

## **CAPITOLO 4**

### **Come gestire la comunicazione delle matematiche in classe: la teoria delle situazioni didattiche**

In questo capitolo saranno discussi gli elementi portanti della Teoria delle Situazioni Didattiche, senza avere la pretesa di completare il quadro di riferimento. Alla fine del capitolo saranno inserite alcune situazioni a-didattiche per il livello della scuola elementare, media e superiori.

#### **4.1 Paradigmi a confronto ...**

La ricerca in didattica presenta numerosi paradigmi di riferimento, in questa sede ne illustreremo alcuni ed infine si tenterà di argomentare la scelta di un Paradigma della Ricerca in Didattica.

<b>Paradigma storico<sup>1</sup></b>	Questo paradigma tiene conto dei percorsi utilizzati nella storia per la messa a punto dei linguaggi disciplinari. Esso si ri-conduce ad un'azione interpretativa dei percorsi diacronici. Naturalmente esistono difficoltà dovute all'autenticità e alla coerenza delle fonti di informazione e alla correlazione non sempre positiva tra percorso storico e percorso di insegnamento/apprendimento. (Vedi capitolo 2 sulla interpretazione data alla storia dei linguaggi matematici)
<b>Paradigma epistemologico -disciplinare</b>	Questo paradigma tiene conto dei fondamenti gnoseologici e operativi della disciplina. Studia le relazioni tra l'epistemologia delle discipline e la didattica che ne guida l'insegnamento dei contenuti. Il limite è che la ricerca didattica si chiuda nella disciplina. D'altro canto è il punto di partenza per individuare gli oggetti di cui si occupa la didattica, i concetti su cui si fonda, i fini che persegue, il linguaggio che utilizza, le strategie metodologiche che utilizza.
<b>Paradigma sperimentale</b>	Consiste nella individuazione di variabili (particolari o ricorrenti), per la spiegazione dei fenomeni didattici attraverso l'utilizzo di eventi costruiti artificialmente per verificare le ipotesi formulate. Risulta utile quando si vogliono esaminare a fondo i ruoli delle singole variabili. Il ricercatore deve essere neutrale. (Viene esaminato più in dettaglio nella comparazione con il Paradigma della Ricerca/Azione e della Ricerca in Didattica).
<b>Paradigma politico-sociale</b>	Si esaminano parametri educativi intrinseci del contesto politico-sociale in cui la formazione dell'uomo si inserisce. E' la dimensione sociologica che prende il sopravvento. Trovano spazio: libertà espressiva, stimolo alla criticità, stimolo alla problematizzazione, stimolo alla creatività. Le attività individualizzate o attività cooperative promuovono tutte l'autonomia del soggetto entro una comunità sociale privilegiata rispetto ai processi di apprendimento. Non si misura quanto l'allievo impari, ma piuttosto si evidenzia la trasformazione della persona in chiave relazionale.
<b>Paradigma tecnologico</b>	Si propone di studiare i processi di comunicazione educativa attraverso le nuove tecnologie non viste soltanto come aiuti tecnici ma anche proponendo strategie

---

<sup>1</sup>La seguente classificazione fa riferimento al testo di *Didattica Generale* (a cura di M.Gennari) ed. Bompiani (1996, Milano) ed in particolare all'articolo di Anna Kaiser sulla Ricerca Didattica e Scienze dell'Educazione.

d’insegnamento tipiche del loro impianto epistemologico (insegnamento programmato, sistemi esperti, ecc..). I fattori negativi: prevalenza dell’hardware sul software. Fattori positivi: utilizzo delle strategie globali come strumenti, utilizzo dei “media” didattici, evidenziando percorsi cognitivi tipici del nuovo ambiente.

<b>Paradigma Etnografico</b>	La ricerca didattica prende in considerazione situazioni conoscitive che viste sotto l’aspetto antropologico possono contribuire ad un migliore approccio metodologico. L’analisi degli eventi didattici inizia dall’esame delle procedure gnoseologiche, morali e sociali evidenziandoli come eventi educativi. Non è necessario lo studio delle interazioni storiche della società. Il “lavoro sul campo” prende il sopravvento coinvolgendo il ricercatore, l’insegnante e l’allievo. Gli argomenti di ricerca sono strettamente connessi con le attività, i ragionamenti sono quelli della prassi quotidiana.
<b>Paradigma Comparativo</b>	Vengono poste a confronto variabili storiche, culturali, politiche e sociali dei sistemi didattici analizzandone analogie strutturali e organizzative anche di paesi diversi. Si cerca di analizzare con lo stesso parametro molteplici contesti differenziati. L’analisi dei dati fornisce un utile piano progettuale. Sono di questo tipo le ricerche a livello Ministeriale di comparazione tra progetti nazionali.
<b>Paradigma semiotico</b>	La produzione “segnica” che viene ad evolversi nel processo educativo è l’oggetto di studio che si articola nel lavoro di “interpretazione”. La consapevolezza della difficile riproducibilità della produzione segnica si coniuga con una interpretazione <u>fenomenologica</u> . Le strutture d’insegnamento, il contesto didattico, le interazioni Sapere-Allievo-Insegnante sono situazioni di studio attraverso anche metodi sistemici.
<b>Paradigma ermeneutico</b>	Il paradigma si pone lo scopo di interpretare attraverso congetture sul “senso” del testo e del contesto dell’evento didattico. L’euristica si indirizza verso la comprensione. La realtà didattica diviene testo ermeneutico. L’interpretazione della prassi diviene strumento per orientare le azioni future.
<b>Paradigma ludico</b>	Questo paradigma utilizza il gioco come strumento coinvolgente in un impegno bio-psico-intellettuale dei soggetti partecipanti. L’apprendimento/insegnamento viene vissuto come animazione. Se anche l’allievo è messo in condizioni di esplicitare le proprie strategie, l’approccio ludico si rivela anche formativo. Il paradigma ludico si propone una attenzione alla ricerca didattica che oltre alla presenza dei processi di conoscenza propone un coinvolgimento emozionale dei soggetti partecipanti.
<b>Paradigma della Ricerca-Azione</b>	Vedi Quadro di riferimento successivo comparato con il Paradigma della <b>Ricerca in Didattica</b> ed il <b>Paradigma della Ricerca Sperimentale</b> .

Si è voluto particolareggiare il paradigma della Ricerca-Azione in quanto uno dei più diffusi nella Ricerca in Didattica. D’altro canto il Paradigma della Ricerca Sperimentale, vicino a discipline come la Psicologia o la Sociologia, è quello a cui si fa riferimento più spesso nelle Scienze dell’Educazione per l’attendibilità dei risultati.

	<b>RICERCA SPERIMENTALE</b>	<b>RICERCA-AZIONE</b>	<b>RICERCA IN DIDATTICA</b>
<b>Posizione del Ricercatore</b>	Il ricercatore deve restare neutrale per poter meglio isolare il suo “oggetto” di studio, situandolo fuori di se.	Il ricercatore è profondamente implicato perché egli stesso è fattore di cambiamento. Egli è preso “dentro” la situazione e vi	Il Ricercatore studia i fenomeni di insegnamento nel sistema Sapere-Allievo-Insegnante sintetizzando Ricerca Azione e Ricerca Sperimentale attraverso la messa a punto di situazioni a-didattiche (Vedi 5.2.3)

		partecipa attivamente.	
<b>Natura del trattamento</b>	Il trattamento si riferisce alla manipolazione della variabile indipendente. L'unico responsabile di ciò è il ricercatore che si muove secondo regole deontologiche definite.	Non può esservi manipolazione perché tutti gli attori sono coinvolti nel trattamento. Il potere decisionale non è solo del ricercatore ma vi deve essere una negoziazione fra i vari partecipanti.	L'insegnante/Ricercatore sceglie le variabili didattiche indipendenti che vengono negoziate dai singoli insegnanti coinvolti nella ricerca. Questo avviene nel momento in cui vengono individuate collettivamente le variabili didattiche, le ipotesi di ricerca, gli strumenti didattici, gli strumenti diagnostici.
<b>Popolazione</b>	La popolazione è un "oggetto", quindi deve restare all'oscuro degli obiettivi del trattamento. E' il ricercatore che effettua il "controllo" con gli strumenti che ritiene più opportuni.	La popolazione è il "soggetto" della ricerca stessa. Gli attori sono anche ricercatori, quindi devono essere consapevoli di ciò che realizzano. Questa consapevolezza è già promotrice di cambiamento.	La popolazione diventa "soggetto" nel momento della ricerca e "oggetto" consapevole della ricerca. La "consapevolezza" è giocata nella fase di "devoluzione". L'insegnante metterà a punto una serie di condizioni affinché l'allievo possa assumere consapevolmente le regole del gioco didattico (situazione a-didattica - Vedi 5.2.1 e 5.2.3).
<b>Valutazione</b>	Viene realizzata esclusivamente dal ricercatore che si preoccupa di neutralizzare eventuali effetti di distorsione. Si valuta per potere generalizzare i risultati.	La valutazione viene fatta dal collettivo. E' intesa in senso formativo, come analisi del feedback per poter meglio orientare la marcia futura.	L'accettazione del paradigma della Ricerca in Didattica è strettamente riconducibile al paradigma della ricerca scientifica in generale nel senso che i risultati relativi ai fenomeni didattici possono essere riprodotti e generalizzati. La riproducibilità è garantita da uno studio approfondito di una analisi a-priori della situazione a-didattica che viene condotta sia da un punto di vista epistemologico e storico epistemologico (strategie matematiche attese), sia da un punto di vista dei comportamenti attesi (Analisi semiotica).
<b>Scelta degli Strumenti</b>	Gli strumenti utilizzati devono essere fedeli e validi, in modo da garantire la generalizzazione dei risultati.	Gli strumenti si scelgono in base ai bisogni manifestati dalle persone in un determinato momento del processo della Ricerca-Azione. Gli strumenti possono essere oggettivi o soggettivi; l'importante è che stimolino le persone a interrogarsi sulle problematiche emergenti.	Gli strumenti sono scelti in base ai bisogni manifestati dalle persone in un determinato momento della Ricerca in Didattica, ma possono raggiungere una generalizzazione grazie ad una analisi a-priori particolarmente approfondita (come già detto precedentemente) e una analisi statistica fedele e valida. L'analisi statistica è supportata da una analisi dei processi di apprendimento attraverso questionari, interviste individuali, protocolli registrati di dibattiti in classe, ecc. Strumenti statistici messi a punto per piccoli campioni: Analisi Fattoriale, Analisi implicativa, ecc. (Vedi cap. 8)

Nel prossimo paragrafo cercheremo di presentare la **Teoria delle Situazioni** di Guy Brousseau<sup>2</sup> come Teoria rientrante nel Paradigma della Ricerca Didattica. Risulteranno poi evidenti i riferimenti ad altri paradigmi.

Il Paradigma della Ricerca Didattica è sostanzialmente un meta-paradigma nel senso che utilizza altri paradigmi (Vedi anche appendice 1):

- dei linguaggi matematici per quanto attiene all’epistemologia (capitolo 1 e 2);
- della storia delle matematiche per quanto attiene all’analisi storico-epistemologica (Recupero dei significati dei Linguaggi Matematici) (capitolo 3);
- delle scienze umane: psicologia, sociologia, antropologia, linguistica, semiotica (capitolo 4);
- delle scienze dell’educazione: vedi la classificazione dei più conosciuti paradigmi di ricerca;
- della neurofisiologia per quanto attiene ad una migliore comprensione dell’apprendimento legato alla conoscenza del funzionamento della mente/corpo (capitolo 6).

#### **4.2.0 Un primo riferimento della Teoria delle Situazioni**

La didattica delle Matematiche studia le attività didattiche che hanno per oggetto l’insegnamento delle matematiche<sup>3</sup>.

Il sistema di riferimento minimo che si prenderà in considerazione sarà quello messo in evidenza dal seguente schema il quale prende in considerazione i possibili soggetti e le relative relazioni in una Situazione Didattica: il Sapere, l’Insegnante, l’Allievo. L’approccio è di tipo sistemico.



**Fig. 1**

<sup>2</sup>I riferimenti teorici sono rintracciabili nella Tesi di Stato di Guy Brousseau (Bordeaux, 1986) e articoli apparsi sulla rivista “Recherches en Didactique des Mathématiques”: 1986 (Vol.7.2), 1990 (Vol.9.3).

<sup>3</sup>Il termine Ricerca in Didattica delle Matematiche potrebbe, alla luce delle riflessioni sul Paradigma, essere considerato come una Ricerca riguardante **l’Epistemologia Sperimentale delle Matematiche**. (Questa è stata anche l’opinione della comunità di ricercatori francesi.)

Questo schema mette in evidenza le relazioni esistenti tra i soggetti didattici. Il problema rilevante nella comunicazione delle matematiche è che l’Insegnante dovrebbe, attraverso una mediazione, fare in modo che l’Allievo riesca ad avere un rapporto diretto con il Sapere.

Per ciascun vertice e per ciascuna relazione possono essere individuati:

- il lavoro della Comunità Matematica in un determinato periodo storico (Sapere), nel senso che viene stabilito quale sapere trasmettere alle generazioni successive. Questo lavoro viene però compiuto spogliando le Matematiche delle accezioni semantiche, dei percorsi mentali che hanno permesso la messa a punto di determinati linguaggi matematici. Saranno poi altri soggetti che opereranno la Trasposizione didattica;
- il lavoro intellettuale dell’allievo comparabile a quello del ricercatore. L’allievo deve riprendere i “significati”, il “senso” dei contenuti matematici in modo tale che possa autonomamente formulare, provare, ri-costruire i linguaggi matematici. L’insegnante deve quindi proporre all’allievo delle situazioni che possa vivere. L’allievo è anche portatore di concezioni più o meno stabilizzate che entreranno in gioco nella situazione didattica.
- il lavoro dell’Insegnante in quanto appartenente alla comunità di matematici e nello stesso tempo mediatore di conoscenze. Deve ricontestualizzare e ripersonalizzare le conoscenze. Ogni conoscenza deve nascere dall’adattamento ad una situazione specifica in riferimento ad un certo “ambiente”. Ma deve anche dare agli allievi gli strumenti ed i mezzi per fargli vivere il Sapere culturale che si vuole comunicare. L’allievo, d’altro canto, deve ridecontestualizzare e ridepersonalizzare il sapere per poterlo identificare con quello della comunità scientifica e culturale della sua epoca.

#### **4.2.1 Il Contratto Didattico come strumento per interpretare la mediazione didattica.**

In questo approccio sistemico ha una importanza rilevante l’analisi dei **fenomeni didattici** nella interazione Sapere-Allievo-Insegnante in una **Situazione Didattica**.

**Il contratto didattico è il risultato della negoziazione dei rapporti stabiliti esplicitamente e/o implicitamente tra un allievo o un gruppo di allievi, un certo “ambiente” ed un sistema educativo, al fine di far appropriare gli allievi di un sapere costituito o in via di costituzione.**

Il contratto didattico regola i rapporti a livello dell’apprendimento. Esso si evidenzia secondo il tipo di situazione che viene eseguita in classe. Per esempio, in una situazione a-didattica l’allievo è responsabile delle conoscenze e delle strategie che utilizza, in una situazione di validazione deve fornire delle prove, sviluppare le sue argomentazioni, ecc.

L’insegnante non deve “comunicare” una conoscenza ma deve fare in modo che vi sia la **buona devoluzione<sup>4</sup> del problema**.

---

<sup>4</sup> Il significato è mutuato dal diritto: “trasmissione o passaggio di un diritto, del godimento di un bene da una persona a un’altra, per effetto di una legge, di un contratto, di una disposizione testamentaria.” Nel nostro caso il termine ha il significato di far prendere coscienza (consapevolezza) all’allievo del problema. Questo è un po’ tutto il messaggio della teoria delle situazioni ed è anche la parte più

L'apprendimento non è visto nella sola relazione Insegnante-Allievo come potrebbe risultare dal Paradigma Sperimentale, ma viene visto nella relazione più complessa dei tre soggetti Sapere-Allievo-Insegnante con l'ambiente attraverso una Situazione (Vedi Figura 1). L'allievo apprende **adattandosi** ad un ambiente che è fattore di contraddizioni, di difficoltà, di squilibri. Questo sapere, frutto dell'adattamento dell'allievo, si manifesta con delle nuove risposte che sono prova dell'apprendimento.

#### **4.2.2 Quando il Contratto Didattico non funziona ...**

Riportiamo alcuni esempi di cattivo funzionamento del Contratto Didattico utilizzati da G. Brousseau come stereotipi (Fondamenti e Metodi della Didattica delle Matematiche, R.D.M., 1986).

In un Contratto didattico l'allievo cerca di scoprire l'intenzione dell'insegnante e non a comprendere il problema che gli viene proposto e questo è rinforzato dal fatto che l'allievo fonda le sue strategie risolutorie su una o più domande abituali dell'insegnante. D'altro canto l'insegnante vorrebbe che l'allievo riuscisse a rispondere comunque.

*Effetto “Topaze”: L'insegnante deve negoziare le condizioni di produzione della risposta dell'allievo. Egli cerca di fare in modo che il senso della risposta sia il più ricco possibile. In caso di insuccesso, aggiunge delle informazioni riduttrici del senso, fino ad accettare delle condizioni che provocano la risposta dell'allievo senza che quest'ultimo abbia potuto toccarne il senso.*

*Effetto “Jourdain”: E' una forma dell'effetto “Topaze”, l'insegnante accetta di riconoscere come indicatore del sapere una produzione o un comportamento dell'allievo, invece sono solo risposte che hanno delle cause banali.*

*Ingiunzione paradossale per l'allievo: Se egli accetta che, secondo il contratto, l'insegnante gli insegni i risultati, non ha ri-percorso le costruzioni matematiche necessarie e quindi non ha appreso. Se, al contrario, rifiuta ogni informazione da parte dell'insegnante, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere, implica, per lui, che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e si sforzi di confutarla”.*

*Slittamento meta-didattico: Si prende come oggetto di insegnamento ciò che all'origine non era che un mezzo.*

*L'esempio più eclatante è riferito all'introduzione del linguaggio insiemistico negli anni 70. La “Teoria degli Insiemi” ha come suo obiettivo quello di definire una grammatica dell'infinito in atto, ma nelle trasposizioni didattiche utilizzate in quasi tutti i manuali di matematica si punta l'accento sulle operazioni insiemistiche attraverso i diagrammi di Eulero-Venn. I programmi ufficiali hanno certificato questo sapere. Il cattivo funzionamento del Contratto Didattico è stato evidenziato dal fatto che gli allievi producono delle **risposte conformi agli esercizi tipo**. Questo è*

---

complessa dal punto di vista della costruzione delle situazioni. Corrisponde al momento della “motivazione”.

*gratificante per l’insegnante e per l’allievo. Vengono valutati i saper-fare ma non ci informano sulla reale appropriazione dei saperi da parte degli allievi.*

*Questo esempio può essere anche utilizzato per far vedere un cattivo funzionamento della trasposizione didattica.*

#### **4.2.3 La situazione a-didattica**

La nozione di **situazione a-didattica** è centrale nella Teoria delle Situazioni.

Una **Situazione** designa l’insieme delle circostanze nelle quali si trova una persona (un gruppo, una collettività, ecc..), le relazioni che l’uniscono al suo ambiente, e l’insieme dei dati che caratterizzano una azione o una evoluzione (un’azione in un certo momento).

Una **Situazione** è **Didattica** quando un individuo (in generale l’insegnante) ha l’intenzione di insegnare ad un altro individuo (in generale l’allievo) un determinato sapere.

Si chiama **situazione di apprendimento** una situazione che permette ad un soggetto di passare da uno stato di conoscenza ad un altro stato di conoscenza.

Si chiama **situazione a-didattica** la parte della situazione didattica nella quale l’intenzione d’insegnante non è esplicita nei confronti dell’allievo.

L’allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire nuova conoscenza e, nello stesso tempo, deve sapere che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione. E per costruire questo sapere non deve fare appello a delle ragioni didattiche.

In una situazione a-didattica l’insegnante, attraverso un insieme di condizioni che permettono all’allievo di appropriarsi della situazione, permette una **devoluzione** della situazione.

La devoluzione consiste, non soltanto nel presentare all’allievo il gioco al quale l’insegnante vuole che egli partecipi, ma anche nel fare in modo che l’allievo si senta responsabile, nel senso della conoscenza e non della colpevolezza, del risultato che egli deve cercare. La devoluzione fa appello alle motivazioni dell’allievo, il quale non soltanto deve accettare il **gioco (sinonimo di situazione)** proposto ma deve ricercare le strategie migliori che gli permetteranno di vincere.

In conclusione la **devoluzione** è l’atto attraverso il quale l’insegnante fa accettare all’allievo **la responsabilità** di una **situazione di apprendimento (a-didattica)** o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert.

***Paradosso della devoluzione: Se l’insegnante dice ciò che vuole non può ottenerlo.***

Dalla parte dell’insegnante questo è un Paradosso Pragmatico, dalla parte dell’allievo questi si trova di fronte ad un’ingiunzione paradossale: “Se egli accetta che, secondo il contratto, l’insegnante gli insegni i risultati, non ha ri-percorso le costruzioni matematiche necessarie e quindi non ha appreso. Se, al contrario, rifiuta ogni informazione da parte dell’insegnante, allora la relazione didattica è rotta. Apprendere, implica, per lui, che egli accetti la relazione didattica ma che la consideri come provvisoria e si sforzi di confutarla”.

Risulta interessante e costruttiva la “rottura del Contratto” nel senso che è proprio dalle rotture del Contratto che l’allievo può entrare in una situazione di apprendimento.

In conclusione possiamo intravedere tre condizioni per la messa a punto di situazioni a-didattiche<sup>5</sup>:

- L’allievo può immaginare una risposta, ma questa risposta iniziale (procedura di base) non è quella che si vuole insegnare: Se la risposta fosse già conosciuta, questa non sarebbe una situazione d’apprendimento. L’allievo cioè deve trovarsi in una situazione di incertezza sulle decisioni da prendere;
- Questa “procedura di base” deve rivelarsi immediatamente insufficiente o inefficiente perché l’allievo sia costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche del suo sistema di conoscenza.
- Esiste un ambiente per la validazione, un ambiente cioè che permetta la conferma della verità o falsità di una soluzione trovata. Tale ambiente deve poter permettere delle retroazioni, l’ambiente a-didattico deve poter influenzare l’allievo nel senso che gli deve consentire di correggere la sua azione, di accettare o respingere un’ipotesi, di scegliere fra numerose soluzioni. Un ambiente siffatto verrà chiamato a-didattico;
- La situazione (gioco) sia ripetibile (analisi a-priori approfondita e individuazione delle variabili didattiche);

#### **4.2.4 Il modello “gioco” per modellizzare le situazioni didattiche.**

Strumento necessario alla modellizzazione delle situazioni didattiche è la nozione di gioco che viene utilizzato come sinonimo di "situazione".

Brousseau elenca i possibili significati del termine "gioco" per poter poi definire le possibili strategie ed il modo di controllarle:

1. Attività fisica o mentale, puramente gratuita, generalmente fondata sulla convenzione o la finzione, che non ha nella coscienza di colui il quale vi si affida altro fine che essa stessa, altro scopo che il piacere che procura.
2. Il gioco è l’organizzazione di questa attività sotto un sistema di regole definenti un successo e un insuccesso, un guadagno e una perdita.
3. E' anche ciò che serve a giocare, gli strumenti del gioco, ed eventualmente uno degli stati del gioco determinato da un assemblaggio particolare degli strumenti del gioco.
4. Il gioco è "la maniera in cui si gioca". In questo caso si tratterà di procedure, si preferiranno i termini di "tattica" o di "strategia".
5. E' l'insieme delle posizioni tra le quali il giocatore può scegliere in un dato stato di gioco (nel senso 2).

Nel distinguere diversi tipi di **situazioni a-didattiche** Brousseau propone :

1. una classificazione delle interazioni del soggetto con il suo ambiente a-didattico;
2. una classificazione dei tipi di organizzazione di questo ambiente;
3. una classificazione dei tipi di funzionamento di una conoscenza;
4. una classificazione dei modi d’evoluzione spontanea delle conoscenze (l’apprendimento).

---

<sup>5</sup>Tratto da “*Panorama del quadro teorico della didattica della matematica in Francia*”, Annie Bessot, L’educazione Matematica, Cagliari, n.1 1994, (tradotto da M. Polo).

Le interazioni considerate al punto 1 sono classificate da Brousseau in tre grandi categorie:

- Gli scambi di giudizio (Ipotesi di validazione);
- Gli scambi di informazioni codificate in un linguaggio (Ipotesi di formulazione);
- Gli scambi non codificati o senza linguaggio: le azioni e le decisioni che agiscono direttamente sull'altro protagonista (Ipotesi d'azione).

L'analisi di queste interazioni è oggetto di continui studi sperimentali da parte di ricercatori che si rifanno alla scuola francese.

#### **4.2.5 Situazione-problema fondamentale, Metafora fondamentale, Situazione fondamentale.**

Esistono dei criteri che consentono di poter mettere a punto una situazione didattica efficace?

Cerchiamo di definire innanzi tutto la situazione-problema fondamentale<sup>6</sup>.

a) Per trovare una situazione-problema-fondamentale si debbono verificare le seguenti condizioni:

1. Un problema la cui soluzione richieda da parte dell'allievo di una conoscenza ben determinata senza che intervengano altre conoscenze;
2. Fare in modo che le variabili relative a questa situazione-problema siano esplicitate e il cambiamento di queste variabili provochi delle modificazioni qualitative delle strategie ottimali. Questo evidenzia una modificazione del significato della conoscenza analizzata e fa apparire quello che cambia nel suo statuto cognitivo:
  - come mezzo di controllo dell'azione;
  - come mezzo di comunicazione;
  - come strumento di dimostrazione;
  - come sapere o algoritmo di riferimento.
3. Assicurarsi che la situazione così ottenuta permetta di generare, per mezzo di questo sistema di variabili, tutti i problemi culturalmente noti dove interviene la conoscenza in questione.

b) Esaminando le difficoltà e gli insuccessi degli allievi<sup>7</sup> si ha la possibilità di prevedere che questa situazione fondamentale funzioni in modo quasi isolato ed il confronto con altre situazioni realizzate in classe mette in evidenza le differenze per tornare poi a studiare la situazione fondamentale come motore per la produzione di situazioni di apprendimento/insegnamento.

---

<sup>6</sup> I riferimenti bibliografici riguardano due lavori di G. Brousseau sull'insegnamento della Geometria: 1) *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple, la géométrie, Seminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique*, n. 45, 1983, IMAG Grenoble. 2) *L'insegnamento di un modello dello spazio. L'insegnamento della geometria*, Trento 1984, pubblicata nel Quaderno n. 15, 1995, Progetto strategico del CNR per la formazione e aggiornamento degli insegnanti, Pavia. Si fa anche riferimento alla tesi di dottorato di C. Margolinas, Grenoble, 1989.

<sup>7</sup> Gli insuccessi potranno provenire dall'interpretazione che l'allievo dà alla situazione-problema o dai cambiamenti di significato introdotti dalla situazione-problema o durante la negoziazione del contratto didattico. Altre difficoltà possono comparire, causate da ostacoli (ontogenici, epigenetici: didattici e/o epistemologici).

Si ha quindi il passaggio tra una situazione-problema e la organizzazione di situazioni di apprendimento/insegnamento.

La situazione-problema, dal punto di vista dell'allievo, diviene una “metafora fondamentale”. Il termine “metafora” è utilizzato in senso forte, cioè come strumento del linguaggio che permette un transfert del “significato” per sostituzioni analogiche. Una buona metafora deve aiutare il ragionamento, deve portare alla struttura soggiacente ma nello stesso tempo non deve portare con sé troppe perturbazioni sulle conoscenze in gioco.

Vi sono dei metodi per ricercare le situazioni fondamentali (metafore-fondamentali)?

La risposta è tutta nella teoria delle situazioni. L'analisi epistemologica, storico-epistemologica, sperimentale (le concezioni degli allievi ad esempio) possono aiutare in questa ricerca. Abbiamo una serie di esempi di situazioni fondamentali ma su questo argomento vi sono ancora parecchie ricerche in corso.

#### **4.2.6 Quale il rapporto tra Sapere e Conoscenze?**

Un'analisi del significato attribuito, nella teoria delle situazioni, alle nozioni di Sapere e Conoscenza può avere un duplice scopo. Da una parte tentare di chiarire meglio il funzionamento del Contratto Didattico ed in particolare della situazione didattica (motore della Teoria), dall'altra parte risulta determinante per chiarire la Trasposizione Didattica (6.3).

***Conoscenze:** Le conoscenze sono i mezzi trasmissibili (per imitazione, comunicazione, ecc.) ma non necessariamente esplicabili, per controllare una situazione e ottenere un certo risultato conformemente ad una attesa o ad una esigenza sociale.*

***Sapere:** Il sapere è il prodotto culturale di una istituzione che ha per obiettivo di individuare, di analizzare e di organizzare le conoscenze al fine di facilitarne la comunicazione, il loro uso sotto forma di conoscenze o di saperi e la produzione di nuovi saperi. In certe situazioni (azione, formulazione o prova) lo stesso risultato può essere il frutto di una conoscenza dell'attore o il frutto di un sapere, o tutti e due.*

Dal punto di vista del soggetto che apprende: Quando riconosce il ruolo attivo di una conoscenza nella situazione, allora il ruolo induttore della situazione su questa conoscenza diviene, per lui, invertibile, egli sa. Una conoscenza così identificata è un sapere, è una conoscenza utile, utilizzabile, nel senso che essa permette al soggetto di agire sulla rappresentazione.<sup>8</sup>

F. Conne sostiene che il sapere in quanto tale è un significato vuoto e classifica i seguenti tipi di Saperi:

<b>Sapere pragmatico</b>	E' un sapere che viene visto in una “situazione didattica”. Potremmo dire anche un saper fare in una situazione.
<b>Saper fare</b>	Un saper fare identifica l'azione di una conoscenza nella situazione per semplice riconoscimento dell'effetto di questa azione. Un saper fare è un sapere pragmatico considerato dal solo punto di vista dei prodotti oggettivi risultanti dalla trasformazione di una situazione data. Saper fare è, in un quadro situazionale dato, saper fare qualcosa di

<sup>8</sup>F. Conne, *Savoir et Connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, R.D.M. 12/2.3.

qualche cosa con qualche strumento.

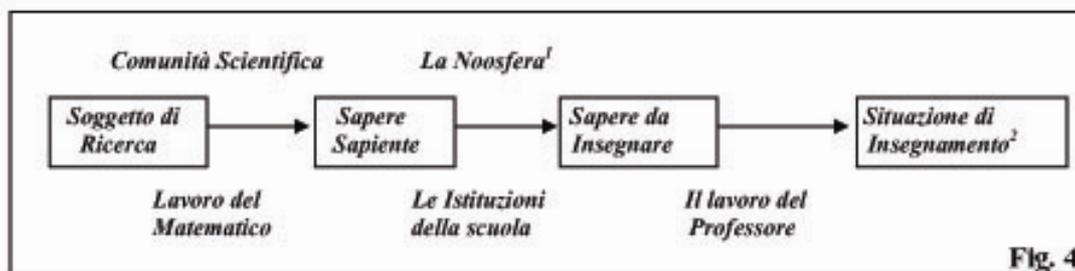
<b>Saper riflettere</b>	E' il prodotto dell'interazione su una nuova situazione, reale o evocata. La sua utilità è di natura “rappresentativa”, ma non obbligatoriamente organizzativa dei saperi. Un tale sapere lega, diversamente dal semplice transfert di conoscenza, la situazione data a delle altre situazioni di riferimento, reali o semplicemente evocate, ma non pensa necessariamente l'organizzazione di questi legami.
<b>Sapere Sapiente</b>	I “Saperi Sapienti” sono dei Saperi <i>sulle</i> situazioni. La finalità sarà quella dell'organizzazione e lo sviluppo dei Saperi stessi, o ancora la trasformazione dei modelli. E' l'insieme delle conoscenze socialmente disponibili, in un determinato periodo storico, riconosciute valide da una comunità scientifica. Brousseau propone di trattare le relazioni con il Sapere Sapiente secondo le dialettiche dell'azione, della formulazione e della validazione.
<b>Sapere Didattico</b>	Il sapere didattico è un sapere potenziale riferito a delle situazioni a-didattiche.
<b>Sapere da insegnare</b>	I saperi da insegnare sono quelli che la didattica, attraverso situazioni a-didattiche, fa ritrovare agli allievi con un uso didattico.

### **4.3 Cosa è la Trasposizione Didattica e come utilizzarla.**

**Ogni progetto sociale di insegnamento e d'apprendimento si costituisce dialetticamente con l'identificazione dei contenuti dei Saperi come contenuti da insegnare. Un contenuto di sapere, una volta designato come sapere da insegnare, subisce quindi un insieme di trasformazioni adattative che gli permettono di prendere posto tra gli oggetti d'insegnamento.**

**La Trasposizione Didattica è il “lavoro” che permette ad un “oggetto del sapere da insegnare” di diventare un “oggetto di insegnamento”**

Il seguente schema permette di riguardare i passaggi più importanti nella trasposizione didattica:



Per Sapere Sapiente si intende l'insieme delle conoscenze socialmente disponibili, in un determinato periodo storico, oggetto di pubblicazioni scientifiche o comunicazioni riconosciute come valide da tutta una comunità. Questo insieme di conoscenze deve essere organizzato all'interno di Teorie.

Il sapere sapiente nelle matematiche è:

- depersonalizzato;
- decontestualizzato (a livello delle pubblicazioni);
- ordinato per problemi incontrati (a livello delle conoscenze del ricercatore);

- sincretizzato (cioè a dire che i Saperi sono legati gli uni con gli altri, sempre al livello del Sapere dei ricercatori).

Caratteristiche del Sapere Insegnato. Il Sapere Insegnato è ordinato in una progressione nel tempo:

- legale (definito dai programmi).
- logico: il corso di matematica si sforza di seguire una struttura logica, lineare (ogni capitolo presuppone la conoscenza del precedente).

Un problema particolarmente significativo posto dalla Trasposizione Didattica è quello relativo alla deformazione di un concetto quando da “Sapere Sapiente” passa a “Sapere Insegnato”. Si potrebbero portare numerosi esempi, uno di questi è quello già menzionato relativo alla Teoria degli Insiemi (vedi paragrafo sulle situazioni a-didattiche). In questo caso si parlerà di “rotture epistemologiche”. Allora la Trasposizione Didattica ci porta a vigilare epistemologicamente le trasformazioni del Sapere.

Gli errori vengono analizzati anche tenendo conto della contraddizione tra il ritmo di insegnamento imposto globalmente per legge, e localmente dall’insegnante nella classe, tale ritmo di insegnamento risulta generalmente differente dagli apprendimenti individuali. Un programma scolastico non è, in generale, assimilato all’età dovuta. Tecniche apprese ad un livello scolastico sono dimenticate nei livelli successivi. Ed è per questo che si parla di errore “relativo a...”. Si costata dunque la relatività della nozione di errore scolastico quando è definito in rapporto a una norma arbitraria di progressione temporale.

Osservazioni sulla Trasposizione Didattica:

- La sola manipolazione del Sapere Sapiente non sembra essere sufficiente a garantire i disequilibri tra il sistema di insegnamento e ambienti ad esso vicino;
- La teoria sulle relazioni tra “sistema di insegnamento” e ambienti ad esso vicino viene considerata come una “Ipotesi”. La ricerca in questo ambito è ancora in una fase di stabilizzazione. Sono stati condotti lavori in appoggio alla teoria attraverso argomentazioni storico-epistemologiche. Non vi sono sufficienti lavori di tipo sperimentale.

#### **4.4.0 Errori, Ostacoli, Concezioni nella comunicazione delle Matematiche**

Nella comunicazione delle matematiche si è quasi sempre considerato il ruolo dell'errore come sintomo di imprecisioni rispetto alla correttezza sintattica delle matematiche. Questa era, per esempio, la posizione della rivista “Il Pitagora”<sup>9</sup> nel momento in cui venivano pubblicati (dal 1895 al 1919) una serie di elenchi di errori più frequenti da parte degli allievi. [vedi appendice con gli errori]

---

<sup>9</sup> T. Marino - F. Spagnolo, *Alcune considerazioni storiche su “Il Pitagora”*, Quaderno del Gruppo Ricerca Didattica di Catania e di Palermo, Congresso UMI Catania, 1991.  
Spagnolo et alii, *Considerazioni su alcuni articoli di Didattica della matematica della rivista “Il Pitagora”*, La matematica e la sua didattica, ed. Pitagora, Bologna, n. 4, 1994.

La nozione di "errore" si rivela comunque inadatta, da sola, ad una migliore comprensione dei fenomeni comunicativi. La nozione di ostacolo epistemologico messa a punto da Bachelard<sup>10</sup> come strumento conoscitivo dell'evoluzione del pensiero scientifico, viene mutuata nel contesto della comunicazione delle matematiche da Brousseau<sup>11</sup> per cercare di dare un ruolo positivo alla nozione di "errore". In effetti gli errori saranno gli evidenziatori degli ostacoli epistemologici.

Questo paragrafo ha come obiettivo quello di porre il problema dell'ostacolo epistemologico nella comunicazione delle matematiche e cercare di vedere che tipo di utilizzo si possa fare nell'insegnamento e nell'apprendimento.

#### **4.4.1 Gli "errori" in matematica: una storia tutta italiana**

La nozione di ostacolo epistemologico trae le sue origini storiche nell'analisi degli errori. F. Enriques (1871-1946), con lo pseudonimo di A. Giovannini pubblica un articolo nel Periodico di Matematiche dal titolo "L'errore nelle matematiche"<sup>12</sup>. In tale lavoro mette in evidenza inizialmente l'errore più banale che il matematico può fare, esso "*è riconoscibile come contravvenzione a regole certe della logica. Si supera facilmente attraverso diligente attenzione*".

Questa prima posizione sull'errore viene generalizzata mettendola in relazione con un sistema ipotetico-deduttivo. Il logico della scienza, secondo Enriques, individua, per coloro i quali si discostano dal modello assiomatico, "errori o lacune".

"Si ha una lacuna ogni qual volta nel discorso si afferma che una proposizione **b** si deduce da un'altra o da un complesso di altre proposizioni **a**, mentre la deduzione richiede il passaggio per qualche proposizione intermedia non enunciata".

Si passa dalla lacuna all'errore se si crede di aver giustificato il mancato passaggio enunciando un legame di dipendenza che patisce eccezioni. L'attualità di Enriques nel dibattito contemporaneo sull'errore è senza dubbio legata al fatto di avere creato dei legami con la storia del pensiero scientifico.

Infatti afferma nello stesso lavoro già citato: "Ai tempi di Eudosso di Cnido si poteva ricevere il teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli ritenendolo dimostrato mercé similitudine del triangolo ai due in cui esso viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa. Siccome i teoremi sulla similitudine si fondavano allora sulla commensurabilità dei seguenti proporzionali, si aveva così una lacuna, che lo stesso Eudosso ebbe a colmare costruendo la teoria dei rapporti irrazionali, mentre Euclide proponeva più tardi la sua nota dimostrazione del teorema di Pitagora, indipendente dal concetto di proporzione. Pertanto si può dire che, prima della costruzione critica d'Eudosso, la dimostrazione del teorema di Pitagora lasciava una lacuna per chi la riceveva ammettendo come ipotesi la commensurabilità dei lati del triangolo rettangolo o postulando che dal caso commensurabile si dovrebbe passare (per continuità) al caso incommensurabile, ed invece conteneva un errore per chi affermasse la commensurabilità di due segmenti o grandezze qualsiasi..".

La posizione di Enriques sul significato di errore come tentativo e passo verso la scoperta della verità ci ricorda Lakatos in "Dimostrazioni e Confutazioni" del 1979

<sup>10</sup> G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1975 (1<sup>a</sup> edizione 1938).

<sup>11</sup> G. Brousseau, *Obstacles Epistémologiques en Mathématiques*, R.D.M., vol.4.2, 1983. Testo presentato alla CIEAEM XXVIII, 1976.

<sup>12</sup> A. Giovannini (Enriques), *L'errore nelle matematiche*, Periodico di Matematiche, Serie IV, vol. XXII, 1932, Ed. Zanichelli, Bologna.

(1976 prima apparizione in lingua originale)<sup>13</sup>. Infatti l'Enriques chiarisce che la ricerca della verità consiste nell'integrare dialetticamente l'errore con la correzione dell'errore. Conclude Enriques sull'errore: "...esso non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, s'introduce nel momento delicato del loro raccordo".

#### **4.4.2 Gli “errori” e la comunicazione delle matematiche**

Nella comunicazione delle matematiche ha avuto particolare importanza la nozione di errore come si evince dal libro di E. Stabler (*Il Pensiero Matematico*)<sup>14</sup> e dal lavoro di Spagnolo-Valenti<sup>15</sup>.

Viene riportato il tentativo di classificazione di errori utilizzabile nella comunicazione delle matematiche di Stabler. Tale classificazione risulta interessante soprattutto per i riferimenti alle argomentazioni nei ragionamenti.

Stabler classifica alcuni dei più comuni errori di ragionamento:

- 1) Accettare l'inversa (affermare il conseguente);
- 2) Accettare la contraria (negare l'antecedente);
- 3) "non sequitur" (poiché  $p$  è vera, allora  $q$  è vera);
- 4) "Post hoc, ergo propter hoc" (Caso particolare di 3: si dichiara che un evento B avviene dopo un evento A e poi si afferma o fortemente si suggerisce che l'evento B è stato causato dall'evento A);
- 5) "Petitio principii" (Cercare di dimostrare una certa proposizione utilizzando inconsapevolmente nel corso della dimostrazione la proposizione stessa);
- 6) "Statistici" (possono essere inseriti nei precedenti schemi 3 e 4 ma possono essere errori tipici della statistica: uso improprio delle medie, relazioni non giustificabili tra dati, uso erroneo delle percentuali).

Spagnolo e Valenti in un articolo del 1984 (nota 17) tentano una possibile classificazione degli errori che si manifestano nel corso dello sviluppo del pensiero matematico:

1. Contenuto di concetti non erronei in sé, quanto piuttosto espressi in forma matematicamente scorretta:
  - a) La pretesa di risolvere l'equazione di secondo grado ad esempio  $x^2+x-1=0$  ricorrendo all'espressione  $x=\sqrt{1-x}$ , l'errore commesso contiene l'idea motrice della risoluzione attraverso un algoritmo iterativo:  $x_{n+1}=\sqrt{1-x_n}$ .
  - b) La pretesa di considerare rettilinei archi di curva (per es. di circonferenza) "sufficientemente piccoli". L'idea è così ardita che neppure il suo massimo propugnatore Leibniz, riuscì a concretarla in una teoria consistente: eppure oggi, grazie a qualcuno che non si è "scandalizzato" di quell'errore, noi sappiamo che si può fare una Analisi Matematica nella quale numeri infinitamente piccoli (infinitamente grandi) non soltanto esistono, ma...coesistono pacificamente con i numeri reali.[15]

<sup>13</sup> I. Lakatos, *Dimostrazioni e Confutazioni*, 1979, ed. Feltrinelli, Milano. Nella introduzione si ribadisce tra l'altro che "...la matematica informale, quasi-empirica, non si sviluppa attraverso un monotono aumento del numero di teoremi stabiliti in modo indubitabile, ma attraverso il continuo miglioramento delle congetture ottenuto mediante la riflessione e la critica, con la logica delle dimostrazioni e confutazioni."(p. 43)

<sup>14</sup> E. Stabler, *Il pensiero matematico*, 1970, Ed. Boringhieri, Torino.

<sup>15</sup> F. Spagnolo - S. Valenti, *Errori matematici: un'occasione didattica*, L'insegnamento della matematica, vol. 7, n.1, 1984.

Si tratterà di rendere coscienti gli allievi che l'anatema contro le quantità "piccolissime" non è un assoluto matematico, bensì una semplice conseguenza dell'assioma di Archimede. Assioma che ogni allievo crede di aver capito, ma di cui in realtà nessuno percepisce la portata, poiché non si azzarda ad esplorare gli effetti di una sua eventuale soppressione (vedi cap. 3).

2. Contenuto di concetti non erronei in sé, quanto piuttosto espressi in forma linguisticamente scorretta:

a) La confusione che si realizza quando il concetto di proporzionalità diretta viene espresso in termini di "crescenza".

b) la confusione che si realizza quando il concetto di condizione necessaria è espresso con i termini di "condizione sufficiente".

3. Contenuto di concetti non erronei in sé, quanto piuttosto rispondenti ad un principio erroneo:

a) La convinzione che i numeri del lotto "ritardatari" accrescono la loro probabilità di "uscire" con l'aumentare del ritardo.

Questa parziale classificazione non pretende di fornire una partizione in classi di equivalenza, cioè non è detto che un campione di errori del primo tipo non risenta di componenti degli altri due tipi. Naturalmente esistono delle differenze nel punto 2 tra i due tipi di "confusione", le origini sono diverse ed andrebbero analizzate più a fondo. Come anche andrebbe analizzata meglio la concezione espressa dal punto 3.

La classificazione proposta ha indubbiamente dei vantaggi per una possibile utilizzazione dell'errore nella comunicazione delle matematiche, soprattutto se inserita in un discorso riguardante i conflitti cognitivi in una interazione Insegnante-Allievo-Conoscenza.

L'aspetto negativo è che gli "errori" non sono inseriti organicamente nello sviluppo della conoscenza. Cioè non si ha un metodo che consenta di capire l'importanza degli errori dal punto di vista della conoscenza e/o dal punto di vista comunicativo.

#### **4.4.3 L'origine della nozione di ostacolo epistemologico: Bachelard (1884-1962)**

Questo filosofo della scienza nel suo "La formazione dello spirito scientifico" (1938) (op. cit.) per primo usa il termine "Ostacolo Epistemologico" anche se, come vedremo, alcune delle sue idee portanti sono presenti in Enriques (op. cit.).

Alcuni errori non sono effetto dell'ignoranza, dell'incertezza, del caso, ma effetto di una conoscenza anteriore, che aveva il suo interesse, i suoi successi, ma che, ora, si rileva sbagliata, o semplicemente inadatta. Questi errori non sono erratici o imprevedibili, essi sono costituiti in "ostacoli".

L'importanza del pensiero di Bachelard è stata quella di applicare la nozione di Ostacolo Epistemologico alla Epistemologia e alla Storia delle Scienze.

Riportiamo il brano dove Bachelard introduce il termine :

*"E' in termini d'ostacolo che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare gli ostacoli esterni, come la complessità e la*

*fugacità dei fenomeni, ne' d'incriminare la debolezza dei sensi e dello spirito umano: è nell'atto stesso di conoscere, intimamente, che appaiono, per una sorta di necessità funzionale, delle lungaggini e degli scompigli. E' là che noi mostreremo le cause di stagnazione e anche di regressione, è là che noi individueremo delle cause d'inerzia, che noi chiameremo Ostacoli Epistemologici".(op. cit., p.13)*

Bachelard ha classificato gli ostacoli soprattutto nell'ambito delle scienze fisiche:

- Ostacolo dell'esperienza diretta (pretende di porsi al di là, della critica);
- " della conoscenza in generale;
- " verbale;
- " dell'utilizzazione abusiva;
- " delle immagini familiari;
- " della conoscenza unitaria;
- " della conoscenza pragmatica;
- " realista;
- " animista;
- " della conoscenza quantitativa.

Gli ostacoli non sono delle conoscenze mal fatte ma piuttosto delle conoscenze fatte altrimenti per altri scopi e adattate ad altri problemi.

Anche Piaget in uno dei suoi ultimi lavori (L'Equilibratura delle Strutture Cognitive<sup>16</sup>) aveva dato una interpretazione dell'errore abbastanza vicina a quella di Enriques e Bachelard per quanto riguarda l'apprendimento.

#### **4.4.4 Gli ostacoli epistemologici nella comunicazione delle matematiche.**

L'ostacolo è costituito come una conoscenza, con degli oggetti, delle relazioni, dei metodi d'apprendimento, delle previsioni, con delle evidenze, delle conseguenze dimenticate, delle ramificazioni impreviste. Resiste al rigetto, tenderà ad adattarsi localmente, a modificarsi con minore spesa, ad ottimizzarsi su un campo ridotto, seguendo un processo di accomodazione ben conosciuto.

Per meglio capire il significato di ostacolo in Didattica bisogna prima capire l'origine degli ostacoli che, seguendo G. Brousseau, possono essere classificati in :

- ontogenetici;
- didattici;
- epistemologici.

#### **4.4.5 Ostacoli di Origine Ontogenetica**

Gli ostacoli di origine ontogenetica sono quelli che sopraggiungono con delle limitazioni (neurofisiologiche tra le altre) del soggetto nel momento del suo sviluppo: egli sviluppa delle conoscenze appropriate ai suoi mezzi e ai suoi scopi ad una data età.

L'epistemologia genetica mette in evidenza degli stadi e dei mezzi di sviluppo (accomodazioni e assimilazioni), che a volte, rassomigliano alle tappe dello sviluppo dei concetti.

---

<sup>16</sup> J. Piaget, *L'equilibratura delle strutture cognitive*, Boringhieri, Torino.

#### **5.4.6 Ostacoli di Origine Didattica.**

Gli ostacoli di origine didattica sono quelli che dipendono, in generale, da una scelta o da un progetto del sistema educativo. (Si pensi, ad esempio, alla trasposizione didattica)

Per esempio la presentazione attuale dei decimali a livello elementare è il risultato di una lunga evoluzione nel quadro di una scelta didattica fatta dagli Enciclopedisti ed in seguito dalla Convenzione (conformemente ad una concezione che risale a Stevino stesso): tenuto conto della loro utilità, i decimali vanno insegnati a tutti ed il più presto possibile, associati ad un sistema di misura, e riferendosi alle tecniche operatorie negli interi. Così, oggi, i decimali sono per gli alunni "degli interi naturali con un cambiamento d'unità", dunque dei "naturali" (con una virgola e delle misure di riferimento). Questa concezione, sostenuta da comportamenti stereotipati dell'alunno, fa ostacolo sino all'università ad una buona comprensione dei reali<sup>17</sup>.

#### **4.4.7 Ostacoli Epistemologici nelle Matematiche.**

Gli ostacoli d'origine propriamente epistemologica sono quelli ai quali non si può, né si deve sfuggire, in quanto hanno un ruolo costitutivo nella conoscenza. Si può ritrovarli nella storia dei concetti stessi. Ciò non vuol dire che si deve amplificare il loro effetto né che si devono riprodurre nell'ambiente scolastico le condizioni storiche dove li si è superati.

Brousseau ha quindi applicato la nozione di Ostacolo Epistemologico alle Matematiche prima e alla didattica delle Matematiche successivamente introducendo gli ostacoli didattici. La differenza sostanziale tra l'impostazione di Bachelard e quella di Brousseau è che per il primo l'ostacolo è nel pensiero, mentre per Brousseau l'ostacolo è nella comunicazione.

#### **4.4.8 Cosa è una concezione**

E' stato usato il termine "concezione" nella definizione di ostacolo ed è bene cercare di capire meglio il suo significato. Il termine concezione rappresenta un concetto matematico con:

- la nozione matematica come è definita nella conoscenza matematica in una data epoca;
- l'insieme dei significati associati al contesto;
- la classe di problemi nella risoluzione dei quali ha un senso;
- gli strumenti: teoremi, tecniche algebriche specifiche del trattamento del concetto.

Per quanto riguarda l'allievo, in particolare, una concezione riguarda:

- la classe delle situazioni-problema che danno il suo senso al concetto;
- l'insieme dei significati che egli è capace di associargli (immagini mentali, espressioni simboliche, ecc.);
- gli strumenti, teoremi, algoritmi di cui egli dispone per manipolare il concetto.

Le concezioni possono essere :

- storiche: identificate nella genesi storica di una nozione matematica:

---

<sup>17</sup> G. Brousseau, *Théorisation des Phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesi di Stato, 1986, Bordeaux.

- collettive: identificate in una collettività matematica.
- collettive identificate nella genesi storica: testi, scritti, interpretazioni dei testi in un contesto, manuali<sup>18</sup>.

L'esplorazione del dominio delle concezioni, cioè dell'insieme dei significati associati a concetti inseriti in un linguaggio matematico, può avere, come momento privilegiato, l'analisi storica. La definizione di concezione sembra essere molto ampia, la difficoltà della ricerca in Didattica delle Matematiche risiede proprio nel tentare di riorganizzare queste conoscenze attraverso una indagine teorica e sperimentale che tenti di far luce in questa rete intricata di conoscenze.

#### **4.4.9 Carattere dialettico del processo del superamento di un Ostacolo.**

Il processo del superamento di un ostacolo comporta necessariamente una successione di interazioni tra l'alunno e l'ambiente; questa successione di interazioni prende significato nella misura in cui si rapporta ad uno stesso progetto (riferito all'alunno) a proposito di un concetto, nella genesi del quale costituisce una tappa e di cui l'allievo fonda il significato.

Queste interazioni mettono in gioco nell'alunno, dei sistemi di rappresentazione e possono spesso essere interpretate come degli scambi di messaggi (Allievo-Insegnante), perché l'alunno è capace d'anticipazioni e finalizza le sue azioni. Queste prendono infatti un carattere di dialogo (a fortiori quando l'insegnante vi è implicato). Inoltre, le informazioni "cambiate" sono ricevute come dei fatti che confermano o negano delle ipotesi o ancora come delle asserzioni.

Se si ammette che una conoscenza si evidenzia opponendosi ad un'altra sulla quale si appoggia e che rimpiazza, si capirà perché diciamo che il processo di superamento ha un carattere dialettico: dialettico dell'a-priori e dell'a-posteriori, della conoscenza e dell'azione, di me e degli altri, ecc..

Organizzare il superamento di un ostacolo consisterà nel proporre una situazione suscettibile d'evoluzione al fine di fare evolvere l'alunno secondo una dialettica conveniente. Si tratterà, non di comunicare le informazioni che si vogliono insegnare, ma di trovare una situazione nella quale esse sono le sole a essere soddisfacenti o ottimali, tra quelle alle quali si oppongono, per ottenere un risultato del quale l'alunno si è fatto carico.

Questo però non basta: bisognerà anche che questa situazione permetta di primo acchito la costruzione di una prima soluzione o di un tentativo dove l'alunno investirà la sua conoscenza del momento.

Se questo tentativo fallisce, la situazione deve tuttavia rinviare a una situazione nuova modificata da questo insuccesso in maniera intellegibile ma intrinseca, cioè non dipendente dalla maniera arbitraria delle finalità dell'Insegnante. La situazione *deve permettere la ripetizione a volontà della messa in atto* di tutte le risorse dell'alunno. Essa deve auto-motivarsi con un gioco sottile di sanzioni intrinseche (e non sanzioni estrinseche legate dall'insegnante ai progressi dell'alunno). Lo sviluppo dell'apprendimento non può dunque essere programmato; è solamente la situazione e la sua scelta che possono esserlo.

---

<sup>18</sup> Habiba El Bouazzaoni, *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*, Tesi di Dottorato, 1988, Bordeaux.

#### **4.4.10 Uno sguardo d’insieme...**

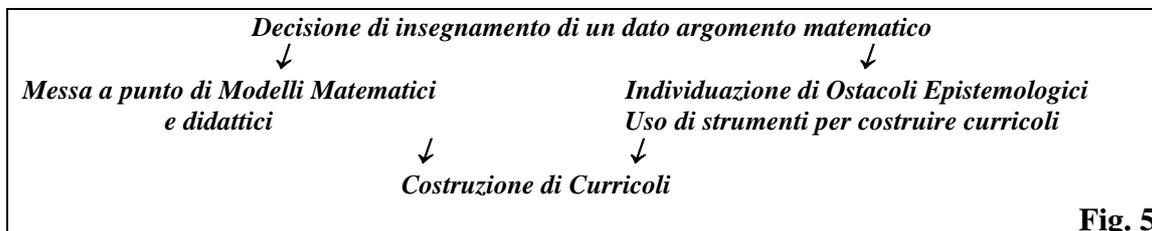
Gli ostacoli epistemologici ed in generale la ricerca epistemologica danno la possibilità al ricercatore in Didattica delle matematiche di:

- controllare le concezioni epistemologiche indotte dai matematici;
- controllare le concezioni epistemologiche dedotte dall'insegnante;
- controllare le concezioni epistemologiche che intervengono nella trasposizione didattica;
- permettere di riguardare da un punto di vista esterno il sistema d’insegnamento;
- differenziare una gran quantità di concezioni su un dato argomento e permettere un raggruppamento in classi per l'analisi didattica.

Sembra opportuno sottolineare i due livelli diversi nella comunicazione delle matematiche: la trasposizione didattica (la messa a punto di strategie e curricoli per l'insegnamento) e la ricerca teorica che si deve avvalere di strumenti come l'ostacolo epistemologico.

Per quanto riguarda la trasposizione didattica il ricercatore in Didattica può evidenziare due approcci :

- 1) La conoscenza degli ostacoli e quindi delle concezioni degli allievi consente un possibile intervento anticipatorio da parte dell'insegnante nell'acquisizione di determinati concetti;
- 2) La messa a punto di un curriculum può seguire uno schema del tipo :



**Fig. 5**

Dalla ricerca di micro didattica (situazioni didattiche, ostacoli, ecc..) si ricava una conoscenza abbastanza puntuale sulle difficoltà degli allievi e strumenti per superarli.

Tutto questo permette di costruire un curriculum :

- a) corretto da un punto di vista matematico;
- b) corretto da un punto di vista didattico.

La ricerca didattica sulla messa a punto di curricoli che tengano conto degli ostacoli è ancora agli albori. Esistono dei tentativi parziali supportati dalla teoria della Trasposizione Didattica di Chevallard, ma che ancora non sono sufficientemente provati.

Per sintetizzare il rapporto epistemologia-storia-didattica riportiamo un brano di M. Artigue<sup>19</sup>:

<sup>19</sup> M. Artigue, *Epistemologie et didactique*, IREM Paris VII, Giugno 1989.

*"L'epistemologia aiuta il didatta a controllare le relazioni con il sapere matematico degli oggetti che egli manipola. Gli permette anche di riguardare da un punto di vista esterno il sistema d'insegnamento che egli (il didatta N.d.R.) studia e del quale è spesso quasi troppo vicino. Ma mettendo in evidenza la distanza che separa la genesi storica delle nozioni e le genesi artificiali costruite per i bisogni dell'insegnante, gli mostra anche tutto ciò che separa questi due campi: L'epistemologia e la didattica".*

#### **4.4.11 Un modello teorico-sperimentale per individuare gli Ostacoli Epistemologici.**

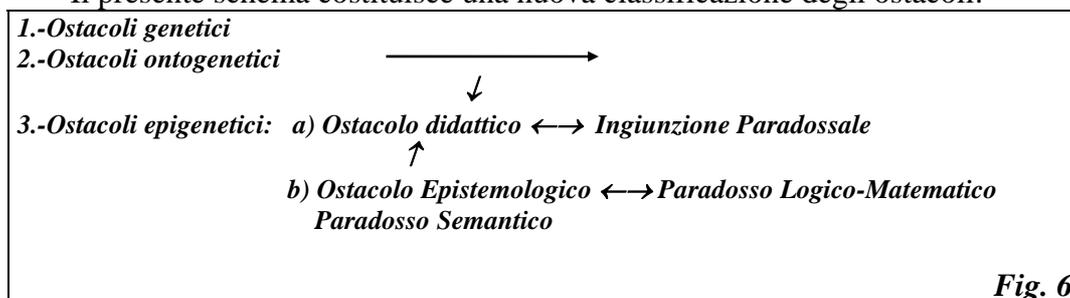
Diamo adesso una definizione di Ostacolo Epistemologico in una prospettiva linguistica e che permetterà di definire operativamente il Modello per l'individuazione di un Ostacolo Epistemologico:

**Quando in una certa epoca storica, la comunità matematica cerca di passare da un campo semantico significativo ad un nuovo linguaggio relativo ad una certa classe di problemi, entrano in gioco degli “oggetti” matematici particolari.**

**Definizione: Gli oggetti matematici dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) sono gli ostacoli epistemologici.**

E' dunque nell'evoluzione dei campi semantici del linguaggio matematico che si situano gli ostacoli epistemologici: “Gli *ostacoli epistemologici* sono definiti come *oggetti* matematici dei campi semantici precedenti che possono essere utilizzati nella costruzione sintattica del nuovo linguaggio. Questo nuovo linguaggio è allora specificato per rapporto a una certa *classe di problemi* (supposti inavvicinabili nel linguaggio anteriore).

Il presente schema costituisce una nuova classificazione degli ostacoli:



Dopo aver dato una definizione operativa di Ostacolo Epistemologico fondata su una indagine epistemologica dei linguaggi matematici seguenti un punto di vista semiotico, presentiamo il *Modello di Ostacolo Epistemologico*<sup>20</sup> (*Teorico-sperimentale*):

1. Gli ostacoli sono da cercare tra gli elementi costitutivi dei linguaggi matematici che si vogliono studiare. L'analisi si restringe su quello che i matematici chiamano **fondamenta** del linguaggio.

<sup>20</sup>Il riferimento è la tesi di Dottorato di F.Spagnolo, *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat de Eudoxe-Archimede*, Bordeaux, 31.7.1995 (Quaderni G.R.I.M., Supplemento al n.5, 1995 ).

2. Una volta ristretto il campo d'azione, si può riprendere la classificazione dovuta a Brousseau-Duroux<sup>21</sup>:
- Un ostacolo epistemologico è una conoscenza: la si può verificare con strumenti storico-epistemologici;
  - Questa conoscenza produce delle risposte adeguate in un certo contesto frequentemente riscontrato: verifica sperimentale attraverso indagini che fanno vedere come si accumulano le concezioni attorno a delle questioni poste in un contesto determinato con un linguaggio determinato.
  - Questa conoscenza produce delle risposte false fuori dal contesto. Essa non riesce a trasferire delle risposte relative a un contesto diverso, sia perché si è cambiato il punto di vista  $[c_1]$  sia perché si è considerato un contesto più generale  $[c_2]$  nel quale la prima conoscenza era un caso particolare. Si può verificarlo sperimentalmente attraverso il cambiamento del contesto per ciò che concerne  $[c_1]$ . Questi due momenti, cioè **il punto di vista** e la **generalizzazione** rappresentano due strumenti importanti per la costruzione dei linguaggi, sia nella storia delle Matematiche, sia nella riorganizzazione delle **fondamenta** delle Matematiche. Dunque, essendo due momenti importanti per la messa a punto delle conoscenze matematiche, costituiscono due momenti significativi per la caratterizzazione degli ostacoli epistemologici. Si può verificare sperimentalmente attraverso un ampliamento del contesto dove non si può più riconoscere il ruolo della conoscenza oggetto d'ostacolo per ciò che riguarda  $[c_2]$ . Questo corrisponde ad un ampliamento del linguaggio dove la conoscenza, oggetto d'ostacolo, non è più riconosciuta come elemento fondamentale (per esempio assioma), ma dovrà essere riconosciuta come una qualunque proprietà del linguaggio.
  - Questa conoscenza resiste alle contraddizioni con le quali è confrontata. In fondo questo aspetto, legato al punto precedente, consiste piuttosto in un fatto di procedura che di analisi sulle **fondamenta** nel senso che la conoscenza si presenta nella stessa maniera quando si riproduce parecchie volte la stessa situazione. Le contraddizioni potrebbero nascere da informazioni supplementari, situazioni didattiche costruite **ad hoc** nelle quali dovrebbe essere messo ben in evidenza il ruolo della conoscenza/ostacolo, del nuovo linguaggio esteso.
  - Questa conoscenza continua a manifestarsi anche dopo la sua presa di coscienza. Cioè, dopo aver preso coscienza del ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio, vi sono ancora le concezioni relative al ruolo della conoscenza/ostacolo del linguaggio iniziale. Resta il ruolo delle **fondamenta** del linguaggio iniziale. Si può verificarlo sperimentalmente in questo caso ancora con opportune situazioni didattiche.

---

<sup>21</sup> A. Duroux, *La valeur absolue. Difficultés majeurs pour une notion mineure*, Bordeaux, 1982, Tesi di laurea.

#### 4.5 Alcune relazioni tra teoria delle situazioni, psicologia, pedagogia ed epistemologia: uno schema di riferimento.

Ci sembra interessante concludere con il seguente schema che mette in evidenza alcune delle relazioni principali trattate nella Teoria delle Situazioni:

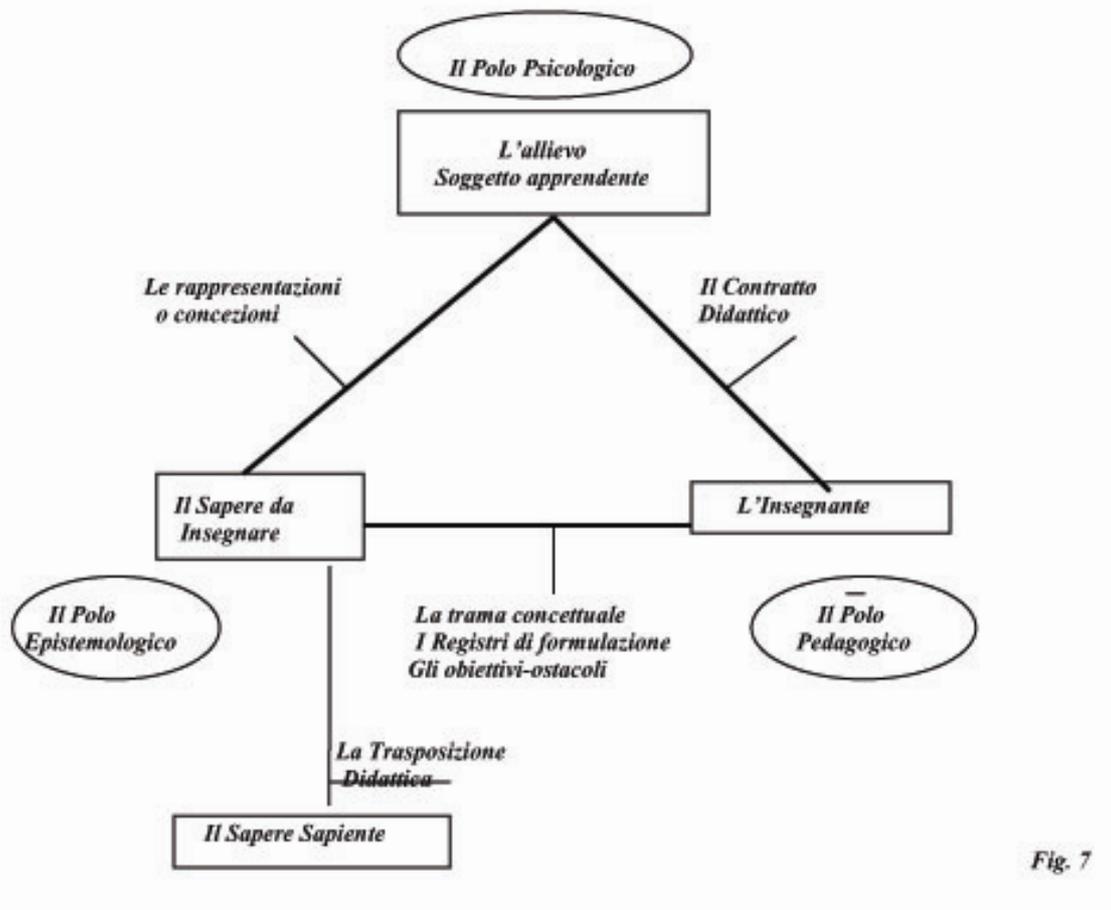


Fig. 7

#### 4.6 L'Epistemologia Sperimentale in evoluzione: eventuali relazioni con altri strumenti di ricerca.

La Teoria delle Situazioni è una teoria assolutamente aperta a contributi di altre discipline o settori di ricerca. In questo paragrafo saranno presentati alcuni esempi di collegamenti:

##### 4.6.1 Il linguaggio algebrico, una interpretazione del triangolo di Frege.

Il linguaggio algebrico rappresenta uno dei linguaggi matematici più emblematici riguardo al suo rapporto comunicativo. Gli storici hanno individuato tre periodi riguardanti il passaggio tra La Lingua Naturale ed il Linguaggio simbolico. Altra cosa è poi il percorso che mette in evidenza la storia del linguaggio nella dimensione semantico-sintattica, cioè quella dimensione che evidenzia la sintattizzazione del linguaggio. I tre periodi sono:

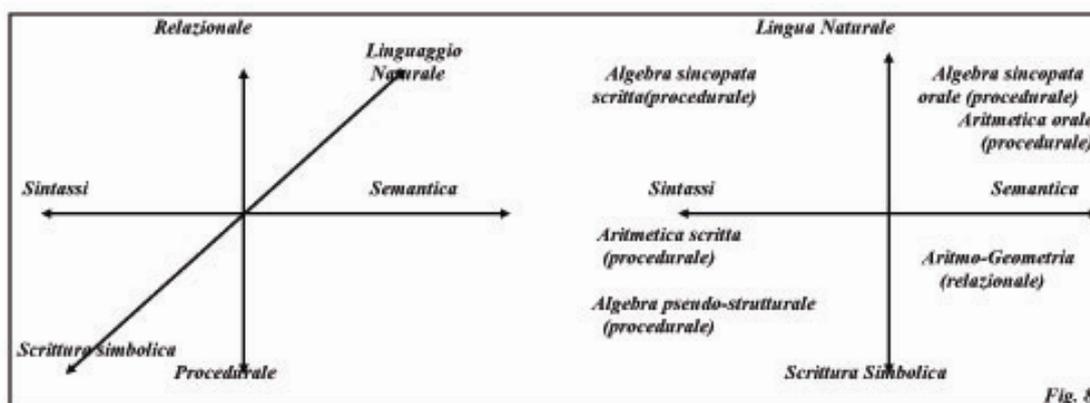
1. Fase Retorica: anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.), nella quale si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere ad alcun segno;

2. Fase Sincopata: da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune abbreviazioni per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale;
3. Fase Simbolica: introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il linguaggio simbolico non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Recentemente vi è una certa sensibilità alla ricerca didattica riguardante il linguaggio algebrico. Si farà riferimento ai lavori di F. Arzarello, L. Bazzini, G. Chiappini<sup>22</sup>.

I tre autori individuano tre dimensioni del pensiero algebrico rappresentate in un grafo:

- Asse x: Linguaggio Naturale-Scrittura Simbolica. La dimensione più importante messa già in evidenza dalle precedenti fasi storiche;
- Asse y: Sintassi-Semantica. Il linguaggio Naturale permette un ottimo controllo semantico, mentre non è così per l’aspetto sintattico del linguaggio algebrico. Il rapporto semantica-sintassi è molto importante per capire i problemi comunicativi del linguaggio;
- Asse z: Relazionale-Procedurale. Questa dimensione permette di evidenziare il passaggio brusco tra i calcoli, tentativi numerici e alla sintesi in una formula.



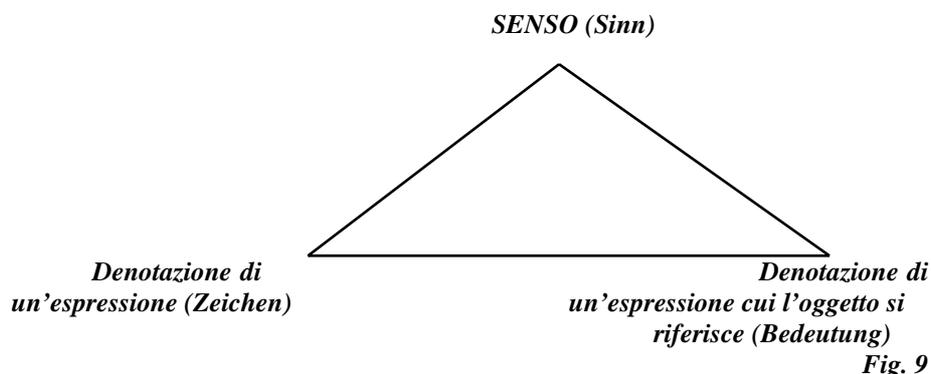
Secondo gli autori il pensiero algebrico è caratterizzato da un controllo equilibrato di tutte le tre dimensioni x, y, z ad un livello opportuno di astrazione. Naturalmente queste tre dimensioni dipingono lo sfondo sul quale poi si dovranno analizzare i processi comunicativi.

A questo punto i comportamenti degli allievi nei confronti dell’apprendimento dell’algebra vengono inseriti nei piani individuati dalle tre dimensioni.

La semantica di Tarski, relativa alla teoria logica dei modelli, non è sufficiente per poter interpretare completamente le questioni comunicative. Viene in aiuto la semantica intenzionale che può consentire l’interpretazione delle funzioni trasformative del linguaggio algebrico.

<sup>22</sup>L’algebra come strumento di pensiero (Analisi teorica e considerazioni didattiche), Quaderno n. 6, 1994, Pavia (Progetto strategico del CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche: innovazioni didattiche per la matematica).

Il triangolo di Frege rappresenta il riferimento più importante:



- $6x+3$  e  $3(2x+1)$ , esprimono una regola diversa ma denotano la stessa funzione, cioè lo stesso insieme di coppie ordinate;
- Le due equazioni, da risolvere in  $\mathbb{R}$ ,  $(x+7)^2=x$  e  $x^2+x+3=0$  denotano lo stesso oggetto (l'insieme vuoto) ma hanno senso diverso<sup>23</sup>;
- Nel linguaggio matematico e nel Linguaggio naturale vi sono molte espressioni che hanno sensi diversi ed uguale denotazione;
- La denotazione riguarda gli aspetti estensionali di un'espressione, mentre il senso riguarda i suoi aspetti intenzionali. In algebra la denotazione di un'espressione simbolica è l'insieme numerico, eventualmente vuoto, rappresentato dall'espressione;
- Esiste anche un **senso algebrico** che è l'esplicitazione del modo in cui il denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali;
- Viene definito **senso contestualizzato** il fatto che un'espressione simbolica può assumere significati all'interno di un dominio di conoscenza. Questo dominio può riguardare linguaggi matematici diversi dall'algebra e/o situazioni concrete come risolvere problemi, matematizzare situazioni, descrivere fenomeni ecc.;
- Il senso algebrico ed il senso contestualizzato hanno un carattere oggettivo in quanto risultano inglobati nel codice e nella cultura socialmente condivisi da una comunità;
- Senso e denotazione sono gli ingredienti giusti cui guardare, ma sono utili solo per darci alcune istantanee delle difficoltà algebriche, non per ricostruire l'intero film.

Questa analisi sul pensiero algebrico mette in evidenza il ruolo del Sapere ed in particolare uno studio epistemologico del linguaggio algebrico che tiene conto delle questioni comunicative in termini di riflessione semiotica: il triangolo di Frege come strumento per studiare le trasformazioni del linguaggio. Il Sapere Sapiente ha necessità di analizzarsi autonomamente e questo strumento consente questo tipo di analisi. Non vi sono contraddizioni con la Teoria delle Situazioni, anzi tutto questo viene visto nel

<sup>23</sup> “La denotazione di un'espressione simbolica in algebra, è l'insieme numerico, eventualmente vuoto, rappresentato dall'espressione. Tale insieme risulta determinato oltre che dall'espressione simbolica anche dall'universo numerico in cui l'espressione viene considerata.” (Arzarello op. cit, p. 37)

Nel caso particolare se le equazioni vengono considerate in  $\mathbb{C}$  (Insieme dei Numeri Complessi) esse denotano rispettivamente gli insiemi:  $\left(\frac{-13 \pm i\sqrt{27}}{2}\right)$  e  $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}\right)$ .

triangolo Allievo-Sapere-Insegnante come una analisi epistemologica del Sapere Linguaggio Algebrico utile strumento per una più approfondita analisi a-priori di situazioni didattiche. Risulta invece poco discussa tutta la questione riguardante la Pragmatica della comunicazione, elemento importante in ogni processo di comunicazione.

#### **4.6.2 Aspetti di una teoria cognitivista all'interno della teoria delle situazioni: Vergnaud.**

La teoria dei Campi concettuali di G. Vergnaud<sup>24</sup> è una teoria cognitivista che cerca di fornire un quadro coerente per poter interpretare i processi di apprendimento riguardanti le scienze e le tecniche. Rispetto alle altre teorie riguardanti i processi di apprendimento gioca un ruolo privilegiato all'interno della teoria delle situazioni in quanto si è sviluppata parallelamente ad essa e quindi si pone in termini di complementarità piuttosto che di alternativa<sup>25</sup>.

La teoria dei campi concettuali non è quindi specifica delle matematiche ma è cresciuta per rendere conto dei processi di concettualizzazione progressiva delle strutture additive, moltiplicative, delle relazioni numero-spazio e dell'algebra.

La teoria si basa sul processo di concettualizzazione e sulla ricerca di invarianti operatori. Si individuano tre tipi logici di invarianti:

- invarianti di tipo “proposizione”: sono suscettibili di essere veri o falsi; i teoremi in azione sono di questo tipo. Un esempio di teorema in azione è il seguente: “Una buona percentuale di ragazzi tra 8-10 anni comprende che se una quantità di merce è moltiplicata per 2, 3, 4, 5, 10, 100 (comunque un naturale positivo), allora il prezzo sarà 2, 3, 4, 5, 10, 100 volte più grande. Si può esprimere questa conoscenza con un teorema in azione:  $f(nx)=nf(x)$  per  $n$  Naturale.
- invarianti di tipo “funzione proposizionale”: non sono suscettibili di essere veri o falsi ma sono indispensabili per la costruzione di proposizioni. Ad esempio i concetti di cardinale e di collezione, quelli di stato iniziale, di trasformazione e di relazione quantificata, sono indispensabili alla concettualizzazione delle strutture additive.
- invarianti di tipo “argomento”: In matematica gli argomenti possono essere degli oggetti materiali (Il battello è a destra del faro), dei personaggi (Paolo è più grande di Maria), dei numeri ( $4+3=7$ ), delle relazioni (“più grande di” è una relazione

---

<sup>24</sup>Gérard Vergnaud: 1) *La Théorie des champs conceptuels*, RDM, vol. 10/2.3, 1991, Grenoble; 2) *Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de sciences et de champ conceptuel, Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud), Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1994.

<sup>25</sup>La posizione di Piaget è vicina a quella di Vergnaud sia per quanto riguarda gli schemi che gli invarianti operatori, soltanto che Piaget parla di schemi senso-motori piuttosto che di schemi percettivo-gestuali (Il pensiero è un gesto). Inoltre Piaget è interessato all'interazione soggetto-oggetto, mentre Vergnaud è interessato all'interazione soggetto-situazione. Uno schema per Vergnaud è:

- una totalità dinamica funzionale, qualcosa che funziona come unità;
- una organizzazione invariante della conduzione di una classe di situazioni date (l'algoritmo è un caso particolare di schema);
- composto da quattro categorie di elementi: 1) degli scopi, intenzioni e anticipazioni; 2) delle regole di azione; 3) degli invarianti operatori; 4) delle possibilità di inferenza in situazione.

Altra situazione è la posizione di Vygotski che con la sua “zona prossimale di sviluppo” analizza i processi dal punto di vista dell'allievo. Per nulla in contraddizione con la teoria delle situazioni se questo può servire a meglio comprendere le relazioni Allievo-Sapere-Insegnante.

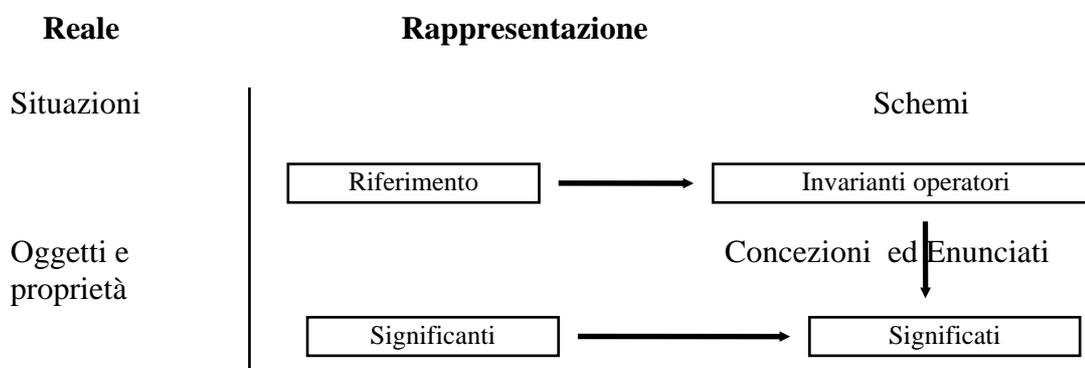
antisimmetrica), ed anche delle proposizioni (“8 è divisore di 24” è la inversa di “24 è un multiplo di 8”). La trasformazione da concetti-strumenti in concetti-oggetti è molto importante per i processi di concettualizzazione del reale. Questa trasformazione significa che le funzioni proposizionali possono diventare argomenti.

Un concetto è una terna di tre insiemi  $C=(S,I,L)$ :

- S: l’insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il riferimento);
- I: l’insieme degli invarianti sui quali riposa l’operazionalità degli schemi (il significato);
- L: l’insieme delle forme, linguistiche e non, che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue proprietà, le situazioni e le procedure di trattamento (il significante).

Diamo adesso una definizione di *Campo Concettuale delle strutture additive*: L’insieme delle situazioni di cui il trattamento implica una o parecchie addizioni o sottrazioni, e l’insieme dei concetti e teoremi che permettono di analizzare queste situazioni come compiti matematici.

Come abbiamo avuto modo di vedere Vergnaud utilizza il triangolo di Frege Riferimento-Significato-Significante ma questo per lui non è sufficiente, ha bisogno di introdurre un’ulteriore schema che gli consentirà di meglio interpretare i processi di apprendimento secondo le sue concezioni teoriche.



**Fig. 10**

#### **4.6.3 L'ostacolo ed il suo superamento dal punto di vista della Neurofisiologia.**

*“...Il problema è che la correzione degli errori arresterebbe le mutazioni, e ciò a sua volta finirebbe col rallentare tanto la velocità dell'evoluzione da impedire ai discendenti di un animale di adattarsi ai cambiamenti dell'ambiente.”*

*M. Minsky<sup>26</sup>*

Il presente paragrafo ha i seguenti obiettivi:

- Tentare una classificazione degli ostacoli alla luce delle considerazioni riguardanti l'interpretazione semiotica delle matematiche ( capitolo 3);
- Fornire delle ulteriori argomentazioni a favore del ruolo privilegiato dell'ostacolo nella didattica delle matematiche e nella comunicazione delle matematiche, in particolare attraverso argomentazioni tratte dalla neurofisiologia;
- Fornire degli strumenti per superare gli ostacoli nella Didattica delle Matematiche.

##### **4.6.3.1 Le ipotesi ammesse dalla neurofisiologia<sup>27</sup>.**

Le ipotesi ammesse ricavate dalla neurofisiologia sono legate alla definizione di Apprendimento ed al ruolo che hanno le emozioni nell'Apprendimento :

1- Per Apprendimento si intende il processo attraverso il quale un organismo acquisisce nuove informazioni; per memoria si intende l'immagazzinamento di queste informazioni nel sistema nervoso centrale in modo che possano essere successivamente utilizzate. In tal modo l'uomo trae vantaggio dalle esperienze e il suo comportamento futuro risulta più adatto all'ambiente in cui vive.

2- Sono stati ipotizzati due sistemi di apprendimento uno che utilizza come strutture l'ippocampo e l'amigdala e basa il proprio funzionamento sull'associazione emozioni-apprendimento; l'altro che utilizza i corpi striati e si basa sulla ripetizione dello stimolo. Il primo tipo di apprendimento è alla base della memoria cognitiva, mentre il secondo dà luogo ad un apprendimento di tipo ripetitivo (abitudini non cognitive che non fanno ricorso ad una fase cosciente). Quando impariamo una nuova lingua, nella fase iniziale, utilizziamo l'ippocampo come struttura base. Quando siamo padroni della nuova lingua, le conoscenze legate ad essa saranno gestite dai corpi striati. I due sistemi non sono in antitesi, ma si integrano e costituiscono due gradi di apprendimento.

Potremmo così riassumere tre forme di adattamento:

- 1- Adattamento genetico (Evoluzione);

---

<sup>26</sup>M. Minsky, *Saranno i robot a ereditare la terra*, Le Scienze, n. 316, Dicembre 1994.

<sup>27</sup>M. Ferreri, *L'evoluzione come apprendimento, L'apprendimento come evoluzione (ovvero “cosa fa il cervello?”)*, Quaderni G.R.I.M., Palermo, n.2 - 1991 (1<sup>a</sup> parte), n.3 - 1992 (2<sup>a</sup> parte).

M. Ferreri-F. Spagnolo, *L'apprendimento tra emozione ed ostacolo (L'errore nella comunicazione delle matematiche intersezione tra problemi dell'apprendimento/insegnamento e la neurofisiologia*, Quaderni G.R.I.M., Palermo n. 4 Monografico, 1994.

- 2- Adattamento individuale (Apprendimento);
- 3- Adattamento culturale (Linguaggi, ecc.).

Le relazioni tra l'adattamento individuale e quello culturale sono di tipo dialettico.

Elenchiamo delle ipotesi ad alcune delle quali tenteremo di dare una risposta in questo paragrafo:

- 1- Le emozioni giocano un ruolo determinante nell'apprendimento delle matematiche?
- 2- È possibile mettere a punto delle particolari situazioni didattiche che inducano emozioni nell'apprendimento?
- 3- Che relazione esiste tra conflitto e ostacolo?
- 4- Come è possibile mettere a punto situazioni didattiche per il superamento dell'ostacolo?

#### **4.6.3.2. Alcune considerazioni sul "conflitto".**

Per cercare di dare una risposta alle questioni sopra elencate cercheremo di riprendere la nozione di conflitto prima e di ostacolo poi per poter rivedere attraverso la teoria delle situazioni quale sia la possibile strada da percorrere per una soluzione di tipo didattico.

1- Si ha conflitto cognitivo ogni qual volta un soggetto, in possesso di particolari conoscenze, deve scegliere una di queste situazioni:

- un fatto o una serie di fatti contingenti in contraddizione con le previsioni di un modello (o di una concezione o di uno schema operatorio);
- due modelli (o due schemi...) ai quali vi è ragione di credere e che gli appaiono improvvisamente e che, a torto o a ragione sente incompatibili fra di loro.

Quindi al soggetto si presentano contemporaneamente due decisioni o due asserzioni contrarie, cioè:

- o sceglie l'una o l'altra, ma questo comporta il rifiuto puro e semplice di una delle concezioni in conflitto;
- o rende compatibili le due con una modificazione dell'una o dell'altra. La contraddizione è allora apparente, essa non è che un Paradosso. (Per superare il Paradosso, il soggetto, dovrebbe risistemare sintatticamente le conoscenze inglobando completamente la modificazione dell'una e/o dell'altra).

In tutti e due i casi, si ha quindi un conflitto cognitivo in quanto la conoscenza del soggetto è chiaramente la causa e l'oggetto del conflitto, almeno implicitamente.

2- Si ha conflitto socio-cognitivo quando due soggetti in relazione non riescono a prendere coscienza ciascuno del punto di vista dell'altro. Il superamento del conflitto socio-cognitivo avviene quando almeno uno dei due si rende conto del punto di vista dell'altro. Si costruisce cioè un modello interpretativo delle concezioni dell'altro. Ma il superamento può anche avvenire quando almeno uno dei due generalizza il sistema nel quale si trovavano inizialmente coinvolti. In questo caso la generalizzazione comporta un superamento dei due punti di vista.

3- Nella ingiunzione paradossale siamo in presenza di un conflitto cognitivo e di un conflitto affettivo. Si ha un conflitto affettivo tra due soggetti quando la relazione esistente non è simmetrica ed uno dei due soggetti accetta la gerarchizzazione della relazione. In questo caso il sistema coinvolto è di due o più soggetti ma la relazione è orientata da un soggetto all'altro (Es.: Insegnante→ Allievo).

Riprendiamo la definizione di ingiunzione paradossale data precedentemente (par. 3.5 riguardante i paradossi pragmatici) :

a) Due o più persone sono coinvolte in una relazione intensa che ha un valore di sopravvivenza fisica e/o psicologica per una di esse, per alcune, per tutte.

b) Viene dato un messaggio con le seguenti proprietà riferito al contesto precedente a):

- 1- asserisce qualcosa;
- 2- asserisce qualcosa sulla propria asserzione;
- 3- queste due asserzioni si escludono a vicenda.

c) Si impedisce al ricevitore del messaggio di uscire fuori dallo schema stabilito da questo messaggio o metacomunicando su esso (commentandolo) o chiudendosi in se stesso. In una situazione didattica le due persone coinvolte nella relazione intensa sono insegnante-allievo.

La relazione intensa (vedi punto a) è quella che implica come necessario il conflitto affettivo. Per quanto riguarda il punto b) la definizione di Brousseau di conflitto cognitivo lo esaurisce completamente. Il punto c) interviene nella situazione di comunicazione insegnante-allievo e per quanto riguarda la teoria delle situazioni di Brousseau lo possiamo ritrovare nelle situazioni a-didattiche e nelle situazioni di validazione.

Il superamento dell'ingiunzione paradossale avviene attraverso la messa a punto di situazioni didattiche che inducano nella comunicazione la metacomunicazione (da parte dell'allievo).

La metacomunicazione permette di superare sia il conflitto affettivo che quello cognitivo attraverso la presa di coscienza di un punto di vista diverso e/o di una generalizzazione del sistema nel quale l'allievo è coinvolto.

L'ingiunzione paradossale, attraverso la metacomunicazione, fa devolvere la conoscenza dell'allievo in sapere.

Le situazioni a-didattiche, inserite in un contratto didattico, permettono anche una gestione dei problemi psico-affettivi.

**Analizziamo adesso gli ostacoli :**

#### **4.6.3.3. Ostacolo genetico.**

Per ostacolo genetico intendiamo l'ostacolo legato al corredo cromosomico. Il corredo cromosomico ci fornisce tutta una serie di comportamenti innati. Essi sono dati da connessioni neuronali "rigide" frutto dell'evoluzione per tentativi ed errori. Tali comportamenti innati possono essere causa di ostacoli che proprio per la loro natura rigida sono di difficilissimo superamento.

Gli esempi sui comportamenti innati vanno dai comportamenti che consentono la sopravvivenza nell'immediato alla predisposizione alla lingua materna (Chomsky).

Questi comportamenti innati sono frutto solo di tentativi ed errori?

Sono solo frutto dell'evoluzione o anche delle culture eccedenti?

Presumibilmente l'incapacità di analizzare questo tipo di ostacoli è legata alla autoreferenzialità del sistema "uomo". Essa stessa è un ostacolo.

Un'altra "cultura" (anche non umana) fuori dal nostro sistema potrebbe essere in grado di analizzare meglio gli ostacoli genetici.

#### **4.6.3.4. Ostacolo ontogenetico**

Per ostacolo ontogenetico intendiamo l'ostacolo legato allo sviluppo dell'intelligenza e dei sistemi percettivi. Questo ostacolo ha un'evoluzione temporale legata ai vari stadi di sviluppo delle reti neuronali. Sono ovviamente escluse da questa trattazione tutte le forme legate a patologie lesive dei sistemi percettivi e alle strutture cerebrali.

Se l'ostacolo è legato alla maturazione dei sistemi percettivi allora gradualmente scomparirà con il progredire della maturazione degli stessi.

Sappiamo che durante lo sviluppo del cervello fra le cellule cerebrali si forma un modello di connessioni altamente variabile e diverso da individuo ad individuo.

La plasticità di tali connessioni è massima durante un ben determinato "periodo critico". Tale "periodo critico" varia da struttura a struttura cerebrale, comunque si completa al momento della nascita e/o nei primissimi anni di vita. Invece tale plasticità delle strutture deputate ai processi di apprendimento dura tutta la vita.

Dopo la nascita, in ciascun individuo si fissa uno schema di connessioni neurali ma certe combinazioni di connessioni sono scelte a preferenza di altre in conseguenza degli stimoli che il cervello riceve attraverso i sensi. Le connessioni poco utilizzate tenderanno a diventare inattive. Da qui si evince la grandissima importanza che rivestono gli stimoli nello sviluppo del cervello.

Quindi l'ostacolo ontogenetico può trovare una sua spiegazione nei seguenti casi :

- 1- nell'insufficiente sviluppo di connessioni neuronali ;
- 2- nella mancanza di sviluppo di connessioni neuronali;
- 3- nell'ancora insufficiente numero di connessioni neuronali. (quindi legato agli stadi di sviluppo dell'intelligenza)

Nel caso 3 (ancora insufficiente numero di connessioni neuronali) l'ostacolo sarà rimosso dall'evoluzione temporale dello sviluppo del pensiero (Vedi stadi di sviluppo nell'epistemologia genetica Piagetiana).

Negli altri due casi l'importanza dell'ambiente è determinante. Per ambiente intendiamo la risultante dei seguenti componenti: biochimiche (ad esempio alimentari), percettive, familiari, didattiche, ecc.

Il seguente schema mette in evidenza la relazione esistente tra ostacolo ontogenetico e didattico:



La definizione data di ostacolo ontogenetico nel paragrafo 5.4.4 era legata soltanto agli stadi di sviluppo quindi ad uno solo degli aspetti analizzati in questo paragrafo.

Nel paragrafo 5.4 non veniva ipotizzato nessun intervento didattico. In questa sede invece pensiamo sia possibile intervenire didatticamente anche per questo tipo di ostacolo attraverso un'interazione costruttiva con l'ambiente ipotizzando anche attività legate alla psicomotricità ed alla percezione. Sarebbe ipotizzabile la messa a punto di una didattica speciale per affrontare questo tipo di ostacolo.

#### **4.6.3.5. Ostacoli epigenetici**

Per ostacolo epigenetico intendiamo l'ostacolo che si viene a determinare ogni qual volta si ha un processo di comunicazione di conoscenze da individuo/i a individuo/i (e quindi deriva dalle possibili influenze culturali).

Tra gli ostacoli epigenetici individuiamo quelli di origine didattica e quelli epistemologici.

#### **4.6.3.6. Ostacoli epistemologici.**

Gli ostacoli epistemologici sono quelli che individuiamo nella cultura precedente (indagine storico-epistemologica) e riscontriamo a tutt'oggi (ostacoli di origine didattica). Ma sono anche quelli, come abbiamo avuto modo di riferire nel capitolo precedente, che intervengono per la messa a punto della sintassi di un nuovo linguaggio matematico.

Il superamento dell'ostacolo epistemologico può avvenire con le stesse modalità con cui si supera l'ostacolo didattico ma non esclusivamente. (Vedi paragrafo successivo)

Superare un ostacolo epistemologico legato ad un certo linguaggio matematico significa anche poter riflettere sul metalinguaggio. Riflettere su linguaggio e metalinguaggio può anche voler dire ripensare alla filosofia soggiacente l'approccio storico-culturale che ha permesso la messa a punto di quel dato linguaggio.

È fuori dubbio che il linguaggio Geometria Euclidea ha portato verso una concezione filosofica diversa da quella a cui può portare per esempio il linguaggio dell'Aritmetica.

Il meccanismo dell'evoluzione di un linguaggio è estremamente complicato, esso dipende per esempio:

- 1- da fattori socio-economici per la risoluzione di classi di problemi;
- 2- da fattori intrinseci alla natura del linguaggio matematico stesso:

- valore euristico;
- coerenza del linguaggio sino a quel determinato momento storico;
- possibili collegamenti con altri linguaggi.

Superare un ostacolo epistemologico vuol dire quindi prendere in giusta considerazione sia il problema linguaggio (classificazione semiotica del linguaggio), sia il problema dell'evoluzione del linguaggio stesso (metacomunicazione e filosofie delle matematiche).

Nel triangolo Allievo-Insegnante-Conoscenza possono individuarsi due punti di vista :

- Dal punto di vista dell'allievo, l'ostacolo epistemologico è analogo a quello di origine didattica;
- Dal punto di vista dell'insegnante esso, l'ostacolo epistemologico, pretende un intervento di risistemizzazione della grammatica del linguaggio come nel caso del Paradosso.

Se nella comunicazione delle matematiche intervengono due o più linguaggi, evidenziare l'ostacolo epistemologico significa riuscire anche a capire quanto influisce la conoscenza dell'uno rispetto alla comprensione della grammatica dell'altro.

#### **4.6.3.7. Ostacoli di origine didattica.**

Gli ostacoli di origine didattica sono quelli legati alla trasposizione didattica e alla comunicazione delle matematiche.

Essi possono essere identificati come delle connessioni neurali rigide che individuano dei percorsi preferenziali da parte dell'informazione.

Ulteriori rinforzi renderanno tali connessioni sempre più rigide e i percorsi sempre più stereotipati. Da qui la necessità di creare delle connessioni plastiche e una variabilità di percorso.

Come possiamo ottenere questo ?

Nella introduzione al presente paragrafo abbiamo avuto modo di ribadire che uno dei sistemi cognitivi basato su l'interazione ippocampo-amigdala è legato strettamente alle emozioni. Tale sistema è l'unico possibile per creare le condizioni necessarie alla destabilizzazione di questi sistemi rigidi e alla creazione di nuove connessioni. È chiaro che più è alto il grado di rigidità delle connessioni, maggiore sarà l'impegno emozionale necessario alla loro disconnessione.

L'ingiunzione paradossale, come abbiamo avuto modo di vedere, mette in relazione dialettica il conflitto cognitivo ed il conflitto affettivo e rappresenterebbe quello strumento idoneo a creare questi stati emozionali nella comunicazione della conoscenza.

Dal punto di vista dell'Insegnante l'ostacolo didattico può essere superato quando vi è una completa conoscenza dei passaggi legati all'Ingiunzione Paradossale ed in particolare il punto b) che è specifico sia dell'epistemologia dell'Insegnante sia della conoscenza che l'Insegnante ha del sapere dell'alunno.

Riproponendo ancora le parole di Brousseau per quanto riguarda il superamento dell'ostacolo ci si rende conto delle difficoltà che questo tipo di operazione comporta soprattutto per il fatto che l'insegnante deve padroneggiare completamente sia il meccanismo della conoscenza che quello della comunicazione.

In primo luogo quando si parli di superamento di ostacoli: *"Organizzare il superamento di un ostacolo consisterà nel proporre una situazione suscettibile di evolvere e di far evolvere l'allievo secondo una dialettica conveniente. Si tratterà, non di comunicare le informazioni che si vuole insegnare, ma di trovare una situazione nella quale esse sono le sole a essere soddisfacenti o ottimali - fra quelle alle quali esse si oppongono - per ottenere un risultato nel quale l'allievo si è fatto carico.(...)* Essa deve automotivarsi con un gioco sottile di sanzioni intrinseche (e non sanzioni estrinseche legate dall'insegnante ai progressi dell'allievo). Lo svolgimento dell'apprendimento non può dunque essere programmato; è solamente la situazione e

la sua scelta che possono esserlo.”<sup>28</sup> (Ci sembra che questa ultima affermazione sia più valida per l'ostacolo epistemologico che per quello di origine didattica)

Altra strada per il superamento degli ostacoli didattici è quella relativa ad un tipo di comunicazione ripetitivo della conoscenza. È lo strumento comunicativo maggiormente utilizzato nell'insegnamento. Esso fa capo a delle strutture sottocorticali (corpo striato). Questo tipo di comunicazione non essendo elaborato dall'ippocampo non accede ai gradi più elevati dell'elaborazione della conoscenza.

Da un punto di vista della comunicazione didattica corrisponde al dettato pedagogico di portare gli allievi, attraverso passaggi armoniosi, da un livello all'altro. Ma questa situazione porta ad un apprendimento che non permette, in generale, la situazione di transfert.

Gli ostacoli sono quindi così classificabili:

- Ostacolo genetico
- Ostacolo ontogenetico
- Ostacolo epigenetico:      a) Ostacolo origine didattica  
   b) Ostacolo epistemologico

#### **4.6.3.8. Per concludere ...**

Abbiamo visto che tra le ipotesi ammesse dalla neurofisiologia abbiamo potuto argomentare una possibile relazione tra apprendimento ed emozione.

Abbiamo anche visto come le ingiunzioni paradossali intervengono nella possibile messa a punto di situazioni didattiche.

Le ipotesi sono sostanzialmente le seguenti :

- 1- Attraverso una indagine epistemologica sui Linguaggi Matematici (interpretazione semiotica) si può tentare di fornire una definizione operativa di ostacolo in generale ed epistemologico in particolare.
- 2- Fornire degli strumenti operativi per il superamento degli ostacoli epistemologici.

Per quanto riguarda la prima ipotesi l'argomentazione è sviluppata nel paragrafo 2.3.

Nel presente paragrafo si è anche esibita una argomentazione per la seconda ipotesi e cioè quella relativa al superamento degli ostacoli. La messa a punto di situazioni a-didattiche, servendosi delle ingiunzioni paradossali, può permettere un superamento degli ostacoli sia epistemologici che di origine didattica.

Consideriamo le questioni che abbiamo posto all'inizio del presente paragrafo e cioè :

- 1- Le emozioni giocano un ruolo determinante apprendimento delle matematiche?
- 2- è possibile mettere a punto delle particolari situazioni didattiche che inducano emozioni nell'apprendimento?
- 3- Che relazione esiste tra conflitto e ostacolo?
- 4- Come è possibile mettere a punto delle situazioni didattiche per il superamento dell'ostacolo?

Le questioni 1, 2, 4, sono state argomentate teoricamente ma andrebbero verificate sperimentalmente e rimangono delle questioni parzialmente aperte per la ricerca in Didattica delle Matematiche. La questione 3 è stata ampiamente argomentata in tutto il paragrafo.

---

<sup>28</sup>G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, R.D.M. vol. 4.2, 1983.

## Appendice I

### **Una situazione a-didattica per la scuola elementare: Chi invitiamo alla festa? a cura di Barbara Rapa<sup>29</sup>**

Il gioco proposto trae spunto da “Flatlandia”, il meraviglioso mondo a *due dimensioni*, descritto nei costumi, nelle abitazioni, negli abitanti dal reverendo Ewin A. Abbott<sup>30</sup>.

La logica interna del gioco permette di far esplorare allo studente il concetto di *equivalenza* delle figure piane o *equiestensione* che, come affermano Speranza et alii (1986), è alla base del concetto di *Area* definita come la classe di equivalenza di un poligono nella relazione di equiscomponibilità.

I nodi epistemologici che sottendono l’elaborazione del gioco sono:

- Attuare il processo di astrazione nella configurazione di una relazione di equivalenza;
- Il passaggio da una percezione intuitiva della grandezza in esame ad una sua valutazione oggettiva;

Viene implicitamente messa in gioco, inoltre, la conoscenza delle principali figure piane.

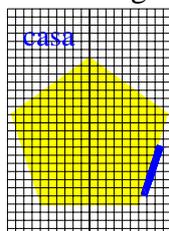
Il gioco consiste nel configurare il maggior numero di invitati, tra gli abitanti di Flatlandia, che possono partecipare ad una festa organizzata all’interno di una delle tipiche case del fantastico mondo a due dimensioni.

#### **Principali fasi del gioco:**

##### **I Fase: Consegna**

L’insegnante legge un breve brano tratto da “Flatlandia” per presentare il mondo a due dimensioni: “Immaginate un vasto foglio di carta su cui delle Linee Rette, dei Triangoli, dei Quadrati, dei Pentagoni, degli Esagoni e altre Figure geometriche, invece di restar ferme al loro posto si muovano qua e là, liberamente, sulla superficie o dentro di essa, ma senza potersene sollevare e senza potersi immergere, come delle ombre, insomma – consistenti, però e dai contorni luminosi. Così facendo avrete un’idea abbastanza corretta del mio paese e dei miei compatrioti”.

In seguito, l’insegnante enuncia **le regole del gioco**: a Flatlandia si sta organizzando una grande festa per soli uomini in una delle caratteristiche abitazioni: “La forma delle case più comune è a cinque lati o pentagonale, come nell’annessa figura. I due lati settentrionali RO, OF, costituiscono il tetto, e in genere non hanno porte; [...] il lato meridionale o pavimento è in genere privo di porte”.



<sup>29</sup> Lavoro eseguito nell’ambito delle attività di laboratorio del Corso “Didattica della Matematica II”(Prof. F. Spagnolo), Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell’Università di Palermo.

<sup>30</sup> E.A. Abbot, *Flatlandia (Racconto fantastico a più dimensioni)*, Adelphi, Milano, 1966.

**Vince** la squadra che riesce a configurare il maggior numero di abitanti di Flatlandia che possono entrare nella casa, facendoli accedere dalla porta di ingresso, lunga 3 cm.

Bisogna tenere presente che nel paese di Flatlandia esistono:

- ✗ Triangoli Isosceli (soldati e operai della classe inferiore);
- ✗ Triangoli Equilateri ( esponenti della borghesia);
- ✗ Quadrati e Pentagoni (professionisti e gentiluomini);
- ✗ Esagoni (esponenti dell'aristocrazia);
- ✗ Cerchi (appartenenti all'ordine sacerdotale).

L'insegnante rappresenta graficamente, con il supporto della carta a quadretti, la casa di Flatlandia che deve ospitare la festa.

### **II FASE: Situazione d'azione.**

Ogni gruppo di due studenti ha a disposizione una pianta della casa a base pentagonale (allegato 1) ed una serie di *abitanti* di Flatlandia rappresentanti i potenziali partecipanti alla festa (allegato 2).

Per ciascuna delle classi di abitanti suddette vi sono individui simili ma di diverse dimensioni, per cui nel rispetto delle regole del gioco, occorrerà verificare che i probabili invitati possano passare dalla porta d'ingresso.

A ciascun gruppo di studenti viene chiesto di giocare applicando la regola.

Ogni allievo posto di fronte alla situazione deve prendere delle decisioni, spinto da una sana competizione nei confronti del compagno. E' immediato cogliere che non è funzionale operare delle scelte casuali, ma è vantaggioso utilizzare, anche in modo implicito, le proprie conoscenze e quindi operare una selezione logica, basata su di un criterio, degli *invitati* per utilizzare le figure più idonee.

Una strategia è messa alla prova dalla situazione d'azione stessa, la quale mette in evidenza la sua efficacia in rapporto al problema.

Alcune strategie che potrebbero emergere:

1. Se scelgo i cerchi perdo molto spazio;
2. Utilizzando in prevalenza i triangoli riesco ad occupare quasi tutta la superficie;
3. Vi sono figure che non passano dalla porta e quindi da escludere subito;
4. Sono utili le figure più piccole.
5. Pentagoni ed Esagoni hanno una cattiva interconnessione.

Queste conoscenze consentono allo studente di operare delle anticipazioni e vincere sul tempo il compagno avversario.

Al termine di questa fase, l'insegnante raccoglie le composizioni proposte e segnala quelle che prevedono il massimo numero di *ospiti*.

### **III FASE: Situazione di formulazione.**

Questa fase è contraddistinta dalla formulazione della conoscenza, ovvero dalla possibilità dello studente di riprendere, identificare, decomporre e ricostruire in uno specifico sistema linguistico la propria conoscenza.

A questo punto la classe viene suddivisa in due gruppi, con due portavoce. La situazione è formata dalla partita giocata dai due portavoce.

Ciascuna squadra ha 10 minuti di tempo per formulare una strategia comune e comunicarla al portavoce, il quale è tenuto a rispettarla durante la partita.

La strategia di ciascun gruppo dovrà essere documentata da un breve protocollo in cui il gruppo indicherà quali figure sono state scelte ed in base a quali criteri.

Ciascuno studente, durante questa fase, si fa carico di essere opportunamente compreso dal proprio gruppo perché dal livello di chiarezza con il quale vengono esposte e motivate le proprie strategie dipende la vincita del gioco.

Successivamente i due portavoce giocano una nuova partita; ciascuno sceglie gli *ospiti* da invitare alla festa e vince la squadra che ne individua il numero più elevato. L'insegnante fissa alla lavagna gli ospiti all'interno della casa e gli studenti hanno un'ulteriore retroazione alle strategie adottate.

L'allegato 3 riporta una delle possibili configurazioni vincenti.

#### **IV FASE: Situazione di validazione.**

La situazione di validazione ha lo scopo di condurre gli studenti a rivedere le proprie opinioni per individuare una serie di strategie che non siano esclusivamente l'adesione alla regola, ma che siano il risultato di un processo di interiorizzazione e di riorganizzazione delle strategie in una Teoria riconosciuta socialmente.

A questo punto alle due squadre viene data un'ulteriore consegna, ovvero proporre delle congetture, argomentarle alla squadra avversaria ed evidenziare, qualora queste venissero accettate, dei Teoremi.

L'argomentazione consente a discrezione degli studenti l'uso sia della discussione sia la dimostrazione pratica, per provare la falsità o la veridicità della congettura.

Ogni proposizione accettata vale 1 punto e per ogni proposizione provata falsa si danno 3 punti alla squadra che ne ha argomentato la prova. Vince la squadra con il massimo numero di punti.

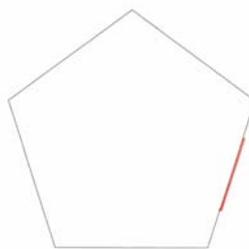
Se la classe non trova delle altre proposizioni da enunciare, l'insegnante può introdurre un'ulteriore strumento di validazione: la misura.

Una strategia forte per verificare quale combinazione ci consente di far entrare il maggior numero di *invitati* nella casa, è quella di misurare la sua superficie e confrontarne la misura con quella delle superfici degli *invitati*.

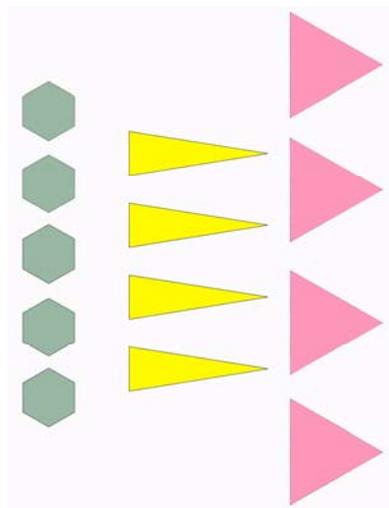
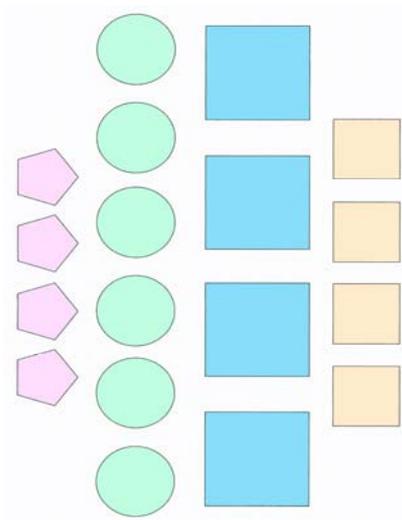
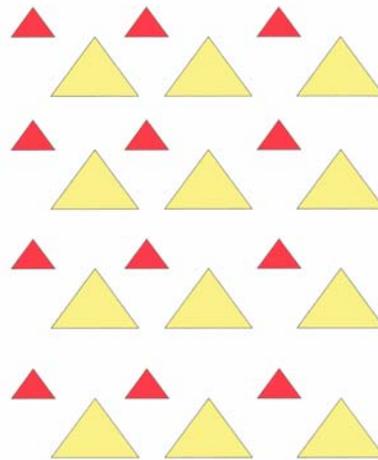
A questo punto le squadre possono enunciare nuove congetture e si procede nell'attribuzione dei punti consentendo nuove possibilità di gioco per coltivare l'attitudine alla prova degli alunni.

#### ***Allegato 1: La pianta della casa.***

<p><b><math>AB = 6 \text{ cm}</math></b></p> <p><b><math>\text{Apotema} = 4,13 \text{ cm}</math></b></p> <p><b><math>\text{Area} = 61,95 \text{ cm}</math></b></p> <p><b><math>\text{Porta} = 3 \text{ cm}</math></b></p>
---



**Allegato 2: I potenziali partecipanti alla festa.**



### ***Dove recuperare esempi di situazioni a-didattiche?***

1. Nel sito web del GRIM alla pagina [www.math.unipa.it/~grim/tesiFP.htm](http://www.math.unipa.it/~grim/tesiFP.htm). In questa pagina sono pubblicate le migliori tesi di Didattica della Matematica del Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Palermo dal 2002 ad oggi. Le tesi sono corredate da proposte di situazioni e situazioni sperimentate con i risultati sperimentali. (Scuola Elementare)
2. Nel sito web del GRIM alla pagina [www.math.unipa.it/~grim/matdit.htm](http://www.math.unipa.it/~grim/matdit.htm). In questa pagina sono raccolti materiali didattici elaborati nei corsi di Didattica della Matematica, Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Palermo & S.I.S.S.I.S (Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione all'Insegnamento Secondario) per l'indirizzo Fisco-Matematico. (Scuola Elementare, Scuola Superiore)
3. Nel testo F. Spagnolo, *Insegnare le Matematiche nella Scuola Secondaria*, 1998, La Nuova Italia. In particolare il Capitolo 6 “Alcuni esempi di situazioni didattiche: i decimali”, a cura di Santa Calisti e Rosa La Rosa. (Scuola Elementare, Scuola Media)
4. Nel sito web: <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello/> . Matematica 2001, materiale curato dall'UMI-CIIM riguardante i programmi dei cicli scolastici della Scuola Elementare e Media. Oltre alle indicazioni programmatiche vi sono 85 esempi di attività didattiche curate dai Nuclei di Ricerca Didattica Italiani. Parecchie sono le situazioni che possiamo considerare trasformabili in situazioni a-didattiche.
5. Nel sito web: [www.math.unipa.it/~grim/tesi\\_it.htm](http://www.math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm) . Sono pubblicate le tesi di dottorato di ricerca italiane sostenute in Italia ed all'estero a partire dal 2002. Nelle tesi possono essere presenti delle situazioni didattiche sperimentate.