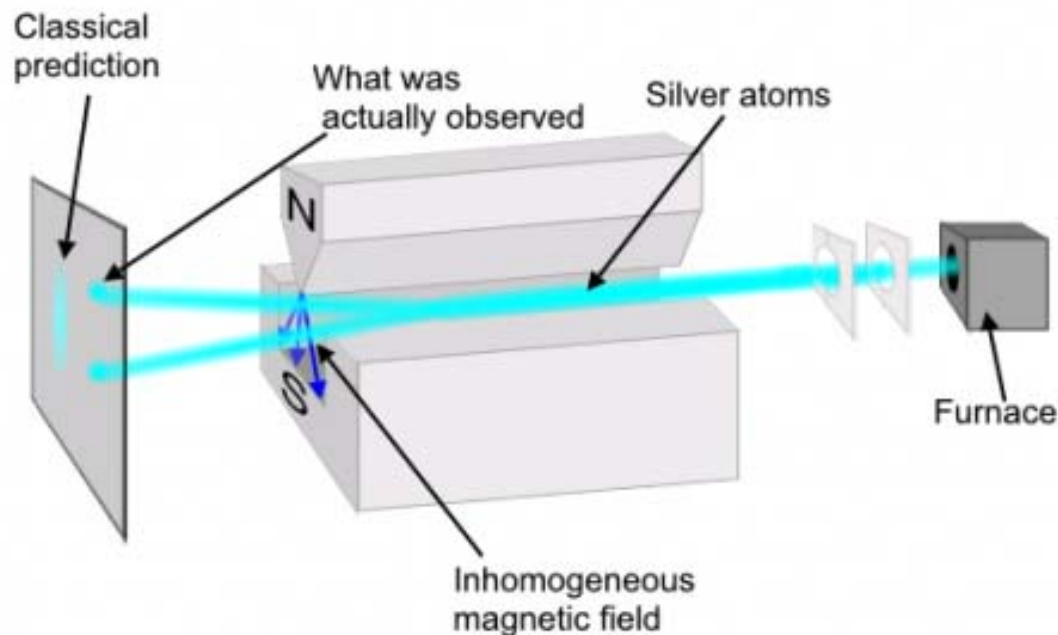
Se il campo \mathbf{B} varia con la posizione, supponiamo lungo la direzione zeta, il dipolo magnetico risente di una forza pari a:

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos \vartheta \frac{\partial B}{\partial z}$$

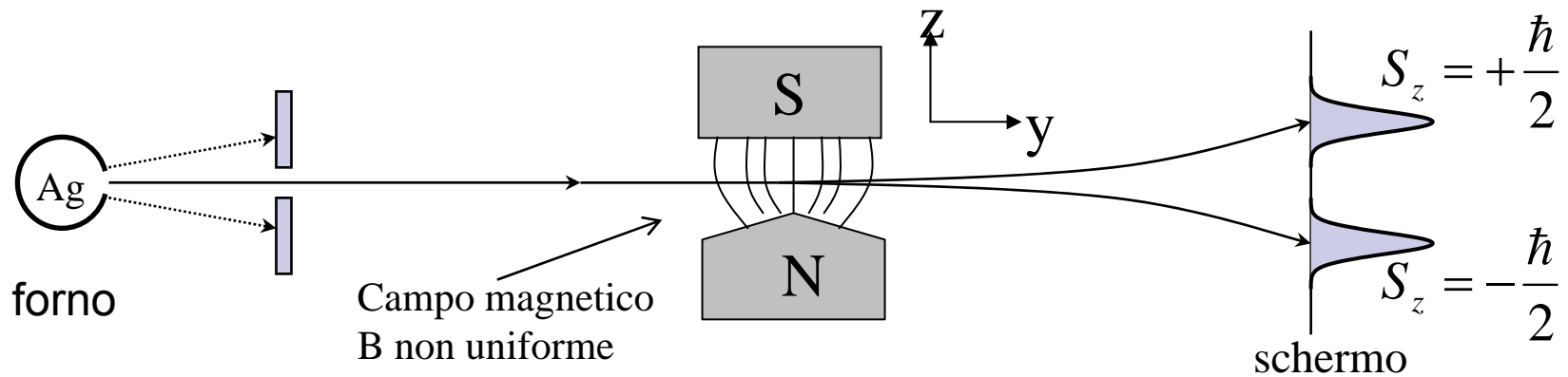
In fisica classica l'angolo θ tra $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{B} può essere qualsiasi.

L'esperimento di Stern e Gerlach

L'esperienza di Stern e Gerlach del 1922 mostrò che un fascio di atomi di argento (particelle di spin $1/2$), proveniente da un forno, nell'attraversare la regione tra i poli di un magnete con un campo magnetico lungo zeta fortemente disomogeneo, si scinde in due fasci che raggiungono lo schermo in due *spot*, contrariamente alla previsione classica di una distribuzione continua di particelle tra un massimo e un minimo di deflessione.



Rappresentazione schematica dell'esperimento di Stern e Gerlach



Un atomo di argento si comporta come un piccolo magnete. Il numero atomico dell'argento è 47. L' atomo di argento ha lo strato più esterno ($n=5$) con un solo elettrone. La deflessione degli atomi nell'attraversare il magnete è dovuta al momento di dipolo magnetico intrinseco dell'elettrone.

L'elettrone possiede un momento magnetico intrinseco μ_s e un momento angolare intrinseco \mathbf{S} , detto spin, legati dalla relazione:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

Dalla deflessione degli atomi nell'esperienza di Stern e Gerlach è possibile risalire alla forza F_z e quindi ottenere una determinazione sperimentale della grandezza S_z mediante la formula:

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{e}{m} S_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

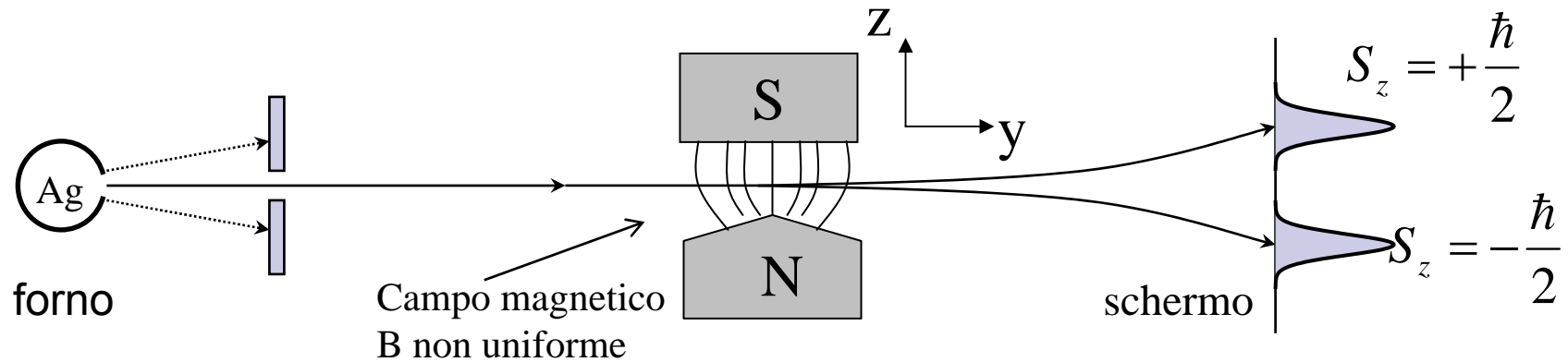
I valori misurati di S_z sono:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}, \quad \hbar = 1.0546 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} = 6.5821 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{sec}$$

Il percorso proposto nasce da

- Il Master IDIFO Innovazione Didattica in Fisica e Orientamento dell'Università di Udine.
- Noti approcci didattici che utilizzano sistemi di spin: Feynman, Sakuray, Cohen-Tannoudji, Townsend
- Una proposta didattica sviluppata alla Oregon State University (McIntyre)
- L'applicativo JAVA Osp-Spins sviluppato da M. Belloni e W. Christian (Open Source Physics project, www.opensourcephysics.org)

L'esperimento di Stern e Gerlach: misura della proiezione di spin lungo una direzione. (esperienza n.1)



- Quantizzazione della proiezione di Spin lungo una qualsiasi direzione.
- Uso di probabilità e statistica per descrivere i risultati dell'esperimento.
- All'aumentare della statistica le fluttuazioni si riducono e le probabilità misurate si avvicinano a quelle previste teoricamente.

Grandezze statistiche per l'analisi delle esperienze simulate.

Sia x_i il numero di conteggi rilevati da un contatore nell'esperimento i -esimo di un set di N esperimenti uguali ciascuno effettuato con M atomi emessi dal forno.

Il numero medio di conteggi è $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

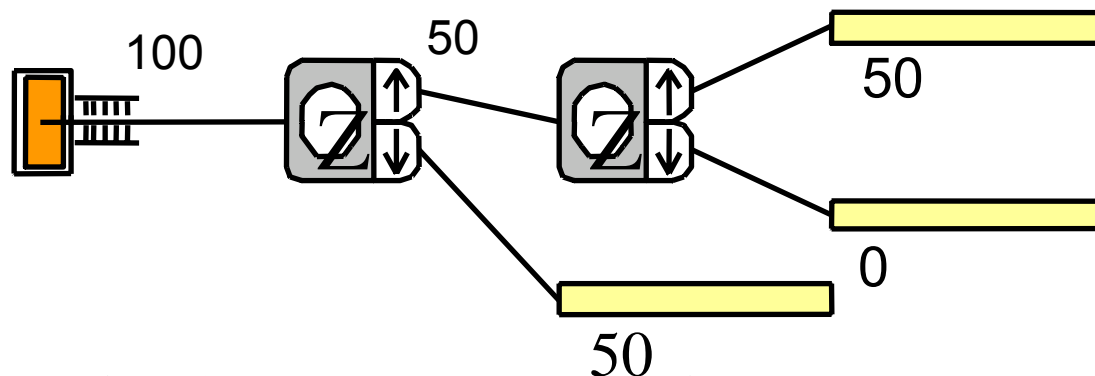
La deviazione Standard è $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{N}{N-1} \bar{x}^2}$

La deviazione standard della media è $\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$

La probabilità che un atomo raggiunga il contatore è $P = \frac{\bar{x}}{M}$

L'incertezza sulla probabilità stimata è $\sigma_p = \frac{\sigma_m}{M} = \frac{s}{\sqrt{N \cdot M}}$

Misura della proiezione di *spin* lungo zeta due volte in successione (esperienza n.2)



Spin up e spin down sono proprietà mutuamente esclusive.

La misura su un sistema quantistico è riproducibile!

La prima misura prepara il sistema in uno specifico stato

Rappresentazione dello stato del sistema fisico.

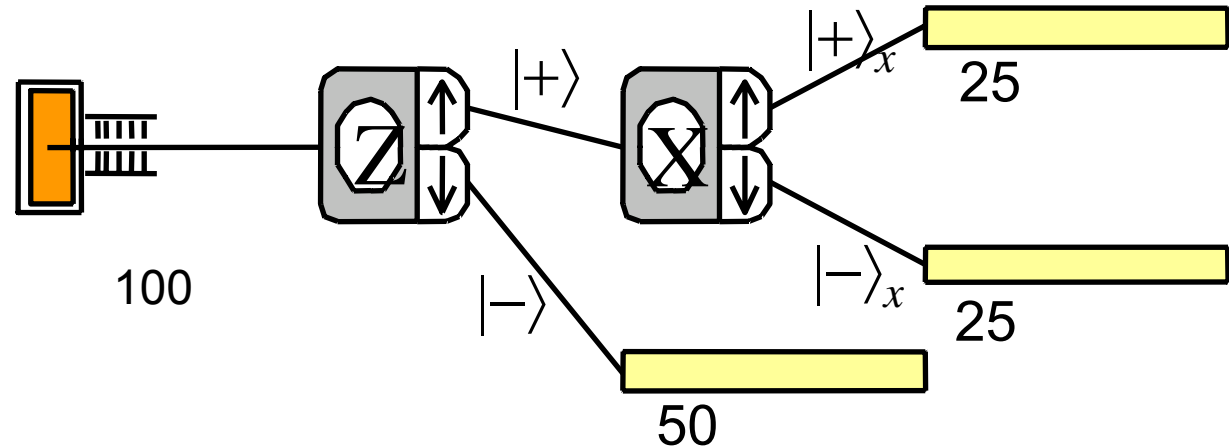
Nel nostro semplice sistema, lo stato corrisponde ad una definita proprietà: il valore della proiezione di spin.

Usiamo le parentesi $| \rangle$ con all'interno una descrizione della proprietà posseduta dal sistema.

Stato con Spin up: $|+\rangle = \left| s_z = +\frac{\hbar}{2} \right\rangle$ Stato con spin down: $|-\rangle = \left| s_z = -\frac{\hbar}{2} \right\rangle$

Ipotesi: I Kets $|+\rangle$ e $|-\rangle$ contengono tutte le informazioni che possiamo conoscere sul sistema. (Primo Postulato della meccanica quantistica)

Misura della proiezione di spin 2 volte in successione secondo due direzioni ortogonali



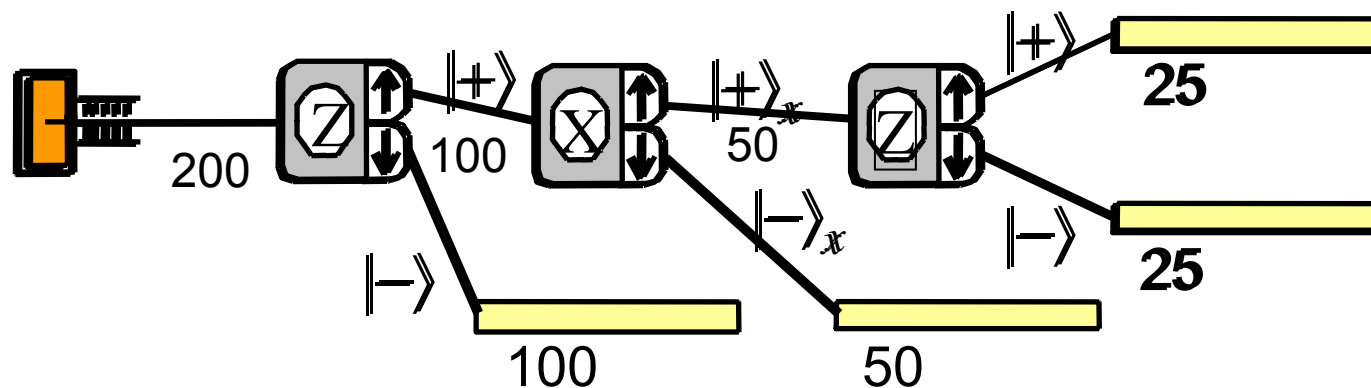
Atomi preparati nello stesso modo (**identità**) seguono un destino differente (**indeterminismo quantistico**).

Cade la visione deterministica!

La sequenza di conteggi in ciascun contatore è completamente casuale, possiamo soltanto fare **previsioni probabilistiche**.

Lo stato può essere scritto come: $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x]$

Misura della proiezione di spin 3 volte in successione



Non è possibile attribuire contemporaneamente i valori di S_x e S_z al sistema di spin 1/2 considerato.

S_x e S_z sono osservabili incompatibili.
(Principio di Indeterminazione)

Il Principio di Indeterminazione.

L'impossibilità di misurare S_z e S_x contemporaneamente implica l'impossibilità di determinare la direzione del vettore \mathbf{S}

Questo vale anche per il momento angolare orbitale $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

E' impossibile conoscere simultaneamente \mathbf{r} e \mathbf{p} con precisione arbitraria

Principio di Indeterminazione:

Non è possibile conoscere simultaneamente posizione e quantità di moto di un dato oggetto con precisione arbitraria

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

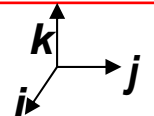
Si applica a qualsiasi coppia di variabili canonicamente coniugate, ad esempio S_x e S_z :

$$\Delta S_x \Delta S_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

oppure energia E e tempo t : $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

Sui vettori di stato ...

I due kets $|+\rangle$, $|-\rangle$ formano una **base** come i vettori nello spazio ordinario tridimensionale.

	 spazio tridimen.	Spazio vettoriale complesso bidim.
normalizzazione	$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$	$\langle + + \rangle = \langle - - \rangle = 1$
ortogonalità	$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$	$\langle + - \rangle = \langle - + \rangle = 0$
completezza	$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$	$ \psi\rangle = a +\rangle + b -\rangle$



Principio di Sovrapposizione

Principio di sovrapposizione

Ogni vettore di stato $|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare dei kets di base $|+\rangle$ and $|-\rangle$: $|\psi\rangle = a |+\rangle + b |-\rangle$, dove a e b sono in generale numeri complessi. Viceversa una combinazione lineare $a |+\rangle + b |-\rangle$ con a e b numeri qualsiasi rappresenta uno stato fisico possibile. Il vettore di stato $|\psi\rangle$ deve essere normalizzato.

In altre parole:

<< Si può esprimere l'insieme degli stati di un sistema come uno spazio vettoriale sul corpo complesso, in cui vettori proporzionali rappresentano lo stesso stato. Ovvero si ha la biiezione tra gli stati ed i vettori dello spazio>>

La notazione di Dirac con Ket e Bra

Ad ogni **ket** corrisponde un **bra**

$$\text{bra: } \langle \psi | \Leftrightarrow \text{ket: } |\psi\rangle$$

$$\text{bra: } \langle \psi | = a^* \langle + | + b^* \langle - | \Leftrightarrow \text{ket: } |\psi\rangle = a |+\rangle + b |-\rangle$$

Il prodotto scalare è un numero complesso e si scrive:

$$\langle \psi | \eta \rangle, \text{ bra} \times \text{ket}$$

I coefficienti a e b sono le proiezioni del vettore di stato

$$|\psi\rangle = a |+\rangle + b |-\rangle \text{ sui vettori di base:}$$

$$\langle + | \psi \rangle = \langle + | a |+\rangle + \langle + | b |-\rangle = a \langle + | + \rangle + b \langle + | - \rangle = a$$

$$\langle - | \psi \rangle = \langle - | a |+\rangle + \langle - | b |-\rangle = a \langle - | + \rangle + b \langle - | - \rangle = b$$

Il vettore di stato deve essere normalizzato:

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = (a^* \langle + | + b^* \langle - |) (a |+\rangle + b |-\rangle) = a^* a + b^* b \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow |\langle + | \psi \rangle|^2 + |\langle - | \psi \rangle|^2 = 1$$

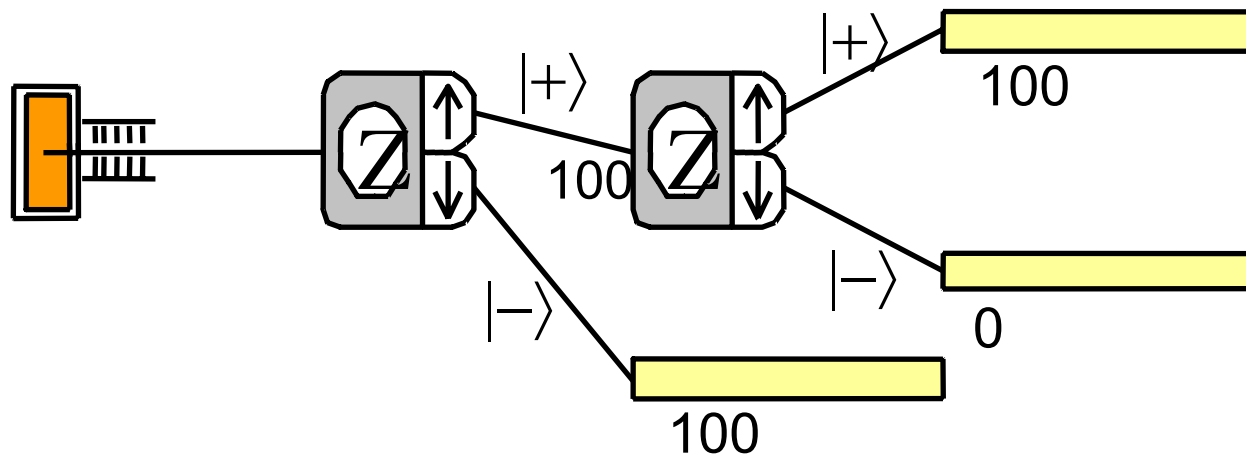
Postuliamo che ciascun termine nella somma $|\langle +|\psi\rangle|^2 + |\langle -|\psi\rangle|^2 = 1$ sia uguale alla **probabilità** che lo stato descritto dal ket $|\psi\rangle$ dopo la misura si trovi nel corrispondente stato di base.

$P(+)$ = $|\langle +|\psi\rangle|^2 = |a|^2$: probabilità che una misura di S_z sullo stato $|\psi\rangle$ produca il risultato $S_z = +\hbar/2$ e la conseguente transizione (collasso) nello stato di base $|+\rangle$.

$P(-)$ = $|\langle -|\psi\rangle|^2 = |a|^2$: probabilità che una misura di S_z sullo stato $|\psi\rangle$ produca il risultato $S_z = -\hbar/2$ e la conseguente transizione (collasso) nello stato di base $|-\rangle$.

(e' uno dei postulati (il 4°) della meccanica quantistica!)

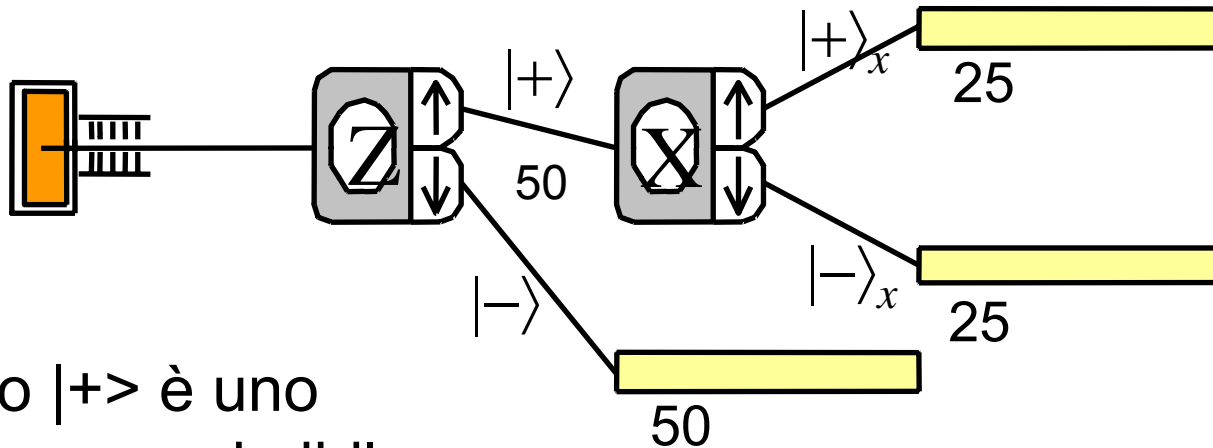
La descrizione dello stato del sistema e il 4° postulato permettono di **calcolare le probabilità di un esito**, ad esempio nel caso dell'esperienza n.2:



Teoria: $P(\text{out}) = |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2$ (4° Postulato)

$$P(+)= |\langle + | + \rangle|^2 = 1, \quad P(-)= |\langle - | + \rangle|^2 = 0$$

Calcolo della probabilità degli esiti della misura al secondo dispositivo di SG nel caso dell'esperienza n.3.



Lo stato $|+\rangle$ è uno stato puro esprimibile come sovrapposizione lineare di $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x]$$

Teoria: $P(\text{out}) = |\langle \text{out} | \text{in} \rangle|^2$

$$P(+)=|{}_x\langle + | + \rangle|^2 = 1/2$$

$$P(-)=|{}_x\langle - | + \rangle|^2 = 1/2$$

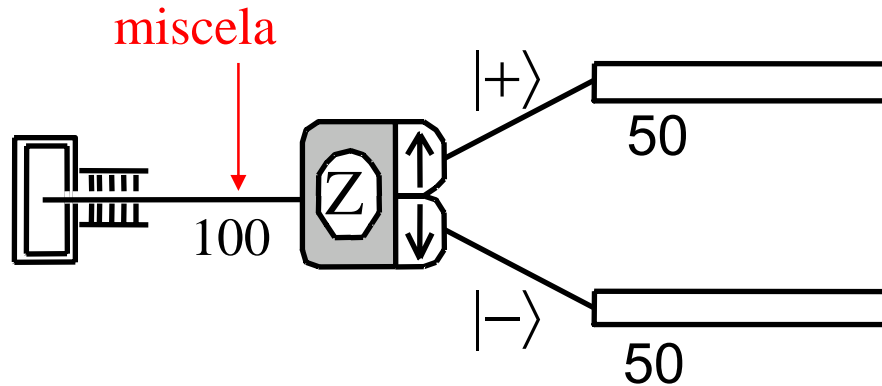
Riflettiamo sul significato della combinazione lineare:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x]$$

Consideriamo l'ipotesi che lo stato scritto sopra corrisponda ad una miscela statistica di atomi negli stati $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$. Testiamo la consistenza di questa ipotesi, considerando due misure successive di S_z (esperienza n.2). Sulla base dell'ipotesi della miscela statistica i due contatori del secondo dispositivo dovrebbe entrambi rilevare il 50% di atomi. Ma noi sappiamo dall'esperimento che tutti gli atomi finiscono in un contatore.

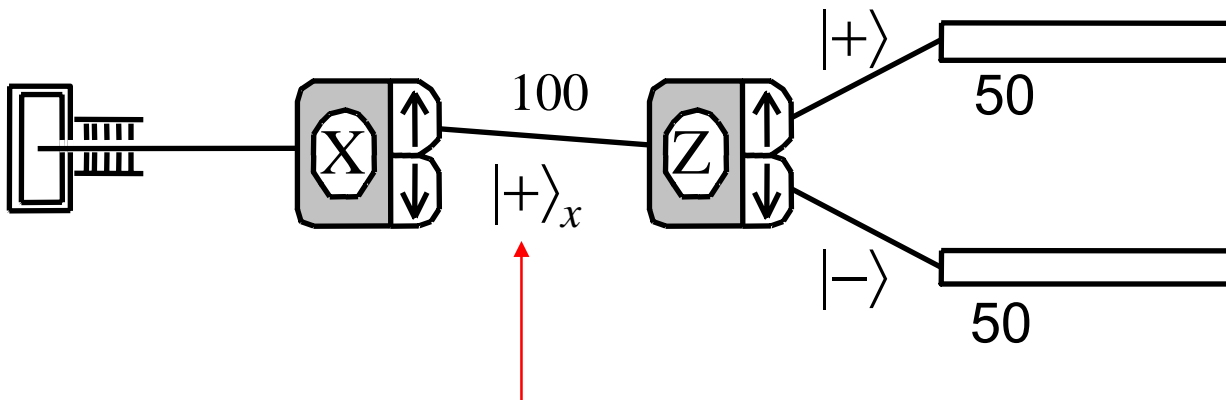
L'ipotesi della miscela statistica va scartata!

Stato puro e miscela statistica



$S_x, S_z, S_n :$

$+\frac{\hbar}{2} : 50\%$
 $-\frac{\hbar}{2} : 50\%$



Stato puro: sovrapposizione di $|+\rangle$ and $|-\rangle$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle]$$

$S_x = +\frac{\hbar}{2} : 100\%$

$S_x = -\frac{\hbar}{2} : 0\%$

$S_z = +\frac{\hbar}{2} : 50\%$

$S_z = -\frac{\hbar}{2} : 50\%$

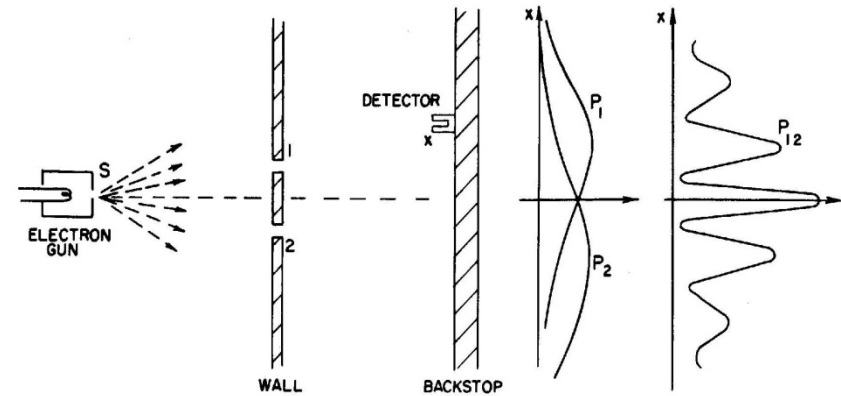
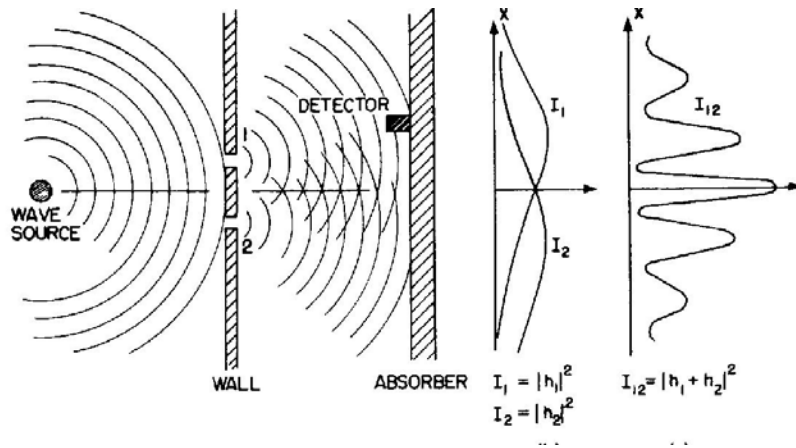
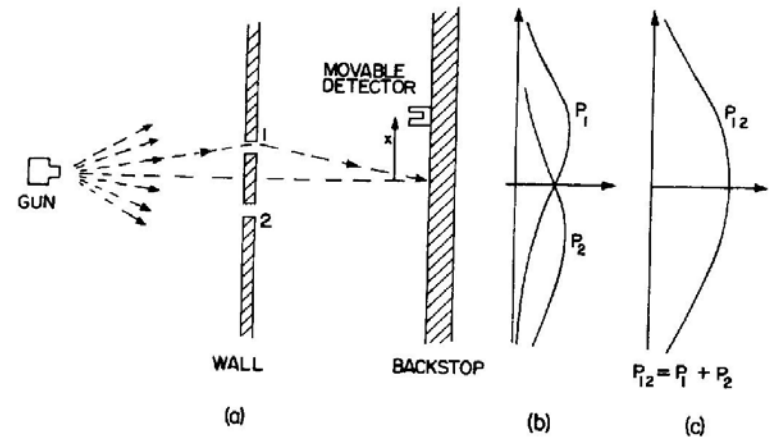
La sovrapposizione di stati di posizione e **il termine di interferenza quantistico**.

Prima di introdurre l'esperienza n. 5 con dispositivi SG, consideriamo un'altra proprietà che ci è più familiare, la **posizione**, trattando un sistema fisico che permette di discutere di stati di sovrapposizione di posizione:

l'esperimento della doppia fenditura con elettroni.

Esperimento della doppia fenditura con elettroni.

Gli elettroni si comportano a volte come particelle e a volte come onde: producono identici “clicks” nel rivelatore, come particelle, ma la probabilità di arrivo è distribuita come la distribuzione di intensità di un'onda.



Esperimento della doppia fenditura: si sommano le ampiezze di probabilità.

Con soltanto la fenditura 1 aperta,
l'ampiezza di probabilità è:

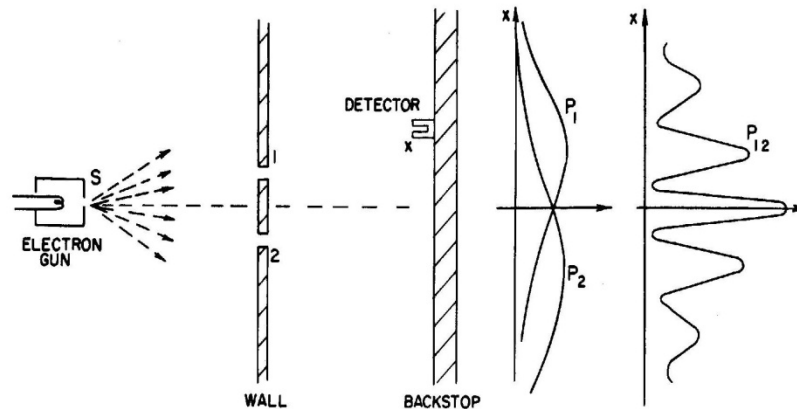
$$\Phi_1(x) = \langle x | s \rangle_{\text{via 1}} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle$$

La probabilità di rilevare un elettrone
in x è: $P_1(x) = |\Phi_1(x)|^2$

Analogamente con solo la fenditura
2 aperta:

$$\Phi_2(x) = \langle x | s \rangle_{\text{via 2}} = \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle$$

$$P_2(x) = |\Phi_2(x)|^2$$



Con entrambe le fenditure aperte:

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \langle x | s \rangle_{\text{via 1}} + \langle x | s \rangle_{\text{via 2}}$$

$$P_{12}(x) = |\Phi_1(x) + \Phi_2(x)|^2 =$$

$$|\Phi_1(x)|^2 + |\Phi_2(x)|^2 + \Phi_1^*(x)\Phi_2(x) + \Phi_1(x)\Phi_2^*(x) =$$

$$= P_1(x) + P_2(x) + \text{termine di interferenza}$$

Lo stato dell'elettrone alle fenditure è la sovrapposizione lineare di $|1\rangle$ e $|2\rangle$

Si è visto che con entrambe le fenditure aperte l'ampiezza di probabilità di rilevare un elettrone in

$$\begin{aligned}x \text{ è: } \Phi(x) &= \langle x|s\rangle_{\text{via 1}} + \langle x|s\rangle_{\text{via 2}} = \\ &= \langle x|1\rangle \langle 1|s\rangle + \langle x|2\rangle \langle 2|s\rangle = \\ &= \langle x| (|1\rangle \langle 1|s\rangle + |2\rangle \langle 2|s\rangle) = \langle x|\psi\rangle\end{aligned}$$

La sovrapposizione lineare $|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$

($a = \langle 1|s\rangle$ e $b = \langle 2|s\rangle$) descrive lo stato dell'elettrone alle fenditure.

Se si cerca di determinare attraverso quale foro è passato l'elettrone ...



Si utilizza una sorgente luminosa e due rivelatori di fotoni in corrispondenza delle aperture.

Sia q l'ampiezza di probabilità per il seguente fenomeno:

mentre l'elettrone è al foro 1 esso diffonde un fotone nel detector D1.

L'ampiezza di probabilità per un elettrone che va da s a x attraverso la fenditura 1 e diffonde un fotone in D1 è:

$$\langle x|1\rangle q \langle 1|s\rangle = a\Phi_1(x)$$

C'è anche una probabilità che un elettrone che attraversa il foro 2 scatteri un fotone in D1: $\langle x|2\rangle b \langle 2|s\rangle = b\Phi_2(x)$

.... Si distrugge la figura di interferenza.

L'ampiezza di probabilità per un elettrone a x e un fotone in $D1$ è quindi: $q\Phi_1(x) + b\Phi_2(x)$

Con un apparato ben costruito e nel limite di lunghezze d'onda molto corte, b è trascurabile (tende a 0) e resta soltanto il termine con $\Phi_1(x)$: passando al modulo quadro non si ha interferenza.

Per grandi lunghezze d'onda ($b \sim q$), non si distingue più la fenditura attraversata e si ha il fenomeno di interferenza.

Per situazioni intermedie ($0 < b < q$) c'è una parziale interferenza.

Con stati finali differenti si sommano le probabilità.

Analogamente e considerando l'apparato simmetrico, l'ampiezza di probabilità per un elettrone da s a x ed un fotone diffuso in $D2$ è data da:

$$q\Phi_2(x) + b\Phi_1(x).$$

Infine la probabilità di rilevare un elettrone in x ed un fotone indifferentemente in $D1$ o $D2$ si ottiene sommando le probabilità e non le ampiezze di probabilità, infatti gli stati finali sono differenti.

riassumendo

La probabilità per un elettrone in x ed un fotone in $D1$ o $D2$ è:

$$|q\Phi_1(x) + b\Phi_2(x)|^2 + |q\Phi_2(x) + b\Phi_1(x)|^2$$

Nel limite di lunghezze d'onda molto corte diventa

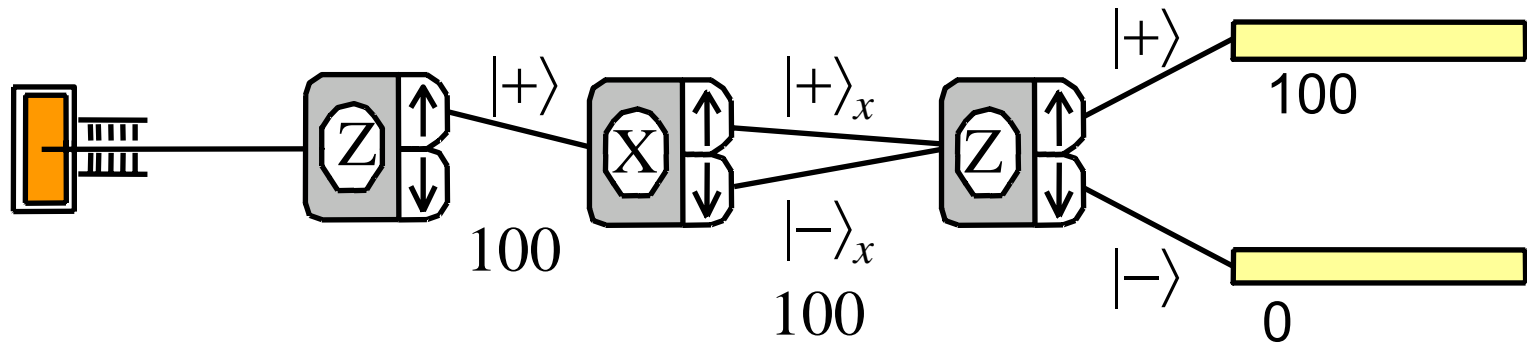
$$|q\Phi_1(x)|^2 + |q\Phi_2(x)|^2$$

Si determina attraverso quale foro passa l'elettrone, ma la figura di interferenza viene distrutta.

Considerazioni tratte dall'esperimento della doppia fenditura.

- La probabilità P di un evento in un esperimento ideale è data dal quadrato del modulo di un numero complesso Φ che è chiamato “ampiezza di probabilità”: $P = |\Phi|^2$
- Quando un evento può accadere in parecchi modi alternativi, l'ampiezza di probabilità per l'evento è la somma delle ampiezze di probabilità per ciascun modo considerato separatamente. C'è interferenza: $P = |\Phi_1 + \Phi_2|^2$
- Se si effettua un esperimento capace di determinare quale delle alternative è effettivamente presa, la probabilità dell'evento è la somma delle probabilità per ciascuna alternativa. L'interferenza è distrutta: $P = P_1 + P_2$

Termine di interferenza quantistica in un esperimento con dispositivi di Stern e Gerlach modificati.



Valutiamo la probabilità $P(-)$ di ottenere un conteggio nel contatore inferiore:

$P_1(-) = |\Phi_1|^2$ con $\Phi_1 = \langle -|+\rangle_x \langle +|+\rangle$ se si blocca il fascio con spin down in uscita dal secondo dispositivo.

$P_2(-) = |\Phi_2|^2$ con $\Phi_2 = \langle -|-\rangle_x \langle -|+\rangle$ se si blocca il fascio con spin up in uscita dal secondo dispositivo.

$P(-) = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 = P_1(-) + P_2(-) + \Phi_1^* \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2^*$ nel caso di percorsi ricombinati.

In che stato sono gli atomi in input al terzo dispositivo?

Si è visto che l'ampiezza di probabilità di ottenere spin down al terzo dispositivo, con percorsi ricombinati, è data da:

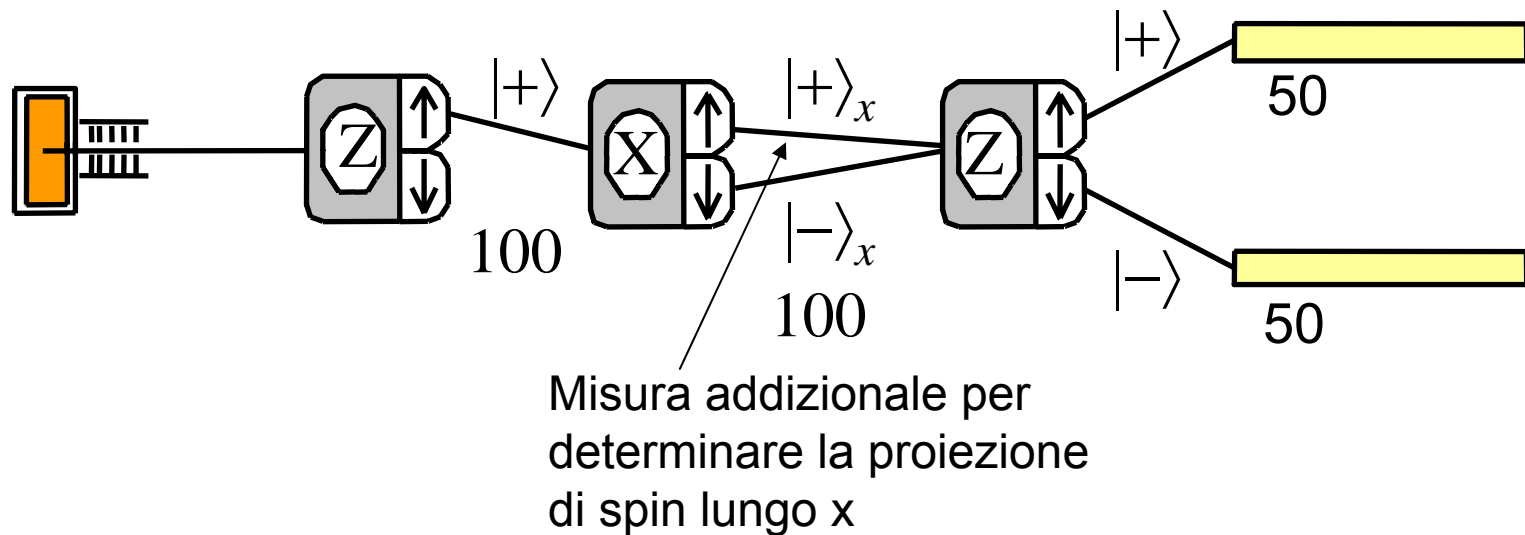
$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = \langle -|+\rangle_x \langle +|+\rangle_x + \langle -|-\rangle_x \langle -|+\rangle_x = \\ &= \langle -| (|+\rangle_x \langle +|+\rangle_x + |-\rangle_x \langle -|+\rangle_x) = \\ &= \langle -| (1/\sqrt{2} |+\rangle_x + 1/\sqrt{2} |-\rangle_x) = \langle -|+\rangle = 0\end{aligned}$$

Gli atomi in input al terzo dispositivo sono nello stato sovrapposizione lineare:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x]$$

Se si determina la proiezione di spin lungo x

Se con una misura addizionale si determina la proiezione di spin lungo x **l'interferenza è distrutta:**



Operatori

Postulato 2

Una osservabile fisica è descritta matematicamente da un operatore A che agisce sui kets.

$A|\psi\rangle = |\varphi\rangle$: Un operatore è un oggetto matematico che agisce su un ket e lo trasforma in un nuovo ket.

Postulato 3

Nella misura di un osservabile i soli risultati possibili sono gli autovalori a_n del corrispondente operatore A .

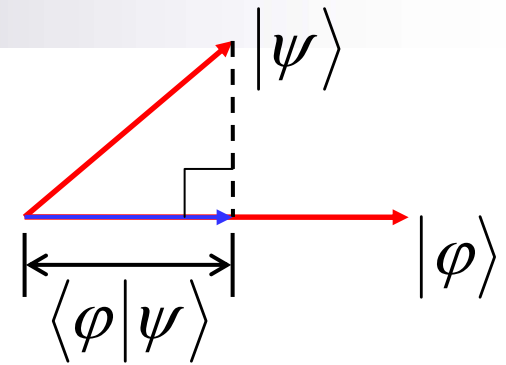
$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$: Equazione agli autovalori

Esempio: $S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle$

$$S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$$

Operatori di proiezione

$$P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi| \Rightarrow P_\varphi|\psi\rangle = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\psi\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$$



Relazione di completezza o chiusura (caso degli stati di spin):

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \langle+|\psi\rangle|+\rangle + \langle-|\psi\rangle|-\rangle = |+\rangle\langle+|\psi\rangle + |-\rangle\langle-|\psi\rangle = (|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|)|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = I \text{ (operatore Identità)}$$

$$P_+ = |+\rangle\langle+|, \quad P_- = |-\rangle\langle-| \Rightarrow P_+ + P_- = I$$

$$P_+|\psi\rangle = |+\rangle\langle+|\psi\rangle = (\langle+|\psi\rangle)|+\rangle, \quad P_-|\psi\rangle = |-\rangle\langle-|\psi\rangle = (\langle-|\psi\rangle)|-\rangle$$

L'operatore di proiezione fornisce l'ampiezza di probabilità \Rightarrow **Misura**

$$P(+)=|\langle+|\psi\rangle|^2 = \langle+|\psi\rangle^* \langle+|\psi\rangle = \langle\psi|+\rangle\langle+|\psi\rangle = \langle\psi|P_+|\psi\rangle$$

Postulato 5: postulato della Proiezione.

Collasso (o riduzione o proiezione) del vettore di stato quantistico

Dopo una misura dell'osservabile A che produce il risultato a_n , il sistema quantistico è in un nuovo stato che è la proiezione normalizzata dello stato iniziale del sistema sull'autostato corrispondente al risultato della misura.

$$|\psi'\rangle = \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$$

$A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$: Equazione agli autovalori

$$|\psi'\rangle = \frac{|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle}} = \frac{\langle a_n|\psi\rangle}{|\langle a_n|\psi\rangle|} |a_n\rangle = e^{i\phi} |a_n\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle a_n|e^{-i\phi}e^{i\phi}|a_n\rangle = \langle a_n|a_n\rangle = 1$$

Per riassumere una frase dal libro *Un'occhiata alle carte di Dio* di G.C. Ghirardi.

“Allorché si è interessati ad un'osservabile, si devono considerare gli esiti possibili e mutuamente esclusivi che la teoria consente possano emergere in un processo di misura dell'osservabile in questione. Si devono poi identificare degli stati tali che ciascuno di essi assegni probabilità uno ad uno solo degli esiti permessi e zero a tutti gli altri. Infine si deve esprimere lo stato del sistema prima della misura come sovrapposizione lineare degli stati considerati. Che tutte queste richieste possano venire soddisfatte è garantito dalla struttura formale della teoria.

Allora la teoria asserisce che, qualora si effettui la misura dell'osservabile in esame, si otterrà uno e gli esiti possibili e mutuamente esclusivi con una probabilità uguale al quadrato del coefficiente che moltiplica, nella sovrapposizione, lo stato normalizzato per cui quel esito risulta certo. Infine, la misura induce il fenomeno di riduzione del pacchetto: lo stato dopo la misura non è più quello prima della misura, ma si trasforma istantaneamente nello stato normalizzato che corrisponde all'esito ottenuto.”

Postulati della meccanica quantistica

1. Il vettore di stato normalizzato $|\Psi\rangle$ contiene tutte le informazioni che possiamo avere sullo stato del sistema.
2. Ogni osservabile fisica è descritta da un operatore che agisce sui kets.
3. I possibili risultati della misura di un osservabile descritto dall'operatore A sono gli autovalori a_n di A
4. La probabilità di ottenere l'autovalore a_n è data da $P = |\langle a_n | \Psi \rangle|^2$
5. Dopo la misura che ha prodotto l'autovalore a_n , lo stato del sistema "collassa" nell'autostato corrispondente $|a_n\rangle$
6. L'evoluzione temporale del sistema quantistico è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Riferimenti

- FISICA QUANTISTICA – una proposta per la didattica. M.Michelini-A.Stefanel
- Osp-Spins Package by Mario Belloni e Wolfgang Christian (Open Source Physics project). See www.opensourcephysics.org
- Spin and Quantum Measurement by David H. McIntyre – Oregon State University
- C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F. Laloe – QUANTUM MECHANICS – John Wiley & Sons
- The Feynman Lectures on Physics. Feynman, Leighton, Sands