CAPITOLO 3

La storia delle Matematiche e la comprensione dei fenomeni di insegnamento/apprendimento

4.0 Introduzione

Per poter definire la "Storia delle Matematiche" bisogna ricondursi ad una definizione delle Matematiche. Tale definizione non è univoca e presenta una serie di problemi. La posizione che in questa sede viene presa in considerazione è quella delle Matematiche viste come linguaggi e questi linguaggi vengono interpretati semioticamente per permettere un migliore controllo della Comunicazione (cfr. capitolo 3). Questo punto di vista non è l'unico[1], ma è quello che permette una ottimizzazione di risultati sia dal punto di vista dell'analisi epistemologica che della comunicazione. Ma quello che vorremmo argomentare in questo capitolo è se si riesce ad evidenziare un punto di vista sulla Storia delle Matematiche abbastanza funzionale alla comunicazione delle Matematiche ed alla ricerca didattica relativa.

Ma allora si tratterà di dare significato ad una "Storia dei Linguaggi Matematici". Se i linguaggi matematici sono individuati epistemologicamente da una Sintassi, una Semantica ed una Pragmatica, bisognerà tentare di definire cosa significa Storia per questi tre aspetti del "Linguaggio".

Un esempio classico nella Storia delle Matematiche è quello relativo alla storia del linguaggio algebrico. Da numerosi testi di Storia delle Matematiche anche del secolo scorso[2] viene riportato il seguente schema che mette in evidenza lo sviluppo del linguaggio algebrico:

- Algebra retorica: uso della lingua naturale per eseguire i calcoli e denominare gli oggetti matematici (scritti aritmetici greci delle scuole neoplatonica e neo-pitagorica);
- Algebra sincopata: uso della lingua naturale ma intercalando di tanto in tanto delle abbreviazioni per rendere più agile e spedito l'andamento dei ragionamenti e dei calcoli (Diofanto);
- Algebra simbolica: uso di simboli speciali per indicare dati e incognite nonché per rappresentare le varie operazioni (Viéte).

[1] Una classificazione funzionale ad aspetti evolutivi delle Matematiche è la seguente:

- Conoscenze Protomatematiche: I matematici le utilizzano senza chiamarle o definirle in termini matematici (implicite);
- Conoscenze Paramatematiche: utilizzate esplicitamente ed hanno un nome, ma non sono definite ancora in un linguaggio matematico;
- Conoscenze Matematiche: Conoscenze matematiche propriamente dette, nozioni già costruite e definite matematicamente e formanti un nodo di conoscenze che è sotto il controllo delle teorie matematiche e dei linguaggi.

[2] Il Loria nella *"Storia delle matematiche"* (vol.I, ed. Sten, 1929) sostiene che tale classificazione è del Nesselmann e considera la classificazione come "...tre fasi di sviluppo delle dottrine algebriche".

4.1 La storia della Pragmatica della Comunicazione delle Matematiche

La storia di una Pragmatica delle Matematiche risulta alquanto difficoltosa soprattutto per quanto riguarda le fonti. Ma vi potrebbero essere degli altri motivi che possono mettere in difficoltà una impostazione di questo tipo. Una Storia della Pragmatica dovrebbe occuparsi della storia della comunicazione delle matematiche nel passato e questo implica cercare di individuare quale era il Sapere Sapiente in un determinato periodo storico e quale era la Conoscenza effettiva che perveniva a coloro i quali ricevevano questi messaggi comunicativi. Questa operazione può avere un senso se si analizza la storia più recente: dalla istituzione dell'istruzione pubblica in poi, per intenderci. Ed il motivo è strettamente legato alle fonti storiche come ad esempio i libri di testo, i programmi ufficiali, i registri degli insegnanti, le riviste di matematica e didattica della matematica a qualsiasi livello, sia quelle riguardanti gli allievi che quelli riguardanti gli insegnanti o cultori di matematica.

Vengono comunque a mancare i lavori riguardanti la "comunicazione" propriamente detta, i risultati sperimentali sulla comunicazione. Queste fonti che abbiamo menzionato sono sempre delle fonti indirette e comunque si rifanno sempre all'analisi di un "testo scritto". Sarà l'interpretazione di questo testo scritto che consentirà i collegamenti, le analogie, le inferenze rispetto a quello che lo storico aveva come obiettivo e scopo della sua ricerca. Possiamo affermare che una storia di questo tipo la possiamo condurre con argomentazioni sufficientemente forti a partire, forse, della fine del settecento sino ad oggi.

Sugli scopi ed obiettivi di una storia della Pragmatica della Comunicazione dei Linguaggi Matematici dobbiamo ancora discutere. Che tipo di risultati ci si aspetta, che uso farne di questi risultati come utilizzare i risultati nella Comunicazione dei linguaggi matematici oggi. Sono tutti interrogativi ai quali cercheremo di rispondere in un secondo momento.

4.2 La storia della sintassi dei linguaggi matematici.

A questo proposito è utile citare la classificazione delle strutture dell'articolo di "N.Bourbaki" sull'*Architecture des Mathématiques*[3]: algebriche, topologiche, d'ordine. Questa classificazione permetterà poi di individuare tutte le altre strutture a partire da queste. Dobbiamo tenere presente che le "strutture" costituiscono l'asse portante dei "modelli semantici" (vedi cap. 2.3).

L'esempio tratto dagli "Elementi di storia della matematica" di Bourbaki che prenderemo in considerazione è quello dell'algebra.

L'argomento viene introdotto partendo da una nozione che viene considerata come "primitiva" e cioè quella di "composizione interna". Si passa quasi subito alle considerazioni riguardanti gli elementi di Euclide sulle regole di calcolo con un esempio particolare riguardante la commutatività del prodotto di due numeri razionali. Si passa poi alla teoria delle grandezze paragonandola alla teoria dei numeri reali odierna. Il passaggio successivo è legato a Diofanto individuato quale precursore della

[3] Nel volume a cura di F. Le Lionnais, *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, Paris, 1948.

“regola dei segni” per in numeri negativi[4]. Si analizza quindi il ruolo dei numeri negativi e complessi per lo sviluppo del linguaggio algebrico legato alla risoluzione delle equazioni. L’altra serie di ricerche che conducono alla nozione di gruppo sono quelle legate alla “teoria delle sostituzioni”. Dopo aver analizzato la storia del concetto di gruppo si passa all’isomorfismo ed infine agli sviluppi moderni dell’algebra nella sua visione strutturalista. Le otto pagine relative all’algebra sono molto dense di contenuto e mettono bene in evidenza l’obiettivo strutturalista del progetto.

In tutta la trattazione del testo è presente la classificazione delle strutture algebriche, topologiche e d’ordine.

4.3 La storia della semantica dei linguaggi matematici.

Sotto questa impostazione possiamo ritrovare tutti quei testi di natura divulgativa che rivisitano i percorsi storici dei linguaggi matematici, come per esempio il Kline con il titolo “Storia del Pensiero Matematico”.

Il fatto di rivedere la storia come storia del pensiero ci porta a ripercorrere i linguaggi matematici analizzando soprattutto i significati che sono stati attribuiti ai concetti matematici ancor prima che questi potessero far parte organicamente di un linguaggio matematico organizzato.

Un discorso a parte va fatto per gli “Elementi di Euclide” in quanto la storia degli elementi, nella nostra cultura occidentale, è stata ripresa sia negli aspetti sintattici, fine ottocento inizi novecento con la sistemazione del “metodo ipotetico-deduttivo”, sia negli aspetti semantici attraverso i diversi commentari: Proclo, Clavio ed Enriques[5] .

Riferendoci all’Appendice 2[6] di questo stesso, testo il Paradigma della Matematica riguardo alla geometria Euclidea potrebbe essere così sintetizzato:

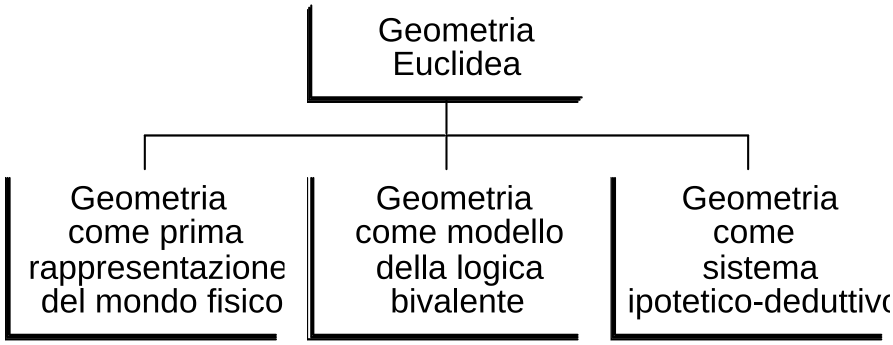
1. La Geometria Euclidea come prima rappresentazione del mondo fisico: questo è anche il messaggio recuperato da Platone;
2. La Geometria Euclidea come modello della logica bivalente e quindi modello di riferimento dell’argomentare nella cultura occidentale: il messaggio di Aristotele;
3. La Geometria Euclidea come sistema ipotetico-deduttivo. Messaggio recepito a partire dalla fine dell’ottocento. Hilbert lo riprende per rifondare la Geometria Euclidea. I Bourbakisti ne hanno fatto un programma per la classificazione delle matematiche negli anni trenta mutuato dai concetti di invariante e struttura. Questa interpretazione della Geometria Euclidea corrisponde a quello che oggi la comunità matematica definisce come Modelli Sintattici e Modelli semantici.

---

[4] “Diofanto non conosce i numeri negativi; questa regola non si può quindi interpretare che come riferita al calcolo dei polinomi, e permette di “sviluppare” prodotti del tipo (a-b)(c-d).” (op. cit., p. 66, nota 3)

[5] F. Enriques, *Gli Elementi d’Euclide e la critica antica e moderna*: 1) Libri I-IV (1925), Ed. Alberto Stock, Roma; 2) Libri V-IX (1930), Ed. Zanichelli, Bologna; 3) Libro X (1932), Ed. Zanichelli, Bologna; 4) Libri XI-XIII (1935), Ed.Zanichelli, Bologna.
Vengono citati in questi testi i commentari di Euclide italiani e stranieri più accreditati scientificamente agli inizi del secolo.

[6] G. Callari - F. Spagnolo, *Una proposta di itinerario filosofico-matematico*: dalla rivoluzione scientifica ad oggi.



Per quanto riguarda l’algebra, ad esempio, i testi classici di Storia delle Matematiche quali Loria[7], Kline[8] o Boyer[9] attraverso il percorso cronologico privilegiano l’aspetto semantico a quello sintattico. Sono le “idee portanti” di ciascun linguaggio che vengono messe in evidenza, i procedimenti precursori, i passaggi da un concetto ad un altro e la collocazione storico-sociale degli sviluppi matematici trattati. Sono comunque delle “storie interne” delle matematiche.

4.4 Quale storia per la comunicazione delle matematiche e per la ricerca in didattica?

La storia delle matematiche può avere, in prima approssimazione, il seguente utilizzo nella didattica:

- La storia delle matematiche come intervento pedagogico: a) Introdurre un argomento matematico attraverso un documento storico in originale. Come lo studio di un classico nello studio della letteratura della lingua naturale. Questo ha il vantaggio di non trasformare in ulteriori interpretazioni il pensiero del matematico. Non è possibile farlo per tutto il curricolo, ma per argomenti particolari ed in particolari momenti. Forse introducendo all’interno di situazioni didattiche più articolate è possibile condurre interventi significativi[10].
- La storia come sorgente di problemi: Questioni riguardanti l’approssimazione, Paradossi matematici significativi per lo sviluppo interno di alcuni linguaggi, Problemi classici come la trisezione dell’angolo o riguardanti la risoluzione di equazioni, possono essere presentati in originale o con una trasposizione in linguaggio moderno sia nell’aspetto della lingua naturale che del simbolismo matematico. Dal punto di vista dell’insegnante può diventare uno strumento di progettazione, per l’allievo un’occasione per dare significato ai concetti matematici.
- La storia delle matematiche come attività interdisciplinari: Risulta estremamente utile nei licei il collegamento matematica-filosofia mediato dalla storia. Numerose

[7] op. cit. (nota 2)
[8] *Storia del pensiero matematico*, Ed. Einaudi, Torino, 1991 (2 volumi).
[9] *Storia della matematica*, ed. Isedi, Milano, 1976.
[10] Si possono ritrovare esemplificazioni di questo approccio nel “Bulletin Inter-IREM Epistémologique”, Budapest 1988: *Pour une perspective historique dans l’enseignement des mathématiques.*
Con uno spirito un pò diverso e con la mediazione degli insegnanti vengono presentate delle proposte didattiche strettamente legate a problemi tratti dalla storia a cura di B. D’Amore e F. Speranza (*Lo sviluppo storico della matematica*, Ed. Armando, Roma, 1989).

sono le esperienze condotte in Italia[11] e all'estero. Nella Appendice 2 viene riportato un esempio di collegamento matematica-filosofia mediato dalla storia. Risultano utili le letture dei classici matematici in originale[12]. Dal punto di vista dell'insegnante vi è anche un recupero di una conoscenza della disciplina da un punto di vista più generale (quello della filosofia) e dal punto di vista dell'allievo la possibilità di inserire le matematiche in una prospettiva culturale più ampia. Questa rientra perfettamente nella tradizione italiana dal secolo scorso (Enriques) sino ai nostri giorni (Lucio Lombardo Radice). Obiettivi didattici potrebbero essere: a) ridare una dimensione umana alla scienza partendo da un approccio storico; b) far sentire che le matematiche non sono state sempre come noi le percepiamo oggi; c) lavorare con dei veri problemi affrontati dalla comunità dei matematici nei vari periodi storici; d) realizzare e far realizzare dei documenti da poter essere riutilizzati in altre situazioni di insegnamento.

H.N. Janke[13] in occasione della prima (ed al momento unica) scuola estiva di ricerca in didattica delle matematiche (Torino, 1990) nel ribadire l'importanza del recupero del "senso" riguardo alle matematiche così si esprimeva a proposito della storia: "*Un concetto matematico non ha un significato suo proprio, valido per sempre. Vi è piuttosto una decomposizione sincronica e diacronica del suo significato in più campi di significato in parte non confrontabili*."
Concludendo più avanti: "*La storia della matematica diverrà una componente necessaria dell'istruzione matematica se le persone si renderanno conto che tutte le difficoltà a cui si è accennato segnano il contributo effettivo che la storia può dare all'educazione matematica*."

Il punto di vista del linguaggio è stato anche trattato da P.L. Pizzamiglio[14] facendo una distinzione tra il punto di vista formalista e quello realista. Il primo, cioè quello formalista, come riorganizzazione strutturale delle matematiche e con un riferimento alla logica matematica come riflessione di ordine superiore. Il secondo, quello realista, riferito ad entità matematicamente concrete (enti matematici, proprietà e relazioni intercorrenti tra essi) o anche matematicamente astratte.

Un lavoro significativo per quanto riguarda la prospettiva didattica, abbastanza vicino alla posizione di questo lavoro, è quello di Marta Menghini[15] sullo sviluppo storico dell'analisi matematica.

---

[11] I gruppi di Ricerca Didattica finanziati dal C.N.R. ed afferenti alle univesità come ad esempio Genova, Torino, Pavia, Roma, Modena, Napoli, Cagliari, Catania, Parma hanno da anni condotto esperienze significative in questa direzione pubblicando sia articoli che volumi rigurdanti gli aspetti storico-epistemologici e collaborando alla redazione di libri di testo per le scuole.
[12] Risulta utile segnalare come strumenti editi per la scuola: 1) C.F. Manara - G. Lucchini, *Momenti del pensiero matematico*, Ed.Mursia, Milano, 1976. 2) Bottazzini - Freguglia - Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Ed. Sansoni, Firenze, 1992.
[13] *Storia della matematica ed educazione alla matematica: una introduzione al problema* (tradotto da C. Morini), L'insegnamento della matematica, Vol. 14, n. 6, 1991.
[14] *Ruolo didattico della storia della matematica*, L'insegnamento della matematica, Vol. 15, n. 3-5-7, 1992.
[15] *Problematiche didattiche attuali e sviluppo storico dell'analisi matematica*, L'insegnamento della matematica, Vol. 14, n. 10, 1991 (relazione alla 1ª scuola estiva di Torino).

Riportiamo il questionario proposto nelle attività della scuola estiva di Torino sulle concezioni storiche individuate nella storia dell'analisi.

a) In che ordine ritenete opportuno, in una scuola secondaria superiore, i seguenti argomenti relativi al calcolo integrale?
A - Integrale definito
B - Integrale indefinito
C - Teorema fondamentale del calcolo integrale (teorema di Torricelli-Barrow)
EA - Esercizi sull'integrale definito
EB - Esercizi sull'integrale indefinito

b) Coerentemente con le scelte fatte in a), come pensate si debba introdurre
- l'integrale definito in un intervallo [a,b]?
A1 - come limite comune alle due successioni delle aree dei plurirettangoli approssimati per eccesso e per difetto il trapezoide individuato dalla curva
A2 - come differenza dei valori assunti da una primitiva F(b)-F(a)
A3 - come valore dell'area del trapezoide

- l'integrale indefinito?
B1 - come insieme delle primitive di una funzione (cioè come operatore inverso della derivata)
B2 - come "estensione" dell'integrale definito (cioè ricorrendo alla funzione integrale $F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$ *)*

- l'area di una figura piana (nel senso della misura della superficie) ?
D1 - come concetto intuitivo, del resto già noto per figure particolari, come poligoni e cerchi (con questa scelta si evita cioè una definizione di area e ci si concentra direttamente sul problema del calcolo)
D2 - mediante metodi di approssimazione (reticolati, plurirettangoli, ...)
D3 - ricorrendo agli integrali definiti (cioè, in particolare: l'area di un trapezoide é, per definizione, il valore del corrispondente integrale).

c) Ritenete opportuno presentare gli argomenti che seguono? In caso affermativo quando?
E - Calcolo effettivo dell'integrale definito come limite comune alle due successioni... (o metodo di esaustione)
F - Metodi di approssimazioni di aree

Si osservi che:
- con la scelta B1 risulta ovvio che le operazioni di derivazione e integrazione sono una inversa dell'altra, ma occorre introdurre la funzione integrale e il teorema di Torricelli-Barrow per collegare i concetti di integrale definito e di integrale indefinito
- non si possono fare gli esercizi EA ed EB in modo completo se non dopo B1
- Generalmente, se si comincia con B1, si usa il simbolo $\int f(x)dx$ *senza spiegarlo*

Segue una classificazione dei testi di scuola secondaria superiore e di università secondo la successione degli argomenti. Anche se per quanto riguarda i testi universitari viene rilevata una insufficienza dello schema proposto dal questionario.
In questo lavoro vengono messi in evidenza le concezioni storiche con una prospettiva "macro" cioè più indirizzata alle organizzazioni curricolari. Altra cosa sarebbe un lavoro sulle "concezioni storiche" riguardanti singoli concetti matematici, indirizzati verso una analisi "micro". A questo proposito risultano utili lavori del tipo

"Il concetto di Funzione sino al secolo XIX"[16] dove viene analizzata buona parte delle concezioni storiche sulla funzione ed il loro sviluppo all'interno di linguaggi matematici. Ma per poter meglio classificare queste concezioni da un punto di vista della psicologia cognitiva risulta utile la parte storica che si trova sul volume di epistemologia della funzione di J. Piaget[17].

Il modo di procedere in una prospettiva di "comunicazione delle matematiche" è particolarmente diverso rispetto ad un lavoro di uno storico della matematica. Il lavoro dello storico va utilizzato completamente, ma è il punto di vista con il quale si interpretano questi risultati che ha bisogno di essere riorganizzato . A volte però può succedere che il "didatta" che si occupa di storia riguarda determinate classificazioni di concezioni con un'ottica diversa. Il prossimo paragrafo metterà in evidenza un esempio relativo a questa posizione.

4.5 Una classificazione più dettagliata del linguaggio algebrico per un utilizzo nella didattica.

In questo paragrafo si cercherà di evidenziare i passaggi tra i livelli linguisti tra algebra retorica, algebra sincopata e algebra simbolica.

I passaggi tra linguaggio naturale e algebra simbolica sono stati molto lenti nella storia dell'algebra. Si passa da certi nomi per denotare l'incognita e certe relazioni, ad abbreviazioni di queste parole, ai codici intermedi fra linguaggio retorico e sincopato ed infine ai simboli. Pervenire ad un linguaggio algebrico simbolico corretto sintatticamente e quindi più efficiente operativamente permette un graduale abbandono della lingua naturale.

Nella fase sincopata coesistono numerosi altri linguaggi di appoggio all'algebra come l'aritmetica, la geometria (semanticamente ricca) per interpretare e risolvere problemi. Il linguaggio naturale rimane sempre da sottofondo.

La risoluzione di problemi o meglio ancora di classi di problemi è uno dei motivi conduttore dello sviluppo del linguaggio algebrico. Altro motivo conduttore è il passaggio dalla risoluzione di un problema ad una classe di problemi. Saranno questi due livelli (singoli problemi, classi di problemi) a caratterizzare lo sviluppo della generalità dei metodi e a consentire lo sviluppo del linguaggio algebrico. I singoli passaggi sono però interessanti per l'analisi del didatta.

Cercheremo di analizzare i singoli passaggi rimandando, ove necessario, alla bibliografia specialistica.

A tal fine utilizzeremo una tabella[18] che riassume questi passaggi e che sarà commentata nelle sue fasi.

---

[16] A.P. Youschkevitch, *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P. n. 41, 1981.
[17] J. Piaget et alii, *Epistémologie et psicologie de la fonction*, Presses Universitaires de France, 1968.
[18] La tabella è il risultato di discussioni con Elsa Malisani (*Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento, costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni*, Quaderni di Ricerca in Didattica, 6, Palermo, 1996).

	Linguaggio Naturale	**Geometria**	**Aritmetica**	**Esempi**
Algebra retorica 1	si	• argomenta con strumenti pre-euclidei • risolve un problema per volta	Linguaggio di supporto procedurale	Cinesi, Babilonesi, Egiziani
Algebra retorica 2	si	• argomenta completamente con strumenti euclidei • risolve un problema per volta	Linguaggio di supporto procedurale	Greci classici, Euclide
Algebra sincopata 1	si	• risolve un problema per volta	Introduzione delle abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze	Diofanto
Algebra sincopata 2	si	• argomenta completamente con strumenti euclidei • risolve classi di problemi	Introduzione dei nomi per l'incognita e le sue potenze	Fibonacci [19], Trattato d'algibra[20] (anonimo del XIV secolo[21])
Algebra sincopata 3	si	• argomenta completamente con strumenti euclidei • risolve classi di problemi	Introduzione di abbreviazioni per le incognite, le sue potenze e certe relazioni come le 4 operazioni, l'uguaglianza e la radice	Algebristi del 500
Algebra sincopata 4	si	• argomenta completamente con strumenti euclidei e algebrici • risolve classi di problemi esprimendo delle formule	Introduzione di una notazione particolare per le incognite, le sue potenze e certe relazioni come le 4 operazioni, l'uguaglianza e la radice	Bombelli
Algebra simbolica[22]	no	• argomenta completamente con strumenti euclidei e algebrici • risolve classi di problemi esprimendo delle formule	Introduzione di simboli per le incognite, le sue potenze e certe relazioni	Viète

[19] Utilizza alcuni nomi per chiamare l'incognita nella parte finale del Liber Quadratorum, ma argomenta completamente con la geometria.
[20] Associa in tutta l'opera l'incognita e le sue potenze con dei nomi particolari, ma non argomenta con la geometria.
[21] Anonimo, *Il Trattato d'Algibra (manoscritto del XIV secolo)*. A cura e con l'introduzione di R. Franci e M. Pancanti, Siena, Quaderno del Centro di studi della Matematica Medioevale, 18, 1988.
[22] Viene presentata l'algebra simbolica senza altri livelli in quanto il presente lavoro storicamente si ferma proprio all'introduzione del simbolo.

Commentiamo adesso la tabella.

Il linguaggio naturale è sempre utilizzato nelle varie fasi dello sviluppo del linguaggio algebrico come "mediatore" e nell'ultima fase come linguaggio di supporto e quindi di riflessione metamatematica. La fase della simbolizzazione del linguaggio algebrico richiederebbe una analisi storica a se stante per meglio comprenderne l'evoluzione.

Vengono presi in considerazione due linguaggi di supporto che sono: l'Aritmetica e la Geometria. La Geometria ha avuto una sua sistematizzazione di natura sintattica ha quindi contribuito notevolmente all'argomentare nell'evoluzione del pensiero algebrico. Per l'Aritmetica il discorso è diverso: essa ha dovuto aspettare molto più a lungo per la sua formalizzazione, sicuramente dopo la fase simbolica dell'algebra e quindi ha avuto un ruolo non principale per quanto riguarda l'argomentazione rispetto alla geometria. L'Aritmetica ha svolto un ruolo di supporto/ostacolo all'evoluzione dell'algebra. In particolare nella fase retorica ha svolto un ruolo di linguaggio procedurale. Il linguaggio procedurale si contrappone al linguaggio relazionale dell'algebra *"...in quanto permette di cogliere il passaggio brusco dei calcoli, dai tentativi numerici ecc. alla sintesi di tutto ciò in una formula."*[23]

A partire da Fibonacci il ruolo della geometria diviene quello di argomentare con strumenti euclidei procedimenti algebrici.

Naturalmente l'esposizione dettagliata dei passaggi richiederebbe un discorso a parte, in questa sede ci sembra importante fornire il quadro di riferimento nel quale ci si muove, le indicazioni bibliografiche necessarie ed un esempio riguardante uno di questi passaggi.

Ci occuperemo in particolare di Fibonacci

4.5.1 Lo sviluppo del pensiero algebrico nel periodo Federiciano: Una disputa tra Abacisti e Algoritmisti.

Il contesto storico.

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di tentare di capire il passaggio all'algebra sincopata 2 cioè relativa al periodo di Fibonacci. Per far ciò cercheremo di presentare lo sviluppo del pensiero Algebrico in Sicilia nel periodo Federiciano (Federico II nato il 26.12.1194, morto nel 1291[24]) e come tale pensiero si sia sviluppato all'interno della storia dell'algebra.

Argomentare questa ipotesi è impresa abbastanza ardua in quanto non esistono documenti storici che consentano di poter affermare direttamente. Gli unici documenti sono di tipo indiretto:

1) Documenti relativi alla situazione culturale prima di Federico II [25];

2) Testimonianze di Leonardo Pisano (detto Fibonacci), matematico vissuto tra la seconda metà del 12° secolo e la seconda metà del 13° secolo, attraverso le sue opere riguardo a delle questioni poste da Giovanni da Palermo e Teodoro in occasione di una loro visita a Pisa assieme all'imperatore Federico II[26]. (Sia Giovanni da Palermo che Teodoro facevano parte della corte di Federico II)

Sarà presa in considerazione soltanto una delle questioni poste dai matematici della corte di Federico II e attraverso alcune osservazioni sui procedimenti dimostrativi utilizzati da Fibonacci in una delle sue opere più importanti *Liber Quadratorum* si cercherà di capire quali potevano essere le conoscenze matematiche in Sicilia in quel periodo storico.

---

[23] Arzarello et alii, *L'algebra come strumento di pensiero*, Quaderno n. 6, Progetto strategico del CNR.

[24] I riferimenti alle date riguardanti Federico II sono prese da D. Abulafia, *Federico II (Un imperatore medievale)*, Einaudi, Torino, 1995.

[25] 1) Ernest Kantorowicz, *Federico II imperatore*, Ed. Garzanti, Firenze, 1988. 2) David Abulafia, *Federico II (Un imperatore medievale),* Ed. Einaudi, Torino, 1995. 3) Gino Loria, *Storia delle Matematiche*, Vol. I (Antichità, Medio Evo, Rinascimento), Ed. Sten, Torino, 1929. 4) Michele Cipolla, *Il contributo Italiano alla rinascita della Matematica nel Duecento*, Discorso della seduta del 14.1.1934 presso la R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo.

[26] Léonard de Pise, *Le Livre des nombres carrés (Liber Quadratorum),* Libraire Scientifique et Tecnicque Albert Blanchard, Paris, 1952.

Il clima culturale prima di Federico II era stato caratterizzato da :

1- l'esistenza nella bassa Italia di un polo di studi latini dal quale scaturirono "i pubblici ufficiali amalfitani e salernitani che avrebbero dominato l'amministrazione siciliana sotto Federico e i suoi successori"[op. cit. Federico II imperatore, p.223].

2- l'esistenza nell'isola di comunità ebree, greche ed arabe che portavano gli stimoli culturali della Spagna, anche se le testimonianze risultano esigue.

Nel panorama culturale del periodo la figura di Federico II è sicuramente quella predominante e il suo patrimonio culturale può essere considerato come risultante tra l'apporto degli Hohenstaufen ed una sorta di pluralismo culturale recepito nei suoi primi anni di vita a Palermo.

Lo sviluppo del pensiero algebrico nella cultura occidentale ha avuto in Leonardo Pisano il suo massimo esponente. La pubblicazione del *Liber abaci* (1202) rappresenta la base per l'insegnamento dei metodi algebrici (algoritmici). Il *liber abaci* è composto da 15 capitoli riguardanti problemi aritmetici applicati a questioni d'ordine pratico e di transazione commerciale. Alcune di queste questioni appartengono alla teoria dei numeri, si fa largo uso di una successione numerica che oggi porta il nome di successione di Fibonacci (ogni numero è ricavato dalla somma dei due precedenti immediati, con l'esclusione dei primi due termini).

Le opere di Fibonacci oltre il *Liber abaci* sono :

- *Pratica Geometrica*, diviso in 7 capitoli, contiene un gran numero di problemi di geometria applicati a figure piane e solide;
- *Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometricam pertinentium*, 15 questioni di analisi determinata e indeterminata di 1° grado; (due di queste questioni furono poste da Mastro Giovanni da Palermo della corte di Federico II)
- Una lettera, inviata al filosofo Teodoro della corte di Federico II riguardante due problemi, uno d'algebra ed un altro di algebra geometrica;
- *Liber Quadratorum*, dedicato a Federico II e scritto in funzione delle questioni che Giovanni da Palermo ed il Filosofo Teodoro in occasione della loro visita a Pisa assieme all'imperatore Federico II posero a Fibonacci. L'opera è composta da 20 proposizioni che circoscrivono problemi di analisi indeterminata di secondo grado. Sostanzialmente le proposizioni sono dei lemmi che vengono utilizzati per rispondere alle questioni di Giovanni da Palermo (Proposizione XIV) e di Teodoro (Proposizione XX).

Nella storia dell'algebra possiamo considerare tre periodi che ricalcano l'evoluzione del linguaggio algebrico nella cultura occidentale :

1- *Algebra retorica*, nella quale non si fa uso di alcun segno, ma si indicano le operazioni, scrivendone le parole corrispondenti. (Arabi d'oriente)

2- *Algebra sincopata*, nella quale, come nella retorica, tutto è scritto mediante le parole corrispondenti, facendo però uso di abbreviazioni per le operazioni e per le relazioni di uso più frequente. (Diofanto, Arabi d'occidente)

3- *Algebra simbolica*, nella quale tutte le relazioni e tutte le operazioni sono rappresentate da simboli speciali. (Indiani e Europei dal XVII secolo in poi, Viète)

Nella cultura matematica siciliana del periodo Federiciano un ruolo importante era dato all'abaco nel calcolo. L'abaco, che oggi è più conosciuto come pallottoliere, consente di poter rappresentare i numeri i numeri naturali in base dieci lasciando libero lo spazio nel caso in cui si deve rappresentare lo "0". Non è necessario quindi dare un nome allo zero. Per accelerare i calcoli vennero successivamente sostituiti dei gettoni contrassegnati con numeri.

Nel momento in cui si sostituiscono i gettoni direttamente con i numeri, cioè l'abaco al terzo livello, siamo in presenza dello strumento Algoritmico. Fibonacci era un Algoritmista, mentre Mastro Giovanni da Palermo, notaio presso la corte di Federico II, era un Abacista.

La distinzione tra Abacisti ed Algoritmisti si situa tra Algebra retorica e Algebra sincopata nel senso che l'algoritmista segue l'algebra sincopata mentre l'abacista è ancora fermo all'algebra retorica. L'abacista risolverà i problemi singolarmente, l'algoritmista comincerà a risolvere i problemi inserendoli in classi di problemi. Questo è il senso della disputa tra i "matematici" abacisti Giovanni e Teodoro della corte di Federico II e Fibonacci.

Nel 1223 Federico si reca a Pisa ed incontra Fibonacci il quale era già un matematico affermato. Al seguito di Federico vi erano: l'astronomo Domenico, il filosofo Teodoro e Giovanni da Palermo.

I problemi proposti da Giovanni da Palermo e da Teodoro, espressi nel linguaggio simbolico dell'algebra contemporanea, sono i seguenti:

1- Trovare un numero x tale che le quantità x^2+5 e x^2-5 siano dei quadrati.
2- Risolvere l'equazione $x^3+2x^2+10x = 20$.

Il 2° problema (proposto da Teodoro) si collocava nella tradizione geometrica Euclidea e non era particolarmente innovativo per quanto attiene al procedimento risolutivo. Fibonacci dimostra che l'unica radice non può appartenere agli irrazionali studiati nel X libro di Euclide e poi esprime la soluzione in frazioni sessagesimali secondo la tradizione egiziana.

L'analisi del 1° problema si rivela più interessante in quanto consente di individuare chiaramente due concezioni diverse: l'algebra retorica degli abacisti e l'algebra sincopata degli algoritmisti.

Gli arabi d'oriente (abacisti) risolvevano i problemi singolarmente senza ipotizzare la possibilità di generalizzarli non possedendo gli strumenti per la simbolizzazione.

Giovanni da Palermo, in linea con questa tradizione, pone il problema a Fibonacci pur conoscendo la soluzione di altri problemi simili (esempio: $x^2 -6=a^2$, $x^2 +6=a^2$).

Nella risoluzione del problema Fibonacci esclude subito *il caso di soluzione intera*. Questo viene argomentato nelle proposizioni che precedono la XIV del *Liber quadratorum* Il ragionamento espresso con il linguaggio odierno è il seguente :

Tutti i numeri della forma $a^2 - b^2$ si dicono congrui ma più precisamente[27]:

"Un numero C, intero o razionale, si dice congruo se esiste un numero quadrato, intero o razionale, tale che aggiuntogli e sottrattogli C si ottiene ancora un quadrato. Un numero C è dunque congruo se e solo se il sistema: $\begin{cases} y^2 - C = x^2 \\ y^2 + C = z^2 \end{cases}$ *ammette soluzioni intere o razionali. Se C è un numero congruo il relativo numero quadrato si dice quadrato congruente o più semplicemente congruente."*

Risolvere il problema proposto significa risolvere il sistema di equazioni:

1) l'equazione $x^2 -5 =a^2$, che equivale alla $x^2 - a^2 =5$;
2) l'equazione $x^2 +5= b^2$, che equivale alla $x^2 -b^2 =-5$.

Per quanto riguarda la prima equazione, consideriamo i casi possibili:

[27] La definizione di numero congruo la riportiamo dal lavoro di R. Franci (*Numeri congruo-congruenti in codici dei secoli XIV e XV*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Anno IV, n.1, La Nuova Italia Editrice, 1984);

x	a	$x^2 - a^2$
2	1	3
3	1	8
4	1	15
5	1	24
3	2	5
4	2	12
4	3	5
…	…	…

I numeri 3 e 2, 4 e 3 sono delle possibili soluzioni per la prima equazione in quanto il risultato è 5, ma sono anche soluzioni della seconda equazione?

Dobbiamo quindi fare i conti con l'altra espressione $x^2 +5=-a^2$. Questa espressione non ha radici intere basta trasformarla in $x^2 -b^2 =-5$. Dalla tabella già scritta si vede subito che non ci possono essere soluzioni negative. Bisognerà costruire delle tabelle di numeri congruenti per poter individuare la soluzione. Fibonacci segue un ragionamento analogo. La soluzione fornita da Fibonacci è un numero razionale espresso nella forma di frazione e cioè 41/12. Non ci fornisce una dimostrazione di come è arrivato a determinare il numero. Sicuramente ha utilizzato le tabelle di numeri congruenti che erano noti all'epoca e che non vengono riportati nel Liber Quadratorum (cfr. Franci, 1984). Fibonacci dice soltanto che i numeri che compaiono nella sua verifica numerica 31, 41, 49 sono in progressione aritmetica di ragione 720:

(1) $(41/12)^2 +5 = 1681/144 +5\bullet144/144 = (49/12)^2$ dove $x=41/12$ e $a=49/12$;

(2) $(41/12)^2 -5 = (1681-5\bullet144)/144 = (31/12)^2$ dove $x=41/12$ e $b=31/12$;

Le espressioni (1) e (2) possono anche scriversi rispettivamente:

$41^2 + 5\bullet12^2 = 49^2$ 1681+720=2401

$41^2 - 5\bullet12^2 = 31^2$ 1681-720=961

che ci consento di poter individuare, in tabelle per la ricerca dei numeri congruenti, una possibile soluzione così espressa:

x	a	$x-a^2$		x	a	$x- a^2$
41^2	31^2	$720=5\bullet12^2$		41^2	49^2	$-720=5\bullet12^2$

La ricerca del numero congruente che nel nostro caso è $720=5\bullet12^2$ risulta determinante per la successiva ricerca delle soluzioni come pure risulta utile la considerazione che i quadrati dei numeri 31, 41, 49 sono in successione numerica di ragione 720. Nella proposizione XIII Fibonacci dimostra infatti che il numero congruo cercato deve essere necessariamente della forma $5\bullet k^2$. Nella proposizione XII dimostra che il prodotto di un numero congruo per un numero quadrato è un numero congruo.

Sembra interessante sottolineare non già la soluzione del quesito ma il procedimento, che attraverso dimostrazioni di singoli problemi e/o di classi di problemi, riesce a risolvere il propblema proposto da Giovanni da Palermo fornendo una soluzione che apparentemente sembrava non essere sufficientemente argomentata.

Anche se ogni singola proposizione del *Liber Qudratorum* viene argomentata attraverso la Lingua Naturale e quindi con l'algebra retorica l'utilizzare in maniera compatta proprietà dei numeri interi[28] (pari, dispari, divisibilità, ecc..) ci da la possibilità di affermare che Fibonacci, usi l’algebra sincopata. Questa considerazione è avvalorata anche dal fatto che nella proposizione XX (l’ultima del *Liber Quadratorum*) sono presenti le parole *Res* e *Census* per indicare rispettivamente l’incognita e il quadrato dell’incognita.

E dal momento che si utilizzano ragionamenti sulle proprietà dei numeri interi i procedimenti dimostrativi sono più veloci e consentono quindi a Fibonacci nella disputa con i matematici siciliani della corte di Federico II, di escludere le soluzioni intere .

Evidentemente la scuola algoritmica attraverso lo strumento dell’algebra sincopata si poteva permettere una generalizzazione di problemi algebrici. Siamo ancora lontani da una sistemazione della grammatica del linguaggio algebra.

L’esempio riportato mette in luce uno dei tanti passaggi tra i vari livelli del linguaggio algebrico e tali passaggi possono risultare utili al didatta, ma può risultare interessante individuare anche i diversi punti di vista secondo i quali si può analizzare il problema storia-didattica.

---

[28] Riportiamo alcune osservazioni di E. Picutti (Il n.18 dei “Quaderni delle Scienze è dedicato a “*Uomini e numeri*”. Particolare interesse per il problema che stiamo affrontando riveste l’articolo di E. Picutti, *Leonardo Pisano (noto anche come Fibonacci, ci ha lasciato un “libro dei quadrati” che lo pone fra i maggiori matematici del Medioevo)* .sulle proprietà aritmetiche.

Nella Proposizione IX del *Liber quadratorum* Fibonacci dimostra che :

“Se due numeri primi tra loro sono composti; se la loro composizione forma un numero pari, e se il numero solido formato dalla loro composizione è moltiplicato dal numero di cui il più grande eccede il più piccolo, ne risulterà un numero di cui la ventiquattresima parte è intera.”[op. cit., p. 26]

Sia che i due numeri sono entrambi pari o entrambi dispari il numero risultante dall’espressione$ab(b-a)(b+a)$ sarà sicuramente un pari. Dimostriamo adesso che un numero di questo tipo è multiplo di 24 sia che i due numeri siano entrambi pari o entrambi dispari. La dimostrazione procede nell’argomentare prima che sono multipli di 3 e poi che sono multipli di 8.

Riportiamo la dimostrazione riguardante il caso che i numeri della forma $ab(b-a)(b+a)$ siano dei multipli di 3. Il procedimento è il seguente. I numeri (a, b) possono essere rappresentati da 3k, 3k+1, 3k+2. Se uno dei due numeri è del tipo 3k allora possiamo asserire che il numero $ab(b-a)(b+a)$ è del tipo 3k in quanto 3k3h(3k+3h)(3k-3h)= 3(3hk(3k+3h)(3k-3h)). Se sono entrambi del tipo 3k+1 o 3k+2,

allora (b-a)=(3k+1 - (3h+1))=3k+3h=3(h+k) quindi è del tipo 3k. Analogamente si dimostra per 3k+2.

Se sono uno del tipo 3k+1 e l’altro del tipo 3k+2, allora la somma (a+b)= 3k+2+3h+1=3k+3h+3=3(k+h+1), quindi ancora della forma 3k. Il tipo di ragionamento si estende ai multipli di 8.

4.6 Conclusioni

Abbiamo avuto modo di poter stabilire un punto di vista particolare sulla storia delle matematiche e, come era stato annunciato all’inizio del capito lo. Il seguente schema cercherà di evidenziare i possibili utilizzi della storia dei linguaggi matematici da punti di vista differenti:

Dal punto di vista del Ricercatore in Didattica delle Matematiche (Comunicazione delle Matematiche)	• Storia della sintassi: concezioni che servono per la sistemazione sintattica di un linguaggio. • Storia della semantica: concezioni da utilizzare per l’analisi a-priori dei comportamenti degli allievi. • Storia della Pragmatica: per uno studio dei fenomeni di insegnamento riguardanti la trasposizione didattica.
Dal punto di vista dell’Insegnante	• Storia della sintassi: concezioni che servono per la sistemazione sintattica di un linguaggio. Utilizzo personale dell’insegnante ma anche per controllare meglio sia l’analisi a-priori che la trasposizione didattica. • Storia cronologica riguardante i linguaggi matematici. • Storie tematiche: Storia della dimostrazione, del concetto di limite, dell’infinito, del rigore, ecc. • Recupero della conoscenza della disciplina da un punto di vista più generale (quello storico-filosofico ad es.).
Dal punto di vista dell’allievo	• Inserisce lo studio dei linguaggi matematici in una dimensione culturale. • Inserisce una dimensione temporale nella costruzione dei linguaggi matematici.