Introduzione

Il presente lavoro, ponendosi come fine quello di scoprire le concezioni dei bambini di 9-10 anni sull'approccio costruttivo all'infinito attraverso il Postulato di Eudosso-Archimede, nasce da una riflessione più ampia rispetto agli obiettivi e alle ipotesi dell'indagine sperimentale in esso contenuta, per abbracciare una tematica molto dibattuta e dagli aspetti controversi: come fare matematica.

La considerazione di tale questione scaturisce da una serie di esperienze di tirocinio le quali hanno messo in evidenza il carattere acritico che l'insegnamento della matematica assume nella pratica educativa con conseguenze devastanti sugli alunni e sul loro corretto apprendimento.

La scelta di portare avanti un'indagine sperimentale che avesse come oggetto "un contenuto matematico", non scaturisce, quindi, soltanto dalla necessità di indagare sulle concezioni che gli alunni hanno sull'infinito, ma anche dall'esigenza di proporre un modo nuovo ed originale di fare matematica nel rispetto e delle esigenze dei soggetti e di quella che è la vera natura di tale disciplina in quanto scienza che si pone come libera espressione della mente umana.

In relazione agli obiettivi e alle ipotesi della ricerca, si è proceduto inizialmente con l'analisi epistemologica e storico-epistemologica del concetto di infinito con riferimento al Postulato di Eudosso-Archimede in modo da avere chiari sia "le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi del concetto in questione, sia la ricostruzione sintattica, semantica, pragmatica" di tali percorsi nella storia (Filippo Spagnolo, 1995). Grazie a questa prima analisi, che ha sostenuto la ricerca in tutti i suoi passi, è stato possibile individuare le problematiche inerenti alla comprensione e all’apprendimento dell’infinito e strutturare un intervento che tenesse conto di tali informazioni.

L’indagine sperimentale, all’inizio, prevedeva un solo momento e cioè la somministrazione al campione scelto della fiaba “Il muratore e la torre”, appositamente creata per rispondere sia alle caratteristiche del contenuto in questione, sia alle esigenze di sviluppo degli alunni. Dai risultati ottenuti da questo primo intervento (1ª fase) ne è scaturito un secondo, non previsto, che ha permesso non solo di tenere sotto controllo alcune variabili non considerate durante la 1ª fase, ma di disporre di alcune informazioni che possono fungere da ipotesi operative per successive indagini.

Capitolo 1

1.0 L’infinito nella scuola elementare

Il concetto di infinito ha rappresentato e tutt’oggi rappresenta uno dei concetti più difficili da apprendere e non solo per la sua “complessità interna”, ma soprattutto per tutto quel complesso di idee e rappresentazioni ad esso associate che, oltre a nasconderne il vero significato, lo imprigionano in una fitta rete di false convinzioni e misconcetti che ne pregiudicano la comprensione e, di conseguenza, il corretto apprendimento.

L’individuazione e la consapevolezza di tale problematica sono il risultato di una riflessione in seguito ad una esperienza personale (una lezione di critica dei principi), che non solo ha permesso di fare chiarezza su una questione abbastanza dibattuta, ma ha dato l’imput per un lavoro che si ponesse come scopo quello di affrontare “l’ostacolo” da una prospettiva diversa.

La scelta di portare avanti nella scuola elementare un lavoro sperimentale che ha per oggetto l’infinito matematico costituisce questo cambiamento di prospettiva.

Per capire meglio questo passaggio è necessario fare riferimento agli studi che in didattica della matematica sono stati intrapresi da Fischbein, Tirosh & Hess nel 1979 con l’obiettivo di indagare sulle difficoltà legate all’apprendimento del concetto di infinito. I risultati di tale ricerca hanno messo in evidenza che “vari misconcetti, fondati intuitivamente, legati alla nozione di infinito, sono relativamente stabili col passare degli anni, a cominciare dal periodo delle operazioni formali” (Fischbein E., Schnarrch D., 1998). Questi risultati assumono ancor più significato se confrontati con quelli della maggior parte delle ricerche, aventi lo stesso obiettivo, rivolte a studenti della scuola secondaria superiore che evidenziano come le difficoltà che quest'ultimi incontrano nella comprensione e nell'apprendimento dei concetti di infinito e infinitesimo e dei vari teoremi ad esso legati, derivino da una serie di misconcezioni che, consolidate e rinforzate nel corso dell'esperienza scolastica, diventano veri e propri modelli universali. Tali risultati non solo ci portano alla conclusione che le difficoltà legate alla nozione di infinito aumentano di intensità col passare degli anni fungendo da barriera per i successivi apprendimenti, ma impongono di riflettere sulla necessità di prevenire tali difficoltà già a partire dalla scuola di base attraverso una serie di attività e di esperienze capaci di "avvicinare gli alunni alla delicata quanto affascinante problematica concernente l'infinito, aiutandoli così a formarsi immagini mentali non distorte" (Arrigo G., D'Amore B., 2002).

Il presente lavoro, partendo dall'ipotesi che gli alunni di 9-10 anni posseggono già le prime concezioni spontanee sull'infinito, mira a scoprire quest'ultime attraverso il Postulato di Eudosso-Archimede con l'intento di vedere se tali concezioni possono rappresentare, già dalla scuola di base, un campanello d'allarme per l'individuazione delle prime rappresentazioni mentali che possono, in futuro, pregiudicare la corretta comprensione e acquisizione del concetto di infinito.

1.1 Perché il Postulato di Eudosso-Archimede?

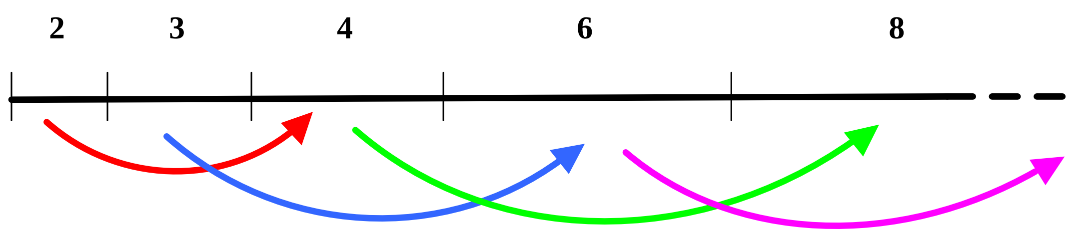
- Per la semplicità attraverso la quale vengono presentati i concetti di infinito e infinitesimo;
- È di facile comprensione;
- Propone un approccio costruttivo all'infinito permettendo il coinvolgimento attivo del soggetto che costruisce tramite il suo agire;
- Mette nelle condizioni l'alunno di riflettere su interessanti aspetti del "mondo dei numeri".

1.2 Rappresentazioni epistemologiche del Postulato di Eudosso-Archimede

Il Postulato Di Eudosso-Archimede, proprio perché parte dal principio di Eudosso, così si esprime (F. Spagnolo, 1995):

$\forall\ x, y\ ?N\ \ (m?N : mx>y)$

Letteralmente significa che, prese due grandezze appartenenti ai numeri naturali, esiste sempre un multiplo della prima grandezza tale che è maggiore della seconda grandezza. Questa espressione, quindi, equivale a dire che multipli di una grandezza possono, se moltiplicati, superarsi l'un l'altro. Questo procedimento che non è altro che la reiterazione dell'azione prendi due grandezze, trova il multiplo della prima che è maggiore della seconda, poi trova il multiplo della seconda grandezza che è maggiore dell'ultimo multiplo ricavato e così via; può essere espresso graficamente in questo modo:



Il grafico esprime in maniera molto semplice come, man mano che si procede e si va avanti con la ricerca del multiplo, le grandezze vadano sempre ad aumentare secondo un procedimento che può continuare all'infinito. Nel Postulato, infatti, è possibile cogliere la presenza dell'infinito potenziale e cioè di quell'ente o grandezza finita che è possibile crescere (in potenza) ma che rimane sempre finita. Tale significato di infinito, così come poi vedremo nell'analisi storico-epistemologica di tale concetto in relazione al Postulato, fu quello più accreditato nella storia delle scienze matematiche, concezione peraltro condivisa dai matematici greci (Euclide, Pitagora, Aristotele) e che perdurò fino a quando Cantor non ne riorganizzò sintatticamente il significato. Dobbiamo aspettare la sistemazione assiomatica di Zermelo-Frankel per scorgere l'esistenza dell'altro significato dell'infinito, quello in atto e cioè di quell'ente o grandezza costante che supera ogni ente e grandezza finita e senza il quale, però, è impossibile parlare di infinito potenziale.

Chiarita la differenza tra infinito potenziale e infinito attuale mi soffermerò brevemente sul ruolo che il Postulato di Eudosso-Archimede in relazione al concetto di infinito, assume nei fondamenti delle matematiche e più precisamente nella geometria elementare, nell'aritmetica e nell'analisi classica, consapevole che tale trattazione non esaurisce tutti i temi degli argomenti sopra citati.

Nella **geometria elementare** è possibile rintracciare il concetto di infinito nel secondo gruppo di assiomi dell'ordine di Hilbert dai quali è possibile dedurre la continuità della retta e quindi la possibilità che questa sia formata da infiniti punti nel senso dell'infinito attuale. Quest'ultimo, invece, è rintracciabile nel quinto gruppo di assiomi relativo alla continuità e precisamente nell'assioma archimedeo secondo cui "*dati due segmenti qualsiasi, AB e CD, esiste un numero* ***n*** *tale che il* *trasporto del segmento CD reiterato n volte da A sulla semiretta passante per B, porti al di là del punto B*”.

Per quanto riguarda l’**aritmetica** il concetto di infinito è riscontrabile nella sistemazione formale dei numeri naturali di Peano. Se prendiamo in riferimento i 5 assiomi aventi come concetti primitivi zero, numero e successivo, è il quinto assioma e cioè quello che esprime il principio di induzione che ci dà l’idea dell’infinito potenziale. Quest’ultimo può essere dedotto dall’idea di successivo ma alla condizione che venga espresso in questo modo:

∀ n?N : successivo di **n**

Il Postulato di Archimede gioca un ruolo molto importante nella sistemazione dell’**analisi** poiché questa necessita di un insieme numerico che stia in corrispondenza biunivoca con l’insieme dei punti della retta e il Postulato risponde proprio a questa esigenza permettendo di porre in corrispondenza biunivoca l’insieme dei numeri Reali con i punti di una retta. “La retta reale, quindi, rappresenta l’elemento portante dell’analisi non solo come fondamento ma anche come immagine mentale sulla quale i matematici costruiscono l’analisi”(F. Spagnolo, 1995).

1.3 Concezioni storico-epistemologiche del Postulato di Eudosso-Archimede

Il Postulato di Eudosso-Archimede può essere analizzato secondo diversi percorsi storico-epistemologici e in relazione all'obiettivo della ricerca si cercherà di seguire quello legato al concetto di infinito cercando di mettere in evidenza, anche se in maniera sintetica, come, fin dai primordi della scienza matematica, molti studiosi abbiano tentato di formalizzare la nozione di infinito matematico con lo scopo di introdurlo nel calcolo.

I primi a rendere concreti questi tentativi furono i pitagorici e lo stesso Pitagora (569-475 a. C.) che si dedicarono allo studio della commensurabilità scoprendo l'incommensurabilità di alcuni segmenti quali il lato e la diagonale del quadrato. Ben presto, però, i pitagorici si accorsero che tale scoperta contrastava con "l'immagine granulare del punto[1]" ragion per cui dovettero rigettare tale concezione e accettare quella secondo cui il punto non ha dimensioni. Inoltre, ammettere l'incommensurabilità di alcuni segmenti comportava la non accettazione del principio di Pitagora secondo il quale "il tutto è maggiore della parte"[2]. Queste contraddizioni bloccarono i matematici greci che, consapevoli delle difficoltà di intraprendere un discorso sull'infinito, furono molto cauti nell'utilizzo del termine stesso che fu espresso secondo quello che Aristotele (384-322 a. C.) definì "infinito potenziale". Lo stesso Euclide (300 a. C.) accettando tale definizione, dette prova dell'infinità dei numeri mostrando che "quando si è

[1] Secondo Pitagora il punto è un ente che ha una dimensione.

[2] Fu in seguito Galileo a costruire per primo una corrispondenza biunivoca tra gli interi positivi e i quadrati perfetti. Seguirono Bolzano (insiemi positivi e numeri pari) ed infine Dedekind (1831-1916) che definì l'infinito come negazione del principio di Pitagora e quindi attraverso la proprietà della equinumerosità.

enumerato un numero finito di primi interi, esiste sempre un numero primo intero diverso da quelli che fanno parte dell'insieme.

A rendere ancora più evidenti le difficoltà di formalizzare l'infinito in matematica, furono i "paradossi del continuo e del discreto[3]" espressi da Zenone di Elea (490-425 a. C.) che mise in evidenza come il progredire verso un limite mai raggiunto in atto, anche se espresso nella nozione stessa di infinito, risulti inapplicabile al mondo fisico. Lo stesso Aristotele definì l'infinito potenziale come quell'ente con cui dovevano avere a che fare i matematici che avevano bisogno di lavorare con grandezze manipolabili ed immaginabili e quindi grandi al limite; l'infinito attuale, invece, come quell'ente che non è né nel mondo fisico né nella mente dell'uomo e quindi inapplicabile al calcolo degli eventi fisici.

Tale constatazione divenne ancora più evidente nel momento in cui ci fu, da parte dei matematici greci, l'esigenza di misurare le grandezze geometriche con l'assunzione intuitiva della continuità della retta secondo cui quest'ultima è un qualcosa di compatto, privo di spazi (si attraversano infiniti punti nel passare da un punto all'altro). Tale concezione contrastò non solo con la necessità, avvertita dai matematici greci, di non definire la continuità[4] ma anche con la scoperta degli irrazionali che aveva messo in risalto la non validità di tale punto di vista. Occorreva, quindi, che la nozione di continuità fosse definita indipendentemente dalla concezione di infinito e che funzionasse sia per le grandezze commensurabili che per quelle incommensurabili. A tentare

---

[3] Ci si riferisce ai paradossi di **Achille e la tartaruga** e della **freccia**. Il primo riporta il celebre esempio di Achille che non riuscirà mai a raggiungere la tartaruga, che ha un leggero vantaggio, poiché dovrà fare infiniti passi. Il secondo riporta l'esempio della freccia che non riuscirà mai a colpire il bersaglio poiché dovrà percorrere infiniti tempuscoli.

[4] I matematici greci affermavano che la continuità fosse espressa compiutamente dall'infinito potenziale.

una tale definizione fu Eudosso di Cnido (408-353 a. C) che con il suo principio, comparso per al prima volta negli Elementi di Euclide, rese conto dell'incommensurabilità ipotizzando l'esistenza di un infinito potenziale: "*dati due segmenti* ***a>b*** *esiste sempre un multiplo di* ***a*** *che supera* ***b***".

Sulla scia di Eudosso, è Archimede che, con il suo Postulato che prende appunto il nome di Postulato di Eudosso-Archimede, dà un valido contributo alla comprensione dei concetti di infinito e infinitesimo. Egli, attraverso l'espressione secondo cui multipli di una grandezza possono se moltiplicati superarsi l'un l'altra, definisce il concetto di infinito potenziale.

Dopo Archimede si deve aspettare il XVII secolo per intravedere la nascita di nuove teorie infinitiste in matematica. Durante questo periodo, però, i tentativi di considerare una totalità infinita in atto di oggetti matematici si scontrarono, così come in passato, con la nozione di grandezza e concetto base ereditati dalla geometria greca e da Euclide tanto che l'infinito attuale divenne e restò un tabù fino alla metà del secolo XIX. È a partire da questo periodo e grazie ai contributi di Galileo, Leibniz e Newton che si animano le ricerche sull'infinito e che portano Dedekind a dare una definizione precisa di un insieme infinito[5]. Fu, però, Cantor a riscoprire l'infinito attuale e a risolverne i paradossi, che avevano bloccato Galilei, attraverso il concetto di equipotenza. Ne venne fuori, quindi, una definizione secondo cui "*un insieme infinito in atto è un insieme che è equipotente ad una sua parte propria*".

Dopo Cantor, la possibilità di concepire un infinito in atto rimase, tuttavia, un problema aperto e dibattuto tanto che ci fu chi, spinto

[5] Per Dedekind un insieme infinito è un insieme E tale che vi sia in esso una biezione di E su una delle due parti.

dall’esigenza di risolverne definitivamente la questione, operò l’eliminazione dell’infinito in matematica (Weierstrass). Ma l’infinito, per quanto sia difficile definirne gli aspetti, “rimane un concetto aperto indispensabile per il pensiero matematico” (Hilbert).

1.4 Le ricerche sull'infinito matematico nella scuola elementare

Le ricerche condotte nella scuola elementare e che hanno come oggetto l'infinito matematico prendono le mosse dalla consapevolezza delle difficoltà che gli alunni di scuola secondaria superiore incontrano nello studio e nella comprensione di tale concetto[6], ma anche dalla necessità di scoprire quando e come il concetto di infinito matematico compare per la prima volta nel campo cognitivo-emotivo degli studenti[7].

Tali ricerche, che appaiono meno numerose rispetto a quelle condotte nella scuola superiore, mettono in evidenza che già a partire dalla scuola elementare gli alunni, molto spontaneamente, giungono alla conoscenza di alcuni insiemi infiniti, il primo dei quali è la successione dei numeri naturali. Gli alunni, fin dai primi anni di scuola, si accorgono che la catena dei numeri naturali non ha fine e che basta aggiungere ogni volta uno, secondo la formula n+1, per continuare a contare all'infinito senza raggiungere mai la fine.

Mentre per gli alunni appare più facile e, quindi, precoce, pervenire a quest'ultima osservazione, più difficile, invece, sembra l'intuizione del concetto di infinitesimo, il cui termine risulta quasi sconosciuto e la cui nascita, intesa come presa di coscienza, probabilmente, è da collocare nei successivi gradi di scuola.

Inoltre, l'idea di infinito più accreditata e quella di infinito potenziale che viene concepito come un procedimento senza fine, mentre quasi mai gli alunni dimostrano di possedere un'idea di infinito attuale il

---

6 SBARAGLI S. (2001), "Infiniti e infinitesimi nella scuola di base", (a cura di) Bruno D'Amore, Atti del Convegno "Incontri con la matematica N.15", Comune di Castel S. Pietro Terme, 9-10-11Novembre 2001, Pitagora Editrice Bologna, pagg. 187-193.

7 NANNANCINI M. P. (2001), "L'infinito matematico nella scuola di base", (a cura di) Bruno D'Amore, Atti del Convegno "Incontri con la matematica N.15", Comune di Castel S. Pietro Terme, 9-10-11Novembre 2001, Pitagora Editrice Bologna, pagg.163-172.

cui processo di evoluzione segue un ritmo più lento e contraddittorio lungo il corso del curriculum scolastico.

Un aspetto molto importante che è emerso dalla ricerca che la Sbaragli ha rivolto agli studenti di scuola elementare e che sembra giustificare quanto detto sopra, è il complesso delle convinzioni e delle false credenze che emergono dalle dichiarazioni degli insegnanti che confermano di avere sempre avuto, fin dall'inizio della loro carriera, molti dubbi in relazione al concetto di infinito, di avere sempre pensato all'infinito esclusivamente come ad un aggettivo, il procedere senza una fine, e di sconoscere gli infinitesimi.

Capitolo 2

2.0 Presentazione del lavoro sperimentale

Obiettivo generale

- Scoprire le concezioni spontanee sull'infinito attraverso il Postulato di Eudosso-Archimede.

Obiettivo specifico

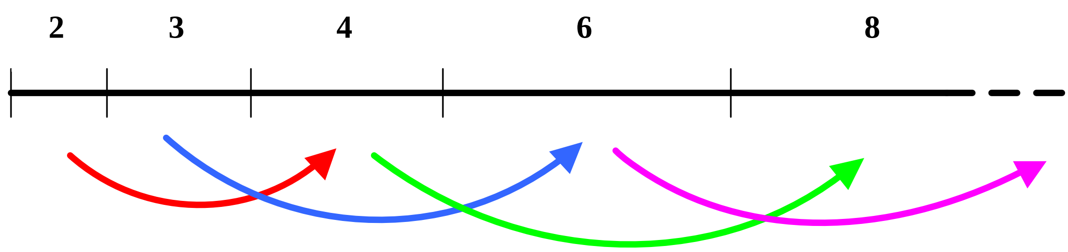
- Vedere come gli alunni reagiscono e rispondono alla situazione problematica proposta che è inusuale rispetto ai normali problemi scolastici.

Ipotesi generale

- Gli alunni di 9-10 anni posseggono le prime concezioni spontanee sull'infinito.

Ipotesi operativa

- Il postulato di Eudosso-Archimede: $\forall$ x, y ? N (m?N : mx>y) favorisce l'approccio costruttivo all'infinito.
    1. Saper ricavare i multipli;
    2. cogliere la relazione tra le grandezze mx e y e quindi saper trovare un multiplo di m che è maggiore di y;
    3. partendo dalle due grandezze x e y, riuscire a trovare ogni volta i multipli delle grandezze ottenute rispettando la relazione mx>y. Graficamente:



4. viene esplicitato, e quindi compreso, che man mano che si procede le grandezze diventano sempre più grandi.

Campione

L'indagine è stata rivolta a 97 alunni (9-10 anni) delle classi quinte del 1° Circolo Didattico "G. Garibaldi" di Marsala nei mesi maggio-giugno del 2002.

Disegno sperimentale

È stato utilizzato un disegno sperimentale a gruppo unico: è stato inizialmente attuato un primo intervento (1ª fase), in cui è stata proposta la fiaba "Il muratore e la torre", e poi un secondo non previsto (2ª fase), scaturito dai risultati del primo, in cui sono stati somministrati due test: "Il serpentone" e "Esercizio".

Nella 1ª fase le classi sono state suddivise per gruppi di 4-5 alunni (20 gruppi) secondo un campionamento casuale; nella 2ª fase, invece, l'intervento è stato individuale per dare la possibilità di quantificare i dati.

Analisi dei dati

Per l'analisi dei dati si è tenuto conto dei grafici delle frequenze e di quelli elaborati con il programma Chic[8] nonché delle discussioni di gruppo registrate durante la prima fase sperimentale.

[8] Il programma Chic permette di fare l'analisi implicativa secondo Gras. Grazie a questo strumento è possibile controllare e scegliere il livello di accettabilità dell'implicazione che è stabilita in accordo con le leggi probabilistiche della statistica inferenziale (GRAS P. 1997, "Metodologia di analisi d'indagine", Quaderni di ricerca in didattica, N.7, in http://math.unipa.it/%grim/memquad.htm

2.1 La 1ª fase sperimentale

2.1.0 Perché la fiaba in matematica?

"Il muratore e la torre" nasce dall'esigenza di spezzare i fili che legano la matematica alla sua tradizionale e vecchia immagine di scienza che si fa una volta per tutte e come campo sterile privo di stimoli e scoperte interessanti. Tale visione, peraltro radicata in molti contesti scolastici, a mio avviso, non solo snatura quella che è la vera essenza di tale disciplina, ma pregiudica la qualità del suo insegnamento-apprendimento il quale, secondo tale visione, può solo portare alla formazione di menti poco elastiche, povere di creatività e incapaci di pensare produttivamente.

È da tale constatazione che è nata l'idea di scrivere una fiaba in matematica che non solo si prestasse bene al contenuto in questione ma che permettesse ai soggetti un approccio euristico alla situazione problematica proposta. Ma il punto è: perché proprio la fiaba?

Cercherò di spiegarlo brevemente cercando di mettere in evidenza come le caratteristiche di questo straordinario strumento si confanno, più in generale, a quelle di una visione della matematica come libera espressione della mente umana e, più in particolare, a quelle del nostro contenuto e cioè dell'infinito matematico nella scuola elementare.

Qualsiasi intervento didattico volto all'acquisizione di specifici contenuti disciplinari, nel nostro caso matematici, e al raggiungimento di determinati obiettivi, richiede, in relazione alle esigenze dei soggetti ai quali tale intervento è rivolto, un "clima" particolare in cui gli stimoli proposti siano facilmente percepibili e comprensibili. Affinché ciò accada è necessario, a mio avviso, predisporre queste 4 condizioni:

1. l’alunno deve essere motivato a reagire-agire in relazione allo stimolo proposto;
2. lo strumento attraverso il quale tale stimolo (contenuto, attività, ecc.) viene proposto deve essere originale e suscitare curiosità;
3. lo stimolo deve essere inserito in un contesto che richiami il vissuto o l’esperienza quotidiana;
4. il passaggio dal sapere da insegnare al sapere insegnato deve avvenire in modo naturale secondo un processo euristico in cui la scoperta del nuovo sapere è conquista dell’agire concreto e consapevole dell’alunno.

Il grafico che segue mette in evidenza il rapporto esistente tra queste 4 condizioni:

Lo schema riportato sopra chiarisce in maniera molto semplice come la qualità del processo di apprendimento dipenda dalla motivazione che l'alunno ha ad agire in relazione a ciò che gli viene proposto e come quest'ultima sia diretta conseguenza della capacità da parte dell'insegnante di inserire il suo intervento in un contesto originale che richiami, allo stesso tempo, il vissuto dell'alunno.

Tale riflessione, se acquista un ruolo centrale per qualsiasi esperienza d'apprendimento in matematica, diventa condizione indispensabile e assolutamente necessaria nel momento in cui ci troviamo ad operare con particolari contenuti, come l'infinito, il cui livello di astrazione li rende difficili da comprendere e quindi lontani dall'interesse dei soggetti.

Ed è qui che entra in gioco la fiaba che si pone come "chiave per entrare nella realtà per strade nuove"[9] e come strumento originale che riesce a soddisfare sia la sete di fantasia che l'attaccamento alla realtà proprie dei soggetti di 9-10 anni. Essa, inoltre, permette all'alunno non solo di approcciarsi ad una problematica complessa come l'infinito con curiosità ma, cosa più importante, lo motiva ad apprendere in modo naturale e secondo un approccio creativo ed euristico. In questo senso, la fiaba "Il muratore e la torre", vuole essere:

- un mezzo privilegiato attraverso il quale gli alunni possano vivere, con un atteggiamento diverso, l'esperienza matematica;
- un mondo fantastico dove tutto si può osare ed immaginare;
- un modo nuovo di fare matematica.

[9] G. Rodari, Ringraziamento alla giuria del Premio Anderasen 1970, in C. Poesio (a cura di) G. Rodari, in «Schedario», n. 109, gennaio-febbraio 1971, in A. Nobile (1990), "Letteratura giovanile. L'infanzia e il suo libro nella civiltà tecnologica", La Scuola, Brescia.

2.1.1 La fiaba: “**Il muratore e la torre**”

In un tempo lontano, in un piccolo paese, viveva un muratore di mezza età molto conosciuto e ammirato per le magnifiche case che aveva costruito alle persone più importanti del posto. Un giorno, stanco e stufo di collezionare solo complimenti da parte di persone che presto si sarebbero dimenticati di lui, pensò di fare qualcosa per la quale il suo nome sarebbe rimasto nella storia.

Decise allora di costruire la torre più alta del mondo, quella che nessuno era mai riuscito a costruire.

La torre doveva essere così alta da non permettere all’uomo con la sua sola vista di ammirarla in tutta la sua altezza.

Preso dall’entusiasmo cominciò a lavorare, a lavorare. Lavorava così tanto da non avere più il tempo per mangiare e per dormire.

Passarono i giorni, i mesi e gli anni e finalmente, giunto quasi alla vecchiaia, il muratore riuscì a terminare il suo lavoro.

Aveva costruito la torre più alta del mondo e credetemi, era così alta che non si riusciva a capire dove terminasse! Sembrava bucasse il cielo.

Il muratore colmo di gioia organizzò una grande festa dove furono invitati tutti i suoi compaesani, compresi i personaggi più influenti.

Si congratularono con lui le imprese edilizie più importanti, gli ingegneri più esperti, il sindaco e perfino il Capo dello Stato che lo insignì con la promessa di erigere nella piazza principale del paese una statua a sua immagine ed offrendogli un targa d'oro che lui stesso avrebbe inciso con queste parole:

“Salvatore Ciuppolo
modesto muratore
che con tenacia e forza di volontà
costruì la torre più alta del mondo
ben ……………………………. metri”

Appena Ciuppolo lesse quelle parole rimase pietrificato. Aveva costruito la torre più alta del mondo e non sapeva quanto questa fosse alta.

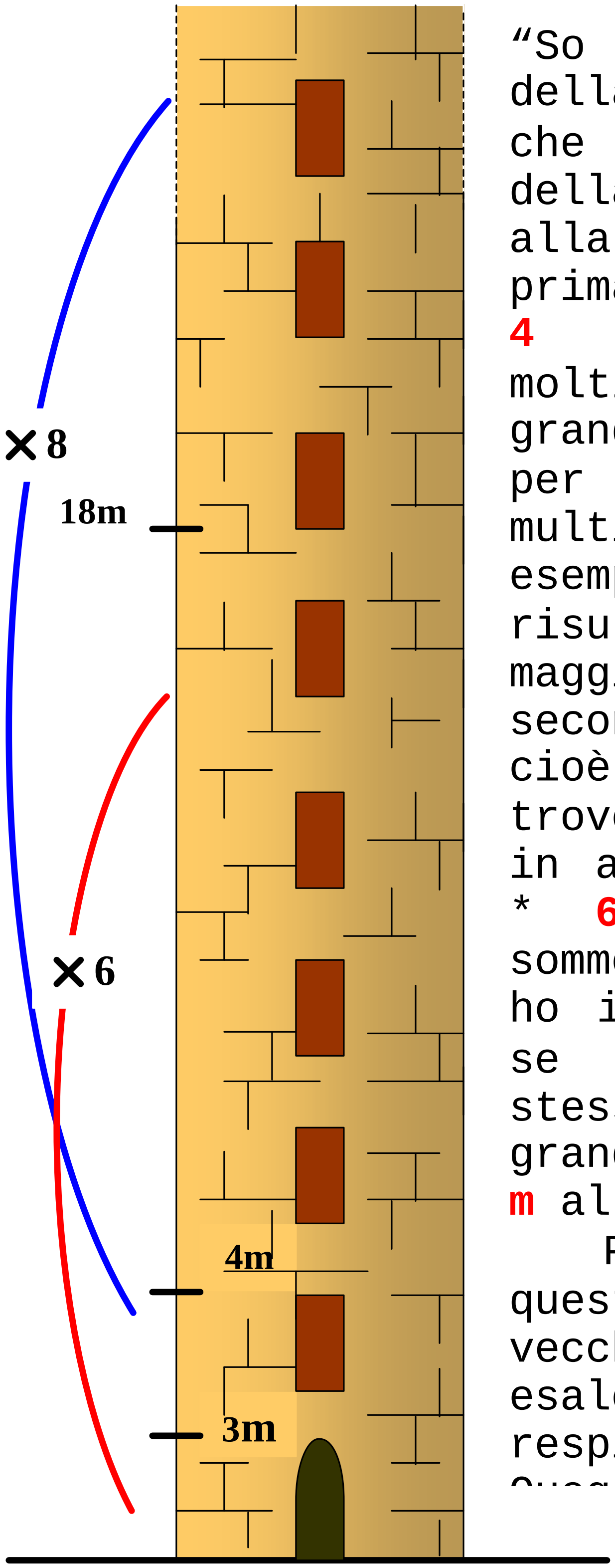
“Che sventura!”- si ripeté continuamente il vecchio muratore – “Ci sono voluti anni per costruire la torre e ce ne vorranno altrettanti per misurarla! Il mio destino è segnato! Morirò senza gloria!”.

Ciuppolo era disperato ma non poteva darsi per vinto. Pensò allora che doveva escogitare un piano che gli avrebbe permesso di misurare nel minor tempo possibile la torre, forse una formula… .

“Ma sì” – esclamò il vecchio muratore – “Chi meglio della mia amica *Matematica* può darmi la soluzione!”. Corse allora nel suo vecchio scantinato, rovistò fra tutti i suoi libri e finalmente li trovò. I suoi preziosissimi libri di matematica, quegli stessi libri che lo avevano accompagnato per tutta la sua gioventù, gli stessi libri che lo avevano tolto sempre dai guai dandogli ogni volta la soluzione!

Cominciò allora a sfogliarli uno ad uno prendendo appunti ogni qualvolta trovasse qualcosa di interessante. Anche questa volta ci volle del tempo.

Passarono giorni, mesi ed anni ma finalmente un giorno qualcosa venne fuori……..



"So che l'altezza della porta è **3 m** e che dalla fine della porta fino alla fine della prima finestra sono **4 m**. Se io moltiplico la prima grandezza e cioè **3** per un suo multiplo, 6 per esempio, allora il risultato sarà maggiore della seconda grandezza cioè di **4** e si troverà molto più in alto. Infatti **3** * **6** = **18** > **4**. Poi sommo **3** + **4** + **18** e ho i primi **25 m** e se io faccio lo stesso con le grandezze **4 m** e **18 m** allora…".

Pronunciata questa parola il vecchio muratore esalò il suo ultimo respiro e morì.

Fine

2.1.2 Analisi a priori: “Il muratore e la torre” (1^a fase)

- S**1** 4m*18m=72m+25m=**97m**
  a) 72m+25m+18m=**115m**
  b) 72m+25m+18m+4m+3m=**122m**

- S**2** 18m*4m=72m*25m=**1800m**

- S**3** 4m*8m=32m
  32m+18m+25m=75m
  3m+4m+8m+18m+25m+32m+75m=**192m**

- S**4** multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
  6m+8m+36m=50m
  50m*4m=200m
  50m*18m=900m
  200m+900m=**1100m**

- S**5** multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
  6m+8m+36m=50m
  50m+50m=100m
  multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m e nuovamente 8
  6m+8m+8m=22m*100m=**122m**

- S**6** Si può misurare soltanto la torre raffigurata nel foglio:
  - dalla prima finestra alla sesta finestra sono 18m;
  - dalla base della torre all’ottava finestra sono 36m (18m+8m=36m).

  La torre rimarrà senza una determinata altezza per l’eternità.

- S**7** 4m=1 piano, poiché le finestre sono 8 abbiamo 8 piani
  4m*8=32m

Non si può misurare tutta la torre perché non conosciamo i piani.

- S**8** 4m*8 (finestre)=32m
  32m+32m (l'altra parte della torre che non si vede)=64m
  64m*64m=**4096m**

- S**9** multiplo di 3m=18m; multiplo di 4m=32m
  18m*32m=608m
  a) 608m+18m=626m+3m (porta)=**629m**
  b) 626m+4m=**630m**

- S**10** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  32m+3m+4m=**39m**

- S**11** **E' impossibile conoscere l'altezza della torre perché non si conoscono i piani.**

- S**12** multiplo di 3m=9
  9m*3m=27m>4
  a) 3m+4m+27m=**34m**
  b) 27m*8 (finestre)=**216m**

- S**13** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  18m*32m=**666m**

- S**14** 3m*4m=12m*6 (multiplo di 3m)=72m
  72m+18m=90m
  90m*8 (multiplo di 4m)=**720m**
  a) 720m+25m=**745m**

- S**15** 3m+4m=7m*6 (multiplo di 3m)=42m
  42m*4m=168m
  42m*18m=754m
  168m+754m=**924m**

- S**16** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  4m+3m+32m=39m
  39m*18m=702m
  702m+25m=**727m**

- S**17** 3m+4m*7m (dalla base della torre fino alla prima finestra)
  7m*7 (le finestre rimaste)=**49m**

- S**18** 4m-3m=1m (quanto misura la finestra)
  1m*8 (finestre)=8m+3m (porta)=**11m**
  a) 11m+4m=44m
  11m*18m=198m
  44m+198m=**242m**

- S**19** 4m*18m=72m
  72m*8 (finestre)=576m
  a) 576m+3m (porta)=**579m**
  b) 25m*4m (prima grandezza seconda coppia)=100m
  579m+100m=**679m**

- S**20** multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
  4m*8=32m
  18m*36=648m
  648m+32m=**680m**

- S**21** 4m*8 (finestre)=32m (parte della torre con le finestre)
  18m (parte della torre con le finestre)*8 (finestre)=144m

144m+18m+32m=**194m**

a) 144m+25m+32m=**201m**

- S**22** 25m*4m=**100m**

a) 25m*18m=450m
100m+450m=**550m**

- S**23** 3m*6 (multiplo di 3)=18m
4m*8 (finestre o multiplo di 4)=32m
32m*18m=**576m**

- S**24** 4m*6 (multiplo di 3m)=24m
18m*6 (multiplo di 3m)=108m
24m+108m=**132m**

a) 132m+25m=**157m**

- S**25** multiplo di 4m=8
4m*8=32m>18
25m+32m=57m
multiplo di 18m=36
18m*36=648m>32
648m+57m=705m
multiplo di 32m=64
32m*64=2048m>648

………………………………………

Posso continuare queste operazioni fino a quanto voglio, quindi non saprò mai quanto è alta la torre che è infinita come queste operazioni.

- S**26** multiplo di 4m=8
4m*8=32m>18
25m+32m=**57m**

a) 32m+25m+18m+4m+3m=**82m**

- **S27** 4m*8 (finestre)=32m
  32m+3m (porta)=35m
  a) sommo tutto: 35m+4m+18m=**57m**
  b) moltilplico : 35m*4m=140m
  35m*18m=630m
  630m+140m=**770m**

- **S28** 4m-3m=1m (distanza dalla porta alla finestra e da una finestra
  all'altra)
  4m-1m=3m (misura della finestra)
  1m*8=8m (tot.spazi tra le finestre)

  DATI
  3m (porta)
  4m (distanza dalla fine della porta alla fine della prima finestra)
  1m (distanza da una finestra all'altra)
  3m*9 (tutte le finestre che ci entrano fino alla cornice del foglio)=27m+3m (porta)=30m
  30m+9m (tutti gli spazi tra le finestre)
  39m+2m (i cm rimasti dalla finestra disegnata fino alla cornice del foglio trasformati in m)=**41m**

  Rispondo

  La torre è alta 41m.

- **S29** 3m (porta) 4m (un piano)
  4m+8 (piani)=32m+3m (porta)=35
  poi rimangono 3,5cm (parte tratteggiata)
  3,5cm=m350
  350m+35m=**385m**
  a) 3,5cm=m350 NON PUO' ESSERE!
  3,5cm=3,5m
  3,5m+35m=**38,5m**
  b) multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36m
  38,5m+8m+36m=82,5m E' ANCORA POCO!
  aumentiamo i multipli

multiplo di 4m=40; multiplo di 18m=180
38,5m+40m+180m=**158,5m**

- S**30** Usano il righello per misurare la torre
24,4cm (misura della torre fino alla fine delle linee tratteggiate)
Ma la torre è in metri! Semplice, basta fare l'equivalenza!
24,4cm=m2440
La torre più alta del mondo è alta **2440m**!

- S**31** multiplo di 3=6m; multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
6m*8m=48m
48m*36m=**1728m**

a) multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
6m+8m+36m=**50m**

- S**32** 25m+4m+18m=47m
multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
47m+8m+36m=**91m**

- S**33** 3m+4m=7m
7m*6m (multiplo di 3)=42m
72m+18m=90m
90m*8m=**720m**

a) 7m+72m+90m+720m=**889m**

2.1.3 Analisi a priori 2: “Il muratore e la torre” (1ª fase)

Questa seconda analisi a-priori è nata da una prima lettura dei dati ottenuti dalla 1ª fase sperimentale ed è stata dettata dalla necessità di capire, ma soprattutto di far emergere, i processi attraverso i quali gli alunni hanno risolto la situazione problematica, nonché le motivazioni che hanno spinto quest’ultimi a procedere in un determinato modo in relazione allo stimolo proposto. A dare ancora più significato a questo lavoro è stata l’analisi del testo, svolta di pari passo, in funzione della quale è stato possibile interpretare i risultati di questo primo intervento in modo non equivoco, fungendo da feedback per un successivo intervento sperimentale (2ª fase).

Risulta a questo punto chiarire che nell’analisi a-priori troviamo le strategie ipotizzate mentre nell’analisi a-priori 2 quelle ipotizzate più quelle non previste[10]. I grafici relativi alle frequenze e ai dati Chic hanno fatto riferimento all’analisi a-priori 2.

- **S1** 4m*18m=72m+25m=**97m**
  a) 97m+18m=**115m**
  b) 115m+3m+4m=**122m**

4m e 18m vengono considerati i dati più importanti, quelli che porteranno alla soluzione . L’alunno però non capisce, perché non gli è chiaro, come utilizzarli (infatti vengono moltiplicati fra di loro), e di conseguenza gli risulta difficile cogliere la relazione tra 3m – 4m e 4m – 18m e cioè che “ciò che viene fatto con la prima coppia di grandezze deve essere ripetuto con la seconda, con la terza e così via. Inoltre risulta difficile capire, poiché non è esplicito nel testo, che la grandezza 4m è la

[10] Le strategie non previste sono contrassegnate dalla sottolineatura.

stessa nelle due coppie di grandezze che appaiono addirittura di natura diversa: le grandezze della prima coppia, poiché sono facilmente riscontrabili nella figura, fungono da "**dati concreti** [11]", le grandezze della seconda coppia, invece, da "**dati astratti**". Le operazioni, quindi, presenti nel testo appaiono senza senso, soprattutto la ricerca del multiplo; quest'ultimo, infatti, non viene preso in considerazione tanto che rimane come "**esempio**". L'alunno conclude sommando ciò che ha ottenuto dalla moltiplicazione con ciò che il problema gli dà (la somma è fatta anche nel testo!).

- **S2** 18m*4m=72m*25m=**1800m**

Questa strategia differisce da **S1** soltanto per l'ultima operazione. Infatti, moltiplicati 4m e 18m, il prodotto ottenuto lo si moltiplica per 25m che è l'ultimo dato ottenuto dal testo. Anche qui 4m e 18m vengono considerati dati astratti, ne è la prova l'operazione che li lega. L'alunno, infatti, non riscontrando una logica nei calcoli che il testo propone, non si cura di riflettere sul senso di quelli che egli stesso fa.

Per l'alunno appare assurdo che una grandezza che è riscontrabile come misura reale in una figura (anche se è consapevole del rapporto metro della torre – metro nella carta) può, moltiplicata per un suo multiplo, far ottenere un pezzo d'altezza. Gli alunni non solo non trovano riscontro con ciò che finora hanno imparato ma si sentono quasi autorizzati ad adottare strategie scorrette cioè sostenute da una falsa logica.

- **S3** multiplo di 4m=8

[11] Vengono messi in grassetto e tra virgolette le parole e le frasi che ipoteticamente possono essere frutto del ragionamento degli alunni nel momento in cui procedono nell'attuazione delle strategie risolutive.

4m*8m=32m
32m+18m+25m=75m
3m+4m+8m+18m+25m+32m+75m=**192m**

Viene ricavato il multiplo di 4m, si esegue la moltiplicazione ma non si procede come nel testo e cioè mettendo in evidenza la relazione m*x>y. Ottenuto il prodotto l'alunno non fa altro che sommare tutti i dati disponibili (compreso il multiplo ricavato) non riuscendo a comprendere che 18m, per esempio, è già compreso nel 25.

"**I dati devono essere tutti utilizzati, se ci sono vuol dire che servono, se no che ci starebbero a fare?**"

- **S4** multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
  6m+8m+36m=50m
  50m*4m=200m
  50m*18m=900m
  200m+900m=**1100m**

Salta all'occhio la parola "multiplo". Vengono, infatti, ricavati i multipli delle tre grandezze ma si lascia perdere "**l'esempio**". Si sommano i multipli e il risultato viene moltiplicato rispettivamente per 4m e 18m, del resto lo dice anche il testo: "e se io faccio lo stesso con le grandezze 4m e 18m allora…". Alla fine si somma tutto.

- **S5** multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
  6m+8m+36m=50m
  multiplo di 18m=36
  6m+8m+**36m**=50m
  50m+50m=100m

multiplo di 3m=6m; multiplo di 4m=8m e di nuovamente multiplo

di 4m=8
6m+8m+**8m**=22m*100m=**122m**

Nei primi due passaggi questa strategia è uguale alla precedente. Ricavata la somma dei multipli questa viene raddoppiata poiché il problema dice chiaramente di ripetere ciò che si fa con le grandezze 4m e 18m. Quindi la prima somma vale come "**operazione iniziale"** che nel testo è rappresentata da 3*6=18>4 mentre la seconda è quella "**obbligatoria**" dove è presente il multiplo di 18m, una delle grandezze con la quale si deve ripetere ciò che si fa, così come la terza in cui è presente il multiplo di 4m. Si conclude moltiplicando il risultato della seconda somma con il risultato della terza.

- **S6** Si può misurare soltanto la torre raffigurata nel foglio:
    1. dalla prima finestra alla sesta finestra sono 18m;
    2. dalla base della torre all'ottava finestra sono 36m (18m+8m=36m).

La torre rimarrà senza una determinata altezza per l'eternità.

Si fa riferimento solamente a ciò che si vede quindi si utilizzano i dati concreti eseguendo solo i calcoli possibili con questi ultimi e si lascia perdere "l'esempio" riportato nel testo poiché questo è inutile per riuscire a capire quanto è alta la torre.

- **S7** 4m=1 piano, poiché le finestre sono 8, abbiamo 8 piani
  4m*8=32m

Non si può misurare tutta la torre perché non conosciamo i piani.

Come nella strategia precedente ciò che viene preso in considerazione è la figura della torre, "**l'esempio**" non è importante ai fini della risoluzione. Misuro ciò che vedo e ciò che è possibile misurare.

Anche la linea tratteggiata non mi dice niente e quindi meglio lasciarla da parte. In conclusione tutta la torre non si può misurare perché non si conoscono tutti i piani.

- **S8** 4m*8 (finestre)=32m
  32m+32m (l'altra parte della torre che non si vede)=64m
  64m*64m=**4096m**

Si considera la torre raffigurata nel foglio. Meglio occuparsi di ciò di cui si è sicuri! Si utilizzano quindi i "**dati concreti**" e cioè quelli che è possibile vedere nella figura lasciando perdere "**l'esempio**" riportato nel testo che appare slegato dal contesto del problema. Eseguita la prima moltiplicazione, il prodotto ottenuto viene moltiplicato per **2** come se la parte della torre che c'è oltre e che non si vede sia la metà di ciò che già si è misurato. Ma poiché 64m è troppo poco per la torre più alta del mondo, quest'ultimo risultato si moltiplica per se stesso.

- **S9** multiplo di 3m=18m; multiplo di 4m=36m
  18m*36m=648m
  648m+18m=**666m**

  a) 666m+3m=**629m**
  b) 626m+4m=**630m**

Viene presa in considerazione la prima coppia di grandezze, 3m e 4m, e vengono ricavati rispettivamente i multipli (sono diversi da quelli proposti nel testo) che vengono moltiplicati fra loro. Anche qui non viene colta la relazione tra le grandezze. Si conclude sommando al risultato ottenuto prima 18m, che è la parte di altezza che va dalla fine della prima finestra fino alla fine della sesta, ed infine 3m (**S9a**) che è la misura della porta o 4m (**S9b**) che la misura di un piano.

- **S10** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  32m+3m+4m=**39m**

Come nelle precedenti strategie, anche in **S10** non risulta comprensibile l'insieme delle operazioni proposte nel testo, viene solo colta la necessità di ricavare il multiplo ma solo della prima grandezza della seconda coppia di numeri; viene eseguita la moltiplicazione e al prodotto ottenuto viene sommata la prima coppia di numeri che non sono altro che i dati riscontrabili nella figura.

- **S11** **E' impossibile conoscere l'altezza della torre perché non si conoscono i piani.**

- **S12** multiplo di 3m=9
  9m*3m=27m>4
  a) 3m+4m+27m=**34m**
  b) 27m*8 (finestre)=**216m**

Si prende in considerazione la prima coppia di numeri e per la prima grandezza viene ricavato il multiplo, diverso da quello proposto nel testo, lo si moltiplica per la prima grandezza, si mette in evidenza il rapporto tra le grandezze come nel testo (3*9=27>4) e il prodotto ottenuto lo si moltiplica per le finestre (quelle che si vedono). Poiché il testo non è chiaro ed è privo di riferimenti per quanto riguarda la ripetizione delle operazioni l'alunno si ferma qui. L'ultima operazione ci fa capire ancor meglio l'esigenza di eseguire dei calcoli legati al concreto e quindi di tralasciare quelli che appaiono troppo astratti: "**che c'entra il multiplo con la misura della torre?**".

La motivazione della scelta di un multiplo diverso rispetto a quello del testo quasi mai scaturisce dalla consapevolezza che esistono diversi o meglio infiniti multipli di un numero e per i quali valga il Postulato, ma semplicemente dal fatto che il multiplo che il testo propone è solo un esempio, quindi "**non è detto che sia quello giusto!**"

- **S13** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  8m*32m=**666m**

Si prende in considerazione la seconda coppia di numeri e per la prima grandezza si ricava il multiplo che è identico a quello proposto nel testo, più specificatamente nella figura. Viene quindi seguito, se così si può dire, il consiglio che dà il testo (che è la strategia adottata dal muratore, non sempre credibile), viene eseguita la moltiplicazione ma è ignorata la relazione tra il prodotto ottenuto e la seconda grandezza della coppia di numeri presa in considerazione. Si conclude con una moltiplicazione e con la certezza di aver fatto tutto ciò che il testo diceva di fare. Si guarda al dato più come numero che serve, anche se non ha riscontro con la realtà della situazione-problema, che come fatto informativo che non è detto debba essere in ogni caso utilizzato.

- **S14** 3m*4m=12m*6 (multiplo di 3m)=72m
  72m+18m=90m
  90m*8 (multiplo di 4m)=**720m**
  a) 720m+25m=**745m**

Si lascia perdere "**l'esempio**" riportato nel testo e si rifà tutto da capo tralasciando, in questo senso, la relazione esistente tra le grandezze a disposizione. Si moltiplicano le grandezze della prima coppia; l'alunno non riflette sul fatto che non ha senso moltiplicare 3m, la misura della porta, per 4m, la distanza dalla fine della porta alla fine della prima finestra. Poi spunta fuori la parola multiplo probabilmente perché leggendo e rileggendo il testo l'alunno non può non tenerlo in considerazione e poi "**se c'è vuol dire che a qualcosa servirà!**". Quindi il primo prodotto ottenuto prima si moltiplica per 6 (multiplo ricavato dal testo come esempio) a cui viene sommato 18m (un pezzo di torre che va dalla fine della prima finestra alla fine della sesta) e poi si moltiplica per 8 (il multiplo di 4m esplicitato non nel testo ma nella figura della torre). Al risultato possiamo sommare anche 25m (**S14a**) che è il pezzo di torre ricavato nel testo. Anche qui, come in **S3**, non viene compreso che 18m è compreso nei 25m.

- **S15** 3m+4m=7m*6 (multiplo di 3m)=42m
  42m*4m=168m
  42m*18m=754m
  168m+754m=**924m**

Anche qui, come in **S14**, si prende in considerazione la prima coppia di numeri senza seguire il procedimento portato avanti nel testo; mentre però in **S14** 3m e 4m (le grandezze della prima coppia) vengono moltiplicate, in questa strategia vengono sommate. Poi, come in **S14**, il risultato viene moltiplicato per 6 (il multiplo di 3 ricavato dal testo) e il prodotto ottenuto viene rispettivamente moltiplicato per 4m e 18m, le grandezze con cui si deve ripetere tutto quello che si fa e le stesse che porteranno alla soluzione. Si conclude sommando i prodotti ottenuti poiché la somma, come nel testo (3m+4m+18m=25) mi permette di scoprire quanto è alta la torre.

- **S16** 4m*8 (multiplo di 4m)=32m
  4m+3m+32m=39m
  39m*18m=702m
  702m+25m=**727m**

Si comincia con la seconda coppia di numeri, quindi con ciò che consiglia il testo; si ricava il multiplo di 4m, lo si moltiplica per quest'ultima grandezza ma si ignora di mettere in evidenza la relazione tra il prodotto ottenuto e la seconda grandezza della coppia di numeri presa in considerazione (e cioè 4*8=32>18). Al prodotto ottenuto vengono sommate 3m e 4m che vengono considerate come dati isolati, senza fare caso al fatto che queste sono già contenute nei 25m della torre peraltro già calcolati nel testo. Infine si conclude moltiplicando il risultato ottenuto con 18m, l'altra grandezza della seconda coppia. La logica è la stessa della maggior parte delle strategie: utilizzare tutto ciò che dà il testo anche se alcuni dati sono compresi in altri.

- **S17** 3m+4m=7m (dalla base della torre fino alla prima finestra)
  7m*7 (le finestre rimaste)=**49m**

Si prendono in considerazione i dati concreti e cioè quelli facilmente riscontrabili nella figura; vengono sommati fra di loro ottenendo la misura dell'altezza che va dalla base alla fine della prima finestra e il risultato ottenuto viene moltiplicato per 7 e cioè per le finestre rimaste e quindi per quelle che si vedono! Questa strategia soddisfa un'esigenza di concretezza e quindi viene misurato tutto ciò che si vede.

S18 4m-3m=1m (quanto misura la finestra)
1m*8 (finestre)=8m+3m (porta)=**11m**

a) 11m+4m=44m
11m*18m=198m
44m+198m=**242m**

Questa strategia (**S18**), come quella precedente, utilizza esclusivamente i dati riscontrabili nella figura e più specificatamente quelli che non sono il risultato di nessuna operazione infatti 18m, anche se esprime una misura che è riscontrabile nella figura poiché è il prodotto di 3 per il suo multiplo (operazione che è priva di logica per l'alunno) non viene presa in considerazione. Si tralasciano, quindi, i dati astratti nonché le operazioni che danno avvio ai calcoli per ricavare l'altezza della torre. Viene svolta per prima la sottrazione con l'intento di ricavare la misura della finestra che, mentre in **S17** viene confusa con quella che esprime l'altezza della torre che va dalla base fino alla fine della prima finestra, qui, invece, la si confonde con la misura che esprime la distanza tra la fine della porta e l'inizio della prima finestra. La misura della finestra viene, quindi, moltiplicata per le 8 finestre visibili nella figura della torre.

Mentre in **S18** ci si ferma a ciò che è possibile misurare e quindi all'altezza della torre dove sono comprese le finestre visibili, in **S18a** c'è il tentativo di spingersi un po' oltre e cioè di misurare ciò che non c'è. Quindi, i dati che si possono riscontrare nella figura servono per trovare l'altezza della torre che si vede, mentre 4m e 18m, che sono i dati astratti, ma anche quelli che il testo mi consiglia per andare avanti e quindi per misurare ciò che non c'è, servono per trovare tutta l'altezza della torre.

- **S19** 4m*18m=72m
  72m*8 (finestre)=576m
  a) 576m+3m (porta)=**579m**
  b) 25m*4m (prima grandezza seconda coppia)=100m
  579m+100m=**679m**

Vengono presi in considerazione le grandezze della seconda coppia di numeri poiché sono quelle che mi servono per scoprire l'altezza di tutta la torre. Non viene però capita, poiché il testo non risulta chiaro in questo senso, la relazione tra le due grandezze che, infatti, vengono moltiplicate tra di loro senza ricavare il multiplo (come viene suggerito nel testo). Il prodotto ottenuto viene moltiplicato per le 8 finestre ritornando, quindi, al dato concreto. Il resto dei calcoli è un continuo ping-pong poiché ora si utilizzano i "**dati concreti**" (in **S19a** viene sommata la misura della porta) ora i "**dati astratti**" (in **S19b** si moltiplica 25m, il dato concreto, per 4m, la grandezza della seconda coppia).

- **S20** multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
  4m*8=32m
  18m*36=648m
  648m+32m=**680m**

Si prende in considerazione la seconda coppia di grandezze e si fanno rispettivamente i multipli tralasciando la relazione tra il prodotto della prima grandezza con il suo multiplo e la seconda grandezza (m*x>y). Si moltiplica ogni grandezza per il suo multiplo e si sommano i prodotti ottenuti. Qui si lavora con i "**dati astratti**" e non con quelli concreti anche se, come sappiamo, non c'è nessuna differenza: è il testo che li fa interpretare in questo modo.

Nel tentativo di rendere comprensibile il Postulato, in modo che gli alunni non avessero difficoltà nella comprensione del testo-problema, si sono create molte ambiguità soprattutto in relazione ai dati che (così come le operazioni che li legano) ora appaiono concreti, e quindi facilmente riscontrabili nella figura, ora astratti, slegati dal contesto del problema.

- **S21** 4m*8 (finestre)=32m (parte della torre con le finestre)
  18m (parte della torre con le finestre)*8 (finestre)=144m
  144m+18m+32m=**194m**
  a) 144m+25m+32m=**201m**

Vengono prese in considerazione le grandezze della seconda coppia di numeri. Questa volta, però, 4m e 18m non sono dati astratti ma concreti e quindi riconosciuti come misure riscontrabili nel disegno della torre. Entrambe le grandezze vengono moltiplicate per le 8 finestre che si vedono, del resto è un dato sicuro forse quello che dà più garanzia di tutti, come la moltiplicazione, l'operazione più affidabile. I risultati ottenuti si sommano con 18m che è l'altezza della torre compresa tra seconda e la sesta finestra, o 25m (**S21a**) che è l'altezza della torre fino a quando ci sono le finestre.

- **S22** 25m*4m=**100m**
  a) 25m*18m=450m
  100m+450m=**550m**

Viene utilizzato l'ultimo dato che il testo dà e cioè 25m (l'altezza della torre fino a quando ci sono le finestre) che viene moltiplicato per 4m, che non è soltanto un dato concreto poiché esprime la misura di un piano della torre, ma è anche una delle grandezze che il testo consiglia e con il quale bisogna ripetere ciò che si fa. In **S22a** 25m viene moltiplicato anche per 18m, l'altra grandezza della seconda coppia, e per concludere vengono sommati i prodotti ottenuti.

- **S23** 3m*6 (multiplo di 3)=18m
  4m*8 (finestre o multiplo di 4)=32m
  32m*18m=**576m**

Questa strategia assomiglia a tutte quelle in cui le operazioni vengono eseguite con una falsa logica. All'inizio si parte dall'esempio, come per accettare quello che il testo consiglia per poi eseguire una moltiplicazione che rispecchia l'esigenza di operare con dati concreti e per concludere con un'altra che evidenzia la non comprensione dei dati.

- **S24** 4m*6 (multiplo di 3m)=24m
  18m*6 (multiplo di 3m)=108m
  24m+108m=**132m**
  a) 132m+25m=**157m**

Si prende in considerazione la prima operazione eseguita nel testo e si applica alle grandezze 4m e 18m senza far caso che il 6 non è multiplo né di 4 né di 18. I prodotti ottenuti vengono sommati e al risultato ottenuto si può aggiungere 25m (**S24a**) che è il pezzo d'altezza ricavato dal testo.

- **S25** multiplo di 4m=8

4m*8=32m>18
25m+32m=57m
multiplo di 18m=36
18m*36=648m>32
648m+57m=705m
multiplo di 32m=64
32m*64=2048m>648
……………………………………

Posso continuare queste operazioni fino a quanto voglio quindi non saprò mai quanto è alta la torre che è infinita come queste operazioni.

Vengono prese in considerazione le grandezze della seconda coppia di numeri. Questa volta, però, l'alunno capisce come utilizzarli e coglie la connessione tra 3m – 4m e 4m – 18m e cioè ciò che viene fatto con la prima coppia di numeri deve essere ripetuto con la seconda. Quindi trova il multiplo di 4m, lo moltiplica per quest'ultima grandezza, mette in evidenza la relazione tra il prodotto ottenuto e 18m (la seconda grandezza della seconda coppia di numeri – 4m*8=32>18) e somma tale prodotto con ciò che già ha e cioè 25m (il pezzo d'altezza ricavato dal testo) ottenendo 57m. Arrivati a questo punto risulta difficile e addirittura impensabile affermare che l'alunno, aiutato dal testo, possa capire che il procedimento portato avanti con le grandezze 3m – 4m, 4m –18m deve essere ripetuto con 18m – 32m, 32m – 648m e così via poiché il testo è privo sia di dati che di indicazioni capaci di motivare e innescare tale riflessione.

Il fatto che gli alunni non si siano approcciati, attraverso il Postulato di Eudosso-Archimede, al concetto di infinito non dipende dalla difficoltà di quest'ultimo ma dall'impostazione che del Postulato è stata data nel testo del problema.

- **S26** multiplo di 4m=8
  4m*8=32m>18
  25m+32m=**57m**
  a) 32m+25m+18m+4m+3m=**82m**

Questa strategia non solo giustifica il grado di sviluppo intellettivo degli alunni (ci riferiamo a quello che Piaget chiama pensiero operatorio concreto) ma è la risposta più ovvia, e direi quasi scontata che l'alunno può dare in relazione ad un testo in cui non risulta esplicito il procedimento da seguire. La somma di tutto ciò che si è ricavato espressa in **S33a**, invece, non è altro che il risultato della riflessione fatta sull'ultima grandezza ottenuta e cioè 57m: '**la torre più alta del mondo può mai essere 57m? E' troppo poco!**"

- **S27** 4m*8 (finestre)=32m
  32m+3m (porta)=35m
  a) sommo tutto: 35m+4m+18m=**57m**
  b) moltiplico : 35m*4m=140m
  35m*18m=630m
  630m+140m=**770m**

Si lascia perdere l'esempio riportato nel testo e si utilizzano i dati concreti. Quindi si moltiplica 4m, che rappresenta la misura di un piano della torre, per 8, le finestre che si vedono, e al prodotto ottenuto vengono sommati i 3m della porta. A questo punto sono due le possibilità di interpretare "*e se io faccio lo stesso con le grandezze 4m e 18m allora*":

- sommo tutto ciò che ho ottenuto poiché la somma è presente anche nel testo;

- moltiplico ciò che ho ottenuto prima per 4m e poi per 18m poiché nel testo c'è la moltiplicazione.

- **S28** Si parte da 3m+4m+18m=25. siccome il problema dice che le cose che si fanno si devono fare con 4m e 18m allora:

  3m+4m+18m
  3m+4m+4m=11m
  3m+4m+18m=25m
  25m+25m+11m=61
  multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
  36m+8m=44m
  61m+44m=**105m**

3m+4m+18=25m è l'operazione da cui si parte ma soprattutto l'ultima che esegue il testo e poiché quest'ultimo dice che le operazioni che si fanno si devono ripetere con 4m e 18m, nella somma la grandezza 18m viene sostituita prima con 4m e poi con 18m dove quest'ultima grandezza è diversa da quella presente nella somma iniziale poiché quella che viene sostituita è un dato concreto, mentre la seconda è un dato astratto con cui si devono ripetere le operazioni che si fanno precedentemente. Poi viene sommato tutto ed infine, poiché nel testo salta all'occhio la parola multiplo, vengono rispettivamente ricavati e sommati a ciò che si è ottenuto, i multipli di 4m e 18m.

- **S29** Si parte da 3m+4m+18m=25m

  multiplo di 4m=8; multiplo di 18=36
  3m+4m+8m=14m
  3m+4m+36m=43m
  25m+14m+43m=**92m**

Questa strategia adotta la stessa logica di quella precedente con la differenza che nella somma presa in considerazione la grandezza 18m viene sostituita prima con il multiplo di 4m e poi con il multiplo di 18m. In questo caso si è capito che 18m è un multiplo di 3m e poiché il testo dice di ripetere ciò che si fa con le grandezze 4m e 18m vengono ricavati e sommati i loro multipli.

- **S30** 4m-3m=1m (distanza dalla porta alla finestra e da una finestra all'altra)
  4m-1m=3m (misura della finestra)
  1m*8=8m (tot.spazi tra le finestre)

DATI

3m (porta)
4m (distanza dalla fine della porta alla fine della prima finestra)
1m (distanza da una finestra all'altra)
3m*9 (tutte le finestre che ci entrano fino alla cornice del foglio)=27m+3m (porta)=30m
30m+9m (tutti gli spazi tra le finestre)
39m+2m (i cm rimasti dalla finestra disegnata fino alla cornice del foglio trasformati in m)=**41m**

Rispondo

La torre è alta 41m.

Si prende in considerazione la figura e si lavora su di essa cercando di ricavare più dati possibili e quindi di calcolare e misurare tutto ciò che è possibile vedere. Si imposta il lavoro come un vero e proprio problema standard.

Questa strategia è uguale nella prima parte a **S7** ma, mentre in quest'ultima c'è la consapevolezza che in realtà il risultato che si è ottenuto non esprime la vera altezza della torre ma solo quella di cui si ha certezza, ovvero conoscenza, qui viene calcolato anche il pezzo di torre delimitato dalle linee tratteggiate. L'alunno, infatti, continua la torre fino alla cornice perché pensa: "**C'è ancora spazio perché ci sono**

i trattini che stanno a significare che la torre ancora continua e quindi posso allungarla un altro po' e ci entra un'altra finestra, quindi tutte le finestre non sono 8 ma 9 più un pezzo di muro".

- **S31** 3m (porta) 4m (un piano)
  4m*8 (piani)=32m+3m (porta)=35
  poi rimangono 3,5cm (parte tratteggiata)
  3,5cm=m350
  350m+35m=**385m**

  a) 3,5cm=m350 NON PUO' ESSERE!
  3,5cm=3,5m
  3,5m+35m=**38,5m**

  b) multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36m
  38,5m+8m+36m=82,5m E' ANCORA POCO!
  aumentiamo i multipli
  multiplo di 4m=40; multiplo di 18m=180
  38,5m+40m+180m=**158,5m**

Questa strategia è molto simile a **S30** almeno negli intenti e cioè misurare tutto ciò che si vede. Lo spazio che rimane e cioè quello che va dalla fine dell'ottava finestra alla fine delle linee tratteggiate viene misurato con il righello e poiché la misura ottenuta è in cm, mentre l'altezza della torre è in metri, si fa l'equivalenza senza riflettere che la nuova misura ottenuta in metri non è proporzionale a quella che in realtà esprime in rapporto all'altezza della torre raffigurata nel foglio.

In **S31a** l'alunno, invece, svolta l'equivalenza, si accorge che la misura ottenuta non è in proporzione con quelle finora ricavate quindi ai cm sostituisce direttamente i metri.

In **S31b** vengono sommati al risultato ottenuto i multipli di 4m e 18m facendo ricorso, quindi, al dato astratto, ma poiché il risultato è ancora troppo poco per la torre più alta del mondo, vengono ricavati multipli più grandi.

- **S32** Usiamo il righello per misurare la torre
  24,4cm (misura della torre fino alla fine delle linee tratteggiate)
  Ma la torre è in metri! Semplice, basta fare l'equivalenza!
  24,4cm=m2440
  La torre più alta del mondo è alta **2440m**!

In questa strategia, a differenza di quella precedente, non si esegue nessun calcolo; ciò che interessa è misurare ciò che si può e che si vede ma poiché il risultato ottenuto e cioè la misura della torre disegnata nel foglio è troppo piccola per la torre più alta del mondo, viene eseguita l'equivalenza.

- **S33** multiplo di 3=6m; multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
  6m*8m=48m
  48m*36m=**1728m**

a) multiplo di 3m=6m;multiplo di 4m=8m; multiplo di 18m=36m
6m+8m+36m=**50m**

Questa strategia, così come **S33a**, prende in considerazione le tre grandezze dalle quali vengono ricavati i multipli. Mentre il **S33** i multipli vengono moltiplicati fra loro, in **S33a** vengono sommati. Si lasciano perdere, quindi, le operazioni eseguite dal testo e si coglie soltanto la parola "multiplo".

- **S34** 25m+4m+18m=47m
  multiplo di 4m=8; multiplo di 18m=36
  47m+8m+36m=**91m**

In questa strategia si parte con ciò che si ha e quindi sommando quello che il testo ha già ricavato. Ma poiché quest'ultimo suggerisce di ripetere ciò che si fa con 4m e 18m, di questi vengono ricavati i multipli e sommati con ciò che precedentemente si è ottenuto.

- **S35** Si deve misurare la torre ma non abbiamo il righello. Allora costruiamone uno. Ma come facciamo a sapere quanto è un cm? Prendiamo in riferimento la torre disegnata nel foglio. Un centimetro nostro è un metro della torre. Tutta la torre (esclusa quella tratteggiata) è 20,1cm. Facciamo l'equivalenza:
  20,1cm = m2010
  e otteniamo l'altezza della torre che è **2010m**

Questa strategia rispecchia la necessità di operare con dati concreti, ma non con quelli che il testo propone, ma con quelli che vengono ricavati dall' "azione concreta" sulla figura. Ma poiché quest'ultima fa ottenere un numero troppo piccolo, si fa l'equivalenza.

- **S36** 3m+4m=7m
  7m*6m (multiplo di 3)=42m
  42m+18m=60m
  60m*8m=**480m**
  7m+42m+60m+480m=**589m**

Viene ignorato l'esempio riportato nel testo e si rifà tutto da capo, del resto è un esempio che per giunta non si capisce e poi non è detto che funzioni. Si sommano i primi dati, il risultato viene moltiplicato per il multiplo di 3m (se c'è vuol dire che serve) e al prodotto ottenuto viene sommato 18m che è il pezzo d'altezza che va dalla fine della prima finestra alla fine della sesta (non 25m poiché 7m l'ho calcolato prima quindi è già compreso nel primo prodotto). Infine, moltiplicato il risultato ottenuto per 8m , multiplo di 4m, si sommano tutte le grandezze ottenute.

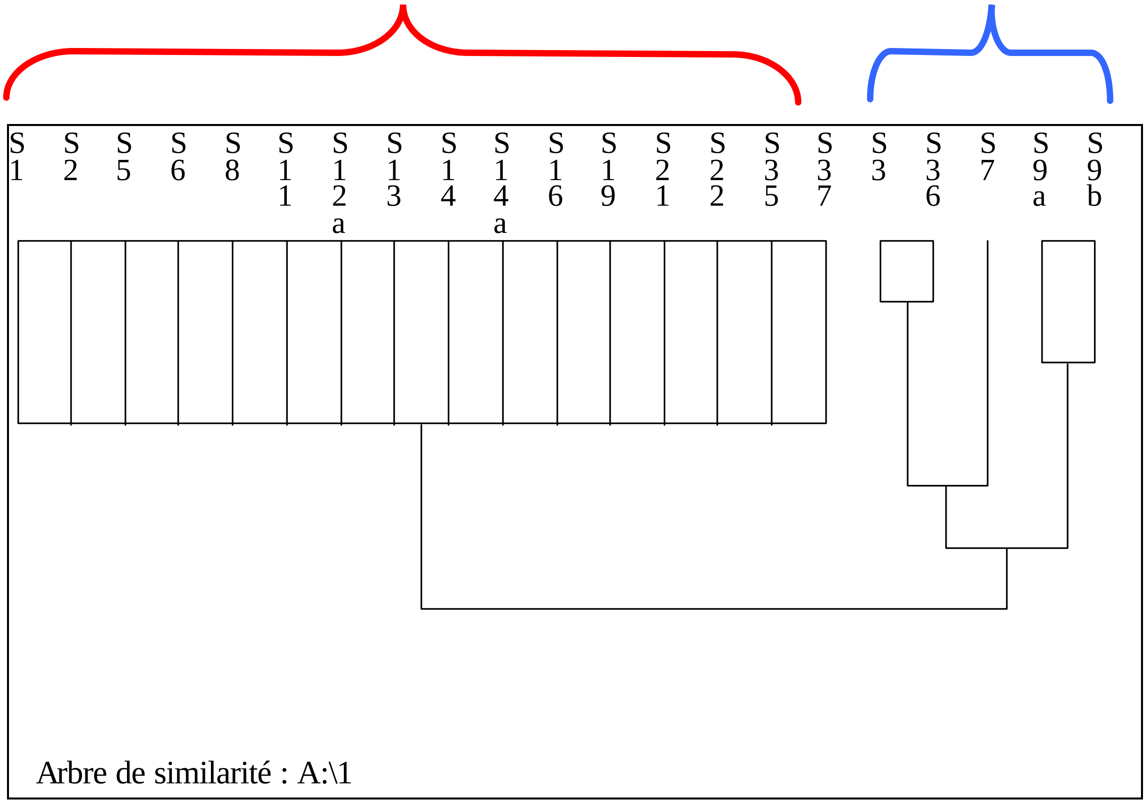
- **S37** 25m*6 (multiplo di 3m)=150m
  50m*8 (multiplo di 4m)=500m (1200m)
  53,5m*25=1333,5m (1337,5m)
  1333,5m+500m=1833,5m
  1833,5*25m=916500m (45837,5m)

Questa strategia è molto simile alle altre poiché troviamo sia i dati concreti (25 m) sia quelli astratti (i multipli), ma differisce dalle altre perché prende in considerazione altri dati, che è stato possibile definire solo grazie alla lettura della discussione del gruppo che ha utilizzato tale strategia. Questi dati, che peraltro compaiono per la prima volta, indicano delle liniette colorate, a volte bianche e altre volte gialle, che il gruppo riesce a notare guardando, ripetutamente, i disegni della torre di tutte le copie dei componenti. La scelta di prendere in considerazione questi dati viene fuori quando, non avendo più elementi utili per risolvere il problema (anche se più volte il gruppo afferma che la torre è infinita e che non si può misurare) il gruppo concentra la sua attenzione sulla figura della torre che, come il gruppo stesso afferma, presenta delle differenze da copia a copia. Ecco perché compaiono 50 e 53, 5 che esprimerebbero queste differenze. Per il resto la strategia è uguale alle altre sia nella logica che nel fine e cioè quello di riuscire a trovare un numero abbastanza grande da poter esprimere l’altezza, peraltro infinita, della torre.

2.2 Analisi dei dati sperimentali

2.2.0 Analisi descrittiva (1ª fase).

Le tabelle relative alle frequenze[12] mettono in evidenza come gli alunni abbiano adottato svariate strategie, ognuna delle quali è presente, in tutti i 20 gruppi, solo una volta (S7 è presente 2 volte).



Il grafo delle similarità, invece, mette in evidenza come le strategie adottate dagli alunni nella 1ª fase si assomiglino tutte anche se è possibile distinguere due gruppi. All'apparenza tali informazioni possono sembrare povere di significato, ecco perché vanno lette alla luce di quelle scaturite dall'analisi qualitativa. Quest'ultima, infatti, non solo completa i dati quantitativi ma ne chiarisce il significato.

---

[12] Per le tabelle relative alle frequenze vedere **Allegato 2**.

2.2.1 Analisi qualitativa 1 ª fase: "Il muratore e la torre"

Tutte le strategie adottate dagli alunni in questa 1ª fase rispecchiano la stessa logica di soluzione (tranne S6 e S7): si utilizzano i "**dati concreti**" e poi quelli "**astratti**" o viceversa (la maggiorparte delle strategie differiscono solo per l'ordine attraverso il quale gli alunni utilizzano questi dati) con il tentativo di risolvere la situazione-problema facendo ricorso sia all'esperienza sia all'algoritmo. Se, infatti, poniamo in esame le discussioni[13] dei gruppi possiamo notare che la questione dell'infinito e più specificatamente dell'infinità della torre viene affrontata, quasi sempre, prima facendo ricorso all'esperienza concreta e poi, quando questa si dimostra inadeguata e insufficiente ai fini della risoluzione, all'algoritmo. Questo perché, per quanto la fiaba abbia innescato negli alunni molte riflessioni e svariate ipotesi di soluzione sull'argomento, quest'ultimi hanno dovuto fare i conti con le difficoltà indotte dalla familiarità e dal loro legame con il concreto:

(gruppo 1A G) *"…uno neanche sa dove finisce la torre perché non riesce a vederla, non mi sembra che 72m…72m è troppo piccola!…no, è assaissimo!…se già 2m è là in fondo, pensa 75m!…ma se la torre dice che è altissima, più alta del mondo, deve superare i 75m!…se doveva fare tutto il disegno ci volevano 100 anni…"* ;

(gruppo 1A G) *"…ma si deve misurare la torre?…sì, ma qualcuno deve avere il righello!…sì, ma come facciamo a sapere quanto è lunga?…"* ;

(gruppo 1B P) *"…mi pare impossibile 733m…però dovrebbe essere più alta!…almeno un km!…quanto più alta?…è*

[13] Vedi **Allegato 1**. I protocolli delle discussioni di gruppo sono stati riportati fedelmente, così come sono scaturiti dalla registrazione. Ogni protocollo è seguito da una sigla: il primo numero (da 1 a 5) indica il gruppo, la prima lettera (A o B) la classe d'appartenenza e la seconda lettera (C, P o G) il plesso, Crimi , Pascoli e Garibaldi.

fantasia!…scusate, pure la torre di Pisa la supera!…no, la torre di Pisa è più bassa!…700m c'è anche una montagna!…lo so, potrebbe essere…non rischiamo, dobbiamo fare un'altra somma, può essere che dopo i risultati li sommiamo e…" ;

(gruppo 3B C) *"…e qua le finestre continuano…allora qua ci sono…qua ce ne doveva essere un'altra!…non fa niente…noi non siamo muratori!…io ce lo porto a mio nonno che è muratore…".*

I testi riportati evidenziano come gli alunni sentano di continuo l'esigenza di fare riferimento ad esperienze, fatti ed oggetti concreti non solo per cercare di spiegare la situazione-problema alla quale si approcciano, ma anche per giustificare volta per volta le ipotesi formulate. Inoltre, se analizziamo alcune delle discussioni di gruppo si può notare come fin dall'inizio si abbia l'impressione che la conclusione alla quale gli alunni debbano pervenire sia quella che la torre, essendo troppo alta, non si può misurare e questo perché mancano gli strumenti adatti per farlo. Ma se procediamo con la lettura delle intere discussioni vediamo che questa ipotesi di soluzione man mano va perdendo di credibilità fino ad essere rigettata, ed infine, sostituita, nel testo scritto, da un algoritmo che, il più delle volte, finisce per assumere un significato "formale" [14].

La constatazione di tale atteggiamento ci porta ad un'ulteriore riflessione scaturita dal confronto delle discussioni dei gruppi con i rispettivi testi scritti. Infatti, mentre nel testo scritto l'idea di infinito compare chiaramente solo una volta, in S7, dove quest'ultima è espressa dalla frase *"la torre rimarrà senza una determinata misura per*

[14] Questo significato è rintracciabile in quella che possiamo definire una clausola del contratto didattico chiamata di "delega formale" (D'Amore B., 2001). L'alunno di fronte ad un problema standard, si comporta come un consumatore davanti al bancone della frutta: sceglie quella che più le piace e lascia fare tutto al venditore senza preoccuparsi del fatto che quest'ultimo potrebbe beffarlo. Allo stesso modo l'alunno sceglie le operazioni da eseguire e lascia fare tutto all'algoritmo disimpegnandosi da qualsiasi responsabilità.

l'eternità", nelle discussioni di gruppo l'idea di infinito e lo stesso termine compaiono molte volte. Per spiegare questo fenomeno è necessario fare un passo indietro e riferirci alla fase in cui è stato somministrato il primo intervento sperimentale.

Agli alunni è stato chiesto di discutere liberamente sulla consegna[15] con la specifica richiesta di cercare di esprimere tutte le idee, compresi i dubbi, in relazione alla situazione problematica proposta e poi di mettere tutto per iscritto. All'alunno, quindi, veniva chiesto, implicitamente, non solo di risolvere il problema ma di operare il delicato e difficile, se non addirittura rischioso, passaggio dal linguaggio orale spontaneo, tipico delle discussioni informali, a quello matematico e quindi formalizzato. Così, mentre nella discussione il gruppo si è lasciato andare[16] riuscendo a formulare diverse ipotesi di soluzione facendo riferimento all'infinità della torre, nel testo scritto non solo omette tutto ciò che non può essere tradotto in numero (l'infinito non ha numero, quindi non è una soluzione) ma si limita a descrivere in maniera rigorosa e precisa i passaggi effettuati nell'esecuzione dei calcoli, sforzandosi di usare un linguaggio il più possibile vicino a quello dell'insegnante o del libro di testo[17].

Interessante, in questo senso, la "soluzione" del gruppo 3A C che dopo aver elencato e giustificato i calcoli effettuati, così conclude:

---

[15] Al momento della somministrazione dell'intervento sperimentale agli alunni non è stato chiesto di "risolvere il problema" poiché questo avrebbe influenzato il modo di operare di questi ultimi che avrebbero a tutti i costi trovato una soluzione, la qualsiasi, anche se scorretta.

[16] Non è accaduto per tutti i gruppi che consapevoli che, prima o poi, le cassette sarebbero state ascoltate, hanno utilizzato il registratore a loro piacimento, spegnendolo e accendendolo ogni qualvolta faceva loro comodo.

[17] Tale atteggiamento è un esempio di interpretazione del contratto sociale poiché legata alla concezione che gli alunni hanno della scuola (Bruno D'Amore, 2001). Quest'ultimi ritengono che qualsiasi richiesta dettata dall'insegnante anche se posta senza specifiche direttive e quindi liberamente, sia sempre sottoposta a controllo e verifica ragion per cui gli alunni ritengono di dover rispondere all'insegnante con un linguaggio il più possibile rigoroso.

"…*questa storia per me è molto interessante e ci fa capire molte cose che si basano sulla matematica*".

Da quanto detto finora si evidenzia come sia il testo scritto sia la discussione abbiano assunto significati diversi all'interno del problema proposto. Il testo scritto ha rappresentato il "documento ufficiale" cioè il testo che gli alunni avrebbero "ufficialmente" consegnato come documento definitivo e che sarebbe stato sottoposto a verifica e valutazione, la discussione, invece, ha costituito un modo "alternativo" per esprimere le proprie idee e più in particolare

- per dare consigli allo sfortunato muratore:

(gruppo 1B C) *"…secondo me questo muratore è stato molto ingenuo perché…mentre costruiva la doveva misurare…";*

(gruppo 1B P) *"…ma io dico, che stupidità, non poteva calcolarli mentre li faceva!…appunto…ogni piano lo faceva e lo scriveva…"*

- per fare conoscere la propria posizione politica*:*

(gruppo 1B C) *"…siccome io sono una mente liberale dico che è 354m…" ;*

- per evidenziare l'inutilità di tale strumento, cioè della discussione, ai fini della risoluzione del problema[18].

(gruppo 3A P) "…*dobbiamo scriverle, dai!…non abbiamo detto niente finora…abbiamo solo conversato!…".*

Riprendendo il nostro discorso sull'infinito interessante appare, in questo senso, la discussione del gruppo 1A P dove salta all'occhio la differenza che gli alunni fanno notare tra "*infinito*" e "*infinitamente*":

---

[18] Tale concezione è legata alla fiducia dell'algoritmo come unico portatore di soluzione.

"…noi pensiamo che la torre non si può misurare perché è infinitamente alta…è infinita!…no, è infinitamente!…no, è infinita perché infinitamente vuol dire molto alta…".

Da quanto riportato sembrerebbe che gli alunni diano due significati diversi ai termini "*infinito*" e "*infinitamente*", come se il primo esprimesse un'idea di infinito come **ente**, **insieme** infinito ma finito (nel nostro caso l'altezza della torre) mentre il secondo un'**azione** ripetuta all'infinito[19]. La differenza pare sia la seguente: mentre infinito è qualcosa di definibile e numerabile (nel testo scritto il gruppo ricava un numero che esprime la misura dell'altezza della torre) infinitamente è un infinito che non è possibile definire poiché esprime un processo in continua evoluzione[20] che non si arresta mai e quindi impossibile da misurare perché inconcepibile per l'esperienza umana. Ecco perché anche se il gruppo afferma che la torre è infinita quest'ultimo conclude nel testo scritto ricavando un numero che è abbastanza grande da esprimere l'altezza infinita della torre.

Ai fini del nostro discorso è significativo fare riferimento alla discussione del gruppo 3A P che nel testo scritto ha adottato la strategia S7. Il gruppo è in difficoltà perché eseguendo i calcoli volta per volta ottiene un numero diverso:

"…abbiamo superato 30, dopo 35 e dopo 36…e non si sa…neanche questo riusciamo a misurare (riferendosi alla torre raffigurata nel foglio)*…infatti, non ci viene un numero stabile!…perché facciamo sempre i calcoli!…e non ci viene sempre lo stesso numero!…sì, ma è sempre questa la figura della torre!*
(testo scritto) *"…la nostra conclusione è che la torre rimarrà senza una determinata misura per l'eternità".*

---

[19] Il primo termine esprime una "concezione statica" dell'infinito, il secondo una "concezione dinamica".
[20] Quest'immagine dell'azione ripetuta continuamente verrebbe espressa dalla forma avverbiale del sostantivo infinito.

Da quanto riportato si può notare come il gruppo sia consapevole dell'instabilità dell'altezza della torre che aumenta man mano si procede con i calcoli. L'idea di infinito che è possibile ipotizzare è quella di infinito potenziale espressa, quindi, come possibilità di ottenere man mano numeri sempre più grandi. Da qui la conclusione di non riuscire a trovare l'altezza esatta, e quindi stabile, della torre.

Facendo riferimento a quanto detto sopra sarebbe utile chiedersi come mai il gruppo 3A P, così come altri, ha avuto questi dubbi e queste difficoltà nel momento in cui si è scontrato con la tale situazione imprevista.

In relazione a ciò si potrebbe ipotizzare che tali difficoltà siano legate alla concezione che gli alunni hanno del concetto di misura. Quest'ultimo, nel corso della scuola elementare, attraversa diverse fasi in riferimento al processo di maturazione. Secondo lo studio condotto da Brunet, gli alunni di 9-10 anni hanno, così come la definisce lo studioso, una "concezione statica" del concetto di misura derivante dal tipo di esperienze scolastiche che questi ultimi vivono in relazione al sopraccitato concetto.

Agli alunni, infatti, così come gli stessi Programmi dell'85 indicano, viene chiesto di operare con oggetti e figure ben determinate (ampiezze angolari, figure geometriche, volumi ecc.) e di agire su di essi attraverso l'applicazione di formule che portano ad un'unica soluzione naturalmente espressa da un numero invariabile (se varia è perché il calcolo è sbagliato). Gli alunni, quindi, non solo non concepiscono la variabilità di un risultato numerico ma sono convinti che non esista oggetto che non si possa misurare.

In alcuni gruppi, inoltre, e in maniera molto evidente nella discussione di 5A P, si può notare la non accettazione della "scoperta" (poiché l'altezza della torre è infinita è impossibile da misurare) anche quando è la stessa maestra a suggerirlo subito dopo:

*"…però non si può misurare perché l'altezza è infinita!…certo che non si può misurare perché non sappiamo la misura della torre!…la maestra ha detto che non si può misurare!…facciamo un tentativo…se non si può misurare, cosa possiamo fare?…guarda, ha fatto 3*6 e poi fa 4*8…*(cercano di eseguire qualche calcolo, poi provano anche con il righello)*…ma la torre è infinita!…32*18…ma tanto non è possibile!…".*

Questo comportamento è rintracciabile nel fatto che per gli alunni l'infinito non solo è un dato incerto ma, cosa più importante, non ha numero.

Da quanto detto finora, quindi, è possibile ipotizzare che l'approccio all'idea di infinito e la sua accettazione siano stati pregiudicati, oltre che dall'impostazione che del postulato è stata data nel testo[21], anche dalla concezione che gli alunni hanno del problema. Secondo questi ultimi, infatti, non esiste problema che non abbia una soluzione[22]:

(gruppo 1B G) *"…è andato a prendere questi libri di matematica e questo già vuol dire che sa la soluzione; è andato a vedere, a controllare perché c'è sempre una soluzione…".*

Inoltre, trovare una soluzione significa trovare un numero, non importa come e attraverso quali strumenti:

---

[21] Questo punto è ben evidenziato nell'analisi a priori 2.

[22] Questo fenomeno va sotto il nome di "età del capitano" ed è relativo ad uno studio condotto da Stella Baruk che scoprì che gli insuccessi degli alunni di fronte a problemi che mancano di alcuni dati sono da additare all'immagine che questi ultimi hanno del problema, immagine che deriva da una clausola del contratto didattico secondo la quale il problema ha sempre una soluzione (D'Amore B., 2001)

(gruppo 1B P) “*…648+18 più l’altro e possiamo…*(non si capisce)*…i risultati come mettiamo…25, 25, 39 e noi dobbiamo trovare un risultato…*”.

Tale concezione non solo ha spinto gli alunni ad eseguire delle operazioni senza riflettere ma a considerare il dato, che deve essere necessariamente espresso da un numero[23], non come fatto informativo, che non è detto debba essere per forza utilizzato, ma come l’elemento fondamentale e assolutamente necessario per trovare la soluzione[24]. Accettare la tesi secondo cui la torre era infinita non solo portava gli alunni a non utilizzare i dati presenti nel testo ma significava non trovare una soluzione[25]. Inoltre, la mancanza di alcuni dati, e mi riferisco a quelli che l’alunno avrebbe dovuto ricavare attraverso la reiterazione delle operazioni, non solo non hanno permesso di andare oltre[26] ma hanno letteralmente bloccato, inibito il ragionamento che senza quest’ultimi non trova né giustificazione né via di soluzione. Tale comportamento è noto come effetto « età del capitano » (D’Amore B., 2001). Gli alunni,

---

[23] Bisogna, però, sottolineare che la ricerca di una soluzione che sia necessariamente espressa da un numero non derivi soltanto dalla concezione che gli alunni hanno del problema ma anche dalle specifiche indicazioni presenti nella storia che espressamente sottolinea la necessità di trovare un numero.

[24] Dalla lettura delle discussioni si può notare come i gruppi (tranne 1A C e 2A C e 3A C) , nel momento in cui decidano di discutere la consegna, leggano sempre la parte dove sono presenti i dati numerici lasciando perdere il resto della storia:

(gruppo 1A G) “*…intanto rileggiamo…intanto dobbiamo trovare l’altezza e l’altezza mi sembra che si trova come ha fatto qua…Giuppolo…Ciuppolo poi è morto vero?…ma questo non ci interessa niente…*(cominciano a leggere dall’inizio ma una componente interrompe la lettura)*…non è meglio che rileggiamo la parte…appunto, perché la storia non ci interessa tanto…*”.

[25]“ Se anche l’alunno si rende conto dell’assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con le sue abitudini, con tutte le clausole messe in campo nelle situazione didattiche” (D’Amore B., 2001).

[26] Anche se in molte strategie, sia quelle presenti nelle discussioni, e quindi non definitive, sia quelle del testo scritto, si rivela un tentativo di misurare la parte tratteggiata, la maggiorparte delle operazioni sono fondate da una falsa logica, innescate dalla convenienza del calcolo.

infatti, avendo a disposizione pochi dati sono portati ad utilizzarli tutti (anche quando non viene compresa la logica di questi ultimi nel testo[27]) e quando questi non bastano li riutilizzano più volte allo scopo di ottenere "**il numero esatto**" e cioè quello abbastanza grande da poter esprimere la torre più alta del mondo:

(gruppo 2A G) *"…questo non lo abbiamo usato…però qua è moltiplicato 6…"*;

(gruppo 1B C) *"…Marco, abbiamo scoperto una cosa, 4m e 18m non lo abbiamo fatto!…dobbiamo ragionare con questi numeri…";*

(gruppo 3B C) *"…ma secondo me dovreste fare prima qua 18+4+3*6, poi il numero 8 e fa il numero perché se qua ci sono questi numeri noi ce li mettiamo…".*

Significativo in questo senso è il ricorso che gli alunni fanno alle formule geometriche nel momento in cui non riescono ad andare avanti e quando si accorgono che i calcoli eseguiti o non li aiutano a trovare la soluzione o contrastano con la loro esperienza concreta:

(gruppo 1A G) *"…secondo me è 72m…ma mica ci va tutta!…non ci va!…4 è la base…4*25…certo!…ma è rettangolo, base*altezza!…me lo male che ho scoperto che era un rettangolo!…l'altezza di tutta la torre è 100 ma m²…sì, m² perché è m*m…mettici m²…ma si mette quando c'è l'area!…ma quando si fa m*m si mette m²!…";*

(gruppo 3A P) "*…tutta questa torre che è raffigurata nel foglio misura 30 ma non sappiamo quanto è alta e per quante volte lo dobbiamo moltiplicare!…quindi facciamo finta che è una figura geometrica, però quanto è alta non si sa!…si dovrebbe sapere magari il perimetro…*";

---

[27] Dalla lettura dell'analisi a-priori 2 della 1ª fase emerge come tale comportamento sia stato indotto dall'ambiguità del testo problema e cioè di quella parte della storia in cui sono presenti i dati. Il testo, infatti, consiglia chiaramente di utilizzare tutti i dati per trovare la soluzione.

(gruppo 5B P) "*…però la torre non arriva qua!…arriva fino a qua sopra…ma sì, ma poi non c'è più finestre…questo è un rettangolo, l'altezza del rettangolo come si trova?…*".

Da quanto riportato si può affermare come gli alunni di fronte ad una situazione problematica insolita ma che tutto sommato ha le caratteristiche dei problemi ai quali sono soliti approcciarsi (la storia ha, infatti, una figura e dei dati numerici) abbiano l'esigenza di risolvere quest'ultima come un problema geometrico: denominano la figura in questione, ne definiscono le proprietà e applicano le rispettive formule. Il risultato è che l'altezza della torre è $100m^2$.

Per concludere il nostro discorso possiamo affermare che, anche se l'impostazione del Postulato di Eudosso-Archimede non ha favorito l'approccio all'idea dell'infinito per i motivi sopraccitati, e ampiamente discussi nell'analisi a-priori 2, il ruolo principale, e oserei vincente, lo ha giocato la fiaba "Il muratore e la torre". Quest'ultima ha costituito non solo un modo originale di fare matematica ma soprattutto un valido e significativo strumento capace di innescare negli alunni interessanti e curiose riflessioni su alcuni aspetti di questo affascinante e misterioso mondo del "**non c'è, non lo vedo, ma esiste**".

Da quanto detto, quindi, si può capire come l'ipotesi dalla quale è partita la ricerca è stata falsificata, anche se si possono considerare parzialmente raggiunti gli obiettivi previsti. In relazione a ciò si è ritenuto opportuno un secondo intervento che tenesse conto dei risultati del primo e soprattutto di uno strumento più adatto per l'introduzione e la comprensione del Postulato di Eudosso-Archimede, dato che è stata proprio l'esigenza di calare quest'ultimo in una situazione nuova e concreta che ha creato nel testo molte ambiguità soprattutto in relazione ai dati che, così come le operazioni che li legano, appaiono slegati dal contesto della storia-problema.

2.3 La 2ª fase sperimentale: “Il serpentone” e “Esercizio”.

La seconda fase sperimentale è stata pensata con l’intento di ovviare a tutte quelle difficoltà che, durante la prima fase, avevano, in un modo o in un altro, pregiudicato il corretto approccio, da parte di tutti gli alunni, alla situazione problematica proposta o impedito l’approccio costruttivo all’infinito attraverso il Postulato di Eudosso Archimede.

Il tentativo è stato quello di eliminare o quanto meno camuffare tutti quegli elementi[28] non secondari ma, a mio avviso, di primaria importanza che avevano portato gli alunni a reagire-agire, in relazione alla fiaba-problema, in un determinato modo.

Di seguito viene riportata una tabella in cui il confronto tra la fiaba “Il muratore e la torre” e uno dei due test, “Il serpentone”[29], vuole mettere in evidenza sia le loro differenti caratteristiche, legate alla presenza-assenza di determinati elementi e all’impostazione che di quest’ultimi ne viene data, sia la necessità di modificare il primo intervento e di realizzarne un secondo che permettesse non solo di disporre di un cospicuo numero di dati da quantificare ma anche da interpretare in modo non equivoco.

---

[28] La presenza e l’impostazione dei dati dalle quali dipende sia la modalità attraverso la quale gli alunni si approcciano alla storia, sia il tipo di conclusioni alle quali essi pervengono nel tentativo di “risolvere” il problema stesso; la presenza di una figura; le richieste nascoste nel testo del tipo: “a quella targa manca ancora quel numero che forse…” dalle quali dipende il tipo di soluzione trovata ecc….

[29] E’ stato preso in considerazione solo uno dei due test poiché entrambi rispecchiano la stessa logica con la differenza che “Il serpentone” propone un approccio aritmetico all’infinito”, mentre “Esercizio” geometrico. Per “Il serpentone” e “Esercizio” vedere **Allegato 3**.

“Il muratore e la torre”	“ Il serpentone”
1. Si possono distinguere due parti, quella prettamente “**narrativa**” in cui si snodano le vicende del personaggio e quella “**numerica**” in cui è possibile distinguere gli elementi propri di un problema standard: • i dati (grandezze geometriche); • una figura (anche se non specificatamente denominata come geometrica; • manca una domanda ma la richiesta è esplicitata nella storia: “…a quella targa manca ancora quel numero…”. 2. Il Postulato di Eudosso-Archimede non trova una giustificazione logica nella storia (vedi analisi a-priori 2). 3. Dal punto 2 ne consegue la non coerenza tra i dati presenti nella storia (compresa la figura) e la richiesta ragion per cui anche la ricerca del multiplo, peraltro passaggio necessario per l’applicazione del Postulato, non risponde a nessuna logica.	1. Non ha le stesse caratteristiche dei problemi standard ai quali gli alunni sono soliti approcciarsi: • manca una figura che può essere denominata come geometrica; • i numeri presenti non sono grandezze geometriche ma numeri naturali . 2. Il Postulato di Eudosso-Archimede trova una giustificazione logica nel testo ed è presentato come “regola del gioco”. 3. Non c’è ambiguità tra la “regola” e la richiesta ragion per cui la ricerca del multiplo risponde ad una logica precisa.

2.3.1 Analisi a-priori: “Il serpentone”.

Per l’analisi a priori si terrà in considerazione la seconda domanda poiché è quella che dà maggiori informazioni.

“SE NON SEI RIUSCITO A SCOPRIRE DOVE TERMINA IL SERPENTONE SAPRESTI SPIEGARMI COME MAI? COSA E’ STATO DIFFICILE PER TE?”

- **R1** Le cifre erano troppo grandi.
- **R2** Potevo fare sempre i calcoli.
- **R3** Perché i numeri sono infiniti (vanno all’infinito).
- **R4** Perché il serpentone non termina mai (non terminerà mai)
- **R5** perché i numeri non finiscono mai
- **R6** perché il serpentone è infinito
- **R7** perché è difficile calcolare tutti quei numeri
- **R8** non ho avuto molto tempo, se avevo ancora tempo continuavo ancora.
- **R9** perché non si può fare (è impossibile riuscirci – non c’è soluzione al gioco).
- **R10** posso continuare, so però che non si può arrivare all’infinito
- **R11** era difficile
- **R12** mi stancava la mano
- **R13** le altre caselle dopo il …… non erano uguali alle altre, erano tratteggiate

- **R14** mi sono confusa
- **R15** ho perso il conto
- **R16** non ho capito il gioco
- **R17** non so il perché
- **R18** mi piace il ……
- **R19** il numero era sempre più grande
- **R21** mi sono stancato dei numeri
- **R20** mi veniva difficile ricordare di quale numero dovevo fare il multiplo, se dell'ultimo numero o del penultimo
- **R22** non mi pace fare le moltiplicazioni
- **R23** ho paura di sbagliare le moltiplicazioni
- **R24** non so (bene) le tabelline
- **R25** è il compleanno di mio padre
- **R26** per me è difficile (non sono bravo a) fare le moltiplicazioni
- **R27** perché si deve sempre moltiplicare il numero che si è risultato
- **R28** posso continuare fino a quando non finisce
- **R29** moltiplicare i numeri (grossi) cifre (credo però che ci sono riuscita
- **R30** perché continua (posso continuare) sempre (all'infinito)
- **R31** si può fare sempre il multiplo di un numero

- **R32** non lo posso sapere mai dove (e quando) finisce

- **R33** non è difficile scoprire il risultato, però il risultato è molto lungo

- **R34** non si può arrivare mai a quel numero

- **R35** tutto

- **R36** è stato facilissimo

- **R37** senza risposta

- **R38** un numero si può sempre moltiplicare all'infinito

- **R39** non è stato difficile (niente)

- **R40** posso arrivare dove voglio (cioè all'infinito)

- **R41** è un continuo moltiplicare di numeri (con le moltiplicazioni non si termina mai)

- **R42** i numeri mi sembrano complicati

- **R43** mi sono fermato alla casella ……… perché moltiplicando sempre per lo stesso numero riuscivo a trovare la cifra esatta (sempre un multiplo più grande)

- **R44** la moltiplicazione è ancora possibile

- **R45** moltiplico sempre, arrivo a migliaia di numeri e ancora continuo

- **R46** è impossibile riuscirci

- **R47** non so può scoprire qual è l'ultimo numero

- **R48** quando tu scrivi qualsiasi numero, il numero dopo è sempre più grande

- **R49** è inutile continuare a moltiplicare il serpentone
- **R50** veniva difficile scrivere i numeri grandi nelle caselle
- **R51** calcolare tutti quei numeri
- **R52** posso continuare ma mi scoccia

2.3.2 Analisi a-priori: “Esercizio”

- **Q1** Sino a quando non finisce la linea

- **Q2** Sempre
- **Q2b** Perché posso sempre fare (trovare) il multiplo di un numero
- **Q2c** Perché in ogni numero ha sempre un multiplo
- **Q2d** Perché i multipli sono infiniti
- **Q2e** Perché i multipli non si possono contare

- **Q3** Infinite volte, tante volte, un’infinità di volte

- **Q4** Fino a quando non mi stanco

- **Q5** Fino a quando non arrivo a un numero troppo grosso
- **Q5b** Perché poi viene difficile fare ancora i calcoli
- **Q5c** Il numero ottenuto (il multiplo) poi non entra nella linea

- **Q6** Fino ad un certo numero
- **Q6b** Perché poi non posso più andare avanti

- **Q7** Non lo so
- **Q7b** Perché non mi posso fermare mai

- **Q8** Fino a quando voglio io

- **Q9** Tutte le volte
- **Q9b** Perché (se si deve moltiplicare) un numero si può sempre moltiplicare
- **Q9c** Perché moltiplicando sempre per 2 sono arrivata a questo numero

- **Q11** Non lo posso sapere

- **Q11b** Perché la linea tratteggiata non basta (è poca)
- **Q11c** Perché la linea tratteggiata poi finisce
- **Q11d** Perché non sappiamo quanto è lunga la linea

- **Q12** = **Q3**

- **Q13** Non ci sono riuscito

- **Q14** Un tot di volte

- **Q15** Senza risposta

- **Q16** Non si può fare
- **Q16b** Perché questo procedimento non termina mai

- **Q17** Sono arrivata a questo numero………
- **Q17b** Non posso più continuare
- **Q17c** Perché continuando posso arrivare a numeri grandi però di poco

- **Q18** Ce ne sono ancora da moltiplicare ma non li moltiplico

- **Q19** No
- **Q19b** Perché voglio fermarmi
- **Q19c** Ma posso (devo) continuare sempre
- **Q19d** Perché ho segmenti (numeri) grossi

- **Q20** Sì
- **Q20b** Perché i segmenti (i numeri) sono piccoli

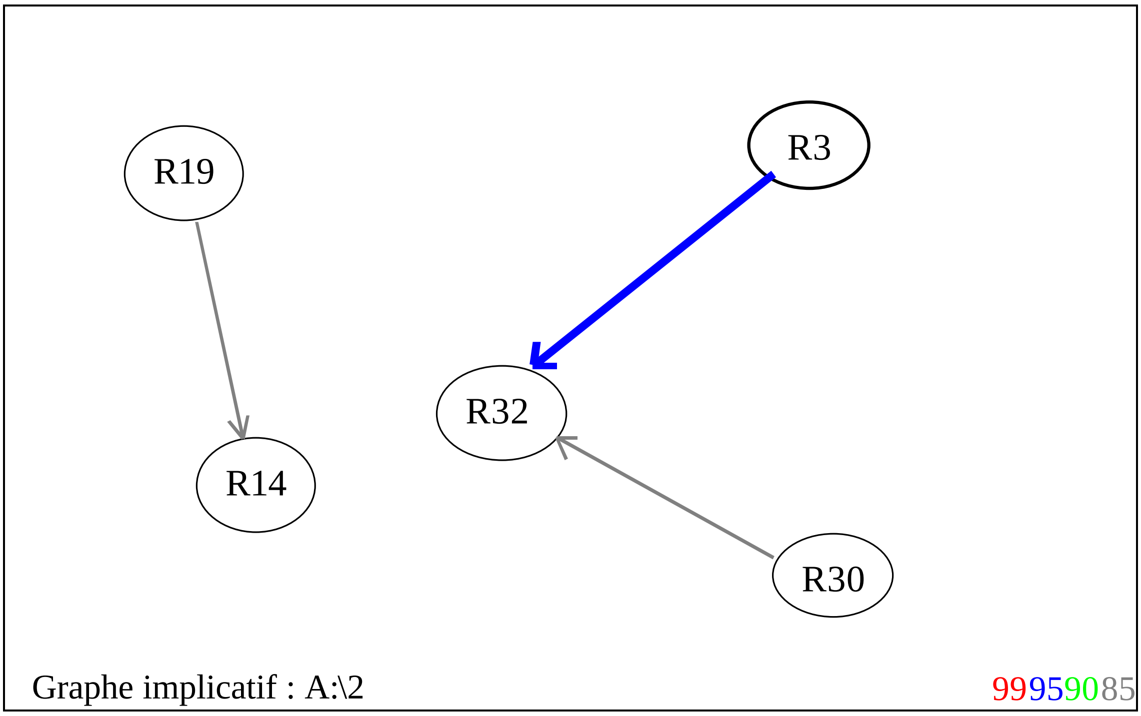
- **Q21** Non so spiegare il perché

- **Q22** Non ho continuato perché ho perso il conto
- **Q22b** Perché non ho capito
- **Q22c** Perché mi sono confusa

2.4 Analisi dei dati sperimentali

2.4.0 Analisi implicativa 2ª fase.

Tentando di dare significato ai legami e ai cammini implicativi esistenti tra le risposte de “Il serpentone” e di “Esercizio”, si cercherà di capire quali difficoltà gli alunni hanno riscontrato nell’applicazione del Postulato di Eudosso-Archimede e di scoprire se quest’ultimo ha favorito l’approccio costruttivo all’infinito così come ipotizzato.

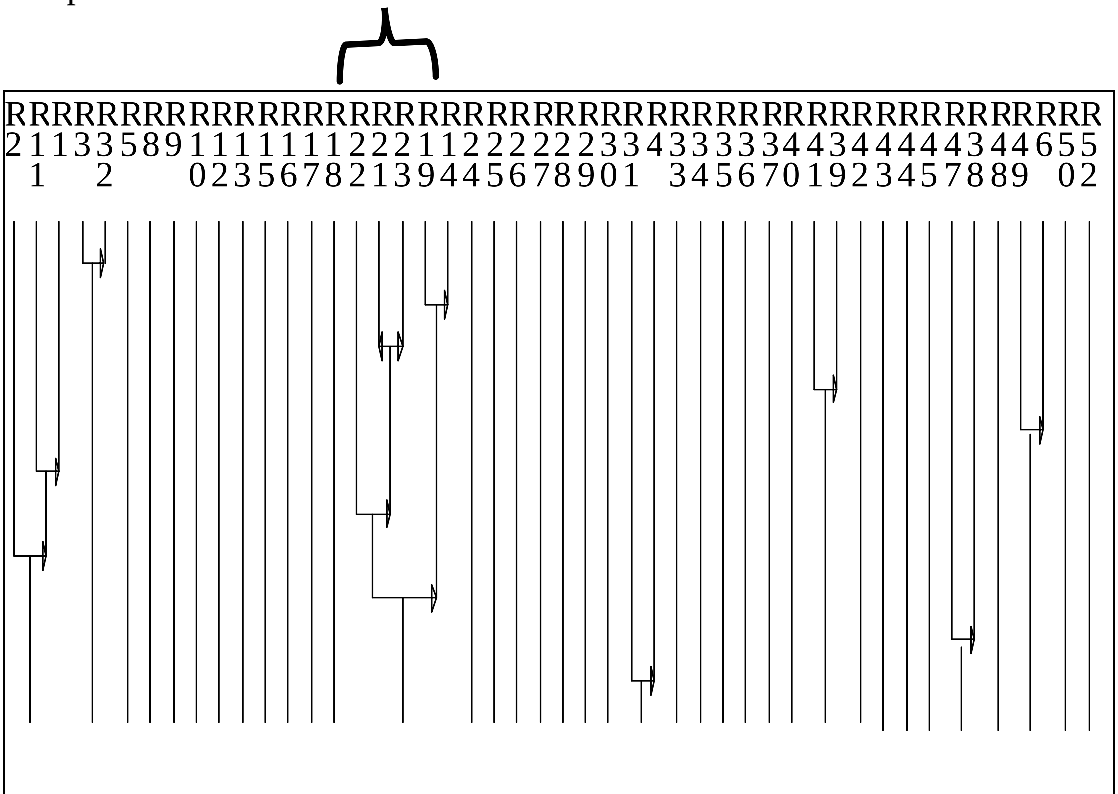


Il grafo delle implicazioni mette in evidenza due sottogruppi:

1. la possibilità di ottenere numeri sempre più grandi (R19) crea confusione negli alunni;
2. dalla constatazione che i numeri sono infiniti o vanno all’infinito e dalla possibilità di continuare a moltiplicare i

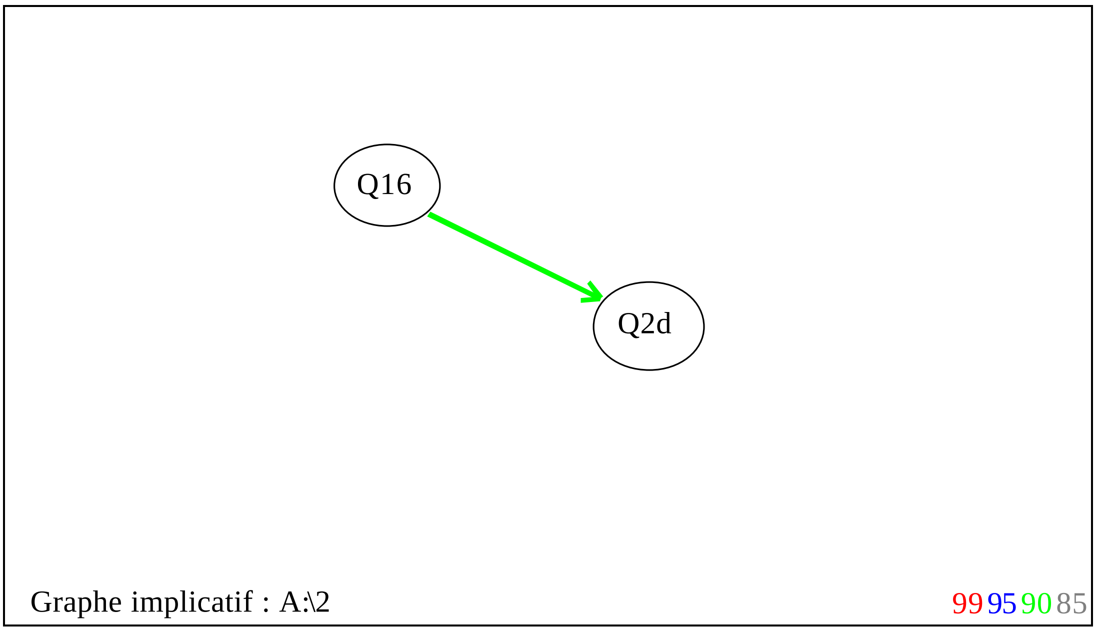
multipli sempre, gli alunni concludono affermando di non potere mai scoprire dove e quando finisce il serpentone.

Dai grafi relativi alle risposte del “Serpentone” emerge, quindi, che per la maggiorparte degli alunni l’infinito è concepito come un processo senza fine, mentre il Postulato, espresso dalla regola del gioco, come un procedimento che permette di ottenere numeri sempre più grandi. L’idea di infinito che scaturisce è dunque quella di infinito potenziale. Il Postulato, in tal senso, ha giocato un ruolo molto importante: grazie all’impostazione che di quest’ultimo è stata data nel testo ma anche al tipo di approccio all’infinito che esso propone, gli alunni hanno avuto la possibilità non solo di agire consapevolmente in relazione allo stimolo proposto, ma di verificare e giustificare, da soli, la “scoperta” realizzata.



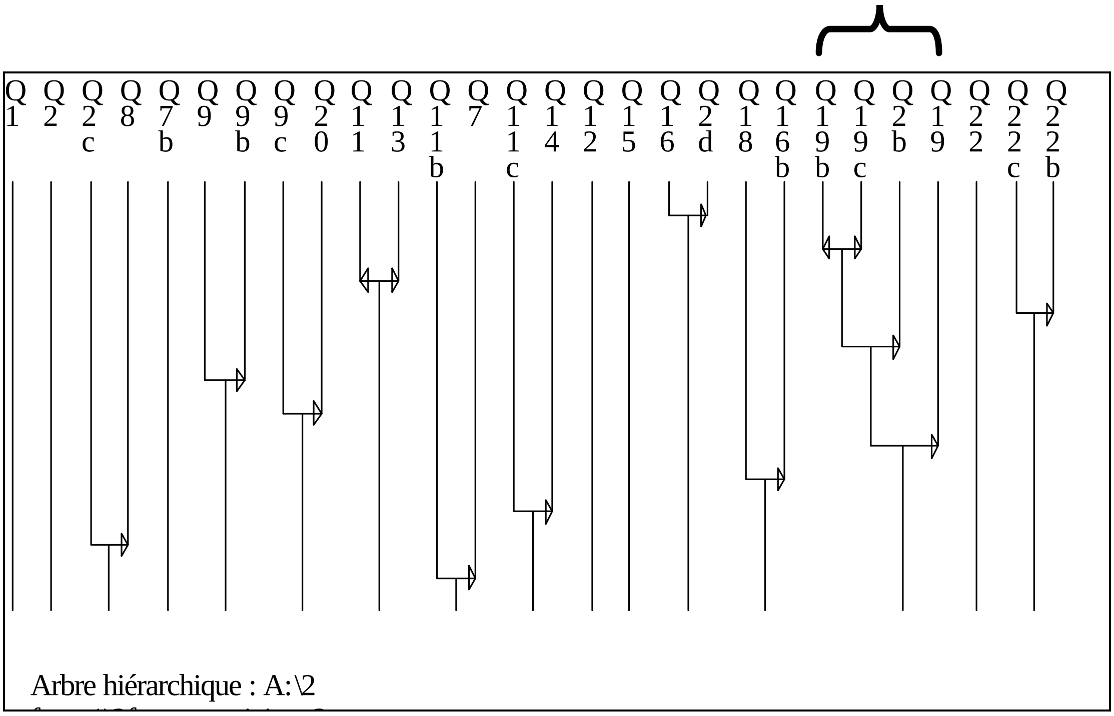
Arbre hiérarchique : A:\2

Considerando i cammini implicatiti del grafico relativo alle risposte de “Il serpentone”, possiamo notare che è R22 la risposta più significativa che implica R21 e R23 (che si implicano a vicenda), R19 e R14. Dal grafo emerge che le difficoltà legate all’applicazione del Postulato e al conseguente approccio all’infinito derivano soprattutto dalla ripetizione dei calcoli: agli alunni non piace fare le moltiplicazioni (R22), di conseguenza hanno paura di sbagliare (R23), si stancano presto dei numeri (R21) e si confondono facilmente (R14) a causa dei numeri che diventano sempre più grandi (R19). C’è da dire, inoltre, che a tale difficoltà, che più volte è stata riscontrata durante lo svolgimento dell’attività, si è cercato di ovviare ponendo agli alunni delle domande-stimolo del tipo: “Dimmi un po’ quello che hai fatto fino ad ora… “quante volte ancora puoi ricavare il multiplo?… E, quindi, riusciresti a dirmi dove finisce il serpentone? Perché?”. In questo modo si è evitato che gli alunni continuassero a fare i calcoli fino alla fine del serpentone, mentre è stata data loro la possibilità di antipare il ragionamento e quindi di arrivare prima alla soluzione.



Il grafo implicativo relativo alle risposte della 1ª domanda di “Esercizio” mette in evidenza una sola implicazione:

- non si può sapere quante volte posso trovare il multiplo di un numero (Q16) perché i multipli sono infiniti (Q2d).



Considerando i cammini implicativi del grafo relativo alle risposte alla 2ª domanda di “Esercizio”, è possibile notare che Q19b e Q19c sono le risposte più significative le quali implicano Q2b e Q19. Dal grafo emerge che gli alunni essendo consapevoli di potere continuare ancora (Q19c), decidono di fermarsi (Q19b), ma sanno che possono sempre fare il multiplo di un numero (Q2b) ragion per cui non gli basta la linea tratteggiata.

2.4.1 Analisi qualitativa 2ª fase

Dall'analisi descrittiva emerge che l'idea di infinito che la maggiorparte degli alunni posseggono è quella di infinito potenziale.

L'infinità del serpentone, però, in alcuni casi, assume una connotazione diversa che è chiaramente espressa da R28 e R10. Tutte e due le risposte compaiono una volta sola[30] ma, mentre R10 è l'unica risposta che A11 (G) dà, R28 è accompagnata da R1 e R32 (A19 C).

Analizziamole una ad una.

R10 è espressa dalla frase: "*io posso continuare, so però che non si può arrivare all'infinito*".

L'alunno che dà questa risposta sembra che concepisca l'infinito come qualcosa che non è possibile immaginare né agire ed è come se tra la possibilità di continuare a trovare i multipli e l'infinito da lui concepito, ci sia un tempo o uno spazio in cui non è più possibile andare avanti.

2 4….. 96 384…. 2304 27648….

Infinito

Tale ipotesi può far pensare che l'alunno abbia un'idea di infinito in atto, un ente che non è possibile raggiungere o definire attraverso la sola esperienza umana. L'alunno, infatti, è come se si accorgesse che i calcoli che lui stesso ha eseguito possono essere fattibili fino ad un certo punto, un punto al di là del quale non è possibile continuare ad andare avanti.

R28 è espressa, invece, dalla frase: "*posso continuare fino a quando non finisce*".

---

[30] Per la tabulazione dati 2ª fase vedi **Allegato 4**.

L’alunno che dà questa risposta sembra voglia dire che egli può continuare a trovare i multipli fino a quando non finisce il serpentone raffigurato nel foglio e, quindi, fino a quando non finiscono le caselle.

Dall’analisi di questa prima risposta sembrerebbe, quindi, che l’alunno concepisca la possibilità di trovare, ogni volta, il multiplo (egli arriva a ricavare il multiplo fino alla casella 33) come procedimento che prima o poi ha una fine che, secondo lui, corrisponde con l’ultima casella. Se, invece, facciamo riferimento alle altre risposte che A19 (C) dà alla prima domanda, questa ipotesi si arricchisce di altre informazioni.

(Risposta alla 1ª domanda) *“Non lo posso sapere mai dove* (e quando) *finisce il serpentone*” (R32), *“perché le cifre erano troppo grandi*” (R1).

(Risposta alla 2ª domanda) *“Posso continuare fino a quando non finisce*” (R28).

Mettendo a confronto le tre risposte si ha l’impressione che queste contrastino. Prima l’alunno dice che non lo può sapere mai dove termina il serpentone e subito dopo afferma che può continuare a fare il multiplo fino a quando il serpentone non finisce.

L’unica spiegazione plausibile e che l’alunno con R32 abbia voluto riferirsi al fatto che per lui è difficile continuare a fare i calcoli visto che, arrivato alla casella 33 ottiene un numero, quasi impronunciabile, di 9 cifre, . Egli, quindi non sa dove finisce il serpentone perché non è riuscito ad andare avanti con i calcoli ma non esclude la possibilità che continuando ancora riesca a trovare il multiplo fino a quando ci sono ancora caselle. L’idea di infinito che scaturisce può essere quella di un infinito in atto.

Capitolo 3

3.0 Conclusioni del lavoro sperimentale

Al termine della sperimentazione possiamo concludere affermando che entrambi i due interventi che hanno costituito l'indagine sperimentale hanno permesso di verificare l'ipotesi, anche se in modo diverso.

Il primo intervento, la fiaba "Il muratore e la torre", ha favorito negli alunni un approccio naturale alla tematica dell'infinito, anche se l'impostazione del Postulato e la presenza di alcuni elementi ne hanno pregiudicato l'approccio costruttivo così come era stato inteso in relazione al postulato di Eudosso-Archimede, poiché era proprio quest'ultimo che lo doveva favorire.

Infatti, la fiaba, pur avendo permesso un approccio costruttivo all'infinito, non è stata molto utile per l'individuazione delle concezioni che gli alunni di 9-10 anni posseggono sull'infinito: soltanto in due discussioni è stato possibile cogliere chiaramente l'idea di infinito potenziale (3A P) e di infinito finito (1A P).

Quindi non è stato il Postulato di Eudosso-Archimede a favorire l'approccio costruttivo all'infinito, la cui impostazione, invece, ne ha compromesso i risultati.

Nella 2ª fase, invece, attraverso i due test proposti, "Il serpentone" e "Esercizio", è stato possibile verificare l'ipotesi così come era stata formulata. Infatti, l'impostazione che del Postulato è stata data nei due test e le caratteristiche dei due strumenti, hanno fatto sì che gli alunni, con le loro risposte, esprimessero le proprie idee sull'infinito. Queste ultime fanno capo a quella di infinito potenziale, peraltro idea che scaturisce dall’applicazione del Postulato di Eudosso-Archimede, mentre solo una volta è possibile scorgere l’idea di infinito attuale.

Mettendo a confronto, quindi, i risultati ottenuti dai due interventi, è possibile affermare che entrambi hanno favorito l’approccio costruttivo all’infinito anche se in modo diverso. Il primo ha funzionato come stimolo alla creatività e all’immaginazione permettendo, quindi, un naturale coinvolgimento all’attività e un approccio euristico alla tematica dell’infinito, il secondo, invece, come strumento per sperimentare “concretamente” l’infinità dei numeri naturali. In relazione a quanto detto, è possibile affermare che l’ipotesi secondo cui il Postulato di Eudosso-Archimede favorisce l’approccio costruttivo all’infinito, è stata verificata.

3.1 Problemi aperti

L'indagine sperimentale ha dato la possibilità di scoprire e di conoscere alcuni degli aspetti legati alla comprensione del concetto di infinito da parte dei soggetti di 9-10 anni, mettendo in evidenza la possibilità di affrontare, con adeguati strumenti, tale tematica già a partire dalla scuola elementare. Rimangono, però, aperte alcune questioni non considerate che possono fungere da ulteriori ipotesi per successive indagini e che possono completare ed arricchire di spunti nuovi il presente lavoro:

- è possibile rintracciare nei risultati ottenuti dai due interventi immagini mentali distorte che possono in futuro pregiudicare l'acquisizione e il corretto apprendimento del concetto di infinito da parte del campione considerato?
- Gli strumenti adottati per la somministrazione dei due interventi si sono rivelati idonei alla caratteristiche del contenuto in questione e alle esigenze dei soggetti?
- La fiaba può essere considerato un valido strumento per la comprensione e l'acquisizione dei concetti matematici?

Tali domande, se da un lato scaturiscono dalla necessità di dare validità al lavoro sperimentale in quanto didattica spendibile nella prassi quotidiana, dall'altro sottolineano il carattere non esaustivo e incompleto della ricerca.

Ciò significa che il presente lavoro non ha esaurito tutte le questioni connesse alla tematica dell'infinito nella scuola elementare né ha la pretesa di porre i propri risultati come verità universali, ragion per cui lascio agli addetti ai lavori la possibilità di utilizzare criticamente i risultati ottenuti nelle due fasi e le informazioni da essi scaturite, per un’analisi più dettagliata che possa mettere in evidenza variabili e questioni non considerate, ma anche errori, imperfezioni e tutto ciò che può dare ancor più significato a questo tentativo di ricerca in campo educativo.

3.2 Conclusioni personali

L'opportunità di condurre un'indagine sperimentale in campo educativo ha dato la possibilità di completare ed arricchire di nuove riflessioni il percorso formativo scandito dalle esperienze del tirocinio e dallo studio delle diverse discipline.

Grazie a questa esperienza di ricerca ho maturato la consapevolezza della necessità di una nuova figura docente che assuma un atteggiamento scientifico nei confronti dei propri risultati e di quelli dei propri alunni. Un insegnante che non si limiti a leggere, a ripetere o a catalogare i fatti e i risultati che di volta in volta scaturiscono dal proprio intervento, ma che li metta alla prova, li sperimenti attraverso la continua ricerca di strumenti, metodi e di tutto ciò che può contribuire a quell'innalzamento di qualità formativa, oggi da più parti invocato.

L'assunzione di un tale atteggiamento permette all'insegnante non solo di conoscere meglio la realtà scolastica all'interno della quale opera, in termini di competenze e di abilità possedute dagli alunni, ma soprattutto di approcciarsi ai problemi dell'insegnamento con particolare sensibilità e con un'ottica razionale.

In questo senso, il presente lavoro ha dato la possibilità di essere protagonisti del processo di insegnamento-apprendimento, un processo all'interno del quale si è cercato di non limitare la propria azione alla conoscenza di determinati comportamenti ma di ricercarne costantemente il perché e le cause.

L'aspetto più importante che ha connotato tutto il lavoro, non è rintracciabile, quindi, solo nelle informazioni ottenute grazie alle due fasi sperimentali che riguardano più specificatamente la tematica dell'infinito nella scuola elementare, ma nell'atteggiamento critico e nella metodologia che hanno animato l'intera ricerca e che le hanno conferito, pur nella sua incompletezza e non esaustività, quel carattere di significatività proprio della ricerca didattica.

Bibliografia

ARRIGO G.- D'AMORE B. (2002), "Lo vedo, ma non ci credo…, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor", in *La matematica e la sua didattica*, n.1/2002, pagg. 4-45.

D'AMORE B. (2001), "Didattica della matematica", Pitagora Editrice, Bologna.

D'AMORE B. (1997), "Bibliografia in progress sul tema: L'infinito in didattica della matematica", in *La matematica e la sua didattica*, n.3/1997, pagg. 289-305.

FERRARI E.- A. LAGANA' G.- LUZI E.- TROVINI E. (1995) "Il concetto di infinito nell'intuizione matematica", in *L'insegnamento delle Scienze Integrate*, vol. 18B-N.3, Giugno 1995, pagg. 211-235.

FISCHBEIN E.- SCHNARCH D. (1998), "L'evoluzione dei concetti probabilistici fondati intuitivamente, con l'età", in *La matematica e la sua didattica*, n.1/1998, pagg. 4-18.

NANNANCINI M. P. (2001), "L'infinito matematico nella scuola di base", (a cura di) Bruno D'Amore, Atti del Convegno "Incontri con la matematica N.15", Comune di Castel S. Pietro Terme, 9-10-11Novembre 2001, Pitagora Editrice, Bologna, pagg.163-172.

SBARAGLI S. (2001), "Infiniti e infinitesimi nella scuola di base", (a cura di) Bruno D'Amore, Atti del Convegno "Incontri con la matematica N.15", Comune di Castel S. Pietro Terme, 9-10-11Novembre 2001, Pitagora Editrice, Bologna, pagg. 187-193.

SPAGNOLO F. (1995), "Ostacoli epistemologici: il Postulato di Eudosso-Archimede", in *Quaderni di ricerca in didattica*-SUPPLEMENTO AL N. 5, Palermo.

SPAGNOLO F. (1998), "Insegnare le matematiche nella scuola secondaria", La Nuova Italia, Firenze

http://digilander.libero.it/rikidox/infinito 1.htm

http://www.matematicamente.it/approfondimenti/maida/1%5C21.htm