

CAPITOLO 2

Una interpretazione semiotica delle Matematiche può aiutare a comprendere i processi comunicativi?

2.0 Le Matematiche sono dei linguaggi?

"...è giusto pensare alla matematica non come a una branca particolare della conoscenza, ma come a un perfezionamento del linguaggio in generale, che integra le comuni espressioni verbali, che possono essere troppo imprecise o troppo ingombranti, con nuovi strumenti di rappresentazione delle relazioni." [p.361]

H. Wang

Il punto di vista Semiotico per “Le Matematiche” è sembrato il più interessante per una analisi epistemologica utile ai problemi della comunicazione.

I linguaggi Matematici presentano tre aspetti differenti che sono: Le Sintassi, Le Semantiche e Le Pragmatiche. L'aspetto della Sintassi è quello più studiato dalla comunità matematica risponde alla sistemazione formale dei linguaggi (Modelli Sintattici). L'aspetto della Semantica è stato anch'esso studiato ed imbrigliato rigorosamente attraverso la Teoria degli Insiemi (Modelli Semantici). Questa operazione è stata portata a compimento dai Bourbakisti che attraverso la base semantica dell'Insieme hanno classificato Le Matematiche (cfr. cap. 1). L'aspetto della Pragmatica invece è la parte meno studiata ed è quella invece che ci potrebbe consentire sviluppi interessanti sulla Comunicazione delle Matematiche con riconsiderazioni sulla natura stessa delle Matematiche.

La posizione semiotica sulle Matematiche come linguaggi ci permette adesso di rivedere un po' meglio la questione cercando, soprattutto per quanto riguarda la comunicazione dei linguaggi, eventuali analogie con situazioni di comunicazione della lingua naturale.

Nell'affrontare i problemi dei fondamenti delle matematiche si è soliti presentare le tre scuole di pensiero dei logicisti, dei formalisti e degli intuizionisti. Questa distinzione non è completamente soddisfacente in quanto "...i punti sui quali queste scuole si trovano in disaccordo sono di gran lunga meno importanti di quelli su cui si trovano o si potrebbero trovare d'accordo.[Wang , op. cit., p. 63]

La posizione di Hao Wang è quella di considerare le posizioni oggettiviste e costruttiviste. Il punto di vista della presente trattazione è quello costruttivista ed in particolare quello espresso da Changeux e Connes in ²:

"Per i costruttivisti, gli oggetti matematici sono degli enti di ragione che esistono soltanto nel pensiero del matematico. E non in un mondo platonico

¹H. Wang, *Dalla matematica alla filosofia*, Ed. Boringhieri, Torino, 1984.

²J.P. Changeux - A. Connes, *Pensiero e materia*, Ed. Boringhieri, Torino, 1991.

indipendente dalla materia. Essi non esistono se non nei neuroni e nelle sinapsi dei matematici che li producono e di coloro che li capiscono e li usano.”[p.18]

Il fatto che gli oggetti matematici esistano indipendentemente da un qualsiasi supporto materiale o cerebrale è la posizione del Platonista che viene considerata dal punto di vista neurofisiologico come una fase del pensiero.

“Quando il matematico elabora delle regole di esclusione, un formalismo, egli costruisce un linguaggio universale, e ciò gli permette di riconoscere proprietà dell'oggetto che prima ha costruito. In pratica egli non "scopre" che le conseguenze di ciò che ha immaginato!” [Changeux, op. cit. p.26]

Il Platonismo sarebbe quindi dovuto ad uno scambio tra costruzione del linguaggio e consapevolezza dello stesso (riconoscere le proprietà dell'oggetto matematico che prima è stato costruito). Questa posizione trova ulteriore conferma nel fatto che gli oggetti matematici sono delle "rappresentazioni culturali" che si propagano, fruttificano e sono trasmesse da cervello a cervello. *“Esse possiedono delle proprietà specifiche, in particolare quella coerenza, quella "necessità interiore" (...) che conferisce loro un'apparenza di autonomia.”[Changeux, op. cit. p. 38]*

È proprio l'apparenza che da la sensazione di scoprire questa realtà Platonica.

L'evoluzione storica delle matematiche rimette in discussione il Platonismo nel senso che risulta poco credibile il fatto che si possano concepire oggetti matematici di una *mathesis universalis* rimessi in discussione da una nuova sistemazione teorica.

“La storia della matematica non è affatto lineare. È fatta di controversie, di dibattiti, di divergenze, di rinnovamenti, di aggiornamenti incessanti ... In poche parole, si ha l'impressione di avere a che fare con oggetti culturali, prodotti e utilizzati ad ogni stadio dello sviluppo della nostra civiltà, e ridefiniti in relazione all'evolversi di altri oggetti culturali, che non sono necessariamente matematici”.[Changeux, op. cit., p. 39]

2.1 Un primo riferimento

Le Matematiche si possono considerare come linguaggi. Ogni linguaggio possiede la sua sintassi, semantica e pragmatica. Come è avvenuto per l'evoluzione del linguaggio naturale, la grammatica di un linguaggio si riorganizza attraverso continui aggiustamenti. Per quanto riguarda le matematiche oggi le grammatiche vengono considerate soltanto dopo essere state formalizzate. Il primo linguaggio con una grammatica abbastanza formalizzata è stato quello della Geometria Euclidea.

Si potrebbe ipotizzare che Euclide con gli *Elementi* ha fatto per le Matematiche quello che i linguisti di Port Royal³ hanno fatto per la riorganizzazione della grammatica della lingua naturale.

Come Euclide riorganizzando le conoscenze matematiche precedenti lo ha fatto attraverso la sistemazione induttiva delle categorie semantiche prima e attraverso una sistemazione deduttiva della sintassi poi, così, allo stesso modo, hanno operato i linguisti di Port Royal con la sistemazione della grammatica e dell'analisi logica.

La prima sistemazione delle grammatiche delle Matematiche è avvenuta soltanto dalla fine del secolo scorso sino agli anni '30. Questo si è verificato anche per la prima significativa riorganizzazione degli *Elementi* di Euclide operata da Hilbert.

³ *Grammatica e logica di Port-Royal (a cura di Raffaele Simone)*, Ubaldini ed., Roma, 1969.

Morris Kline⁴[p.308] afferma :*“Se dovessimo esprimere un giudizio generale sulla matematica creata prima del 1900 potremmo dire che esisteva un poco di matematica pura, ma non v'erano matematici puri”.*

La matematica pura, sostiene Kline, opera delle astrazioni, generalizzazioni e quindi formalizzazioni attraverso sistemi d'assiomi. L'assiomatizzazione, stadio finale, non è altro che un'attività di catalogazione e classificazione. Il programma Bourbakista (paragrafo 2.3) possiamo considerarlo come un'attività di classificazione delle grammatiche delle matematiche e loro mutue relazioni.

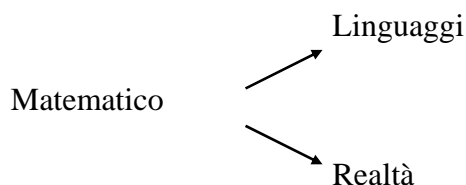
*“Confondere la matematica con l'assiomatica è come confondere la musica di Vivaldi con le tecniche di contrappunto dell'età barocca”.*⁵[op. cit., p.301]

Il ruolo della matematica applicata è quello di costruire nuovi linguaggi per la risoluzione di classi di problemi o anche ampliare vecchi linguaggi per permettere la comprensione di una più ampia classe di problemi. G.C. Rota in [op. cit.] opera una distinzione tra matematica che si occupa dei fatti come tutte le altre scienze *“...con uno zelo tassonomico simile a quello del botanico di fronte alle proprietà di un esemplare raro”* [p.295] e matematica che si occupa di dimostrazioni per poi concludere con l'assiomatizzazione.

La distinzione tra matematica pura ed applicata potrebbe rivelarsi un falso problema alla luce dell'organizzazione delle matematiche come linguaggi. Si tratterà di volta in volta di analizzare nella costruzione e messa a punto delle grammatiche dei linguaggi il ruolo che il matematico ha nella organizzazione o riorganizzazione di linguaggi adatti alla migliore comprensione dei fatti reali (risoluzione di classi di problemi). Naturalmente bisogna che sia anche disponibile a rimettere tutto in discussione nel momento in cui non sia più capace di anticipare, per esempio, i fenomeni della natura. Ma esiste anche un tipo di attività della matematica che abbiamo chiamata pura consistente nella relazione esistente tra il matematico ed i linguaggi della matematica. Questa attività ha anch'essa un ruolo che è quella di rendere i linguaggi più rigorosi e quindi meno ambigui nella comunicazione delle matematiche.

Ma la comunicazione delle matematiche non si può relegare alla comunicazione dei sistemi formali, necessita della comprensione dei processi di matematizzazione i quali risiedono sostanzialmente nell'ambito della semantica.

Il matematico è quindi un mediatore nella comunicazione delle matematiche.
Possiamo schematizzare questa situazione nel seguente modo :



Gli oggetti matematici espressi nei linguaggi delle matematiche in generale provengono:

- a) dalla lingua naturale;
- b) da immagini mentali;

⁴ M. Kline, *Matematica perdita della certezza*, ed. A. Mondadori, Milano, 1985.

⁵ G.C. Rota, *Matematica e Filosofia: Storia di un malinteso*, BUMI, Serie VII, Vol. IV-A, n.3, 1990.

- c) da linguaggi simbolici;
- ecc.

Il lavoro di Hadamard⁶ ha cercato di individuare quali siano stati nell'evoluzione del pensiero matematico i contributi delle immagini mentali, della lingua naturale e dei linguaggi simbolici.

Nello schema precedente questo si colloca nell'attività del matematico in relazione con se stesso. Alcuni matematici sono abituati a visualizzare modelli matematici con immagini mentali, altri ancora con il linguaggio verbale supportato dalla logica. Poincaré riteneva il pensiero di Riemann intuitivo e il pensiero di Weierstrass tipicamente logico.

“Le parole o il linguaggio, per come è scritto o parlato, non sembrano rivestire alcun ruolo nel meccanismo del mio pensiero [...] Le entità fisiche che sembrano servire da elementi del pensiero sono certi segni e immagini più o meno chiare, i quali si possono volontariamente riprodurre e combinare.” [Hadamard, op. cit.]

Penrose⁷ [p.536] così si esprime nell'analizzare il suo pensiero nell'attività scientifica: *“Quasi tutto il mio pensiero matematico si svolge visivamente e nei termini di concetti non verbali, anche se i pensieri sono accompagnati spesso da un commento verbale vano e quasi inutile, come “questa cosa va con quella e quella con quell'altra” (...) Spesso io calcolo usando diagrammi escogitati appositamente che costituiscono un'abbreviazione per certi tipi di espressione algebrica. Sarebbe in effetti un processo molto scomodo dover tradurre tali diagrammi in parole, e questa è una cosa che io farei solo come ultima risorsa, nel caso in cui diventasse necessario fornire una spiegazione dettagliata ad altri.(...) Non intendo dire con ciò che a volte non penso con parole, ma solo che trovo le parole quasi inutili per il pensiero matematico.”*

Ed ancora Penrose [op. cit. p.540] a proposito della comunicazione delle matematiche: *“Il punto è che, nella comunicazione in matematica, non si comunicano semplicemente fatti. Perché una sequenza di fatti (contingenti) possano essere comunicati da una persona a un'altra, è necessario che la prima persona li enunci con cura e che la seconda li comprenda singolarmente. Nel caso della matematica, però, il contenuto fattuale è piccolo. Gli enunciati matematici sono verità necessarie (oppure falsità necessarie!) e persino se l'enunciato del primo matematico rappresenta semplicemente un andare a tentoni verso una tale verità necessaria, sarà quella verità stessa che sarà trasmessa al secondo matematico, purché il secondo abbia inteso le parole del primo in modo adeguato. Le immagini mentali del secondo possono essere diverse nei particolari da quelle del primo, e anche le descrizioni verbali possono differire, ma l'idea matematica pertinente sarà passata al secondo.”*

La posizione di Penrose, soprattutto in questa ultima parte, è resa valida dal fatto che lui assume una posizione Platonica della matematica (Ognuno può prendere contatto direttamente con il mondo delle idee di Platone).

La posizione di Hao Wang così si esprime sui problemi della comunicazione delle matematiche: *“Anche nel memorizzare un ragionamento, un buon matematico tende a tenere in mente soltanto lo schema essenziale, sufficiente a ricordare, quando ce ne sia bisogno, un'intera lunga catena di particolari. Questo fatto sta ad indicare*

⁶ J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, R. Cortina ed., Milano 1993 (traduzione, 1^a ed. 1945).

⁷ R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, Ed. Rizzoli, Milano, 1992.

una struttura molto flessibile della mente, che quasi mai emerge dalle opere scritte ma che si potrebbe talvolta insegnare in maniera estremamente informale." [op. cit., p. 301]

Prima di concludere il paragrafo sarà bene analizzare velocemente la posizione di Vygotsky. Vygotsky⁸ sostiene che è proprio nel significato della parola che il pensiero e linguaggio si uniscono in un pensiero verbale. Ed è proprio nel significato che si possono trovare le risposte ai quesiti sul rapporto tra pensiero e linguaggio. In poche parole il linguaggio verbale è un mediatore tra contesti interni ed esterni dell'individuo. Possiamo pensare la grammatica del linguaggio come uno dei modelli della grammatica del pensiero. Ma lo stesso Vygotsky sostiene che: *"il pensiero verbale non include affatto tutte le forme del pensiero o tutte forme del linguaggio."* [op. cit., p. 68]

Possiamo azzardare una prima conclusione riguardo l'attività del matematizzare: che essa si situi essenzialmente nel campo della "Teoria del significato" con tutta la sua ambiguità.

2.2 Un punto di vista della storia delle Matematiche...

"...Nessun matematico si azzarderà ad affrontare un problema matematico serio senza prima familiarizzarsi a fondo con la storia di quel problema, storia che può coincidere con la storia reale, o con una storia immaginaria quale un matematico di talento riesce a prefigurarla. La soluzione di un problema matematico va di pari passo con la scoperta dell'inadeguatezza dei tentativi precedenti, e con quell'entusiasmo veramente risolutivo che consiste nell'abilità di far breccia entro i successivi sedimenti di osservazioni irrilevanti ereditate dal passato, offuscanti la reale natura del problema. In termini filosofici, per risolvere un problema un matematico non può esimersi dall'esame del problema nella sua storicità. La matematica conferma l'asserto che il pensiero è sempre essenzialmente storico." [Rota, op. cit., p. 304]

Esprese in altri termini le parole di Rota possono essere così interpretate: Attraverso una storia dei significati, lo storico delle matematiche, cerca di ricostruire l'evolversi delle grammatiche e dei campi semantici⁹ ad esse collegate. Il matematico

⁸ L.S. Vygotsky, *Pensiero e Linguaggio*, Ed. Giunti, Firenze, 1976.

⁹Per quanto riguarda al significato di campo semantico ci si potrà riferire alla definizione di P. Boero utilizzata nella ricerca in Didattica delle matematiche in "Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curriculare, Relazione tenuta al Seminario Nazionale Gruppi CNR, Pisa 18-20 Maggio 1989 [p.35]:

"Per campo semantico intendo un aspetto dell'esperienza umana (inerente la conoscenza della natura, o l'azione sul mondo che ci circonda, o la realtà artificiale e i sistemi di convenzioni prodotti dall'uomo, o le costruzioni culturali dell'uomo) che si presenta al ricercatore in uno o più campi di esperienza, come unitario, non ulteriormente scomponibile, e razionalizzabile solo attraverso un uso pertinente, inteso e significativo di concetti e/o procedure disciplinari (matematiche e/o non matematiche)."

La nozione di campo semantico richiama quella più generale di campo di esperienze [p.25]:

"Un settore dell'esperienza di vita (reale o potenziale) degli allievi identificabile da essi, unitario, dotato di specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dell'insegnante) per attività di modellizzazione matematica, proposizione e risoluzione di problemi matematici."

Il contesto delle due definizioni è quello della ricerca in Didattica delle Matematiche. Restringendo il campo ai linguaggi matematici possiamo dire che i campi di esperienza delle "equazioni differenziali" e della "meccanica razionale elementare" hanno un campo semantico comune e cioè i

poi utilizza il lavoro dello storico per familiarizzare con il campo semantico relativo al linguaggio che gli permette di risolvere una certa classe di problemi.

Un esempio significativo è dato dall'evoluzione del linguaggio Algebra nella cultura occidentale¹⁰. Esso venne introdotto in Occidente intorno al 1200 e prima di raggiungere un livello di formalizzazione significativa sono passati circa 600 anni nei quali la grammatica del linguaggio ha subito successive modifiche.

Lo studio delle concezioni storiche non è altro che lo studio dei significati legati ad un certo linguaggio in un determinato periodo storico.

Un linguaggio nasce con ambiguità semantiche od anche ricchezza di significati all'interno della grammatica. Quando il linguaggio si formalizza si assegna un significato ad ogni formula e si perdono i significati precedenti.

3.3.1 La Comunicazione delle Matematiche

Il titolo del paragrafo, a primo acchito, potrebbe risultare riduttivo. Ma, come abbiamo avuto modo di dire, la nostra ipotesi è quella delle Matematiche come linguaggi. Ed abbiamo dato di questo una interpretazione semiotica. Quindi intendiamo linguaggio nella accezione più ampia possibile (Inserendo anche i linguaggi non verbali, ad esempio¹¹). Quando ci riferiremo alla comunicazione delle Matematiche intenderemo la comunicazione di linguaggi ampliati con tutte le possibili accezioni semiotiche.

Cercare di esaurire in un paragrafo tutto quello che si dovrebbe poter dire a proposito della Comunicazione delle Matematiche sarebbe impresa assai ardua. Per quanto attiene alle teorizzazioni sulla Ricerca in Didattica delle Matematiche ci si riferirà al capitolo 6.

Il punto di vista semiotico dei linguaggi matematici offre una chiave di lettura diversa e per certi versi più completa del paradigma utilizzato generalmente nella ricerca in didattica delle matematiche. Per "più completa" si intende: tale da poter dare giustificazioni più argomentate sui fenomeni di comunicazione delle matematiche e talvolta riuscire a fare anche delle previsioni comportamentali.

2.3.2 Si può estremizzare un solo approccio alla ricerca in didattica delle Matematiche?

In questo paragrafo si cercherà di far intuire quali potrebbero essere le ricadute di una impostazione semiotica delle matematiche nel campo della Ricerca in Didattica delle matematiche. Nella tradizione della didattica delle matematiche italiana ha avuto un certo peso l'approccio "La Matematica nella realtà". Si pensi alla scuola romana di

"fenomeni di linearità" con significati concettuali riferibili alla struttura matematica di "spazio vettoriale".

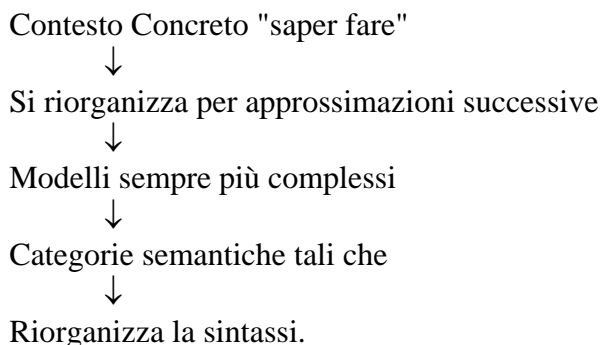
Una definizione di campo semantico analoga alla precedente si trova in U. Eco, *Trattato di Semiotica generale*.

¹⁰ F. Spagnolo, *Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese*, L'insegnamento della Matematica, Centro Morin, Paderno del Grappa, vol. 9, n. 8, 1986. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/spagnolo_cinese_86.pdf Sono stati pubblicati numerosi altri articoli teorico-sperimentali sull'argomento a partire dal 2001 da parte di F. Spagnolo e di B. Di Paola. Le informazioni si trovano nel sito del GRIM.

¹¹ Per una riflessione più puntuale vedi Appendice 1.

Emma Castelnuovo¹² e alla scuola genovese di Paolo Boero (almeno nella sua prima fase).

Cerchiamo di analizzare le tappe più importanti pensando all'analogo dell'approccio funzionale di una lingua naturale:



Osservazioni per la comunicazione significativa delle matematiche:

- 1) Non sempre si ha chiaro il linguaggio su cui si lavora;
- 2) Il numero delle esperienze concrete per tentare di costruire categorie semantiche significative dovrebbe essere estremamente elevato e in un intervallo di tempo abbastanza grande (Vedi la parte conclusiva di [Boero, op. cit. p.73].
- 3) Si pensi alla difficoltà di poter far raggiungere agli allievi la consapevolezza delle regole della grammatica nelle lingue naturali (Analisi Logica) ed al suo travaglio epistemologico.
- 4) L'analogia potrebbe continuare contribuendo a chiarire i ruoli dell'apprendimento di linguaggi differenti e della loro analisi epistemologica.

Il quadro di riferimento della ricerca in didattica delle Matematiche oggi ha un quadro di riferimento differente. Il riferimento ai lavori di Vigostky è molto presente rispetto ai problemi della costruzione sociale della conoscenza da parte degli studenti. Si rimanda comunque alle riviste specialistiche di ricerca in didattica delle Matematiche¹³.

2.4 Alcune osservazioni sul “significato”...

*"Non è possibile ottenere contenuti di pensiero semanticamente pregnanti tramite semplici computazioni formali, che siano eseguite in serie o in parallelo".
(op. cit.) H. Wang,*

¹² L'epistemologia sottesa all'approccio di Emma Castelnuovo è una sorta di “epistemologia del funzionamento”. L'approccio ha avuto un fondatore in Federico Enriques (zio di Emma Castelnuovo). Nell'epistemologia del funzionamento hanno anche un ruolo importante le ricostruzioni teoriche (pluraliste) per l'acquisizione dei concetti matematici.

¹³ In Italia: 1) L'insegnamento delle Matematiche e delle Scienze Integrate; 2) La Matematica e la sua Didattica; 3) Quaderni di Ricerca in Didattica (anche on line <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/menuquad.htm>); 4) Periodico di Matematiche. All'estero: 1) Educational studies in Mathematics; 2) Recherches en Didactiques des Mathématiques; 3) For the Learning of Mathematics; 4) Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education; 5) Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education; 6) Acta Didactica Mathematica.

Il problema del significato è centrale nella definizione di qualunque linguaggio e soprattutto nella sua comunicazione. Affrontare esaurientemente il problema richiederebbe una trattazione più puntuale e ampia. Seguendo una delle possibili strade ci siamo rivolti a Quine.

La scelta di Quine è più congeniale al nostro punto di vista.

In questo paragrafo riportiamo la distinzione tra teoria del significato e teoria del riferimento data da Quine in¹⁴:

La Teoria del significato viene caratterizzata da:

- Significato (Una definizione di significato rischia di portare ad un circolo vizioso. Dovremmo considerare il termine come primitivo, in una prima approssimazione possiamo dire che "il significato di un'espressione è l'idea espressa");
- Sinonimia (Identità di significati in una determinata lingua. La lessicografia è la ricerca sull'identità dei significati.)
- Significanza (Possesso del significato);
- Analiticità (Verità in virtù del significato);
- Implicazione (Analiticità dei condizionali o verità in funzione dei condizionali).

La Teoria del Riferimento viene caratterizzata da :

- Denominare
- Verità
- Denotare (essere vero di...);
- Estensione (La classe di tutte le entità di cui un termine generale è vero si chiama estensione del termine);
- Valore di una variabile.

"Il confine tra i due campi non è una barriera. Dati due campi qualsiasi, è concepibile che un concetto possa essere composto di concetti presi da entrambi i campi. Ma se ciò dovesse accadere nel caso della teoria del significato e della teoria del riferimento, dovremmo probabilmente riferire un tale concetto ibrido alla teoria del significato (semplicemente perché la teoria del significato è in una situazione peggiore di quella della teoria del riferimento, e di conseguenza è delle due la più problematica." [Quine, op. cit., p.121]

I linguaggi Matematici hanno utilizzato come Teoria del significato (Modelli Semantici) quella corrispondente alla Teoria del Riferimento. La nozione di verità di Tarski ha il suo statuto nella Teoria dei Modelli semantici. Ma come abbiamo già visto nelle limitazioni dei modelli semantici una teoria semanticamente chiusa contiene una proposizione che afferma la sua falsità.

Il Matematico considera le proposizioni ideali della matematica come prive di significato, però una volta assunte nell'ambito di un sistema formale agisce come se fossero dotate di significato.

L'ambiguità della comunicazione in un determinato linguaggio dipende essenzialmente dalla Teoria del Significato e non dalla Teoria del Riferimento. O per lo meno la Teoria del Riferimento risulta essere meno ambigua perché formalizzabile nell'ambito dei Modelli semantici.

¹⁴W.V.O. Quine, *Il problema del significato*, ed. Ubaldini, 1966 (1961 Harvard College, Cambridge, USA), Roma.

Se assumiamo il fatto che Pensiero e Linguaggio sono equivalenti, la Teoria del Significato e la Teoria del Riferimento coinciderebbero. Dall'attività del pensiero dovremmo escludere per esempio le immagini mentali che sono state e sono tuttora uno degli strumenti dell'attività del pensiero matematico. Si pensi al lavoro già citato di Hadamard ed a quello di Wertheimer¹⁵.

Credo comunque che l'attività meglio documentata nell'ambito matematico è quella dei metodi della Geometria Algebrica Italiana del secolo scorso. Geometri come Cremona e Enriques, riuscirono a mettere a punto una sorta di algebra di immagini mentali alla quale diedero uno statuto matematico che fu messo in discussione nel momento in cui la comunità dei matematici cercò di formalizzare il linguaggio. È comunque interessante notare che alcuni risultati raggiunti con i metodi della scuola Italiana non sono stati ancora dimostrati con i metodi più formalizzati¹⁶.

Se invece assumiamo il fatto che Pensiero e Linguaggio non coincidano siamo in grado di spiegarci tutti i problemi di limitazione dei Modelli Sintattici e Semantici formalizzati e non.

2.5 I Paradossi Pragmatici

*"La costruzione dei linguaggi formali per certe branche della scienza ha generato l'interesse per quella che è stata chiamata PRAGMATICA, cui si assegna il difficile compito di valutare la rispondenza del linguaggio costruito rispetto agli scopi prefissati. Si tratta di una disciplina diretta a studiare le ripercussioni che considerazioni di efficienza, semplicità e produttività hanno sulla scelta delle stipulazioni linguistiche in logica e nelle scienze empiriche."
[op. cit., H. Wang, p.401]*

Non potremo certo in queste poche righe illustrare convenientemente i recenti risultati relativi alla Pragmatica. Si cercherà di individuarne uno dei possibili nodi fondamentali riferendoci essenzialmente ad un lavoro classico sull'argomento¹⁷.

Non verranno esaminati in questa sede i riferimenti alla semantica ed ai linguaggi non verbali. I concetti portanti per una messa a fuoco del problema della Pragmatica saranno quelli di relazione e modello di relazione.

La relazione è vista come strumento cognitivo della comunicazione e un modello di relazioni è visto come prima approssimazione per la comprensione di una possibile grammatica della comunicazione.

Un altro strumento fondamentale per la Pragmatica è quello di meta-comunicazione (Comunicare sulla comunicazione). In generale i matematici usano per i singoli linguaggi matematici linguaggi specifici e per la metamatematica il linguaggio naturale che risulta essere il linguaggio della comunicazione e della meta-comunicazione.

Schematicamente possiamo introdurre due assiomi della meta-comunicazione:

1- Non si può non comunicare;

¹⁵Wertheimer, *Il pensiero Produttivo*, Ed. Giunti, Firenze, 1965.

¹⁶F. Speranza, *Tendenze Empiriste della Matematica, Epistemologia della Matematica - Seminari 1989-1991* (a cura di F. Speranza), Progetto Strategico CNR: Tecnologie ed Innovazioni Didattiche, Quaderno n.10, 1992.

¹⁷ P. Watzlawick - J.H. Beavion - Don D. Jackson, *Pragmatica della comunicazione umana*, Ed. Astrolabio, Roma, 1971.

2- Ogni comunicazione ha un aspetto di contenuto ed un aspetto di relazione di modo che il secondo classifica il primo ed è quindi meta-comunicazione.

Condizione per una interazione efficace e non disturbata della comunicazione è che ciascuna parte si accorga del punto di vista dell'altro. L'accorgersi significa riuscire a modellizzare il sistema di riferimento dell'altro e darne un significato nel contesto in cui ci si viene a trovare. I comunicanti devono essere capaci di metacomunicare e per farlo devono saper uscire dal sistema in cui si trovano.

Si definiscono sistemi interattivi due o più comunicanti impegnati nel processo di definire la natura della loro relazione.

Si cercherà di mettere in risalto uno degli aspetti più rilevanti della Pragmatica e cioè la comunicazione paradossale. Questo ci permetterà in seguito di ritornare sugli ostacoli epistemologici.

Il paradossi hanno giocato un ruolo costruttivo nella storia intellettuale spesso anticipando rivoluzionari sviluppi nella scienza, nella matematica e nella logica. Ogni volta che incontriamo in una disciplina un problema che non si può risolvere nel contesto concettuale che si riteneva applicabile, si rimane sconvolti. Essere disposti a cambiare modello interpretativo del contesto o a generalizzare un modello interpretativo già consolidato comporta uno sforzo intellettuale non indifferente.

Nella comunicazione il paradosso sfida la nostra fede nella coerenza, pervade l'interazione, influenza il nostro comportamento e la nostra salute mentale.

Si definisce paradosso una contraddizione che deriva dalla deduzione corretta da premesse coerenti.

Questa definizione risulta essere troppo generica per non permetterci di intervenire su di essa. Ma la ulteriore classificazione dei paradossi cercherà di ovviare a questa situazione.

Si possono classificare tre tipi di paradossi:

1- Paradossi logico-matematici (antinomie): Date determinate regole inferenziali definite in una certa logica, un'antinomia produce un'autocontraddizione;

2- Definizioni Paradossali (antinomie semantiche): Dato un determinato linguaggio nel quale è definita una semantica si evidenzia questo tipo di antinomie nel passaggio dal linguaggio al metalinguaggio;

3- Paradossi Pragmatici (ingiunzione paradossale e predizioni paradossali);

1- Paradossi logico-matematici

a) Paradosso di Cantor: Sia C l'insieme di tutti i cardinali e c il suo cardinale; allora anche il cardinale dell'insieme delle parti di C , cioè 2^c , deve essere contenuto in C e quindi $2^c \leq c$, mentre per il teorema di Cantor deve essere $c < 2^c$. Quindi $2^c < 2^c$, il che è assurdo.

b) Paradosso di Russell: Si definiscono regolari gli insiemi che non contengono se stessi come elementi. Sia R l'insieme di tutti e solo gli insiemi regolari. R è regolare? Se R è regolare deve essere contenuto in se stesso e quindi deve essere irregolare e viceversa.

Per evitare i Paradossi logici Russell costruì la teoria dei tipi¹⁸, Zermelo e Fraenkel hanno proposto varie forme di teorie assiomatiche degli insiemi. Uno degli scogli costitutivi di tali paradossi è basato sull'insieme infinito che nelle teorie assiomatiche viene postulato. Gli intuizionisti ammettono l'esistenza di un enunciato o di un oggetto matematico solo a condizione che si possa esibire un procedimento effettivo per realizzare la costruzione intesa da quell'enunciato o che abbia significato per quell'oggetto; e ciò, evidentemente, non è possibile nel caso dei paradossi.

2- Paradossi semantici.

a) Paradosso della relazione-nome o della denotazione:

“Manzoni”. e “l'autore dei Promessi Sposi” sono espressioni che denotano la stessa persona e perciò sono tra loro insostituibili. Se operassimo la sostituzione si avrebbe “Manzoni è Manzoni”, frase priva di contenuto.

b) Paradossi di Richard e Paradosso di Berry (quest'ultimo è la semplificazione del primo).

Nella lingua italiana vi è un numero finito di sillabe, perciò è finito anche il numero delle definizioni di numeri naturali, le quali siano formulabili con non più di cinquanta sillabe. Allora esistono numeri naturali non definibili con cinquanta sillabe al massimo; chiamiamo numero di Berry il più piccolo tra questi numeri. Cioè il numero di Berry è per definizione “il più piccolo numero naturale non definibile con una frase composta di cinquanta sillabe al massimo”. Ma questa definizione contiene meno di cinquanta sillabe, dunque, paradossalmente il numero di Berry è definibile con non più di cinquanta sillabe.

c) Paradosso di Skolem: La teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo è esprimibile mediante la logica elementare, ma per il teorema di Löwenheim-Skolem ogni teoria elementare che ammette un modello ne ammette uno numerabile, quindi la teoria di Zermelo possiede un modello numerabile. All'interno della teoria degli insiemi si dimostra il teorema di Cantor e quindi l'esistenza di modelli più che numerabili in ogni modello della teoria come per esempio l'insieme potenza dell'insieme $Z = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$ la cui esistenza è postulata dall'assioma dell'infinito. Pertanto anche il modello numerabile della teoria dovrebbe avere un sottoinsieme più che numerabile, il che è assurdo.

d) Paradosso del mentitore: Il Cretese Epidemide afferma: "Tutti i cretesi sono bugiardi". Dice la verità o mente? Essendo egli cretese, se dice la verità mente, e viceversa.

Per quanto riguarda questa classe di Paradossi possiamo affermare che essi derivano da una confusione tra linguaggio e metalinguaggio. Tarski, come abbiamo già avuto modo di affermare, dichiara che non è possibile, in generale, definire il concetto di verità all'interno della sintassi di una teoria elementare. Non è lecito usare lo stesso

¹⁸ Nella teoria dei tipi B. Russell e A. Whitehead classificarono le funzioni proposizionali a seconda dei valori ammessi dalle variabili (individui, classi, classi di classi, ecc.). Le funzioni proposizionali sono schemi di proposizione contenenti elementi variabili.

enunciato per affermare qualcosa e simultaneamente la verità o la falsità dell'enunciato stesso.

Anche Wittgenstein nel *Tractatus Logico-Philosophicus* afferma "che ogni linguaggio ha una struttura della quale nulla può dirsi in quel linguaggio, ma che vi può essere un altro linguaggio che tratti della struttura del primo linguaggio e posseda a sua volta una nuova struttura, e che una tale gerarchia di linguaggi può non avere alcun limite".

3- Paradossi Pragmatici.

Si è di fronte ad un Paradosso Pragmatico quando si verificano le tre seguenti condizioni:

a) Due o più persone sono coinvolte in una relazione intensa che ha un valore di sopravvivenza fisica e/o psicologica per una di esse, per alcune, per tutte. (Interazione Genitore-figlio, l'invalidità, l'amicizia, l'amore, la dipendenza materiale, la prigionia, la fedeltà ad una credenza religiosa, a una causa, a una ideologia, ecc.).

b) Viene dato un messaggio in un simile contesto:

- 1- asserisce qualcosa
- 2- asserisce qualcosa sulla propria asserzione
- 3- queste due asserzioni si escludono a vicenda.

c) Infine, si impedisce al ricevente del messaggio di uscire fuori dallo schema stabilito da questo messaggio o metacomunicando su esso (commentandolo) o chiudendosi in se stesso.

L'esempio di paradosso pragmatico che viene esposto è stato tratto da [Watzlawick op. cit.]: "Scrivere "Chicago è una città popolosa" è sintatticamente e semanticamente corretto. Ma è sbagliato scrivere "Chicago è trisillaba", perché in tal caso si devono usare le virgolette: "Chicago" è trisillaba. La differenza tra questi due usi della parola sta nel fatto che nella prima asserzione la parola si riferisce a un oggetto (una città), mentre nel secondo esempio la stessa parola si riferisce a un nome (che è una parola) e quindi a se stessa. I due usi della parola "Chicago" sono perciò chiaramente di un diverso tipo logico (la prima asserzione è nel linguaggio oggetto, la seconda nel metalinguaggio) e le virgolette funzionano come indicatori di tipo logico." [p.193]

Supponiamo adesso di esaminare la situazione di comunicazione: si deve dettare ad una segretaria la seguente frase "Chicago è una città popolosa" ed è trisillaba minacciandola di licenziarla se non può o non vuole scriverla correttamente. La segretaria ha due possibilità se rimane nello schema del suo principale : cercare di accondiscendere e naturalmente fallire o rifiutarsi di scrivere. Nel primo caso può essere accusata di incompetenza, nel secondo caso di insubordinazione.

Se esce fuori dal contesto e comunica sulla comunicazione del principale esponendo i motivi che rendono insostenibile la situazione, esce dall'ingiunzione paradossale.

Altri esempi classici di ingiunzioni paradossali sono :

- Sii spontaneo! "Chiunque riceva questa ingiunzione si trova in una posizione insostenibile, perché per accondiscendervi dovrebbe essere spontaneo entro uno schema di condiscendenza e non spontaneità".

- Dovresti amarmi;
- Dovresti divertirti a giocare con i bambini, come tutti gli altri padri.

Ogni comunicazione quindi avviene a diversi livelli gerarchizzati che possono essere o meno congruenti tra loro.

Per entrare in una ingiunzione paradossale, per esempio, si può:

- negare il metalivello (contesto, segnali non verbali);
- negare ciò che viene affermato al livello oggetto, (contenuto di un messaggio, aspetto verbale);
- rendere incapace e impossibile la metacomunicazione (comunicare sulla comunicazione).

Per uscire dall'ingiunzione paradossale una soluzione sembra essere quella di uscire dal sistema di riferimento in cui ci si è venuti a trovare. Questa operazione può essere fatta dall'individuo stesso attraverso una metametacomunicazione o attraverso l'intervento di una persona esterna al sistema.

D. Hodstafer individua, nella capacità dell'uomo di superare le ingiunzioni paradossali, la creatività¹⁹ [p.168]: "È la capacità di vedere in se stesso uno che ha a che fare col mondo, di percepire uno schema delle proprie attività e di fare ciò a molti livelli d'astrazione."

Ed ancora "È una generale sensibilità agli schemi, una capacità di cogliere schemi imprevisti in momenti imprevisti in contesti imprevisti".

Un altro esempio di capacità dell'uomo di superare ingiunzioni paradossali è dato dall'umorismo. La capacità cioè di saper dominare più sistemi di riferimento anche di natura logica. In quest'ultimo caso si potrebbe parlare di metalogica. A questo proposito risulta interessante l'articolo di G. Forabosco sulla "Logica dello humor"²⁰.

2.6 Per concludere ...

I linguaggi matematici interpretati semioticamente potrebbero consentire una migliore lettura dei fenomeni di insegnamento/apprendimento e quindi di comunicazione.

La semiotica consente di stabilire:

- una distinzione tra sintassi e semantica dei linguaggi matematici;
- una riflessione teorica sulla Pragmatica ed un suo utilizzo per interpretare la comunicazione come nel caso delle ingiunzioni paradossali. Si pensi alla possibilità di poter stabilire una corretta ed approfondita analisi a-priori dei comportamenti degli allievi di fronte alla risoluzione di un problema in una situazione didattica. Tutto lo studio sull'Epistemologia sperimentale delle Matematiche fa uso della pragmatica nel momento che si interviene nel processo comunicativo.

¹⁹D.R. Hofstadter, *Si può meccanizzare la creatività*, Le Scienze, Milano, n.171, nov. 1982.

²⁰G. Forabosco, *La logica dello humor*, Le Scienze, Milano, n.265, sett. 1990.