

## **Quale Matematica comunicare?**

### **Uno sguardo sui fondamenti delle Matematiche**

#### **Premessa**

Le matematiche sono state rappresentate come un insieme di linguaggi che cercano di interpretare i fenomeni naturali nel senso più vasto che viene dato a questa espressione<sup>1</sup>. La difficoltà dell’insegnamento/apprendimento delle matematiche è strettamente legata al fatto che l’elevato grado di astrazione necessario per descrivere scienze sperimentali e modelli sempre più complessi è sempre meno accessibile alle capacità di ascolto, di concentrazione e di astrazione che ci si può legittimamente aspettare dagli allievi. La comunicazione delle matematiche, dunque, risulta stretta fra

- a) l’accreciuta necessità di formalizzazione e di astrazione richiesta dalla Disciplina stessa
- b) la diminuita capacità di concentrazione e di modellizzazione dell’utenza scolastica media.

Gli effetti negativi di tale divario e la possibilità di porre rimedio alle sue conseguenze sono questioni di cui epistemologi, sociologi e studiosi di neuroscienze si sono occupati e continuano ad occuparsi e i loro studi, nel tempo, hanno notevolmente cambiato lo statuto e la definizione stessa della Comunicazione delle Matematiche. Fatto sta che alla richiesta degli allievi: “ma a che cosa serve questa matematica?” ci si viene a trovare molto spesso impreparati. La comunicazione delle Matematiche è spesso avvenuta fino ad oggi attraverso la comunicazione di “contenuti”. Con questa espressione si intende l’insieme di regole collegate sintatticamente e che quasi sempre si discostano dal rapporto con situazioni e/o oggetti della vita quotidiana.

Il curriculum della scuola dell’obbligo risente ancora fortemente della preponderanza dell’aspetto sintattico della didattica della matematica rispetto alla valenza semantica della comunicazione; il che relega la Disciplina al mondo delle regole rigorose e prive di significato.

In questi ultimi dieci anni abbiamo assistito, nel campo della didattica delle matematiche, ad una inversione di tendenza. Questa inversione non è soltanto italiana, ma in varia misura investe un po’ tutto il mondo.

La posta in gioco è l’efficacia della comunicazione delle matematiche. L’obiettivo potrebbe essere, in accordo con il buon senso, un rapporto dialettico tra sintassi e semantica, un rapporto, cioè, tra insegnamento per problemi tratti da situazioni reali e recupero dell’aspetto sintattico dei vari linguaggi matematici. La teoria delle Situazioni Didattiche di Guy Brousseau ci può venire in aiuto per analizzare, progettare e controllare delle situazioni/problema che possano recuperare il senso delle matematiche dal “saper fare” (situazioni d’azione) al “discutere sulle soluzioni” attraverso una negoziazione socio-cognitiva (situazione di validazione).

#### **1.0 Uno sguardo d’insieme.**

Quale matematica trasmettere alle generazioni successive? Quali contenuti riteniamo più utili?

Quali contenuti consideriamo formativi? Perché?

---

<sup>1</sup> Per interpretazione semiotica delle matematiche viene intesa la distinzione tra sintassi (le regole dei linguaggi matematici), semantica (i significati associati ai concetti matematici) e pragmatica (gli strumenti della comunicazione).

A domande di questo tipo possiamo rispondere intanto cercando di rivedere la posizione delle Matematiche e sulle Matematiche dalla fine dell’ottocento ai nostri giorni per tentare di interpretare il ruolo che queste posizioni hanno avuto e/o hanno ancora sull’insegnamento delle Matematiche.

Sarà uno sguardo panoramico sulle varie correnti di pensiero rimandando di volta in volta alla letteratura specialistica. Attraverso questi percorsi si cercherà di individuare l’eventuale “paradigma<sup>2</sup>” delle Matematiche.

Un ruolo rilevante lo hanno avuto la logica e l’algebra della logica. Esse hanno influito, in questo secolo passato (‘900), alle riflessioni sui fondamenti in modo rilevante.

Le riflessioni sul ruolo delle “Matematiche Elementari da un punto di vista superiore” consentiranno di comprendere alcuni passaggi della trasposizione didattica in un determinato periodo storico.

L’esempio proposto sul Postulato di Eudosso-Archimede consentirà di chiarire il ruolo delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche per un utilizzo nello studio della comunicazione delle Matematiche.

### **1.1 Quale il Paradigma delle Matematiche alla fine dell’800.**

Possiamo individuare due modi di vedere l’attività matematica nella cultura classica. Da una parte vi è l’attività di concettualizzazione di Platone che ha avuto un ruolo importante in quello che noi oggi chiamiamo “matematizzazione delle realtà”.

Altro discorso riguarda Aristotele che, attraverso l’organizzazione della logica bivalente, caratterizzerà il modo di argomentare nella cultura occidentale. La geometria Euclidea, primo linguaggio strutturato nella storia della matematica, rappresenta un modello della logica bivalente Aristotelica. In particolare l’argomentazione farà un passo in avanti notevole con lo strumento della “dimostrazione per assurdo”.

Il paradigma della matematica, in questo momento è quello relativo alla Geometria Euclidea attraverso i seguenti significati:

- La Geometria Euclidea come prima rappresentazione del mondo fisico: questo è anche il messaggio recuperato da Platone.
- La Geometria Euclidea come modello della Logica bivalente e quindi modello di riferimento dell’argomentare nella cultura occidentale: il messaggio Aristotelico.
- La Geometria come sistema ipotetico-deduttivo. Messaggio recepito a partire dalla fine dell’800. Hilbert lo riprende per rifondare la Geometria Euclidea. I Bourbakisti ne hanno fatto un programma per la classificazione delle Matematiche negli anni ‘30. Corrisponde a quello che oggi la comunità matematica definisce come Modelli Sintattici e Modelli Semantici<sup>3</sup>.

La Geometria come sistema ipotetico-deduttivo porta ad una consapevolezza matura di questo paradigma nella comunità scientifica occidentale.

---

<sup>2</sup> Per “Paradigma” di una data disciplina si intende l’insieme delle regole riconosciute come valide da una determinata comunità scientifica in un determinato periodo storico. Tale insieme di regole permette di produrre risultati significativi per la disciplina.

<sup>3</sup> M. Luisa Dalla Chiara Scabia, *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, 1968, Milano.

L'algebra viene acquisita nel mondo occidentale soltanto nel 1200 con Fibonacci<sup>4</sup> ed avrà una maturazione di circa 600 anni prima di essere riorganizzata come linguaggio autonomo e grammaticalmente definito.

L'analisi Classica avrà forse un periodo di sistematizzazione inferiore (dal '600 alla seconda metà dell'800) ma un dibattito più accentuato per la sua riorganizzazione. Si pensi alla disputa Newton-Leibnitz, alle critiche di Berkeley<sup>5</sup>, alla difficoltosa genesi di “funzione continua”<sup>6</sup> ed infine alla sistemazione dei Numeri Reali (Dedekind).<sup>7</sup>

Il paradigma tenderà a cambiare nel momento in cui si cercherà di cominciare a sistematizzare i linguaggi matematici a partire dagli inizi del '900. Questa attività è naturalmente compresa in misura preponderante nel lavoro del secolo precedente. Nel senso che, come abbiamo visto per l'algebra e l'analisi, la loro storia veniva da più lontano, ma l'intensa attività dell'800 su molti linguaggi matematici ha avuto il riconoscimento nel secolo successivo.

Quella che viene chiamata come “Crisi dei Fondamenti” in molti testi di Filosofia o Storia della Logica e delle Matematiche altro non è che una prima *sistematizzazione* delle **Matematiche**. La consapevolezza dei linguaggi matematici comincia a prendere corpo con questa “Crisi dei Fondamenti”. In tale momento confluiscono sia la comunità dei Matematici che dei Filosofi ed una terza categoria nascente e cioè quella dei Logici. Sarà questa ultima che tenterà di tirare le fila del problema sino ai giorni nostri.

## **1.2 Logicismo, Formalismo, Intuizionismo e Costruttivismo.**

La classificazione di queste tre aree di pensiero è storicamente accettata e corrisponde ai diversi modi di sistematizzare le matematiche secondo punti di vista differenti.

Classificazioni più dettagliate si potranno ritrovare nel lavoro di C. Mangione e S. Bozzi<sup>8</sup> e G.Lolli<sup>9</sup>.

Una considerazione preliminare va fatta. E' da tenere presente che i problemi che venivano fuori attraverso le Antinomie e i Paradossi erano legati ad una sistemazione del concetto di “Infinito” all'interno dei vari linguaggi matematici, della distinzione del piano sintattico da quello semantico e dalla incapacità di riconoscere i

---

<sup>4</sup> Viene indicato questo lavoro di Fibonacci “Liber Abaci”, ma in effetti l'algebra era già entrata in occidente con i matematici arabi. In particolare si segnalano i lavori: 1) Mahdi Abdeljaouad (2002), *Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.11, Palermo, <http://math.unipa.it/~grim/quaderno11.htm>. 2) Mahdi Abdeljaouad (2003), *Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.11, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/articles.htm>.

<sup>5</sup> George Berkeley (1685, 1753) arcivescovo, fu uno dei critici più severi nei confronti del calcolo infinitesimale soprattutto per quanto riguarda la sintassi del linguaggio. Le sue critiche, che avevano motivazioni teologiche, furono di grande aiuto alla comunità matematica per una migliore sistemazione del calcolo infinitesimale.

<sup>6</sup> Si veda a questo proposito il testo di Imre Lakatos, *Dimostrazioni e Confutazioni*, Feltrinelli, 1979, Milano.

<sup>7</sup> Bottazzini, *Il flauto di Hilbert (Storia della matematica moderna e contemporanea)*, Utet, 1990, Torino. M. Kline, *Storia del pensiero matematico* (2 volumi), Einaudi, 1992, Torino.

<sup>8</sup> *Storia della Logica da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, 1993.

<sup>9</sup> G. Lolli, *La Filosofia della Matematica*, Il Mulino, 2002, Bologna.

diversi piani logico-linguistici degli strumenti dell’argomentare come nel caso della Dimostrazione per Assurdo<sup>10</sup>.

**Logicismo** La Matematica si riconduce alla Logica. Nel 1884 Frege pone il problema della fondazione dei numeri Naturali tentando di dimostrare il carattere analitico dei giudizi aritmetici entrando in contrasto con Kant (giudizi sintetici a-priori: proposizioni della matematica; giudizi analitici: Logica). Frege ha avuto il merito di avere stabilito, per la prima volta, un legame tra Matematica e Logica.

Il Logicismo venne poi affrontato da Russell il quale mise in evidenza il famoso Paradosso sugli Insiemi rivedendo il lavoro di Frege e che tentò di superare attraverso la Teoria dei Tipi. Nella teoria ramificata dei Tipi non si può parlare di numeri Reali che soddisfino ad una certa condizione ma soltanto di tutti i Reali di un dato ordine che soddisfano quella condizione. Il tentativo del Logicismo non riesce a fornire una sistematizzazione delle matematiche. Lo studio della Logica era ancora agli inizi.

Elementi caratterizzanti il Logicismo:

- accettazione dell’infinito in atto;
- uso indiscriminato della dimostrazione per assurdo.

**Formalismo** In questa corrente Hilbert è l’esponente più significativo. Effettua una rifondazione critica degli Elementi di Euclide<sup>11</sup> evidenziandone l’aspetto ipotetico-deduttivo. La novità importante è quella di avere inserito la “dimostrazione” negli oggetti matematici. Va anche inserita la “Teoria assiomatica degli Insiemi”<sup>12</sup>. L’infinito diviene un assioma. Si esclude il Paradosso di Russell sull’Insieme di tutti gli Insiemi ma non si riesce a definire i transfiniti di Cantor. L’introduzione di un assioma che permetta la potenza (ultraprodotto) consentirà successivamente di poter definire i transfiniti. Vi è sempre la difficoltà di poter definire livelli logico-linguistici via via più ampi.

**Intuizionismo** L’esponente di spicco di questa corrente fu Brouwer il quale accettava una Matematica finitista. E cioè:

- non accettazione delle dimostrazioni per assurdo (negazione del principio del terzo escluso);
- non accettazione dell’infinito in atto.

Questa corrente ha avuto il pregio di mettere in evidenza quelle parti di matematica che potevano essere *costruite* seguendo i due principi suddetti. Numerosi sono stati i matematici che hanno seguito questa impostazione. Le osservazioni di Brouwer erano legate al fatto che l’accettare questi principi portava a contraddizioni in alcuni settori della matematica. Evidentemente l’accettazione dei due principi invece porta a strumenti dimostrativi più veloci ed a volte più eleganti. Le teorie di Cantor e Dedekind non venivano accettate.

Una posizione contemporanea dell’intuizionismo è il **Costruttivismo**. Una definizione costruttiva si baserà sull’enumerazione di alcuni procedimenti riconosciuti come costruttivi, che non facciano cioè ricorso all’infinito attuale. Quindi una definizione costruttiva sarà ostensiva.

Il contributo contemporaneo al costruttivismo avviene attraverso la precisazione di insieme decidibile, insieme numerabile, funzione computabile, mettendo in evidenza le loro relazioni. I sistemi formali della logica moderna si muovono quasi tutti a livello costruttivo come ad esempio le ricerche sulla ricorsività.

---

<sup>10</sup>Nel momento in cui si considera l’espressione “Supponiamo falsa la tesi” ci veniamo a trovare in un livello Logico-linguistico differente rispetto alla possibilità di poter dedurre costruttivamente. Ed è per questo che gli Intuizionisti non accettarono questo tipo di dimostrazione. E per lo stesso motivo gli intuizionisti non accettarono l’infinito, in quanto ci porta quasi sempre a situazioni di autoreferenzialità.

<sup>11</sup>D. Hilbert, *I fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano, 1970.

<sup>12</sup>P.J. Cohen, *La teoria degli insiemi e l’ipotesi del continuo*, Feltrinelli, Milano, 1973.

Queste tre correnti di pensiero<sup>13</sup> avevano messo in evidenza i problemi legati al rapporto Logica-Linguaggio nel momento in cui dovevano definire l’infinito. D’altro canto l’infinito consente alle matematiche di poter procedere molto più agevolmente nel tentativo di risolvere ampie classi di problemi.

Bisognava in qualche modo superare queste posizioni. In particolare il formalismo ed il logicismo avevano in comune molte più caratteristiche di quanto non fossero le loro differenze. E comunque queste tre correnti di pensiero avevano messo in evidenza degli aspetti importanti delle Matematiche.

Il Logico e Filosofo della matematica Hao Wang<sup>14</sup> sostiene che sono confluiti, nella seconda metà del ‘900 (neopositivismo logico), nella **metalogica**:

<b>Metodo</b>	Nel programma formalista si analizzano le questioni di completezza e coerenza che verranno chiamati <i>metamatematica</i> (o <i>teoria della dimostrazione</i> ). In questa parte saranno poi studiati i Modelli Sintattici e i Modelli Astratti (rifondazione dei Bourbakisti delle Matematiche sulla base semantica degli insiemi).
<b>Assiomatico</b>	
<b>Logica</b>	Calcolo dei predicati del 1° ordine <sup>15</sup> . Teoria assiomatica degli insiemi (calcolo predicativo di ordine superiore). Studio dei sistemi formali e linguaggi formali in generale.
<b>Semiotica</b>	Scienza generale dei segni e dei linguaggi strutturata in tre parti: Sintassi (si studiano le relazioni tra le espressioni); semantica (si analizzano le espressioni e i loro significati); pragmatica (si interpretano i segni con riferimento quindi a chi usa il linguaggio). Sintassi e Semantica sono studiate all’interno della comunità dei Logici e Matematici, la Pragmatica, di difficile trattazione formale, non viene presa in considerazione in questo contesto.

Questi aspetti della metalogica vengono messi in relazione con il positivismo logico ed ancora con il neopositivismo logico.

*“Così, un ramo della scienza assume un linguaggio formale in cui trovano posto formule logicamente vere e formule vere di fatto: le prime hanno un campo di validità logica universale, mentre le altre hanno un campo di validità più ristretto; grosso modo, il campo di validità logica di una formula è l’insieme di tutti i mondi possibili in cui essa è vera. Si pensava che il successo ottenuto dalla metalogica nelle discipline matematiche si potesse trasferire alla fisica e perfino alla biologia o alla psicologia.”*  
[Wang, op. cit., p. 184]

### **1.3 Una prospettiva storica della logica dalla fine dell’800 ad oggi.**

Nella seconda metà dell’Ottocento vengono a delinearsi due correnti distinte di approccio alla Logica<sup>16</sup>. Già in Leibniz convivevano queste due anime:

---

<sup>13</sup> Sia in Lolli (op. cit.) che in Scaruffi (La Mente Artificiale, 1991) vengono presi in considerazione, con motivazioni differenti, numerosi altri punti di vista per la filosofia delle matematiche: Nominalismo, Realismo, Strutturalismo, Deduttivismo, etc... Questa nostra analisi si basa essenzialmente per la prima metà del ‘900. Nella seconda metà l’Informatica Teorica e l’Intelligenza Artificiale hanno rimesso in discussione questo tipo di classificazione. Il dibattito resta comunque aperto ad oggi.

<sup>14</sup> H. Wang, *Dalla Matematica alla Filosofia*, Boringhieri, Torino, 1984.

<sup>15</sup> La logica predicativa del 1° ordine usa quantificatori limitati alle variabili individuali:  $\exists, \forall$  riferiti a singoli oggetti matematici.

La logica predicativa del 2° ordine usa quantificazioni di variabili predicative e/o funzionali. Due specie di variabili: 1) varia sugli elementi delle strutture; 2) varia su sottoinsiemi delle strutture. I linguaggi infinitari sono inclusi (es. l’analisi classica).

- Logica come dottrina del sapere e dello sviluppo del pensiero (nella cultura occidentale il riferimento primo è quello di Aristotele). Esprimere un contenuto attraverso segni scritti in modo più preciso e più chiaro di quanto non sia possibile con la *lingua caratteristica* di Leibniz.
- Logica formale (Logica Matematica), Algebra della Logica (*Calculus ratiocinator*).

Ma con G. Boole (1815-1864) si comincia a delineare una ulteriore frattura. Mentre la Logica come dottrina del sapere e dello sviluppo del pensiero ha un momento di pausa, la Logica formale e la logica algebrica cominciano un loro percorso autonomo spinte da problematiche diverse come la sistematizzazione delle matematiche agli inizi del secolo e la “computer science”.

Questa schematizzazione non tiene conto di precursori, filosofi e/o matematici che in qualche misura hanno preparato il passaggio come spesso accade nella storia del pensiero<sup>17</sup>.

### 1.3.1 Da George Boole a Charles Sandres Peirce

Un altro filosofo che consideriamo importante è Peirce (1839-1914) il quale rappresenta, come Leibniz, un pensatore molto versatile, creativo e che si è occupato di svariati temi riguardanti la filosofia del linguaggio.

A partire dal 1847, anno di pubblicazione del *The Mathematical Analysis of Logic*, George Boole elabora la sua concezione formalista dell'algebra secondo cui la caratteristica essenziale della matematica non è tanto il suo contenuto quanto la sua forma. Qualsiasi argomento venga presentato in modo tale che esso consista di simboli e di precise regole di operazioni sui simboli, le quali siano soggette soltanto alla condizione di presentare una coerenza interna, tale argomento fa parte della matematica. L'impostazione booleana della ricerca logica è caratterizzata da tre elementi generali:

1. la dimensione linguistica (la teoria della logica è intimamente connessa con la teoria del linguaggio; in quest'ottica il linguaggio è uno strumento, non indispensabile, della logica);
2. la concezione psicologista della logica (costituisce la garanzia epistemologica del discorso logico booleano: la giustificazione ultima di un procedimento e di un'operazione logici risiede sempre in un atto mentale);
3. la convinzione della natura matematica del processo logico inferenziale (Boole 'recide' definitivamente i legami della logica con l'ambito filosofico, inserendola autonomamente fra le scienze matematiche).

Dopo l'opera di Boole del 1847 e l'*Investigation of the Laws of Thought* del 1854 «venne sviluppandosi tutto un filone di ricerche sull'algebra della logica che culminò, verso la fine le XIX secolo e gli inizi del XX, in una presentazione sistematica della materia, più avanzata e comprensiva rispetto al sistema originariamente esposto da

---

<sup>16</sup> Per una più esauriente discussione su questo argomento vedi anche F.Spagnolo-E.Toscano, Un percorso interpretativo della logica del '900, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.11, 2001, <http://dipmat.math.unipa.it/~grim>.

<sup>17</sup> Il riferimento principale sarà quindi: C. Mangione - S. Bozzi, *Storia della Logica da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti, 1993.

Boole». <sup>18</sup> La teoria booleana non era infatti «*ab omni naevo ‘vindicata’*»: l’operazione «+» poteva essere eseguita solo fra classi disgiunte (*somma esclusiva*), le operazioni inverse (e in particolare l’operazione di divisione «/») non erano logicamente interpretabili, coefficienti numerici diversi da 0 e 1 non erano ammissibili, etc. Insomma, la ‘rivoluzione booleana’ non si era ancora del tutto compiuta.

Fra i successori di Boole, il tedesco Ernst Schröder (1841-1902) si dedica essenzialmente ad un’opera di sistemazione organica e generale dell’elaborazione dell’algebra della logica, mentre a Charles Sanders Peirce (1839-1914) sono dovuti risultati più originali e significativi.

Il lavoro di del matematico americano si sviluppa, in particolare, secondo quattro linee direttrici:

1. chiarificazione del rapporto fra logica e matematica;
2. approfondimento e sistemazione del calcolo booleano;
3. interpretazione proposizionale del calcolo booleano;
4. impostazione e sviluppo della logica delle relazioni (anticipazione dell’opera di Frege e Russell).

#### **1.4 E i Bourbakisti ...**

*“La logica e la teoria degli insiemi forniscono i fondamenti delle strutture matematiche in due modi diversi. La logica fornisce sia l’inquadramento per una definizione o convenzione implicita secondo la quale qualsiasi struttura che soddisfi certi postulati si chiama campo, o gruppo, o altro ancora, sia anche una giustificazione ipotetica dei teoremi sulle strutture come teoremi condizionali della logica. La teoria degli insiemi fornisce la gamma delle possibili interpretazioni dei risultati.”*  
H. Wang op. cit. [p. 269]

Il tentativo di dare un contenuto semantico all’attività dei matematici è stato compiuto dai Bourbakisti intorno agli anni trenta attraverso la nozione di struttura. La base semantica della struttura è la teoria degli insiemi. Il programma classificatorio delle strutture matematiche si inquadra nei Modelli Semantici.

In un lavoro di F. Le Lionnais<sup>19</sup> i Bourbakisti presentano quello che può venire considerato come il loro manifesto: L’architettura delle matematiche (La Matematica, o le Matematiche?).

In questo articolo i Bourbakisti mettono in evidenza le relazioni tra formalismo logico e metodo assiomatico, tra sistema formale e struttura, questo quindi consente loro di avere uno strumento particolarmente efficace per poter classificare le matematiche secondo tre grandi categorie strutturali: algebriche, d’ordine e topologiche. In questa classificazione la teoria degli insiemi rappresenta la base semantica.

L’obiettivo classificatorio dei Bourbakisti è messo in evidenza già all’inizio dell’articolo: “...all’inizio di questo secolo, si è dovuto a poco a poco rinunciare a vedere nelle matematiche una scienza caratterizzata da un oggetto ed un metodo unico; si

<sup>18</sup> C. Mangione – S. Bozzi, Op.Cit., p. 113.

<sup>19</sup> *Les Grandes courantes de la pensée mathématique* (F. Le Lionnais), Cahiers du Sud, 1948.

aveva piuttosto tendenza a considerarle come "una serie di discipline fondate su delle nozioni particolari, delimitate con precisione", collegate da "mille cammini di comunicazione", permettendo ai metodi propri ad una di queste discipline di farne progredire una o parecchie altre. Oggi, al contrario, noi crediamo che l'evoluzione interna della scienza matematica ha, malgrado le apparenze, rinchiuso più che mai l'unità delle sue diverse parti, e vi ha creato una sorta di nucleo centrale più coerente che sia mai esistito. L'essenziale di questa evoluzione è consistita in una sistemazione delle relazioni esistenti tra le diverse teorie matematiche, e si riassume in una tendenza che è generalmente conosciuta sotto il nome di metodo assiomatico."[op. cit., p. 36-37]

La posizione è quella di formalizzare il linguaggio della matematica "ordinandone (o talvolta stabilendone) il vocabolario e chiarificando la sintassi" ma questo da solo non basta in quanto il formalismo da solo è incapace di fornire l'intelligibilità profonda delle matematiche. "...Il metodo assiomatico trova il suo punto di appoggio nella convinzione che, se le matematiche non sono una concatenazione di sillogismi sviluppatasi a caso, esse non sono nemmeno un insieme d'artifici più o meno astuti, fatti di accostamenti fortuiti in cui trionfi la pura abilità tecnica."[op. cit., p. 38]

La "struttura" viene quindi fuori come una classe d'equivalenza su un insieme di sistemi di assiomi, e tutto questo attraverso una manipolazione sperimentale sui sistemi d'assiomi.

La struttura diventa quindi uno strumento per il matematico che gli consente, una volta trovate delle relazioni soddisfacenti agli assiomi di una struttura conosciuta, di disporre di un arsenale di teoremi generali relativi alle strutture di quel tipo.

Con la nozione di struttura si viene a dare corpo alle ricerche sui sistemi formali propri della logica ed alle successive ricerche sulla teoria dei modelli.

Va dato merito ai Bourbakisti di avere operato la prima grande classificazione delle matematiche dopo Euclide che abbia avuto un assetto abbastanza organico.

Dalle ricerche dei Bourbakisti sono comunque escluse le questioni relative alla completezza dei sistemi d'assiomi ed ai risultati di Gödel<sup>20</sup>. Il ruolo della semantica è

---

<sup>20</sup> Kurt Friedrich Gödel (Brno 1906 - Princeton 1978) si pose il problema di analizzare gli eventuali limiti della formalizzazione individuando i seguenti problemi:

- sintattico: sino a che punto possiamo essere certi delle nostre deduzioni in un sistema formale ben definito?

- semantico: quale è il significato di "vero" in un sistema formale?

I passi del ragionamento di Gödel sono, schematicamente, i seguenti:

1° Si costruisce una formula aritmetica  $G$  che rappresenta la proposizione metamatematica: "la formula  $G$  non è dimostrabile". Le espressioni di una teoria formalizzata sono trasformate attraverso sequenze di prodotti di numeri primi, per cui ad ogni espressione corrisponde un numero di Gödel. Quindi le espressioni metamatematiche diventano proposizioni aritmetiche e quindi formalizzabili.

2° Si dimostra che  $G$  è dimostrabile se e solo se "non  $G$ " è dimostrabile.

3° Si dimostra che  $G$  è una formula aritmeticamente vera (nel senso che afferma che ogni intero possiede una certa proprietà aritmetica, che può essere esattamente definita ed è posseduta da qualsiasi intero assegnato).

I teoremi fondanti della teoria gödeliana sono:

- 1° Teorema di Gödel: Dato che  $G$  è vera e nello stesso tempo indecidibile possiamo concludere che l'Aritmetica non è completa. (anche se si potessero aggiungere altri assiomi, si può sempre costruire un'altra formula vera ma indecidibile).
- 2° Teorema di Gödel: Non è possibile dimostrare l'autocompatibilità dell'aritmetica con gli strumenti dell'aritmetica stessa. (Ogni sistema sufficientemente potente, assiomatizzabile è incapace di dimostrare una proposizione la quale esprima, in modo canonico, la coerenza del sistema)



quello relativo al pluralismo di sistemi di assiomi che verificano una stessa struttura, è quello cioè dei modelli.

### **1.5 Uno schema di riferimento**

Lo schema sottostante ci permette di avere una visione d’insieme del problema. Naturalmente esso è assolutamente indicativo e da approfondire nei particolari. Ci si riferirà di volta in volta ad una bibliografia.

Intanto possiamo evidenziare alcuni fra i mediatori significativi relativi ai grandi temi del ’900:

- Categorie;
- Teoria dei Modelli;
- Teoria degli Insiemi;
- Filosofia del linguaggio.

<b>Algebra della Logica</b>	<b>Collegamenti: Insiemi, Matematiche</b>	<b>Linguistica: Filosofia del linguaggio</b>	<b>Grande Logica</b>
Algebra della Logica (Boole, 1840) <sup>21</sup> Approccio semantico: Dominio di interpretazione, soddisfacibilità, coerenza, completezza (sintattica: non controllabile; semantica (adeguatezza), validità, verità, ecc.	Approccio algebrico-assiomatico: molteplicità di teorie, vari universi di interpretazioni.  Cantor e una grammatica dell’infinito in atto.		Fondamenti delle matematiche Approccio sintattico: Assioma, Dimostrazione, Regole di inferenza, non contraddittorietà, ecc.
1860: Sistemazione da parte dei successori di Boole della logica (pag.155) Schroder (1841-1902). Reticolo (Strutture ordinali), Ideale.	Grandezze Geometriche: concetti base dell’Analisi (nucleo duro). Costruzione del continuo su basi aritmetiche (Weirstrass, Cantor, Dedekind)		Aritmetizzazione (Dedekind, 1831-1916) Frege (1848-1925): rapporto senso e denotazione, conclusione del proceso di aritmetizzazione) (dal 1879 in poi)
Post: completezza funzionale. Teoria dei Modelli: Lowenhein e Skolem (1919)	Teoria assiomatica degli insiemi come la "Grande Logica": Zermelo(1908). Fondazione insiemistica infinitaria.	Evidenza del ruolo della simbolizzazione.	Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943): Fondazione delle geometrie: necessità del rigore.La geometria come sistema ipotetico - deduttivo.  Aritmetica come una struttura Logica. Fondazione dell’aritmetica (Induzione).
Logiche Modali e Logiche intuizioniste. Teoria dei Modelli		Colpo definitivo alla logica soggetto-predicato.	Russell: Logica relazionale, teoria dei tipi. Ramsey, Wittgenstein, Carnap, Quine: Giustificare gli stessi assiomi con leggi logiche. Assiomi sintetici:

<sup>21</sup> De Morgan (1806-1871) sistema la logica classica e prosegue il lavoro di Boole, getta le basi per la logica delle relazioni. (p.122 nota definizione di logica).

			infinito, riducibilità, scelta. (di tipo estensionale)
	Skolem e ZF (1930). G <sup>del</sup> : teorema di completezza: momento unificante dei due approcci. (dagli anni trenta in poi l'algebra della logica è un ramo della logica matematica)		H. Poincarè (1845-1912) e Brouwer (1881-1966) come propulsori di nuovi problemi mettono in discussione, aprono il dibattito. Intuizionismo, Costruttivismo.
Filtro, Ideale massimale, Ultrafiltri	Sulla struttura delle Algebre astratte (Birkoff (1935).		
Un algebra quozientata sugli ultrafiltri: 1. Algebre diagonali (Magari, 1968), G <sup>del</sup> , autoriferimento. 1. Algebre proiettive	Rappresentabilità (teoremi di rappresentazione). Ogni algebra di Boole è isomorfa ad un campo d'insiemi.		
1959 - Le Logiche: Kripke ed i mondi possibili.	Punto d'incontro: Linguistica, Informatica teorica, Matematiche, Intelligenza artificiale.		
Categorie e Logiche Categoriali. Potenza espressiva.			
Logica Quantistica			

### **1.6 La riflessione oggi sui fondamenti: Risvolti su discipline recenti come Informatica, Cibernetica, Intelligenza Artificiale.**

Lo studio sui fondamenti delle matematiche ha avuto, almeno sino agli anni trenta, come soggetti attivi i Matematici ed i Logici<sup>22</sup>.

Oggi i Matematici pare che non si preoccupino molto dei problemi fondazionali delle matematiche, la sistemazione operata dai Bourbakisti (vedi paragrafo precedente) ha in qualche modo fornito un quadro di riferimento accettato da molti nella comunità matematica.

La posizione di comodo del "Platonista nei giorni feriali e Formalista nei giorni festivi" lascia intendere che:

1- l'attività di scoprire nuovi teoremi riferentesi al mondo delle idee giustifica una attività non necessariamente inseribile nella evoluzione storica dei linguaggi matematici e nei linguaggi naturali come linguaggi di mediazione per raggiungere la formalizzazione;

<sup>22</sup> Uno dei movimenti neopositivisti particolarmente attivi è stato il "circolo di Vienna" (1929-1936) che attraverso la lettura critica del *Tractatus Logico-Philosophicus* di L. Wittgenstein (1922) dedussero l'impostazione logico-sintattica dell'analisi critica del valore conoscitivo delle scienze. Tra i più autorevoli esponenti: M. Schlick, R. Carnap, O. Neurath, F. Waismann, K. Gödel, K. Popper.

2- la comunicazione al mondo esterno dei risultati richiede una dignitosa rigorizzazione. Per rigorizzazione si intende un "rigore" accettato dalla comunità dei matematici in un determinato periodo storico.

Mentre rimangono i Logici a tentare di riorganizzare l'esistente in termini epistemologicamente soddisfacenti.

In questi ultimi anni si sono inseriti, nei problemi riguardanti i fondamenti, gli informatici teorici e coloro che si occupano di cibernetica e/o intelligenza artificiale. Le problematiche portanti sono legate:

- alla possibile simulazione delle attività di pensiero con una macchina;
- alla identificazione dei processi mentali con processi algoritmico-meccanici.

Queste due problematiche rimettono continuamente in discussione i modelli teorici interpretativi e nello stesso tempo le questioni fondazionali ad essi relative.

La situazione dinamica in cui si trova la comunità scientifica della Cibernetica e dell'Intelligenza artificiale è ben messa in evidenza dalla seguente frase di Penrose<sup>23</sup>: "Il cervello non somiglia a un computer ma piuttosto a un computer che cambia continuamente."

I logici dal canto loro si sono ben inseriti nel dibattito anche se, al loro interno, si pongono problemi riguardo al ruolo della logica. Se cioè la logica sia solo uno strumento utilizzato dall'informatica o se vi può essere un'interazione dialettica.

L'Informatica teorica si occupa prevalentemente di teoria dei linguaggi, calcolabilità, connessionismo (reti neurali), teorie della complessità.

La Cibernetica oggi analizza prevalentemente gli stessi argomenti mettendo l'accento sugli aspetti fondazionali dell'intelligenza artificiale.

"È accettato da una parte rilevante della comunità scientifica dell'Intelligenza Artificiale, ma non da tutta, che un utile punto di partenza è l'assunzione dell'algoritmicità dei processi mentali o, detto in altro modo, l'ipotesi computazionale della mente."<sup>24</sup>

Mentre l'Informatica teorica si muove su ambienti di lavoro abbastanza inseribili nella classificazione Bourbakista, la Cibernetica aggiunge il problema della complessità come problema aperto nell'ambito della teoria del significato.

### **1.7 Quale è oggi la posizione?**

Se oggi si facesse la stessa operazione che Hilbert fece con i "problemi aperti" della matematica agli inizi del secolo, come afferma H. Wang [op. cit. ] [p. 260] potremmo indirizzarci verso:

- Certezza e necessità (sintetico a priori o no);
- esistenza matematica (e metodi di costruzione);
- forza trainante della matematica (utilità, attrattiva estetica e "arte per l'arte", mode e loro cause, curiosità);

---

<sup>23</sup> R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore (La mente, i computer, le leggi della fisica)*, Rizzoli, 1992, Milano.

<sup>24</sup> S. Termini, *Alcune osservazioni sui fondamenti dell'intelligenza artificiale*, Agora, n.9, 1990, Universitade de Santiago de Compostela. (p. 52)

- attività matematica (notazione e abbreviazione, euristica, il fenomeno dei matematici non vedenti);
- natura delle dimostrazioni matematiche (formalizzazione ed evidenza intuitiva);
- esposizione, insegnamento e meccanizzazione della matematica (problemi di comunicazione piuttosto che di ottenimento di nuovi frammenti di matematica, possibilità di una critica matematica come analogo della critica letteraria);
- matematica pura in contrapposizione a matematica applicata (criterio per giudicare il valore dei modelli matematici di situazioni empiriche, distanza dalle applicazioni);
- matematica come “linguaggio”.

Le Matematiche come linguaggi in una prospettiva Metalogica possono darci la possibilità di poter riflettere su due dei punti segnalati da Wang e cioè quelli riguardanti l’insegnamento e la Matematica come “linguaggio”.

In questa prospettiva evidentemente la *Pragmatica* ha un ruolo rilevante e la possibilità di poter *modellizzare le “Situazioni di Insegnamento”* rappresenta una sfida interessante. Viene anche presa in considerazione la ricerca nel settore dell’intelligenza artificiale che consentirebbe di acquisire dei dati riguardanti lo studio del “contesto” attraverso tutti gli strumenti che si ritengono indispensabili: logiche modali, intenzionali, ecc.

*La Teoria delle Situazioni Didattiche* si situa in questo contesto e potrebbe rappresentare uno strumento utile per “modellizzare” il *contesto Allievo-Sapere-Insegnante-Situazione attraverso approcci paradigmatici differenti*. Si ritiene tuttavia necessaria l’esigenza di creare una sorta di meta paradigma che permetta di affrontare il problema attraverso argomentazioni più convincenti. (In particolare nel capitolo 5)

### **1.8 L’enciclopedia delle Matematiche Elementari.**

Agli inizi del secolo l’associazione “Mathesis”<sup>25</sup> riteneva indispensabile la pubblicazione di una “Enciclopedia delle Matematiche Elementari”.

Quest’opera doveva avere lo scopo di “presentare ai Docenti di Matematica ed agli allievi delle Scuole Universitarie di Magistero<sup>26</sup> un quadro completo delle *Matematiche Elementari*, con l’intendimento non solo di risparmiare tempo e fatica a chi desidera notizie precise e sicure su qualche argomento elementare, ma con la mira principale di diffondere la cultura delle Matematiche tra quanti, non avendo fortuna di risiedere in centri universitari, non possono facilmente procurarsi materiale di studio, ne possono allargare le proprie cognizioni ed indirizzare proficuamente l’attività personale”.<sup>27</sup>

Oltre a presentare le Matematiche Elementari generalmente oggetto di studio nelle scuole secondarie superiori, sono presentate alcune Teorie Complementari che hanno lo scopo di approfondire i temi delle Matematiche Elementari o, a volte,

---

<sup>25</sup> Associazione di insegnanti di matematica che già dalla fine dell’800 operava sul territorio nazionale con finalità legate alla diffusione della cultura matematica. Dal 1908 le finalità dell’associazione furono anche di carattere scientifico.

<sup>26</sup>Le scuole di Magistero altro non erano che i Corsi di Specializzazione post laurea (SISIS, Scuola Interuniversitaria di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario) che sono operanti in tutte le sedi universitarie italiane.

<sup>27</sup>Dalla prefazione del 1° volume (parte 1<sup>a</sup>) a cura di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli. Pavia, Milano, 1929.

rinnovarle attraverso la proposta di temi della ricerca ritenuti interessanti. I curatori dell’opera avevano anche l’intenzione di estendere gli argomenti al 1° biennio di insegnamento universitario. Infine sono trattati argomenti riguardanti la *Storia delle Matematiche* e *Questioni pedagogiche e didattiche*.

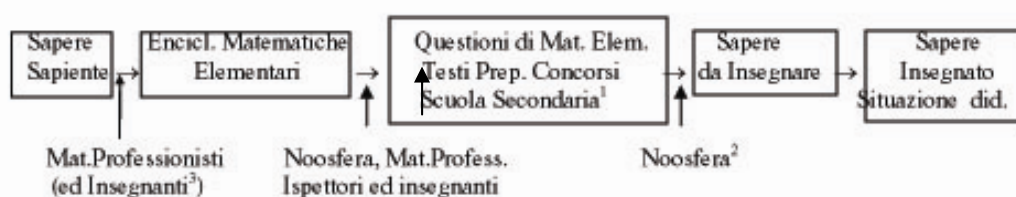
L’indirizzo dell’Enciclopedia mette ben in risalto la ricerca dei vari *punti di vista* nell’affrontare e sistematizzare un determinato concetto o argomento matematico. La presentazione dei punti di vista è sempre accompagnata da citazioni storiche e bibliografiche. Le citazioni storiche tengono conto della ricerca storica già consolidata e forniscono un quadro di riferimento semantico molto interessante.

L’opera è divisa in tre parti.

- La prima parte (in due volumi 1929) è dedicata all’Analisi con un percorso che tiene conto del processo di rifondazione delle Matematiche degli inizi del secolo: Logica, Aritmetica, Teoria dei Numeri, Algebra, Funzioni, Analisi.
- La seconda parte (in due volumi 1936) è dedicata alla geometria: Geometria, Teoria della Misura, Geometria del triangolo, Trasformazioni geometriche, Calcolo vettoriale, Geometria analitica, Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Geometrie non Euclidee e non Archimedee, Geometria elementare e matematiche superiori.
- La terza parte è divisa in tre volumi, i primi due riguardanti le Applicazioni delle matematiche (1949), il terzo riguardante la statistica (1962). Nel secondo volume vengono presentati tre articoli destinati a dare un significato particolare all’opera: 1) Storia della Matematica Elementare, 2) Caratteri e indirizzi della matematica moderna, 3) Questioni didattiche.

Ma quale ruolo può aver giocato l’introduzione delle Matematiche Elementari nell’insegnamento delle matematiche?

Per interpretare questo ruolo sarà utile riferirsi ad una riflessione sulla Trasposizione Didattica operata dalla Enciclopedia delle Matematiche Elementari e più in generale dalla acquisizione da parte della comunità matematica delle *Matematiche Elementari da un punto di vista superiore*:



Le Matematiche Elementari, frutto di elaborazione da parte di associazioni culturali (Mathesis), Istituzioni ufficiali, riviste specializzate e divulgative rappresentano le mediazioni tra il Sapere Sapiente della ricerca ed il Sapere da Insegnare. Questa mediazione ha avuto nella tradizione Italiana due momenti particolari. Il primo riguarda il passaggio tra il Sapere Sapiente e l’Enciclopedia delle Matematiche Elementari visto come nuovo momento del Sapere Sapiente da riorganizzare nuovamente nei testi di preparazione ai concorsi delle scuole secondarie superiori e finalmente disponibile a poterlo riorganizzare come Sapere da insegnare da parte delle istituzioni scolastiche.

In questa impostazione le Matematiche Elementari assumono un ruolo importante. Esse rappresentano il riferimento dei possibili percorsi matematici per poter definire e quindi introdurre un determinato concetto matematico o un argomento completo.

Un ruolo diverso hanno avuto le *“Questioni riguardanti le Matematiche Elementari”* raccolte e coordinate da F. Enriques (1<sup>a</sup> edizione del 1900, Zanichelli, Bologna). L'impostazione è quella che classifichiamo come *indirizzo storico-epistemologico*. Luigi Brusotti nella Enciclopedia (Questioni Didattiche) considera il percorso seguito da F. Enriques come storico-critico. F. Enriques ha anche curato la edizione degli *“Elementi di Euclide e la critica Antica e moderna”* (A. Stock Editore, Roma, 1925, 4 volumi).

Nella prefazione al 1° volume vengono messi in evidenza due questioni: 1) l'indirizzo storico-epistemologico; 2) Il problema della trasposizione didattica:

*“Perché ogni volta che si cerca di spiegare ai giovani come la scienza universitaria si colleghi alle materie dell'insegnamento secondario e valga ad avvantaggiarne il possesso, cioè ogni volta che si vuole trasformare la dottrina in cultura o in abito e facoltà delle menti, sempre si è condotti a vedere metodi e problemi nella loro evoluzione storica. Al lume della quale la coscienza didattica, che ha dismesso gli abusi del logicismo, apprende veramente a superare il periodo di quella critica troppo arida ed angusta, senza ricadere nei vecchi errori che ne costituirono il giusto motivo.”*

L'articolo di L. Brusotti<sup>28</sup> chiarisce il passaggio tra Sapere Sapiente e Sapere da Insegnare. Viene presentato l'insegnamento matematico nei suoi aspetti culturali (costante il riferimento alla filosofia ed alla storia), si analizzano gli specifici indirizzi di scuola, i metodi di insegnamento.

Ci sembra interessante sottolineare la relazione messa in evidenza a p. 926 tra lingua Naturale e Linguaggio delle Matematiche: *“E' da osservarsi che il linguaggio delle matematiche, specie delle elementari, a differenza del linguaggio scientifico in generale, raramente conia vocaboli, ma piuttosto attinge al linguaggio comune, attribuendo però alle parole significati tecnicamente convenzionali, in cui spesso l'ente matematico risultava per astrazioni da oggetti aventi, per i loro caratteri differenziali, denominazioni diverse, ma una sola di queste veniva assunta dal matematico in senso astratto, consuetudine mantenuta anche quando, negli ulteriori sviluppi, le parole del linguaggio comune (gruppo, funzione, varietà, spazio, ordine, classe, genere, continuo, normale, regolare, ...) vengono variamente piegate a significato tecnico, per indicare concetti nuovi man mano introdotti. Invece in altri campi del sapere lo scienziato distingue ove il volgo accomuna (come avviene per la nomenclatura tassonomica delle scienze naturali e per la terminologia dei clinici), oppure introduce sostanze, congegni, processi nuovi (il che ha portato ai linguaggi caratteristici della chimica e delle varie branche della tecnica) e via dicendo.”*

Questa considerazione tra Linguaggio Naturale e Linguaggio matematico sottovaluta però il fatto che l'apparente somiglianza tra i due linguaggi può portare ad altri problemi. Nella comunicazione delle Matematiche il ricevente è convinto che l'emittente, dal momento che usa quel termine, possiede il concetto ed il suo campo

---

<sup>28</sup>Enciclopedia Matematiche Elementari, Volume terzo parte seconda.

semantico. Ciò può portare in errore in quanto la conoscenza del termine non corrisponde, generalmente, alla comprensione del concetto.

Ma il suddetto articolo sulle Questioni Didattiche trova il suo momento significativo nell’analisi dei libri di testo. Vengono analizzati i testi dal medioevo agli inizi dell’ottocento e dall’ottocento ai nostri giorni (sino alla metà del novecento). Questa analisi, ricca di spunti bibliografici, ci consente di recuperare, da un punto di vista di storia della didattica, i percorsi matematici più accreditati nell’insegnamento nella prima metà del secolo.

### **1.9 L’analisi epistemologica della disciplina**

Come abbiamo avuto modo di vedere nel paragrafo precedente l’analisi epistemologica delle Matematiche ha avuto in Italia una storia particolare, fa parte della nostra tradizione culturale. Questa tradizione culturale ha avuto nell’ottocento il suo momento di incubazione.

Grazie a questi presupposti siamo portati ad avere per l’analisi epistemologica delle matematiche e l’analisi storico-epistemologica una particolare sensibilità.

Per quanto riguarda l’analisi strettamente epistemologica tra i riferimenti più significativi possiamo considerare, oltre al lavoro di Enriques sulla Geometria Euclidea e le questioni riguardanti le *Matematiche Elementari*, il lavoro logico-epistemologico di G. Peano ed il lavoro di Veronese sui fondamenti della Geometria<sup>29</sup>.

Riferirsi all’*analisi epistemologica* significa riferirsi alla sistematizzazione che è stata data all’interno dei linguaggi matematici. Tale sistematizzazione non è, in generale, unica. Secondo gli approcci considerati, vengono scelti opportuni sistemi di assiomi e quindi modellizzazioni.

Ma non è soltanto la scelta di *una sistematizzazione* che ci assicura l’analisi epistemologica, è importante tenere presente tutte le possibili sistematizzazioni conosciute ad oggi e le rappresentazioni epistemologiche intese come rappresentazioni dei percorsi conoscitivi di un particolare concetto matematico. Questo ci consentirà di poter analizzare i percorsi di insegnamento/apprendimento a-priori. Potremo chiamare questa *l’analisi a-priori sintattica*.

Sarà fornito un esempio, nei prossimi paragrafi, di analisi epistemologica e successivamente storico-epistemologica relativa al Postulato di Eudosso-Archimede.

### **1.10 Analisi Storico-epistemologica**

L’analisi storico-epistemologica si differenzia da quella prettamente epistemologica perché cerca di ricostruire, attraverso l’indagine storica, i linguaggi matematici:

- attraverso percorsi che individuino la riorganizzazione della grammatica del linguaggio. Si pensi alle Geometrie non Euclidee o alla difficile gestazione della *continuità di una funzione di variabile reale* nella riorganizzazione dell’Analisi Classica dal seicento all’ottocento.

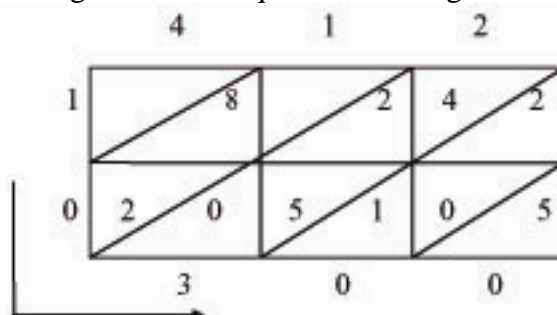
---

<sup>29</sup>Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Tipografia del Seminario, Padova, 1891. Il testo era indirizzato per le scuole di Magistero che preparavano all’insegnamento della matematica.

- attraverso il recupero di *significati* dimenticati. Si pensi ad esempio agli algoritmi riguardanti le 4 operazioni elementari<sup>30</sup>: ad esempio l'unico algoritmo per la moltiplicazione che comunemente è conosciuto è

$$\begin{array}{r} 34 \times \\ 15 \\ \hline 170 \\ 340 \\ \hline 510 \end{array}$$

ma esistono altri algoritmi come quello detto “a gelosia”:



La proprietà distributiva rappresenta l'ossatura dei due algoritmi presentati. Nel primo caso  $34 \cdot 15 = 34 \cdot (10 + 5) = 34 \cdot 10 + 34 \cdot 5 = 340 + 170 = 510$ . Nel secondo caso  $412 \cdot 25 = (400 + 10 + 2) \cdot (20 + 5) = (8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3) + (2 \cdot 10^2) + (5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^1) = 10 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1 = 10^5 + 3 \cdot 10^2 = 10300$ .

Nelle caselle della prima riga, nei triangoli inferiori viene riportata la moltiplicazione di 412 per 2, 824. Nella seconda riga viene riportata la moltiplicazione di 412 per 5, 20510. Sommando adesso secondo le caselle diagonali e riportando nel posto successivo la decina si avrà il risultato che viene letto in ordine inverso come nella freccia<sup>31</sup>.

Gli algoritmi della moltiplicazione recuperati dalla storia ci consentono di poter riempire di significati un argomento che generalmente viene vissuto aridamente nella comunicazione delle matematiche.

### **1.11 Un esempio: Il Postulato di Eudosso-Archimede. Analisi delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche.**

*"...il fatto di poter misurare tutte le dimensioni e tutte le distanze dell'universo (da quelle dei corpi celesti a quelle dei corpi che costituiscono il mondo atomico) riportando una volta dopo l'altra una data lunghezza terrestre, non è per nulla una pura conseguenza logica dei nostri teoremi sulla*

<sup>30</sup> Per un approfondimento sull'argomento si veda: L.Bazzini-A.Scimone-F.Spagnolo, "Il mondo dei Numeri, Teoria e didattica", Editore Palumbo, Collana Universitaria: "Insegnare Matematica" diretta da L.Bazzini&F.Spagnolo, 2006

<sup>31</sup> Per ulteriori approfondimenti sugli algoritmi della moltiplicazione si veda il testo di Ettore Picutti, *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, 1977.



*congruenza e della configurazione geometrica, ma piuttosto un vero dato dell'esperienza. E cioè, la validità dell'assioma di Archimede nel mondo della natura richiede proprio una conferma sperimentale, allo stesso modo che la richiede l'assioma delle parallele".*  
*D. Hilbert*

### **1.11.1 Introduzione**

Ripercorrere il profilo storico di una concezione matematica sino al '900 può avere due possibili strade.

Se l'oggetto matematico è integrato stabilmente negli Elementi di Euclide, come ad esempio "la proporzione", interviene prima l'analisi sintattica del linguaggio per passare poi ad interpretazioni successive (interpretazione semantica) del concetto nella storia.

Se l'oggetto è stato sì ispirato dagli Elementi ma non è integrato sintatticamente con essi allora si cercherà di comprendere come si sono evoluti i suoi significati sino alla riorganizzazione sintattica. Come cioè l'oggetto ha contribuito alla formazione di un nuovo linguaggio matematico.

Possiamo dire, molto sommariamente, che i grandi riferimenti storici nella cultura occidentale sono gli Elementi di Euclide come primo linguaggio formalizzato all'interno delle matematiche, e la sistemazione formalizzata (sintatticamente) delle matematiche dalla fine dell'ottocento ai nostri giorni.

### **1.11.2 Perché il Postulato di Eudosso-Archimede**

Si è voluto scegliere come oggetto di studio il Postulato di Eudosso-Archimede e questo è dovuto essenzialmente ai seguenti motivi:

1- Perché è un elemento fondamentale dell'Analisi non Standard<sup>32</sup>.

L'analisi non Standard affronta il problema dell'Archimedicità problematicamente. L'ordinamento degli iperreali, in un approccio non assiomatico, varia in funzione della scelta di un certo insieme di indici ed il Postulato di Archimede non è verificato (ad esempio) nella parte non standard cioè nella Monade dello zero (nell'insieme degli infinitesimi per intenderci).

2- Il Postulato di Eudosso-Archimede dà anche la possibilità di riflettere sull'insegnamento dell'Analisi Classica: Si pensi al ruolo della simmetria del Postulato (Date due grandezze **a** e **b**, con **a < b**, esiste sempre il sottomultiplo della più grande che

---

<sup>32</sup> Si possono individuare due approcci all'analisi non standard:

- approccio sintattico: Nelson (*Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, B.A.M.S., 83, n.6, nov. 1977). Numerose sono state le trasposizioni didattiche di questo approccio all'estero e in Italia (H.J. Keisler, *Elementi di analisi matematica*, Piccin, 1982, Padova). L'approccio privilegia un linguaggio e degli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo-Frankel con l'assioma della scelta. Viene aggiunto un nuovo simbolo di relazione ad un posto, il predicato *st()*, e si ottiene così un nuovo linguaggio con il quale sarà possibile operare con gli infinitesimi ed infiniti come numeri.
- approccio semantico: Robinson (*Non standard analysis*, 1966, Amsterdam, North-Holland). Una interpretazione didattica di questo approccio si trova nel testo di S. Valenti (*Dall'intero all'iperreale*, Quaderni di Ricerca Didattica, G.R.I.M., Palermo, n.5, 1994). Questo approccio giustifica costruttivamente i passaggi per l'ampliamento agli iperreali consentendo di meglio comprendere la non univocità della relazione d'ordine degli iperreali. Ed è proprio questo approccio che consente la messa in evidenza del problema del postulato di Eudosso-Archimede.

è minore della più piccola) nel dare un significato all'infinitesimo. Ed ancora il ruolo centrale nella messa a punto dell'idea di continuità della retta.

3- Il ruolo che Il Postulato di Eudosso-Archimede riveste come ostacolo epistemologico, con sfumature diverse, vuoi nell'Analisi Classica che nell'Analisi non Standard.

3a- Per quanto riguarda l'Analisi Classica l'ostacolo si è presentato agli albori. L'Analisi Classica nasce e si sviluppa con metodi non standard a partire dal '600 ed è soltanto con la sistemazione sintattica ad opera di Cauchy e Weierstrass che viene considerata Standard dalla comunità dei matematici. E rispetto ad altre vicende storiche interne alla matematica, come la ben nota vicenda delle parallele, l'analisi classica ha vissuto la riorganizzazione formale senza avere la consapevolezza del ruolo del postulato di Archimede. È soltanto in una fase di maturazione (e forse quando era necessario riorganizzare la conoscenza per trasmetterla a giovani ricercatori) che si è sentito il bisogno, nell'ambito della comunità matematica, di capire il ruolo del Postulato di Archimede nei fondamenti dell'Analisi Classica (Seconda metà dell'800 ed inizio '900). Si pensi che lo stesso Dedekind ammette tacitamente l'archimedeicità<sup>33</sup> [p. 58].

3b- Per quanto riguarda l'Analisi non Standard il problema è più legato ad una questione di generalizzazione. Come per l'Analisi Classica il problema sintattico ha avuto come momento focale l'ampliamento al Campo dei Reali (e la corrispondenza con la retta), per l'Analisi non Standard il problema centrale è stato un ampliamento di Campo dai Reali agli Iperreali.

In questo caso il Postulato ha ritardato notevolmente la nascita di questo nuovo linguaggio. Nel senso che nonostante le riflessioni fatte agli inizi del secolo sul Postulato e la Continuità, nonostante si fossero prese in considerazione grandezze non Archimedee (Enriques ed altri), il ritardo è stato notevole. L'Analisi non Standard è del 1960, cioè circa 60 anni dopo le riflessioni sintattiche sull'Analisi Classica.

### **1.11.3 Grandezze omogenee ed Archimedeicità**

Cercheremo di fornire un profilo storico del Postulato di Eudosso-Archimede che possa mettere in luce le concezioni storiche che potremmo utilizzare per una ricerca didattica nella quale il postulato abbia un ruolo centrale: analisi a-priori di situazioni didattiche per l'insegnamento dell'Analisi Classica o Non Standard, verifica teorico-sperimentale su ostacoli epistemologici, ecc..

L'aver considerato insiemi di grandezze non Archimedee è stato uno di quei passaggi storici particolarmente significativi nell'evoluzione del pensiero matematico.

Sino all'800 grandezze omogenee e Archimedeicità erano considerati dei sinonimi. Il concetto di variabile prima, il simbolismo algebrico, la geometria analitica e l'analisi classica hanno affrontato il rapporto di grandezze non omogenee. Il primo passo è stato compiuto dalla fisica con la velocità come rapporto di due grandezze non omogenee come lo spazio ed il tempo, in secondo luogo la rappresentazione di tali grandezze derivate come funzioni rappresentabili analiticamente, in terzo luogo lo studio di tali variazioni con gli strumenti dell'analisi. In questo caso l'eredità di Euclide è stata preponderante.

---

<sup>33</sup> P. Dugac, *R. Dedekind et les fondaments des mathématiques*, Libr. Philosophique J. Vrin, Paris, 1990.

P. Tortorici<sup>34</sup> rivedendo il modello del Veronese dimostra l'esistenza di classi di grandezze non Archimedee omogenee. Una dimostrazione analoga si trova in un recente lavoro di Di Leonardo - Marino - Spagnolo sugli angoli mistilinei<sup>35</sup>.

Secondo questa chiave di lettura legata al passaggio tra classi di grandezze Archimede omogenee e non Archimedee vi sono due momenti importanti:

1- Punto di vista diverso con il processo di evoluzione che ha portato alla nascita dell'Analisi Classica (Variabile, simbolizzazione dell'algebra, geometria analitica) sino ad una sua rigorizzazione;

2- Generalizzazione formalizzata di classi di grandezze non Archimedee (Veronese, Enriques). La formalizzazione ha permesso alla comunità matematica una presa di coscienza di ordine superiore. Questa generalizzazione con strumenti logici particolarmente sofisticati ha permesso poi intorno al 1960 la creazione dell'Analisi non Standard.

#### **1.11.4 Le concezioni del Postulato di Eudosso-Archimede nella storia**

Ripercorriamo adesso alcune tappe che ci sono sembrate importanti per la messa a punto di alcune delle idee su esposte.

Euclide nella Def. IV del Libro V afferma : "Si dice che hanno ragione fra loro le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente"<sup>36</sup>.

Euclide, quindi considera come aventi rapporto fra loro due grandezze solo quando esse soddisfano al Postulato di Archimede. Soffermiamoci sull'analisi del suddetto Postulato.

La Formulazione iniziale è dovuta ad Eudosso in una forma traducibile in termini moderni nel seguente modo:

$$\forall x,y \exists m (m \in \mathbb{N} : mx > y)$$

(a)

ciò equivale a dire che due grandezze possono, se moltiplicate, superarsi l'un l'altra. Questa è anche la posizione di Euclide.

Archimede utilizzò frequentemente il postulato di Eudosso espresso però nella seguente forma:

$$\forall x,y,z [ \text{se } x > y \text{ allora } \exists m (m \in \mathbb{N} : m(x-y) > z]$$

(b)

Questa seconda versione è quella che equivale al metodo di esaustione.

In Euclide vi è sempre riferimento ai multipli di grandezze, nessun riferimento viene fatto per i sottomultipli. Sicuramente questo è dovuto al fatto che, mentre per una grandezza qualsiasi è sempre possibile costruirne i multipli secondo un intero qualunque assegnato, per i sottomultipli non sempre tale operazione è possibile. E questo può anche essere legato alla sistematizzazione degli insiemi numerici.

---

<sup>34</sup> P. Tortorici, *Nozioni sui fondamenti della geometria e sulla geometria iperbolica*, vol. 11, Arti grafiche A. Renna, Palermo, 1952. (pagg. 49-71)

<sup>35</sup> M.V. Di Leonardo - T. Marino - F. Spagnolo, *Alcune osservazioni epistemologiche sul Postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di esaustione*, La Matematica e la sua Didattica, ed. Pitagora, 1994, n.1, Bologna.

<sup>36</sup> Frajese - Maccioni, *Gli Elementi di Euclide*, Classici UTET, 1970.

La Prop. I del Libro X degli Elementi dice: "Date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore (inizialmente) assunta".

Questa proposizione sembra poterci ricordare la simmetrica del Postulato di Archimede, ma in essa vi è sempre riferimento alla metà di una grandezza data non a sottomultipli.

Alcuni storici sostengono che la Prop. I del Libro X degli Elementi rappresenti la simmetrica del Postulato di Archimede. Enriques<sup>37</sup> sostiene che "...fra le grandezze considerate da Euclide ve ne sono talune per cui egli non sa costruire i sottomultipli, dei quali non vuole perciò affermare l'esistenza. A questa categoria appartengono gli angoli, per i quali è noto che già la trisezione costituisce un problema non risolubile con la riga e il compasso."

Galileo sostiene che : "Date due grandezze egli cerca una parte aliquota dell'una che sia contenuta nell'altra e si appoggia sulla considerazione che, se vi è un resto, questo può ridursi, in ogni caso, piccolo ad arbitrio". [Enriques, op. cit.]

Enriques considera questa interpretazione di Galileo dinamica in contrapposizione a quella statica di Euclide. L'impressione che si ha analizzando queste interpretazioni del Postulato di Eudosso è che attraverso tale principio si ipotizza l'esistenza dell'infinitamente grande.

J.L. Gardies<sup>38</sup> sottolinea il fatto che bisogna giungere a Pascal per poter avere una formulazione della simmetrica del Postulato di Archimede in una forma definitiva :

$$\forall x,y \exists m (m \in \mathbb{N} : x/m < y)$$

(c)

Nel linguaggio matematico corrente quando ci si riferisce al Postulato di Eudosso-Archimede si intende l'insieme delle tre precedenti proposizioni (a), (b), (c).

### **1.11.5 Il Postulato e l'infinito (Attuale e Potenziale)<sup>39</sup>**

Nella sistemazione Hilbertiana il simmetrico del Postulato di Eudosso-Archimede (c) si deduce dagli assiomi dell'ordine e di appartenenza. Ma è il modello dei Naturali che fornisce un modello sufficiente per stabilire l'indipendenza del simmetrico dall'assioma di Eudosso. Oggi noi sappiamo che nelle Geometrie Non Archimedee gli assiomi di continuità non sono validi. Si può anche dimostrare l'indipendenza dell'assioma di Eudosso dal simmetrico.

Pascal si inserisce nella problematica tentando di mettere ordine sulla questione ma con un obiettivo che non è quello della continuità ma, con ragioni d'ordine fisico, di tentare di giustificare il rapporto armonioso esistente tra geometria e natura. Sono queste motivazioni che gli permettono di mettere in luce la relazione simmetrica dell'assioma di Eudosso.

Il ritardo della comparsa della simmetrica con Pascal ('600) oltre alle motivazioni su esposte ha anche un'altra chiave di lettura e cioè la riorganizzazione dell'infinito nelle matematiche.

<sup>37</sup> F. Enriques, *Gli elementi di Euclide e la critica moderna*, A. Stock, Roma, 1925.(libro V, p. 12)

<sup>38</sup> Gardies J.L., *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Librairie Philosophiques J. Vrin, Paris, 1984.

<sup>39</sup>Per *infinito in potenza* possiamo pensare all'esistenza del *successivo* nell'insieme dei numeri naturali. Mentre *per infinito in atto* possiamo pensare all'insieme dei punti di un segmento. Anche l'insieme dei naturali può essere pensato come infinito in atto come ha fatto vedere G. Cantor nella sua teoria degli Insiemi.

Pascal cerca di fornire, attraverso l'universo delle grandezze, un significato per l'infinito potenziale e per l'infinitesimo attuale.

Si presenta a questo punto un'altra chiave di lettura del Postulato di Eudosso-Archimede e cioè quella relativa al contrasto tra infinito attuale e infinito potenziale, tra infinitesimo attuale e infinitesimo potenziale.

Questa problematica richiede un'analisi a parte. Ci sembra utile in questo contesto inserire uno schema di analisi che andrebbe approfondito dal punto di vista della riflessione storico-epistemologica.

Forniremo alla fine del presente paragrafo un elenco di problemi ancora da affrontare da un punto di vista storico ed epistemologico ed un elenco di problemi di natura prettamente didattica.

### **1.11.6 Il ruolo del Postulato nei fondamenti delle matematiche: Geometria Elementare, Aritmetica, Analisi.**

Il Postulato d'Archimede nella sua formulazione di Eudosso riscritta con linguaggio moderno è:

$$\forall x,y \exists m (m \in \mathbb{N} : mx > y)$$

(1)

questa espressione equivale a dire che multipli di una grandezza possono, se moltiplicate, superarsi l'un l'altra.

In questa espressione possiamo riconoscere la presenza dell'idea di infinito ed in particolare dell'infinito potenziale.

La proposizione inversa dalla (1) sempre con linguaggio moderno la possiamo esprimere:

$$\forall x,y \exists m (m \in \mathbb{N} : x/m < y)$$

(2)

In questa proposizione intravediamo la presenza dell'infinitesimo potenziale.

Per meglio orientarci nella trattazione successiva riguardo ai contesti geometrici, aritmetici e dell'analisi, sarà utile cercare di definire, nel modo meno ambiguo possibile, i significati di infinito potenziale e infinito attuale.

Come sappiamo dalle polemiche relative al Paradosso di Zenone il conflitto tra infinito potenziale ed attuale è stato quello che ha giocato un ruolo determinante nella riorganizzazione delle matematiche con particolare riferimento all'Analisi Classica.

L'infinito potenziale è stato il significato di infinito più accreditato negli ambienti matematici, almeno sino a Cantor.

L'infinito attuale invece ha avuto una sorte diversa legata a problemi filosofici a partire dalla filosofia greca per poi essere riorganizzato sintatticamente da Cantor.

Nella sistemazione assiomatica della teoria degli insiemi di Zermelo-Frankel l'insieme infinito viene così trattato:

$$\exists x (\phi \in x \ \& \ \forall y (y \in x) \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$$

(3)

Questo assioma ci assicura l'esistenza di un insieme infinito ed ha come conseguenza il fatto che esiste un insieme  $N$ , i cui elementi sono i cardinali finiti. L'infinito che viene presentato è l'infinito in atto.

Introducendo il quantificatore universale  $\forall$  possiamo cercare di definire, a partire dall'assioma dell'infinito in atto, l'infinito in potenza:

Siano A e B due insiemi infiniti definiti da (3) ed una applicazione f :

$$f : B \rightarrow A$$

$$\forall a \in A, \exists b \in B : f(b) \rho a$$

(4)

Se " $\rho$ " è " $<$ ", allora abbiamo un infinitesimo potenziale;

Se " $\rho$ " è " $>$ ", allora abbiamo l'infinito potenziale;

Se " $\rho$ " è "=", allora abbiamo l'infinito attuale.

La relazione d'ordine è indispensabile per poter parlare di infinito potenziale. Ma sola non basta in quanto nell'infinito potenziale è inglobato un processo dinamico.

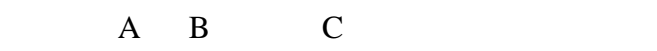
Per meglio esprimere l'idea di infinito potenziale cioè l'idea di finito spinto quanto si vuole, ma finito, è necessario possedere l'idea dell'infinito attuale.

Cerchiamo adesso di vedere come si evidenzia l'infinito attuale e potenziale nei linguaggi Geometria Elementare, Aritmetica, Analisi Classica.

### **1.11.7 Il Postulato nella Geometria Elementare.**

Per quanto riguarda la geometria elementare ci riferiremo alla impostazione Hilbertiana [29]. Il secondo gruppo degli assiomi di Hilbert è quello relativo all'ordine:

II.1 Se un punto B giace fra un punto A ed un punto C,



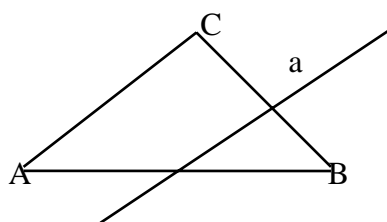
allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B giace pure fra C ed A.

II.2 Per ogni due punti A e C, c'è sempre almeno un punto B, sulla retta AC, tale che C giace fra A e B.



II.3 Di tre punti qualsiasi di una retta ce n'è al massimo uno che giace fra gli altri due.

II.4 Siano A, B, C tre punti non allineati ed **a** una retta del piano ABC che non passi per alcuno dei punti A, B, C : allora, se la retta **a** passa per un punto del segmento AB, essa passa certamente anche per un punto del segmento AC ovvero per un punto del segmento BC.



Il secondo gruppo di assiomi dell'ordine ci assicura la possibilità di poter dedurre che la retta ha infiniti punti e che questo tipo di infinito potrebbe essere attuale.

Il quinto gruppo di assiomi relativo alla continuità è definito come segue:

V.1 (Assioma della misura ovvero assioma Archimedeo).

Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento CD reiterato n volte da A sulla semiretta passante per B, porta al di là del punto B.

V.2 (Assioma di completezza lineare).

Il sistema di punti di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi I-III ed anche V.1.

L'assioma di completezza senza quello Archimedeo porterebbe a delle contraddizioni.

Gli assiomi di Hilbert sono necessari per poter dimostrare che la geometria elementare è identica alla geometria cartesiana."...l'esigenza della continuità risulta divisa in due componenti distinte, cioè l'assioma Archimedeo, cui spetta la parte di preparare l'esigenza della continuità, e l'assioma di completezza, che è la chiave di volta di tutto il sistema di assiomi."[Hilbert, op. cit., p. 33]

Dall'assioma Archimedeo viene fuori un infinito che è di tipo potenziale.

### **1.11.8 Il Postulato nell'Aritmetica.**

Ci riferiremo alla sistemazione formale dei Naturali potendoci estendere attraverso ampliamenti ai numeri razionali. I numeri reali invece saranno oggetto di analisi nel contesto dell'Analisi Classica.

Rivediamo gli assiomi del Peano:

Concetti *non definiti* : zero, numero, successivo.

-1 Zero è un numero.

-2 Il successivo di un numero è un numero.

-3 Se i successivi di due numeri sono eguali, i due numeri sono eguali.

-4 Il successivo di un numero non è mai zero.

-5 Se una classe contiene lo zero e se, contenendo un numero, contiene anche il successivo, allora essa contiene tutti i numeri (Principio d'induzione matematica).

In questo caso è il 5° assioma che ci porta all'infinito potenziale. L'idea di successivo può portare lo stesso all'infinito potenziale, ma alla condizione che venga espresso nella seguente maniera:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists$  successivo di n.

Viene dimostrata l'equivalenza della proposizione X,1 e del Postulato di Archimede<sup>40</sup> utilizzando l'induzione sia nella condizione necessaria che in quella sufficiente.

---

<sup>40</sup> M.V. Di Leonardo - T. Marino - F. Spagnolo, *Osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-Archimede ed il metodo di esaurimento*, La Matematica e la sua didattica, n.1, 1994, Pitagora, Bologna.

Per quanto riguarda l'aspetto dell'infinito attuale ci si riferirà all'assioma dell'infinito (Assiomi di ZF - vedi Cohen op. cit.) ed alla trattazione dei cardinali di Cantor.

### **1.11.8 Il Postulato nell'Analisi Classica.**

Per una sistemazione rigorosa dell'analisi è necessario definire un insieme numerico continuo che stia in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta.

L'idea di continuità per quanto riguarda le grandezze era stata già affrontata nello sviluppo della matematica.

Il postulato di Archimede ci permette di porre in corrispondenza punti di una retta con l'insieme dei numeri Reali.

La corrispondenza inversa ci è consentita dal Postulato di continuità di Cantor.

Infine il postulato di Dedekind che, come vedremo più avanti, comprende sia il postulato di Archimede che quello di Cantor, ci assicura la corrispondenza biunivoca.

La retta reale rappresenta quindi l'elemento portante della costruzione dell'analisi non solo come fondamento ma anche come immagine mentale sulla quale i matematici costruiscono l'analisi.

Il problema della continuità della retta è altrettanto importante nella fondazione della geometria Euclidea.

*Si dimostra facilmente che l'assioma di Completezza :*

- Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A, B$  entrambi non vuoti, con  $A \subseteq B \exists x \in \mathbb{R}: A \subseteq x \subseteq B$  (d)  
*è equivalente all'Esistenza dell'estremo superiore :*
- Se  $S \subseteq \mathbb{R}$  è non vuoto e superiormente limitato, allora  $\sup S$  esiste in  $\mathbb{R}$ . (e)  
(o all'esistenza dell'estremo inferiore).

Nei testi di Analisi Matematica utilizzati sia nelle scuole secondarie che nei corsi Universitari viene preso in considerazione una delle proposizioni precedenti come assioma senza dare alcuna giustificazione di questa scelta. Viene poi dimostrata l'Archimedietà.

Il dibattito sui fondamenti agli inizi del secolo aveva creato una sensibilità particolare negli autori di libri di testo di Analisi (sia a livello della Scuola Secondaria che Universitario) per cui ritroviamo quasi sempre la problematica relativa all'assioma della continuità<sup>41</sup>.

Si dimostra facilmente l'equivalenza tra il Postulato di Dedekind e quelli di Cantor e Archimede. Come d'altro canto è immediata l'equivalenza tra il Postulato di Dedekind e l'Assioma della Completezza.

Per quanto riguarda la sistemazione dell'Analisi Classica ci riferiremo ai seguenti approcci messi a punto agli inizi del secolo e che sono stati interpretati, alla luce della sistemazione Bourbakista, nei testi per l'insegnamento universitario dell'analisi (vedi note 35-38). Ciascuno degli approcci porterà ad una interpretazione dell'analisi.

Riportiamo gli assiomi dei Reali proposti da G. Prodi<sup>42</sup> suddivisi in quattro gruppi:

<sup>41</sup> *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* (a cura di L. Berzolari), U. Hoepli ed., 1972 (ristampa).

<sup>42</sup> G. Prodi, *Analisi Matematica*, Ed. Boringhieri, Torino, 1970.



$\mathcal{R}_1$ ) È definita in  $R$  un'operazione di composizione interna, cioè un'applicazione  $R \times R \rightarrow R$ , che si indica col segno "+" e si chiama addizione, con le seguenti proprietà:

1.  $\forall a, b \quad a+b=b+a$  (proprietà commutativa),
2.  $\forall a, b, c \quad (a+b)+c=a+(b+c)$  (proprietà associativa),
3. esiste un elemento, detto zero e indicato con 0, tale che:  $\forall a: a+0=a$  (si dimostra che 0 è unico),
4.  $\forall a$  esiste un elemento, detto opposto di  $a$  e indicato con  $-a$ , tale che  $a+(-a)=0$  (si dimostra che  $-a$  è unico).

$\mathcal{R}_2$ ) È definita in  $R$  una seconda operazione di composizione interna, che si dice moltiplicazione, e che si indica col segno  $\bullet$  (per), oppure, più frequentemente, accostando semplicemente le lettere, con queste proprietà:

1.  $\forall a, b \quad ab=ba$  (proprietà commutativa),
2.  $\forall a, b, c \quad (ab)c = a(bc)$  (proprietà associativa),
3. esiste un elemento  $\neq 0$ , detto unità e indicato con 1, tale che  $\forall a: a \bullet 1 = a$  (si dimostra che 1 è unico),
4.  $\forall a \neq 0$  esiste un elemento, indicato con  $a^{-1}$ , tale che sia  $a^{-1}a=1$  ("reciproco" di  $a$ ; si dimostra che  $a^{-1}$  è unico),
5.  $\forall a, b, c \quad (a+b)c=ac + bc$  (proprietà distributiva).

$R_3$ ) È definita in  $R$  una relazione di ordine totale  $\leq$ , con queste proprietà:

1.  $\forall a, b, c: a \leq b \rightarrow a+c \leq b+c$ ,
2.  $\forall a, b, \forall c \geq 0: a \leq b \rightarrow ac \leq bc$ .

$\mathcal{R}_4$ ) (Assioma di completezza) Se  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi non vuoti di  $R$  tali che  $\forall a \in A, \forall b \in B$  sia  $a \leq b$ , esiste almeno un elemento  $\xi \in R$  tale che  $\forall a \in A, \forall b \in B$  sia:  $a \leq \xi \leq b$ . (Questo elemento  $\xi$  potrà essere detto "elemento separatore".)

L'insieme delle relazioni  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , individua un ben determinato oggetto matematico che chiameremo Campo Ordinato dei Reali. Il quarto gruppo è caratterizzato da un assioma che è equivalente al Postulato di Continuità della retta di Dedekind. Il testo di Giusti<sup>43</sup>, una volta accettato l'Assioma di Dedekind, espresso in una forma analoga all'Assioma di Completezza già citato, dimostra la proprietà dell'estremo superiore (inferiore). Tale assioma può essere sostituito dal seguente:

- 1) Ogni insieme di numeri reali, non vuoto e limitato superiormente, possiede un estremo superiore. Questa è l'impostazione del Ceconi - Stampacchia<sup>44</sup> che ad esempio, avendo accettato tale assioma, dimostra quindi la "proprietà" di Archimede. Una analoga impostazione segue il testo di Picone - Fichera<sup>45</sup>.

Esiste poi un ulteriore possibile approccio che però non è stato interpretato nei testi di analisi. Viene comunque riportato dai numerosi testi di Matematiche Elementari

<sup>43</sup> E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Ed. Boringhieri, Torino, 1985.

<sup>44</sup> J.P. Ceconi - G. Stampacchia, *Analisi Matematica vol.1*, Ed. Liguori, Napoli, 1974.

<sup>45</sup> M. Picone - G. Fichera, *Lezioni di Analisi Matematica (Vol.1)*, Dispense Univ. Tumminelli Roma, 1962.

per mettere in evidenza il ruolo del Postulato di Archimede<sup>46</sup>. Ci riferiamo alla seguente equivalenza: Postulato di Dedekind=Postulato di Cantor +Postulato di Archimede.

Scegliere uno delle due possibili strade da l'opportunità di rappresentare gli insiemi numerici in un contesto geometrico. Tale operazione è passata alla storia come Aritmetizzazione dell'Analisi.

A questo proposito ci sembra utile mettere in evidenza le seguenti posizioni sulla relazione tra retta reale e Assiomi caratterizzanti  $\mathbb{R}$ . Il Prodi in [op. cit.] identifica il Corpo  $\mathbb{R}$  con la retta reale.

Picone e Fichera così enunciano il problema [op. cit.][p. 56-57]: *"Orbene, si riconosce a posteriori che in virtù di quegli assiomi la corrispondenza biunivoca ora detta può riguardarsi come isomorfismo aritmetico ordinato. Pertanto: la retta ordinata su cui è introdotto un sistema di ascisse si identifica sul piano logico con il corpo  $\mathbb{R}$  dei numeri reali. Ora, poiché in Analisi matematica la retta ordinata interviene costantemente, con su di essa introdotto un sistema di ascisse, essa è da considerarsi come lo stesso oggetto matematico costituito dal corpo  $\mathbb{R}$ . Su un piano rigorosamente logico la cosiddetta rappresentazione geometrica dei numeri di  $\mathbb{R}$  mediante i punti di una retta è quindi del tutto inessenziale dal punto di vista dell'Analisi Matematica, dato che consiste unicamente nel sostituire il corpo  $\mathbb{R}$  con un altro modello ad esso isomorfo (aritmeticamente ed ordinatamente). Tuttavia tale rappresentazione, facendo ricorso alla nostra intuizione geometrica, ha tale forza di suggestione, che riesce di estrema utilità sotto un aspetto puramente pratico ed è soltanto con tale intendimento che noi ci varremo di essa."*

Ci sembra importante individuare tre momenti per la messa a punto del modello "retta reale":

1- Prima di Dedekind: Il ruolo del modello geometrico impreciso serviva come metafora grossolana<sup>47</sup>;

2- Dedekind vuol dare dignità di modello matematico alla interpretazione geometrica [op. cit.][p. 131-133];

3- Dopo Dedekind: Il Postulato di Continuità della retta interviene nei fondamenti dell'Analisi. La retta reale viene vista come un modello canonico di  $\mathbb{R}$ .

Il problema del Modello porta con se ulteriori possibilità di ampliamento sia dal punto di vista Matematico che Didattico.

In tale contesto non si è sentita la necessità di realizzare un approfondimento anche se la problematica indirettamente è legata al sorgere o meno di certi ostacoli.

La tabella che segue non ha la pretesa di esaurire tutti i probabili collegamenti ma è uno strumento classificatorio suscettibile di ulteriori aggiornamenti. Ci consente

---

<sup>46</sup> Il fatto che tale impostazione non viene presentata nei testi di Analisi è forse dovuto alla interpretazione prettamente geometrica di tale problematica. Difatti le relative dimostrazioni riguardanti:

- Dall'assioma di Dedekind segue l'assioma di Archimede,
- Dall'assioma di Dedekind segue l'assioma di Cantor,
- Dall'assioma di Archimede unito all'assioma di Cantor segue l'assioma di Dedekind,

sono espressamente giocate in un contesto geometrico. Si consulti a questo proposito: E. Agazzi - D. Palladino, *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Ed. Scientifiche e Tecniche Mondadori, Milano, 1978.

<sup>47</sup> R. Dedekind, *Essenza e Significato dei Numeri - Continuità e Numeri Irrazionali*, [traduz. di O. Zariski], Editrice A. Stock, Roma, 1926. [p. 121-122] (Una edizione italiana del lavoro di Dedekind antecedente si trova nella rivista Il Pitagora (Giornale per Insegnanti e alunni delle Scuole secondarie), Palermo, 1901, Anno V (2° sem.), n. 4-5.)

comunque di riguardare il ruolo del Postulato di Eudosso-Archimede sotto un altro punto di vista che è quello dell'infinito.

	<i>Geometria elementare</i>	<i>Aritmetica</i>	<i>Analisi Classica</i>
<b><i>Infinito Attuale</i></b>	Postulato dell'ordine	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Assioma Infinito</li> <li>• Cantor</li> <li>• Assioma Scelta</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relazione Ordine</li> <li>• Assioma Infinito</li> <li>• Assioma Scelta</li> <li>• Dedekind</li> <li>• Estremo Superiore</li> </ul>
<b><i>Infinitesimo attuale</i></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Angolo Contingenza<sup>48</sup></li> <li>• Grandezze Incommensurabili</li> </ul>		
<b><i>Infinito Potenziale</i></b>	Postulato Archimede (diretta)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Induzione Matematica</li> <li>• Postulato Archimede</li> <li>• <math>\forall n \in \mathbb{N}, \exists</math> successivo</li> <li>• Definizioni ricorsive</li> <li>• Funzioni computazionali</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Postulato di Archimede</li> <li>• Limite</li> <li>• Induzione Matematica</li> </ul>
<b><i>Infinitesimo potenziale</i></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposizione X,1 di Euclide</li> <li>• Esaustione</li> </ul>	Simmetrica del P.A.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Simmetrica del P.A.</li> <li>• Cantor</li> </ul>

- P.A.= Postulato di Eudosso-Archimede
- X,1= Proposizione X,1 degli Elementi di Euclide
- Cantor= Postulato della continuità di Cantor
- Dedekind= Assioma di completezza (Postulato di continuità della retta)

Concludendo possiamo affermare di avere analizzato due dei possibili percorsi storico-epistemologici legati al Postulato di Eudosso- Archimede :

- 1) Le grandezze;
- 2) L'infinito/infinitesimo Attuale/Potenziale;

La tabella posta alla fine del presente capitolo ha lo scopo di visualizzare i percorsi seguiti.

### **1.12 Conclusioni**

Per poter trarre delle conclusioni da questo capitolo cercheremo di richiamare la definizione di rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche:

*Le rappresentazioni epistemologiche sono dei percorsi conoscitivi di un particolare concetto matematico o scientifico in generale. Tali rappresentazioni*

<sup>48</sup>Per angolo di contingenza si intende l'angolo formato da una circonferenza e da una tangente in un suo punto. Nella proposizione 16 del libro III di Euclide vengono presentati gli angoli di contingenza (chiamati anche successivamente angolo di contatto, angolo cornuto) ma che Euclide, una volta dimostrato che questi angoli sono più piccoli di qualsiasi angolo rettilineo piccolo a piacere, non considererà più nella sua trattazione. In un lavoro già citato, nota 15 del presente capitolo a nome di Camarda - Spagnolo, gli angoli di contingenza vengono utilizzati per la messa a punto di un modello geometrico degli iperreali.

*possono essere messe a punto da un soggetto apprendente o da una comunità scientifica in un determinato periodo storico.*

*Le rappresentazioni storico-epistemologiche sono dei percorsi conoscitivi di un concetto matematico o scientifico in generale. tali rappresentazioni sono stati messi a punto da una comunità scientifica in un determinato periodo storico.*

Abbiamo iniziato il capitolo affrontando il ruolo dell'Enciclopedia delle Matematiche Elementari come strumento per poter recuperare le rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche. Naturalmente questo strumento oggi risulta datato ma fornisce comunque uno strumento di consultazione per uno studio iniziale sulle rappresentazioni epistemologiche e/o storico epistemologiche.

A partire dal paragrafo 11.3 abbiamo utilizzato, come esempio, il Postulato di Eudosso-Archimede. Si è cercato di mettere in evidenza le possibili rappresentazioni epistemologiche riguardanti i possibili percorsi conoscitivi dell'argomento. L'analisi potrà non risultare completamente esaustiva ma consente una visione d'insieme del problema.

L'analisi storico epistemologica, anche se talvolta non completa come nel caso degli angoli di contingenza, ha messo in evidenza il percorso del Postulato di Eudosso-Archimede con particolare riferimento alle "grandezze". Il percorso riguardante l'infinito e l'infinitesimo è stato soltanto abbozzato. Per poter affrontare sufficientemente questo problema sarebbe necessario uno studio particolare. La tabella 1, acclusa al capitolo, sintetizza i due percorsi storici.

La seguente tabella cerca di mettere in evidenza il ruolo dei paragrafi nell'individuare le rappresentazioni epistemologiche e storico epistemologiche del Postulato di Eudosso-Archimede:

Rappresentazioni epistemologiche del Postulato di Eudosso-Archimede	Rappresentazioni storico-epistemologiche del Postulato di Eudosso-Archimede
Il ruolo del Postulato nei fondamenti delle matematiche: Geometria elementare, Aritmetica, Analisi (paragrafi 1.11.6, 1.11.7, 1.11.8, 1.11.9)	L'evolversi delle concezioni nella storia <sup>49</sup> : <ul style="list-style-type: none"><li>• Grandezze omogenee e archimedeicità (1.11.3)</li><li>• Le concezioni del Postulato nella storia (1.11.4)</li><li>• Il Postulato e l'infinito (attuale e potenziale) (1.11.5)</li></ul>

<sup>49</sup> Per quanto riguarda la storia del Postulato andrebbe inserito un altro oggetto matematico: l'angolo di contingenza. Abbiamo già parlato dell'angolo di contingenza in una nota di questo capitolo. La storia dell'angolo di contingenza risulta particolarmente interessante se confrontato al Postulato di Eudosso-Archimede. Per approfondimenti: F. Spagnolo, *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede*, Tesi di Dottorato, Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento al n.5, Palermo.

**TABELLA 1**

