“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n.21, 2011
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Al limite…potrei giocare così

Finardi A.[1] Licciardi G.[1] Raspanti M.A.[1]

antonino.finardi@libero.it licciardi-giuseppe@virgilio.it mariannaraspanti@yahoo.it

Sommario: *Questo articolo è il prodotto finale di una serie di studi ed esperienze svolte nell’ambito accademico e riguardanti le discipline di Didattica della Matematica[2] frequentati negli a.a. 2008/2010.*

Tale lavoro è centrato sul concetto di limite di una funzione, limite di una successione e su un particolare limite notevole. Abbiamo preferito trattare il concetto di limite perché crediamo che tale concetto stia alla base dell’analisi matematica e che nella sua interpretazione presenti agli studenti non poche difficoltà di tipo concettuale.

Nell’articolo per sottolineare questo aspetto, abbiamo analizzato, seppur in una prima approssimazione, il percorso storico-epistemologico dello stesso concetto.

Dal punto di vista didattico abbiamo poi proposto questo argomento in maniera diversa dagli schemi usuali e quindi con un contatto più diretto e meno astratto che potesse maggiormente stimolare l’interesse di studenti di scuola Secondaria Superiore e favorirne una più facile comprensione.

Una prima fase del nostro lavoro riguarda lo studio delle strategie risolutive adottate dagli studenti, una volta che fosse stato loro presentato un problema. La seconda parte nasce come prosecuzione e perfezionamento della prima, prendendo in esame una situazione a-didattica in modo da renderla realizzabile praticamente.

Summary: *This article is the final work of a series of studies and experiences done in the academic background and concerning the subjects of Mathematics Teaching[2] attended in the years 2008/2010.*

This work is focused on the concept of limit of a function, limit of a succession and on a particular remarkable limit. We preferred treating the concept of limit because we guess it lays on the basis of mathematics analysis and that, in its interpretation, it causes not few difficulties to students.

In the article, in order to underline this aspect, we have analyzed, even if as a first approximation, the historical-epistemological line of the concept of limit.

From the didactical point of view, we proposed this topic in a different way from usual schemes; than in a straighter and less abstract way, able to stimulate as much as possible the interest of the students attending High School and promote an easier comprehension.

The first phase of our work concerns the study of resolution strategies used by the students, once a problem had been introduced to them. The second part was born as a prosecution and amelioration of the first one, focused on an a a-didactical situation in order to make it practically realizable.

1. Prima situazione sperimentale

L’analisi storico epistemologica riguardo a un particolare concetto ha un ruolo fondamentale, in quanto ci permette di dare delle rappresentazioni dei percorsi conoscitivi, nei vari periodi e in diversi ambiti: sintattico, semantico e pragmatico.

---

[1] C.d.L. Specialistica in Matematica, Università di Palermo.

[2] Si ringraziano i docenti, Prof. Filippo Spagnolo, Dott. Benedetto Di Paola.

In particolare per il concetto di limite, l’analisi storico epistemologica, non si deve basare solo su una descrizione storica minuziosa dello sviluppo di tale concetto, ma piuttosto deve cercare di carpire le esigenze, le problematiche e gli ostacoli che hanno portato alla nascita di tale concetto.

Per quanto riguarda l’analisi degli ostacoli storico epistemologici legati alla complessità della nozione di limite si possono mettere in rilievo diverse problematiche associate a varie questioni.

- Aspetto geometrico del concetto di limite: considerando la differenza tra una grandezza variabile e una grandezza costante che è il suo limite.
  Ad esempio, il cerchio può essere visto come il limite di poligoni inscritti o circoscritti.
- Aspetto metafisico: la nascita dell’analisi matematica rappresenta un vero e proprio salto di qualità, dove le matematiche non si riducono al solo calcolo e a semplici proprietà algebriche, ma portano alla nascita del problema dell’infinito, che potrà essere trattato con il passaggio al limite, come metodo di dimostrazione che segue uno schema rigoroso.
- Irraggiungibilità o meno del valore assunto come limite.
- Numeri infinitamente piccoli e infinitamente grandi: iniziano a nascere i problemi sull’esistenza di numeri, come ad esempio ε, sufficientemente piccoli, ma non nulli e analogamente sull’esistenza di numeri più grandi di tutti gli altri, ma non infiniti.
- Trasferire i metodi propri dell’algebra atti a manipolare grandezze finite, per grandezze infinite.
- Dare delle giustificazioni sul passaggio al limite, attraverso una formula che descriva tale situazione e che permetta una verifica a posteriori con un semplice calcolo, senza cercare di dare dimostrazioni rigorose.
- Il passaggio al limite concepito come passaggio da una visione statica a una visione dinamica e dunque riuscire a prevedere ciò che avviene all’infinito tramite le conoscenze sul comportamento al finito.
- Riguardo al principio di continuità di Leibniz, nel trasportare le proprietà dei termini di una successione convergente al suo limite.
- Con la nascita del concetto di funzione, si pongono le basi per una formulazione del concetto di limite, libera da intuizioni geometriche, non si parla più di valori consecutivi e l’attenzione è rivolta sopratutto alla parte relazionale della funzione.
- Ostacoli logici: legati alla mancanza di quantificatori come spesso appare, quando per definire il limite ci si serve di un linguaggio naturale non simbolico. Un altro problema è legato all’ordine dei quantificatori nella definizione di limite, infatti, la funzione ci porta da un punto sul dominio a un punto sul condominio, invece lo studio del limite ha un punto di vista inverso, ossia per ogni numero ε riferito al codominio considera l’esistenza di un numero δ riferito al dominio.

- Ostacoli legati ai simboli: all’inizio dell’analisi classica, i simboli non erano ancora stati introdotti, successivamente con Cauchy si avrà tale necessità, in quanto il concetto di limite verrà messo alla base di altre nozioni quali la derivata, la continuità e l’integrale.

1.1. Rappresentazione Storico-Epistemologica: Il limite nella storia

Affrontare questo aspetto richiederebbe ulteriori approfondimenti, in questa sede ci siamo limitati ad un’indagine conoscitiva del percorso storico del concetto indagato, analizzandolo in uno specifico periodo storico, che riteniamo maggiormente significativo. In questo senso, uno dei periodi più importanti della storia della matematica è stato quello che comprende i secoli durante i quali si sono gettate le basi del calcolo infinitesimale: dalla fine del '500, con i primi tentativi di proseguire l'opera di Archimede, alla redazione degli scritti di Cauchy e di Weierstrass (XVIII e XIX secolo).

Il concetto di limite era già presente, anche se in forma non esplicita, nella matematica greca, poiché molti risultati sui calcoli di aree e di volumi ricavati dai matematici greci erano, in sostanza, basati su un passaggio al limite.

I Greci avevano utilizzato il metodo di esaustione che costituisce, in effetti, il primo passo verso il calcolo differenziale e integrale, ma non fa uso di una teoria esplicita dei limiti.

Tale metodo si basava sul:

> Postulato di Eudosso-Archimede. *Date due grandezze “omogenee” (concetto considerato primitivo) A e B, con A < B, esiste un numero n tale che nA > B.*

Da questo si può dimostrare (per grandezze che soddisfano tale postulato, o “che hanno fra loro rapporto”, come affermato in Euclide, Elementi, Libro V) che:

Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.

Tradotto in termini moderni, ciò equivale ad affermare che se M è la grandezza e $\frac{1}{2} \leq r < 1$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} M(1-r)^n = 0;$$

chiaramente è sufficiente $0 < r < 1$.

"V'è alla base del metodo di esaustione un procedimento infinitesimale, che corrisponde all'odierno metodo delle successioni convergenti; manca però il concetto esplicito di limite" (Ludovico Geymonat, 1947).

"Kepler fu il primo matematico del '600 ad abbandonare senza compromessi il metodo di esaustione e le sue difficili dimostrazioni per assurdo. Lo sostituì con molta disinvoltura per mezzo di ragionamenti diretti sugli infiniti e gli infinitesimi" (Ludovico Geymonat, 1947).

Gli scritti indipendenti dell'inglese Isaac Newton e del tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz (XVII e XVIII secolo) gettarono le basi del calcolo infinitesimale.

Dovevano, però, trascorrere diversi anni prima di giungere con Eulero nel 1755 ad una prima definizione di limite, anche se egli non la utilizzò e non sviluppò la teoria dei limiti.

Nelle sue Institutiones egli afferma:

"Non c'è dubbio che ogni quantità può essere diminuita in misura tale da annullarsi completamente e svanire. Ma una quantità infinitamente piccola non è nient'altro che una quantità evanescente e perciò la cosa stessa è uguale a zero. Ciò è anche in armonia con quella definizione delle cose infinitamente piccole in cui si dice che sono minori di qualunque quantità assegnabile; è certo che essa dovrebbe essere nulla perché, a meno che non sia uguale a zero, sarebbe possibile assegnarle una quantità uguale, il che è contrario all'ipotesi".

Anche D'Alembert diede una formulazione del concetto di limite. Nell'articolo "limite" scritto per l'*Encyclopédie* chiamava una quantità di limite di una seconda quantità (variabile) se questa seconda quantità si avvicinava alla prima così tanto che la differenza fosse inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa). L'imprecisione di questa definizione la rese inaccettabile per i suoi contemporanei, infatti gli autori di manuali matematici dell'Europa continentale continuarono a usare fino alla fine del XVIII secolo il linguaggio e i concetti di Eulero.

Si deve a Augustin Louis Cauchy e, soprattutto, alla successiva formalizzazione di Karl Weierstrass, una definizione rigorosa di limite e, mediante essa, una costruzione rigorosa dell'analisi matematica.

Cauchy assunse come fondamentale il concetto di limite di D'Alembert, ma gli conferì una maggiore precisione. Egli formulò una definizione relativamente precisa di limite:

"Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri".

La definizione di Cauchy, come leggiamo, faceva uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" o "così piccolo quanto si vuole". Per quanto suggestive, queste definizioni sono, nondimeno, prive di quella precisione che generalmente si esige dalla matematica.

Successivamente Cauchy diede una definizione di funzione continua altrettanto rigorosa; nel Cours dice: *“sia* $f(x)$ *una funzione di una variabile x e si supponga che, per ogni valore di x compreso fra due limiti dati, questa funzione assuma costantemente un valore finito e unico. Se, iniziando da un valore di x compreso fra questi limiti, si assegna alla variabile x un incremento infinitamente piccolo α, la funzione assumerà come incremento la differenza* $f(x+\alpha)-f(x)$ *che dipenderà allo stesso tempo dalla nuova variabile α e dal valore di x. Ciò posto, la funzione* $f(x)$*, fra i due limiti assegnati alla variabile x, è una funzione* continua *della variabile se, per ciascun valore di x compreso fra questi due limiti, il valore numerico della differenza* $f(x+\alpha)-f(x)$ *decresce indefinitamente insieme con quella di α. In altre parole, la funzione f(x) rimarrà continua rispetto a x fra i due limiti dati se, fra questi limiti, un incremento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un incremento infinitamente piccolo della funzione. Diciamo anche che la funzione* $f(x)$ *è una funzione continua di x nell’intorno di un particolare valore assegnato alla variabile x se essa è continua fra questi due limiti di x, comunque prossimi essi siano, che includono il valore in questione”.*

Il rigore conseguito da Cauchy è insufficiente rispetto agli standard moderni.

L’analisi rigorosa fu poi proseguita da Weierstrass, che diede le definizioni di continuità e di limite di una funzione oggi comunemente accettate:

“una funzione $f(x)$ *è continua per* $x=x_0$ *se, dato un qualunque numero positivo □, esiste un δ tale che, per tutti gli x tali che* $|x-x_0|<\delta$*, si ha* $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ *”*□

“una funzione $f(x)$ *ha come limite L per* $x=x_0$ *se, dato un qualunque numero positivo □, esiste un δ tale che, per tutti gli x tali che* $|x-x_0|<\delta$*, si ha* $|f(x)-L|<\varepsilon$ *”*□

"una funzione $f(x)$ *è continua in un intervallo di valori di x se è continua per tutti gli x dell'intervallo".*

1.2. Situazione Problema

Sulla base dell'evoluzione storica del concetto di limite, nelle sue peculiarità di definizione, e rappresentazione, abbiamo provato a definire una situazione problema in grado di mettere in luce le eventuali difficoltà degli studenti nell'affrontare il calcolo del limite (e nello specifico uno dei limiti notevoli più noti) e, parallelamente analizzare le possibili convergenze tra il percorso storico e quello didattico.

Riportiamo di seguito il testo del problema:

"Facendo uso del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$*, calcolare il limite* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ *elaborando almeno due modalità di risoluzione".*

1.2.1 Analisi del testo del Problema

Il problema è stato concepito per essere proposto a studenti che avessero buone conoscenze matematiche: si tratta del limite di una funzione che non è definita nel punto in cui si vuole calcolare il limite; quindi, ci si trova di fronte ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e tale indeterminazione può essere eliminata con diversi metodi.

Dunque, per risolvere tale quesito, è necessario che si abbia ben chiaro il concetto di limite, che si conoscano i limiti notevoli fondamentali, i teoremi per il calcolo dei limiti e che si sia in grado di studiare la continuità e la discontinuità di una funzione. Inoltre, bisogna che alla base delle conoscenze nel campo dell'analisi, vi sia una buona preparazione di algebra e trigonometria.

Lo studente può ricondurre la funzione ad una forma che permetta di calcolarne il limite, eliminando la forma indeterminata, mediante l'uso delle formule goniometriche o dei teoremi per il calcolo dei limiti.

Considerato ciò, abbiamo scelto di sottoporre al test, studenti di quinto anno di liceo scientifico, che in questa fase dei loro studi, dovrebbero possedere già i requisiti di cui sopra ed essere in grado di elaborare più di una strategia risolutiva.

Abbiamo affrontato l'esperienza nei seguenti licei scientifici:

- Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" (Palermo)[3]
- Istituto Superiore "E. Basile" Sezione Liceo Scientifico (San Giuseppe Jato)[4]

[3] Si ringrazia il docente dell'istituto, Prof. Carmelo Arena.
[4] Si ringrazia il docente dell'istituto, Prof. Rosalia Vascellaro.

Ad entrambe le classi abbiamo assegnato lo stesso problema, con la differenza che gli studenti del Liceo Scientifico "S. Cannizzaro" hanno avuto a loro disposizione due ore di tempo per risolvere il problema, mentre quelli del Liceo Scientifico "E. Basile" hanno avuto a disposizione soltanto un'ora di tempo.

1.3. Strategie Risolutive: un'analisi a priori

Per evidenziare possibili ostacoli ed errori degli allievi coinvolti sperimentalmente, abbiamo analizzato in una fase preliminare le possibili strategie risolutive che gli studenti avrebbero potuto mettere in atto. Queste si distinguono in strategie corrette, non corrette e non previste. Riportiamo di seguito un elenco delle strategie di risoluzione che abbiamo ipotizzato. Nel paragrafo successivo abbiamo integrato queste con un'analisi comparativa di tre libri di testo utilizzati nelle classi coinvolte nella fase sperimentale.

- *Strategie Risolutive Corrette*

S1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed osserva che le funzioni $f(x)=1-\cos x$ e $g(x)=x^2$ soddisfano le ipotesi del teorema di De L'Hopital, quindi, applica correttamente tale teorema e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

S2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, procede moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1+\cos x$ e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

S3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per eliminare tale forma indeterminata, lo studente, considera la formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ ottenendo così $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

dove $y=\frac{x}{2}$;

S4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per eliminare tale forma indeterminata, lo studente, considera la formula di bisezione $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$ oppure $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ottenendo così $1-\cos x=\sin x\cdot\tan\frac{x}{2}$ e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\tan\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin y}{y}\right)\cdot\frac{1}{\cos y}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$, dove $y=\frac{x}{2}$;

S5) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per eliminare tale forma indeterminata, lo studente, considera la formula di bisezione $\cot\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ oppure $\cot\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ottenendo così $1-\cos x=\sin x\cdot\frac{1}{\cot\frac{x}{2}}$ e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1}{\cot\frac{x}{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x\cdot\cot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin y}{y}\right)\cdot\frac{1}{\cos y}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\text{, dove } y=\frac{x}{2};$$

S6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per eliminare tale forma indeterminata, lo studente, considera la formula di duplicazione $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ ottenendo così $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ e sapendo che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, risolve facilmente il limite proposto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\ \text{ dove } y=\frac{x}{2};$$

S7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed osserva che le funzioni $f(x)=1-\cos x$ e $g(x)=x^2$ soddisfano le ipotesi del teorema di De L'Hopital, quindi, applica correttamente tale teorema:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=?$$

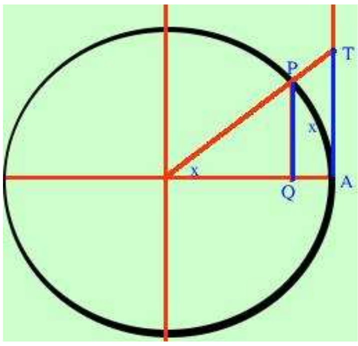
A questo punto, lo studente non ricorda il valore del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, ma nota che le funzioni $u(x)=\sin x$ e $v(x)=x$ soddisfano le ipotesi del teorema di De L'Hopital, quindi, riapplica tale teorema:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

S8) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e calcola tale limite per via geometrica, ricordando la dimostrazione del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Tale dimostrazione si basa sull'utilizzo del teorema "del confronto" o "dei due carabinieri", dove vengono considerate due funzioni di cui una che limita superiormente la funzione $\frac{\sin x}{x}$, l'altra che la limita inferiormente.



Come si può vedere dalla figura, la lunghezza del segmento $\overline{PQ} = \sin x$ risulta essere minore della lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP} = x$ che a sua volta è minore della lunghezza del segmento $\overline{AT} = \tan x$; si ottiene così la seguente disuguaglianza:

$$\sin x < x < \tan x$$

dividendo per $\sin x$ (operazione lecita in quanto $0 < x < \frac{\pi}{2}$) si ottiene:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo i tre membri e cambiando, di conseguenza, i versi delle disuguaglianze, risulta:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

A questo punto, applicando il teorema del confronto la funzione $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0^+$, in quanto è compresa tra le due funzioni $y = \cos x$ e $y = 1$, le quali tendono contemporaneamente al limite $\ell = 1$ per $x \to 0^+$.

Tale risultato si ottiene anche per $x \to 0^-$, poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari.

E' possibile concludere che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

- *Strategie Risolutive Non Corrette*

S9) Lo studente non riesce a risolvere il limite proposto;

S10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0} \qquad \Rightarrow \qquad \nexists\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, non sa come trattare le forme indeterminate e crede pertanto che il limite non esista;

S11) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0} \qquad \Rightarrow \qquad \nexists\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, non sa come trattare le forme indeterminate e crede pertanto che il limite non esista. In particolare lo studente non si pone il problema di conoscere il dominio della funzione e considera il limite come semplice sostituzione di 0 ad x;

S12) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}=1$

Lo studente non si pone il problema di conoscere il dominio della funzione, considera il limite come semplice sostituzione di 0 ad x, e vede la forma $\frac{0}{0}$ come rapporto di quantità uguali, e quindi pari ad 1;

S13) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}=0$

Lo studente non si pone il problema di conoscere il dominio della funzione, considera il limite come semplice sostituzione di 0 ad x, assimila la forma $\frac{0}{0}$ alla forma $\frac{0}{n}$ quindi pari a 0;

S14) $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=+\infty$$

Lo studente tiene conto del dominio della funzione, calcola i limiti per x che tende a 0 da destra e da sinistra, e li tratta entrambi come limiti del prodotto di due funzioni: la prima $(1-\cos x)$ limitata, la seconda $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ tendente a +∞ per x che tende a 0. Essendo i limiti da destra e da sinistra coincidenti, lo studente conclude che il limite propostogli esiste e tende a +∞;

S15) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{x^2}=+\infty$

In questo caso lo studente non tiene conto del dominio della funzione, non distingue i limiti per x che tende a 0 da destra e da sinistra, tratta il limite come limite del prodotto di due funzioni, una limitata l'altra tendente a +∞ per x che tende a 0. Conclude che il limite propostogli tende a +∞;

S16) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{x^2} \quad \to \quad f.i. \quad 0\cdot(+\infty)$

In questo caso lo studente non tiene conto del dominio della funzione, non distingue i limiti per x che tende a 0 da destra e da sinistra, tratta il limite come limite del prodotto di due funzioni, una tendente a 0, l'altra tendente a +∞ per x che tende a 0. Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $0\cdot(+\infty)$ e conclude che il limite non esiste;

S17) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed applica il teorema di

De L'Hopital senza verificare le ipotesi, ricordando che tale teorema serve ad eliminare le forme indeterminate;

S18) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed applica il teorema di

De L'Hopital senza verificare le ipotesi, ricordando che tale teorema serve ad eliminare le forme indeterminate. Applica il teorema erroneamente, considerando, piuttosto che le singole derivate $\frac{d}{dx}(1-\cos x)$ e $\frac{d}{dx}(x^2)$, la derivata $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$ e ottenendo così risultati non corretti;

S19) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, decide di semplificare la funzione per via trigonometrica e ricorda erroneamente *l'identità fondamentale della trigonometria*, ponendo $1-\cos x=\sin^2 x$ o $1-\cos x=\sin x$ oppure $1-\cos^2 x=\cos^2 x$;

S20) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e nel tentativo di ricondursi al limite notevole fondamentale, non ricorda che vale la seguente identità: $\sin^2 x = (\sin x)^2$;

S21) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e tenta di calcolare tale limite per via geometrica, ricordando la dimostrazione del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, ma senza ottenere il risultato corretto;

S22) Lo studente non ricorda il valore del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ e commette errori di vario genere nel tentativo di calcolarlo.

- *Strategie Risolutive Non previste*

S23) Lo studente dimostra che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica come mostrato nella strategia S8;

S24) Lo studente vuole dimostrare che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica procedendo similmente a come mostrato nella strategia S8, ma commette errori che non comportano variazioni nel risultato finale;

S25) Lo studente commette errori di trascrizione tra un passaggio e l’altro;

S26) Lo studente ricorda erroneamente che il limite del prodotto di due funzioni è uguale alla somma dei limiti delle due funzioni;

S27) Lo studente considera nei vari passaggi $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{x^2}=1$;

S28) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to f.i.\ \frac{0}{0}$

Lo studente nota che tale limite conduce ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed applica il teorema di De L’Hopital senza verificarne le ipotesi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=?$$

A questo punto, lo studente non ricorda il valore del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, quindi, riapplica tale teorema (senza verificare le ipotesi):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

S29) Lo studente ha le idee poco chiare riguardo al Teorema di De L'Hopital e lo applica in modo errato;

S30) Lo studente commette un errore nel derivare la funzione $\sin x$;

S31) Lo studente commette un errore nell'elevazione a potenza;

S32) Lo studente ha delle difficoltà nell'elaborare la strategia S3 e pertanto non arriva ad una conclusione;

S33) Lo studente commette degli errori perché copia il compito da un compagno, il cui compito presenta gli stessi errori.

1.4. Analisi comparativa dei libri di testo

I libri di testo presi in esame sono i seguenti:

1. L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica per i Licei Scientifici Sperimentali* - Tomo 2B, ETAS;
2. N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Nuovi Elementi di Matematica* - Tomo B, Ghisetti e Corvi Editori;
3. M. Battelli, U. Moretti, *Corso di Matematica Sperimentale e Laboratorio* - Vol.4, Le Monnier.

I primi due testi in elenco sono quelli adottati nelle classi in cui abbiamo svolto le esperienze didattiche; il terzo è un ulteriore testo preso in esame, per compararlo con gli altri due.

Analizziamo come i limiti notevoli sono trattati in ciascuno dei tre testi, ponendo l'attenzione sul limite notevole fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e sul limite proposto come situazione problema $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Tutti i testi presi in esame affrontano la dimostrazione del limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica (come mostrato nella strategia risolutiva S8).

Per quanto riguarda il limite proposto come situazione problema i tre testi si pongono in maniera differente. Il testo (1), adottato dalla classe V sez. G del Liceo Scientifico "S. Cannizzaro", propone tale limite come esercizio, omettendo il procedimento di risoluzione.

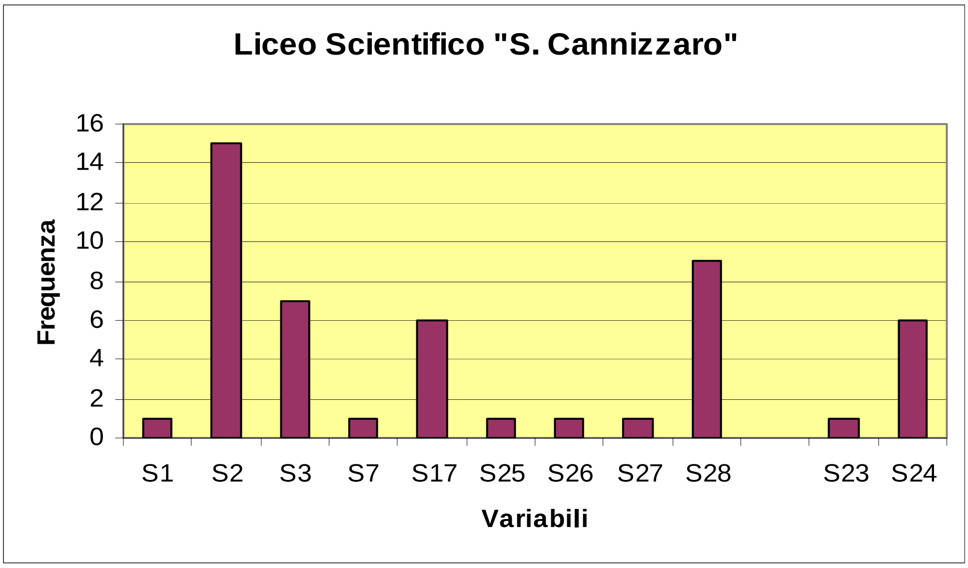
Il testo (2), adottato dalla classe V sez. A del Liceo Scientifico "E. Basile", propone tale limite tra gli esempi svolti, come applicazione del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, mostrando la strategia risolutiva S2 (ossia moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $1+\cos x$). Infine, il testo (3) pone tale limite tra gli esempi di applicazione del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, usando la strategia risolutiva S3, che utilizza la formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. Inoltre, tale testo, indica la strategia risolutiva S2 come esercizio.

1.5. Analisi quantitativa dei dati raccolti e prime conclusioni

Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" di Palermo

S1	**S2**	**S3**	**S7**	**S17**	**S25**	**S26**	**S27**	**S28**		**S23**	**S24**
1	15	7	1	6	1	1	1	9		1	6

Tabella (A)

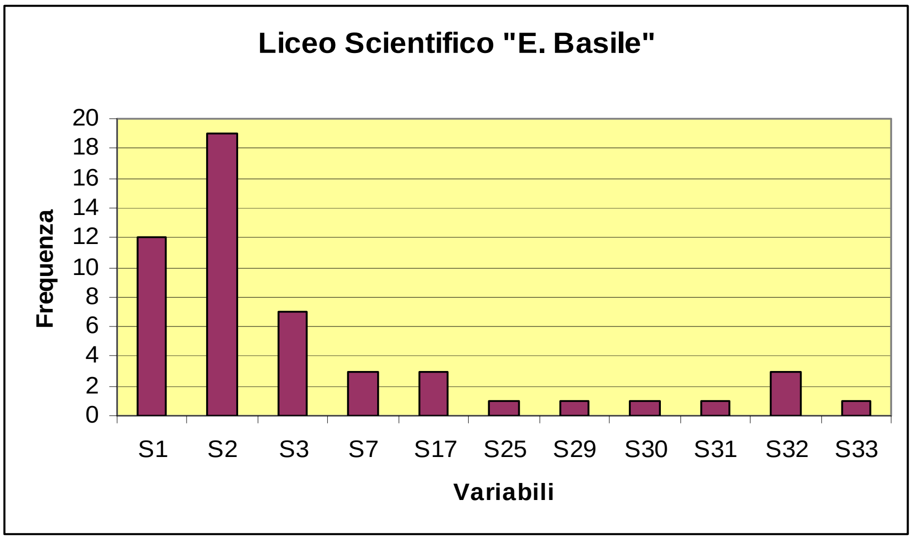


Istogramma (A)

Istituto Superiore "E. Basile" Sezione Liceo Scientifico di San Giuseppe Jato

S1	**S2**	**S3**	**S7**	**S17**	**S25**	**S29**	**S30**	**S31**	**S32**	**S33**
12	19	7	3	3	1	1	1	1	3	1

Tabella (B)

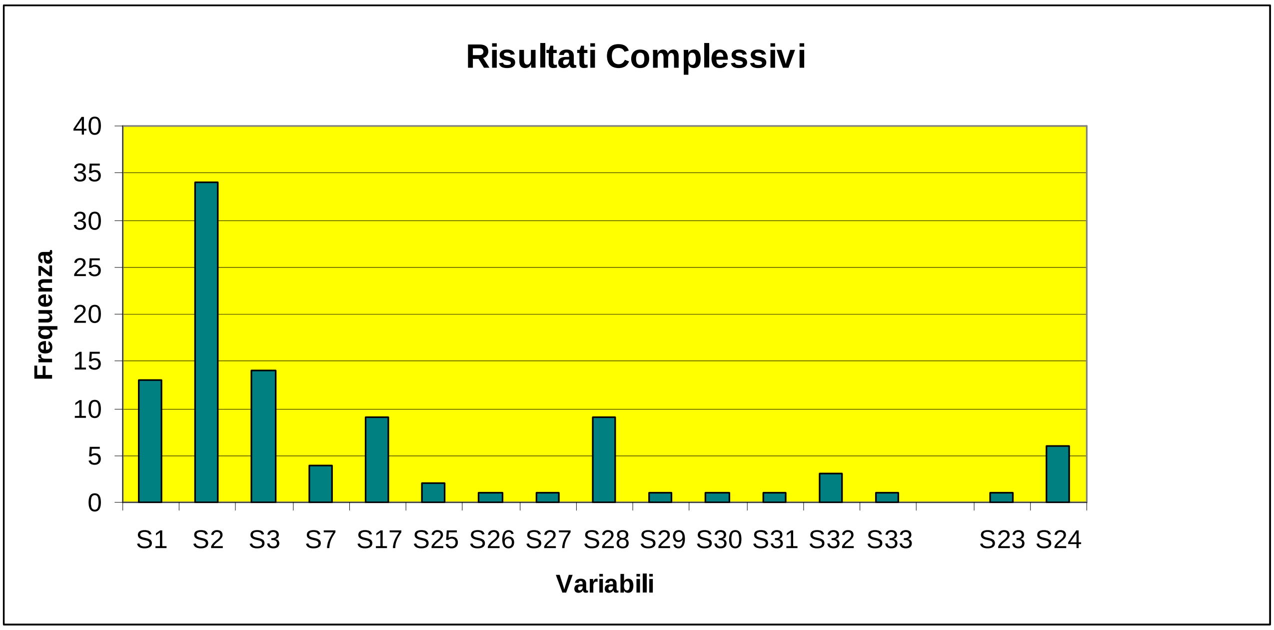


Istogramma (B)

Risultati Complessivi:

S1	**S2**	**S3**	**S7**	**S17**	**S25**	**S26**	**S27**	**S28**	**S29**	**S30**	**S31**	**S32**	**S33**		**S23**	**S24**
13	34	14	4	9	2	1	1	9	1	1	1	3	1		1	6

Tabella (C)



Istogramma (C)

1.6. Analisi qualitativa dei dati

Nel maggio 2009 abbiamo sottoposto il problema agli studenti della classe V sez. G del Liceo Scientifico “S. Cannizzaro” e a quelli della classe V sez. A del Liceo Scientifico “E. Basile”; alla fine del tempo a disposizione gli studenti hanno consegnato un elaborato scritto, che, nei giorni successivi, abbiamo analizzato evidenziando, a parte le strategie da noi previste e le probabili strategie di risoluzione da noi non previste.

Qualche giorno dopo, siamo tornati in aula per discutere con ogni singolo studente, l’elaborato da esso prodotto. Tale discussione è stata affrontata per comprendere l’origine degli errori commessi da ciascun studente e per confermare le strategie di risoluzione da noi non previste.

I risultati ottenuti sono stati tradotti in dati statistici e riportati nelle tabelle A e B rappresentate in precedenza. Analizziamo, ora, nel dettaglio i risultati ottenuti in ogni classe.

- ***Classe V sez. G del Liceo Scientifico “S. Cannizzaro” di Palermo***

Gli studenti presenti in aula erano diciassette su un totale di diciotto alunni e alla fine delle due ore a disposizione, tutti gli studenti hanno consegnato l’elaborato scritto.

Tutti gli studenti sono stati in grado di elaborare almeno due strategie risolutive (a prescindere dagli errori) e soltanto otto di loro hanno presentato una terza strategia.

Inoltre, la maggior parte degli studenti, come prima strategia, ha calcolato il limite assegnato utilizzando il teorema di De L’Hopital, anche se con procedimenti diversi. Come seconda modalità di risoluzione, prevale la strategia S2 che consiste nel semplificare il calcolo del limite moltiplicando e dividendo la funzione per il fattore $(1+\cos x)$.

Coloro che hanno fornito una terza modalità di risoluzione, hanno utilizzato in maggioranza la strategia S3 che consiste nel semplificare il calcolo del limite sfruttando la formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

Per quanto riguarda l’applicazione del teorema di De L’Hopital abbiamo osservato che è stata effettuata in modo corretto, ma soltanto due studenti ne hanno verificato le ipotesi (S1, S7).

Inoltre dieci studenti hanno calcolato il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ applicando il teorema di De L’Hopital una seconda volta (S7, S28), mentre sette studenti hanno dimostrato che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica (S23, S24), nonostante non fosse richiesto.

Infine abbiamo evidenziato tre casi in cui vengono commessi o errori di trascrizione tra un passaggio e l’altro (S25) o errori dovuti alla scarsa conoscenza dei teoremi sui limiti (S26) oppure errori dovuti al calcolo dei limiti (S27).

- ***Classe V sez. A del Liceo Scientifico “E. Basile” di San Giuseppe Jato***

Gli studenti presenti in aula erano venti su un totale di ventidue alunni. Alla fine dell’ora a disposizione, tutti gli studenti hanno consegnato l’elaborato scritto.

Tutti gli studenti sono stati in grado di elaborare almeno due strategie risolutive (a prescindere dagli errori) e dodici di loro hanno presentato una terza strategia. Inoltre, gli studenti si sono divisi equamente nel risolvere il problema utilizzando come prime due modalità di risoluzione, o il teorema di De L’Hopital, anche se con procedimenti diversi, o la strategia S2 (per ben diciannove volte) che consiste nel semplificare il calcolo del limite moltiplicando e dividendo la funzione per il fattore $(1+\cos x)$.

Coloro che hanno fornito una terza modalità di risoluzione, hanno utilizzato in maggioranza la strategia S3 che consiste nel semplificare il calcolo del limite sfruttando la formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. Altri tre studenti hanno avuto delle difficoltà nell’elaborare la strategia S3 e pertanto non arrivano ad una conclusione (S32), mentre uno studente nel tentativo di elaborare tale strategia commette un errore nell’elevazione a potenza (S31).

Per quanto riguarda l’applicazione del teorema di De L’Hopital abbiamo osservato che è stata effettuata in modo corretto da diciotto studenti (S1, S7, S17), di cui soltanto tre studenti non hanno verificato le ipotesi (S17). Altri due studenti applicano tale teorema in modo errato (S29, S30), uno dei quali commette un errore nel derivare la funzione $\sin x$ (S30).

Inoltre soltanto tre studenti hanno calcolato il limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ applicando il teorema di

De L’Hopital una seconda volta (S7), mentre nessun studente ha dimostrato che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica (anche perché non era richiesto).

Infine abbiamo evidenziato due casi in cui vengono commessi o errori di trascrizione tra un passaggio e l’altro (S25) oppure errori dovuti al fatto che lo studente copia il compito da un compagno, il cui compito presenta gli stessi errori (S33).

1.7. Primi risultati e conclusioni

Gli studenti di entrambe le classi sono riusciti a produrre almeno due modalità di risoluzione, nonostante gli studenti della classe V A del liceo “E. Basile” abbiano avuto una sola ora di tempo a disposizione per l’esecuzione della prova, contro le due ore di quelli della classe V G del liceo

“S. Cannizzaro”.

Venti studenti hanno provato ad elaborare una terza strategia, anche se non tutti in maniera corretta; in particolare otto su diciassette tra gli studenti del liceo “S. Cannizzaro”, dodici su venti tra quelli del liceo “E. Basile”.

La maggior parte degli studenti della V G utilizza, come prima strategia, l’applicazione del teorema di De L’Hopital, quelli della V A come prima strategia utilizzano equamente sia l’applicazione del teorema di De L’Hopital, sia la strategia S2. Ciò può essere motivato dal fatto che il libro di testo adottato dalla V A mostra il calcolo del limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ risolto mediante la strategia S2, mentre il testo adottato dalla V G non presenta il calcolo di tale limite, ma lo inserisce tra gli esercizi proposti.

Risulta rilevante che quindici su venti studenti della V A abbiano verificato le ipotesi del teorema di De L’Hopital prima di applicarlo, mentre sono soltanto due su diciassette quelli della V G ad aver fatto ciò.

Inoltre, sette studenti della V G hanno dimostrato che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ per via geometrica (nonostante non fosse richiesto), cosa che non avviene nella V A.

Volendo fare un quadro globale delle strategie utilizzate, su un campione di trentasette studenti, la situazione è la seguente:

- il 100% degli studenti tenta di applicare il teorema di De L’Hopital, di cui soltanto diciassette verificano correttamente le ipotesi (S1, S7), due studenti lo applicano in modo errato (S29, S30) uno dei quali commette un errore nel calcolare la derivata della funzione $\sin x$ (S30);
- il 100% degli studenti tenta di utilizzare la strategia S2, di cui trentaquattro la applicano correttamente (S2), due commettono un errore di trascrizione (S25) e un altro ha delle lacune riguardo ai teoremi sui limiti (S26);
- il 54% degli studenti tenta di elaborare la strategia S3, di cui quattordici la applicano correttamente (S3), tre non arrivano ad una conclusione (S32), uno commette un errore considerando $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{x^2}=1$ (S27) e un altro studente copia il compito da un compagno, il cui compito presenta gli stessi errori (S33).

Quindi, gli unici metodi che gli studenti hanno utilizzato per tentare di risolvere il problema sono o l’applicazione del teorema di De L’Hopital, o il moltiplicare e dividere la funzione per il fattore $(1+\cos x)$, oppure l’applicazione della formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

Probabilmente la totalità degli studenti predilige l'applicazione del teorema di De L'Hopital perché è uno strumento apparentemente semplice e immediato e che presenta minori ostacoli didattici rispetto ad altre strategie.

Per quanto riguarda il moltiplicare e dividere la funzione per il fattore $(1+\cos x)$, possiamo dire che gli studenti della V A utilizzano, forse, tale metodo perché il loro libro di testo riporta la strategia S2; mentre gli studenti della V G lo elaborano ricordando, probabilmente, qualche metodo di risoluzione proposto in passato dal docente.

I venti studenti che hanno tentato di elaborare la strategia S3, hanno utilizzato la formula di bisezione $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ perché probabilmente è la formula trigonometrica più semplice che permette di ottenere il termine $(1-\cos x)$.

Invece, abbiamo osservato che gli studenti non prendono affatto in considerazione (forse perché meno immediati) i seguenti metodi:

- l'utilizzo delle formule di bisezione $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, oppure, $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $\cot\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$, oppure, $\cot\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;
- l'utilizzo della formula di duplicazione $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$;
- il calcolo del limite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ per via geometrica.

2. Seconda situazione sperimentale

Considerati i risultati ottenuti con la prima sperimentazione, abbiamo proseguito il nostro lavoro di ricerca elaborando una seconda fase sperimentale, definita su una situazione a-didattica (Brousseau, 1997), mirata ad una possibile esplicitazione degli ostacoli didattici e epistemologici rilevati nella prima indagine sperimentale e legati alla definizione di limite.

Tale situazione a-didattica rappresenta una fase del lavoro, utile per la falsificabilità delle ipotesi definite, in questo senso in maniera esplicita:

"Se il concetto di limite di una successione viene presentato ad una classe sperimentale come situazione a-didattica, allora gli studenti riusciranno ad avere una maggiore consapevolezza dell'idea di limite e della sua definizione formale".

La sperimentazione è avvenuta in due classi del Liceo Scientifico Statale “S. Cannizzaro” di Palermo[5], nell’aprile 2010; le due classi sono state scelte in modo da avere, in partenza, una situazione equa, ovvero, una preparazione matematica equivalente e un contesto sociale simile.

Precisamente, la classe V G è stata utilizzata come classe sperimentale, mentre la classe V C come classe di controllo.

La classe sperimentale è quella in cui viene proposta la situazione a-didattica realizzata e in cui, in seguito, viene proposto un questionario (riportato in appendice).

Allo stesso questionario viene sottoposta anche la classe di controllo, per procedere alla falsificabilità delle ipotesi tramite il confronto dei risultati prodotti da entrambe le classi.

Tale questionario (uguale per le due classi) serve a testare qual è l’approccio delle due classi al concetto di limite di successione e, di conseguenza, verificare se la classe sperimentale (sottoposta alla situazione a-didattica) dimostra di avere una migliore conoscenza di tale concetto. Quest’ultimo è il risultato che ci si aspetta; d’altro canto, il questionario è stato realizzato con lo scopo di “andare contro” l’ipotesi.

2.1. Il limite di una successione numerica: Il gioco delle bocce

Abbiamo elaborato la situazione a-didattica del gioco delle bocce, relativa al limite di una successione numerica. Tale situazione si articolava nel modo seguente:

Si lancia il pallino su una guida graduata (con attrito). A seconda della forza che si esercita sul pallino, questo si posizionerà ad una certa distanza ℓ dall’origine 0 (posizione iniziale di lancio).

Il gioco si svolge fra due gruppi di giocatori (alunni della classe): Gruppo ***A*** e Gruppo ***B***.

Inizio del gioco:

I giocatori di entrambe le squadre iniziano a lanciare a turno le bocce numerate tentando di effettuare dei tiri che permettano alle bocce di raggiungere una distanza che sia più prossima possibile alla posizione del pallino. Contemporaneamente, costruiscono una tabella dove ad ogni boccia viene fatta corrispondere la distanza dall’origine, creando così una tabella del tipo:

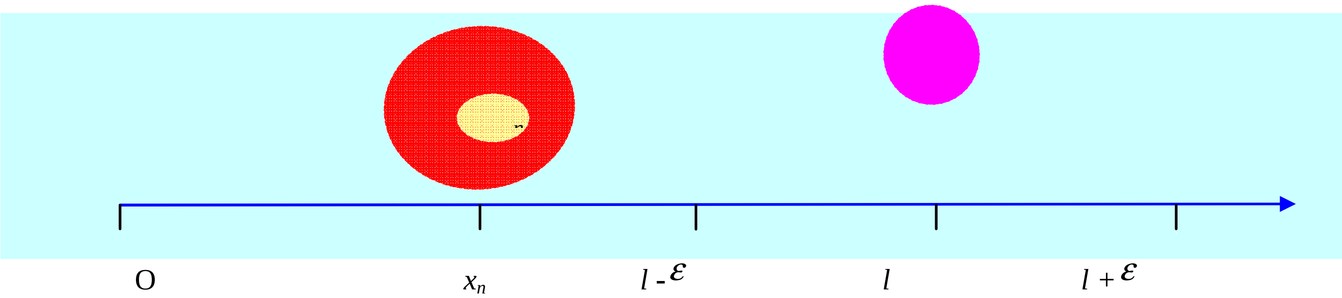
Boccia	**Distanza della boccia dall’origine**
1	x_1
2	x_2
…	…
n	x_n
...	...

[5] Si ringrazia il docente dell’istituto, Prof. Patrizia Sampino.

Dopo aver eseguito un numero abbastanza elevato di lanci, il gruppo ***A*** sceglie un numero arbitrario $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, considerando così sulla guida un intervallo del tipo] l - ε, l + ε [.

Se il gruppo ***B***, riesce a trovare un numero positivo $\bar{n} = n_\varepsilon$, tale che comunque ***A*** prenda una boccia contrassegnata con un numero *n* maggiore di n_ε, risulta la distanza di tale boccia dal pallino compresa tra l - ε e l + ε; allora ***B*** vince questa prima fase del gioco.

Il gioco prosegue, scegliendo il gruppo ***A*** ad ogni fase altri valori di $\varepsilon > 0$ sempre più piccoli; se per ogni ε, ***B*** riesce a trovare un n_ε tale che sia soddisfatta la condizione precedente, allora vince il gioco ***B***, altrimenti vince ***A***.



A tale situazione a-didattica sono state apportate le seguenti modifiche:

- Il gioco non si svolge più fra due squadre di giocatori. Le squadre, adesso, sono tre : Squadra A (costituita da noi sperimentatori), Squadra B e Squadra C (costituite dagli alunni della classe). Questa modifica è dovuta al fatto che, avendo a disposizione un tempo limitato per l'esecuzione della prova (60 minuti circa) e dovendo eseguire tale prova per diversi valori di ε, non è possibile lasciare agli studenti la scelta di tali valori. Altrimenti, potrebbe accadere che una squadra abbia la possibilità di scegliere più volte il valore di ε rispetto all'altra e, quindi, una maggiore probabilità di vincere il gioco. Questa scelta consente, quindi, di mettere le due squadre di studenti in una situazione equa, concorrendo entrambe per trovare il valore di n_ε.

- La scelta dei valori di ε è affidata alla squadra A (per le motivazioni citate nel punto precedente).

- Le posizioni occupate dalle bocce nei lanci non sono più arbitrarie, ma seguono una determinata successione numerica $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ che sappiamo convergere ad un certo limite ($\ell = 1$), perché non è possibile rappresentare praticamente una situazione generica (che si presenterebbe con delle posizioni casuali delle bocce). Inoltre, tale scelta permette di associare alle posizioni assunte dalle bocce, il concetto di successione numerica, formalizzata a livello analitico.

- Dal punto precedente, segue anche che non è più necessario costruire la tabella che metteva in relazione il numero dei lanci con le distanze delle bocce dall'origine.

- Al gioco si aggiunge una fase preliminare, in cui, data la successione delle posizioni assunte dalle bocce, si richiede di trovare una formulazione matematica che consenta di esprimere tali posizioni $\left(\frac{n-1}{n}\right)$. In questa fase, non vi è suddivisione in squadre, ma gli alunni competono singolarmente.

Segue, adesso, la situazione a-didattica presentata in classe, suddivisa in quattro fasi: consegna, azione, formulazione e validazione.

2.1.1. Fasi di Consegna e Azione

Il gioco delle bocce richiede abilità e strategia. Si può giocare uno contro uno, a coppie, a terne….. Ciascun giocatore a turno fa rotolare (accostare) la boccia verso il pallino (la boccia più piccola), precedentemente lanciato sul campo. I punti vengono assegnati ai giocatori le cui bocce si sono avvicinate di più al pallino.

Supponiamo che le posizioni assunte dalle bocce siano le seguenti:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \ldots$$

Osservando tale sequenza, esiste una formula matematica che permetta di esprimere tali posizioni?

In caso affermativo, determinare tale formula.

Vince questa prima fase, lo studente che la determina per primo ed ottiene un punto bonus che andrà a sommarsi ai punti della squadra di cui successivamente farà parte.

Questa prima fase può essere vista a sua volta come una situazione a-didattica relativa alla formalizzazione analitica del concetto di successione; quindi consiste anch'essa di quattro fasi: consegna, azione, formulazione e validazione.

Adesso inizia il gioco vero e proprio.

Si lancia il pallino su una guida graduata (con attrito). A seconda della forza che si esercita sul pallino, questo si posizionerà ad una certa distanza ℓ dall'origine 0 (posizione iniziale di lancio).

Stabiliamo che tale distanza sia pari ad $\ell = 1$.

Si formano tre squadre: la prima (squadra A) costituita da noi sperimentatori, le altre due (squadra B e squadra C) ottenute suddividendo la classe in due gruppi. Ogni squadra deve avere un proprio portavoce.

Comincia il gioco la squadra A scegliendo un numero positivo ε abbastanza piccolo, contrassegnando così sulla guida i valori $\ell - \varepsilon$, $\ell + \varepsilon$.

Le squadre B e C iniziano a lanciare a turno le bocce in modo tale che la posizione occupata dalla boccia nell'n-esimo lancio rispetti la formula determinata nella prima fase $\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Inoltre, si deve rispettare la condizione che ogni lancio sia più prossimo al pallino rispetto al lancio precedente.

Da ciò segue che: al lancio 1 corrisponde la posizione 0, al lancio 2 corrisponde la posizione $\frac{1}{2}$, al lancio 3 corrisponde la posizione $\frac{2}{3}$, e così via.

Lo scopo del gioco è determinare (se esiste) il numero minimo di lanci n che bisogna effettuare affinché, a partire dal lancio successivo, la distanza della boccia dal pallino sia sempre minore di ε.

Vince questo primo round del gioco chi tra le squadre B o C riesce a trovare per prima il valore di n ed ottiene un punto.

Se tale valore non viene trovato allora vince la squadra A.

Si prosegue il gioco per round successivi con ulteriori valori di ε via via sempre più piccoli.

Vince la squadra che totalizza più punti.

In appendice è riportata la scheda, contenente le regole del gioco, che è stata consegnata a ciascun studente della classe sperimentale. Inoltre alle squadre B e C è stato consegnato un foglio formato A3 dove poter annotare le varie strategie risolutive da loro elaborate.

2.1.2. Fasi di Formulazione e di Validazione

Ciascuna squadra ha ricevuto una copia delle regole del gioco (riportata in appendice) ed ha avuto a disposizione 60 minuti circa per affrontare l'intera prova.

Dopo la lettura delle regole della prima fase del gioco, gli studenti hanno associato immediatamente alla sequenza di punti, il concetto di successione numerica.

Uno studente, inoltre, ha chiesto se il valore 0 corrisponde alla posizione della boccia dopo il primo lancio.

Per quanto riguarda la validazione relativa a questa fase del gioco, gli studenti hanno avanzato diverse proposte, tra le quali ne sono state messe in risalto due: $\frac{n-1}{n+2}$ ed $\frac{n-1}{n}$. Incrementando il valore di *n*, si sono resi conto che $\frac{n-1}{n+2}$ non si adattava alla sequenza data, mentre, $\frac{n-1}{n}$ risultava essere la formulazione corretta.

Ottenuto ciò, gli studenti sono stati invitati a riflettere sul perché avessero utilizzato la formulazione $\frac{n-1}{n}$, piuttosto che $\frac{x-1}{x}$. La risposta è stata più che soddisfacente, poiché hanno detto che si operava con numeri naturali e non con numeri reali.

Nella seconda fase del gioco, dopo avere diviso la classe in due squadre e aver nominato un portavoce, la squadra A ha cominciato il gioco comunicando il valore di $\varepsilon\ (=0{,}1)$.

Entrambe le squadre (B e C) hanno cercato il valore di *n* procedendo per sostituzione e approssimazioni successive; la squadra B, sapendo che $\ell=1$ ed $\varepsilon=0{,}1$, ha calcolato $\ell-\varepsilon=0{,}9=\frac{9}{10}$ e accorgendosi che per $n=10$ si ha esattamente $\frac{n-1}{n}=\frac{9}{10}$, ha proposto alla fine il valore corretto di $n=10$. La squadra C ha fatto lo stesso ragionamento ma ha dato come risultato $n=9$.

Quindi ha vinto il primo round la squadra B a cui è stato assegnato un punto.

Poiché in questo primo caso il valore di ε consentiva di determinare facilmente il valore di n (per sostituzione), entrambe le squadre non si sono preoccupate di elaborare una strategia utile alla determinazione di n per qualsiasi valore di ε; infatti, nel caso in cui ε fosse stato molto piccolo, sarebbe risultato troppo laborioso il procedimento per approssimazioni successive.

Per indurre gli studenti alla ricerca di una tale strategia, nel secondo round si è posto $\varepsilon=0{,}05$.

A partire dal concetto di distanza tra due punti, utilizzando le disequazioni con valore assoluto, entrambe le squadre sono pervenute al risultato $n<\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ n<20$ (anche se con pareri contrastanti).

Un solo studente della squadra C ha sostenuto che deve essere $\left|\frac{n-1}{n}-\ell\right|=\varepsilon$.

Quindi nessuna delle due squadre B e C è riuscita a dare il risultato corretto, pertanto il round è stato vinto dalla squadra A, che ha guadagnato un punto.

Prima di iniziare il terzo e ultimo round, gli studenti hanno ricevuto dei semplici suggerimenti in modo da poter correggere gli errori commessi nei precedenti round e formulare una strategia vincente.

A questo punto, per verificare se gli studenti fossero realmente in grado di mettere in atto una strategia vincente, è stata introdotta una nuova successione $a_n = \frac{8n}{2n+3}$ e quindi $\ell = 4$.

Si è dato il via al terzo round, assegnando ad ε il valore 0,5.

Entrambe le squadre hanno attuato la strategia vincente, ma è stata la squadra B a fornire il risultato corretto $n > \frac{21}{2} = 10,5$ approssimando correttamente ad $n(\varepsilon) = 10$, aggiudicandosi così il round.

Il gioco è stato vinto dalla squadra B, come si può evincere dalla seguente tabella:

Squadra	A	B	C
Portavoce	Sperimentatori	G********	C*****
Preliminare			1
1° Round		1	
2° Round	1		
3° Round		1	
Totale Punti	1	2	1

2.2. Scelta di un gruppo di controllo per la falsificazione delle ipotesi

L'obbiettivo di questa seconda ed ultima parte della seconda sperimentazione è quello di verificare la nostra ipotesi: *"Se il concetto di limite di una successione viene presentato ad una classe sperimentale come situazione a-didattica, allora gli studenti riusciranno ad avere una maggiore consapevolezza dell'idea di limite e della sua definizione formale"*.

A tal fine si è operato in due classi distinte: oltre alla classe sperimentale in cui è stata proposta la situazione a-didattica (di cui sopra), si è presa in considerazione una seconda classe come gruppo di controllo. Tale gruppo serve per cercare di falsificare l'ipotesi, quindi dovrà produrre risultati che, confrontati con quelli della classe sperimentale, mettano in evidenza una migliore o uguale consapevolezza dell'idea di limite e della sua definizione formale, non essendo stato sottoposto ad una situazione a-didattica.

Pertanto si è formulato un questionario fondato sui concetti di successione e del suo limite, che, in maniera non esplicita, erano presenti nella situazione a-didattica. Va sottolineato il fatto che tali concetti non risultavano del tutto nuovi agli studenti, in quanto erano stati introdotti, soltanto marginalmente, come caso particolare nell'ambito dei limiti di funzioni.

Il libro di testo adottato da entrambe le classi è "Corso base blu di matematica 5 moduli" vol. 3 di M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi (Zanichelli). Qui il concetto di limite di una successione è stato introdotto come simile a quello di limite di una funzione, sottolineando che il dominio è l'insieme dei numeri naturali e non un intervallo.

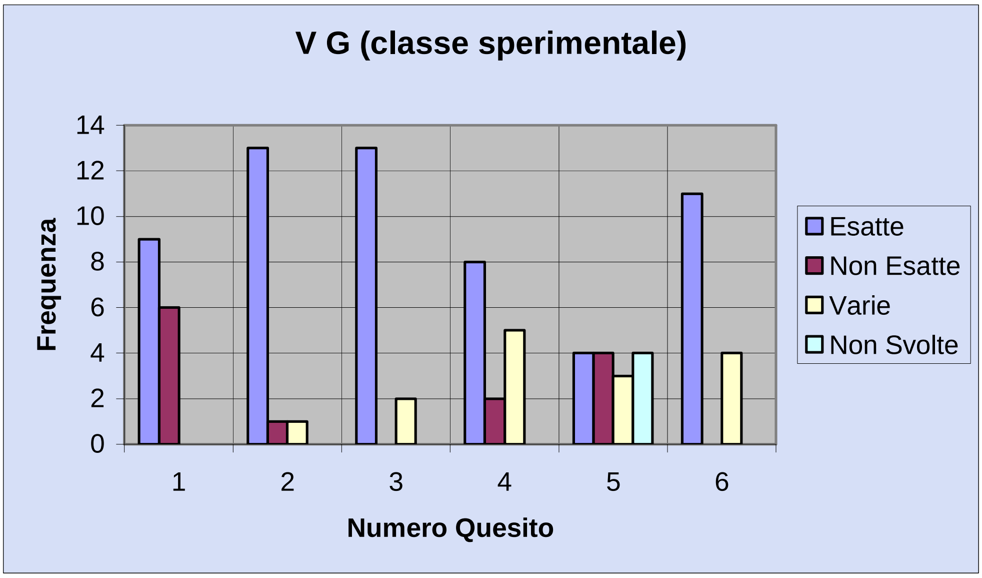
Entrambe le classi sono state sottoposte contemporaneamente allo stesso questionario nell'aprile 2010.

In appendice viene riportato il questionario proposto alle classi, mentre, di seguito, una analisi quantitativa e qualitativa dei risultati prodotti.

2.2.1. Analisi quantitativa dei dati raccolti

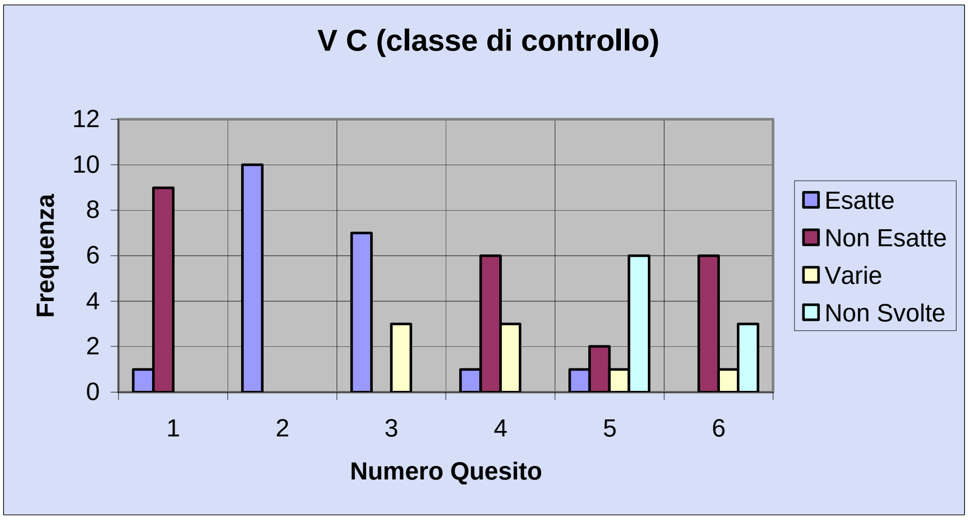
V G Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" di Palermo
(classe sperimentale)

Istogramma A



V C Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" di Palermo
(classe di controllo)

Istogramma B



2.2.2. Analisi qualitativa dei dati raccolti

Nell'aprile 2010 sono stati sottoposti al questionario (contemporaneamente) gli studenti delle classi V G e V C del Liceo Scientifico "S. Cannizzaro". Alla fine dell'ora tutti gli studenti hanno consegnato l'elaborato scritto, che, nei giorni successivi, è stato analizzato distinguendo tra risposte esatte, risposte non esatte, risposte varie e quesiti non svolti. Sono stati classificati come risposte varie i seguenti casi:

- risposte esatte con procedimento non corretto,
- risposte esatte con procedimento mancante,
- risposte esatte con procedimento non conforme a quello richiesto (*un esempio può essere dato nel quesito N.6 all'interno del quale gli allievi hanno calcolato il limite piuttosto che verificarlo mediante la definizione stessa*),
- procedimento corretto senza risposta.

I risultati ottenuti sono stati tradotti in dati statistici e riportati nei grafici rappresentati in precedenza.

Si discutono, in seguito, i risultati prodotti in ciascuna delle due classi.

- ***V G Liceo Scientifico Statale "S. Cannizzaro" di Palermo (classe sperimentale)***

Gli studenti presenti in aula erano diciassette su un totale di venti alunni, ma soltanto in quindici hanno affrontato il questionario in quanto erano presenti durante lo svolgimento della situazione a-didattica.

Analizzando singolarmente ogni quesito, con l'ausilio dell'istogramma A, si evince che:

Quesito 1: tutti risolvono il quesito; in nove rispondono correttamente applicando il teorema di unicità del limite, mentre i restanti sei rispondono in maniera non corretta;

Quesito 2: tutti risolvono il quesito; in quattordici rispondono correttamente ma uno non motiva la risposta; uno soltanto risponde in maniera non corretta;

Quesito 3: tutti risolvono il quesito; in tredici rispondono correttamente, gli altri due risolvono la prima successione ma non la seconda;

Quesito 4: tutti risolvono il quesito; in tredici rispondono correttamente di cui due commettono degli errori nel risolvere la disequazione e tre non motivano la risposta; due rispondono in maniera non corretta perché commettono degli errori nel risolvere la disequazione;

Quesito 5: solo undici studenti risolvono il quesito; in sette rispondono correttamente ma solo in quattro utilizzano un procedimento corretto; altri quattro risolvono il quesito in maniera non corretta;

Quesito 6: tutti risolvono il quesito rispondendo correttamente, ma quattro di questi piuttosto che verificare il limite applicando la definizione, procedono direttamente al calcolo del limite.

- ***V C Liceo Scientifico Statale “S. Cannizzaro” di Palermo (classe di controllo)***

Gli studenti presenti in aula erano dieci su un totale di ventisette alunni.

Analizzando singolarmente ogni quesito, con l’ausilio dell’istogramma B, si evince che:

Quesito 1: tutti risolvono il quesito; soltanto uno risponde correttamente dicendo che la successione in esame è indeterminata, mentre i restanti nove rispondono in maniera non corretta;

Quesito 2: tutti risolvono il quesito in maniera corretta;

Quesito 3: tutti risolvono il quesito; in sette rispondono correttamente, gli altri tre risolvono la prima successione ma non la seconda;

Quesito 4: tutti risolvono il quesito; in quattro rispondono correttamente, tre di questi commettono degli errori nel risolvere la disequazione; i restanti sei rispondono in maniera non corretta perché commettono degli errori nel risolvere la disequazione;

Quesito 5: solo quattro studenti risolvono il quesito; in due rispondono correttamente di cui uno svolge parzialmente il quesito senza concludere; due risolvono il quesito in maniera non corretta;

Quesito 6: solo in sette provano a risolvere il quesito, di cui uno piuttosto che verificare il limite applicando la definizione, procede direttamente al calcolo del limite; i restanti sei risolvono il quesito in maniera non corretta, due di questi provano a verificare il limite applicando la definizione in maniera errata, gli altri quattro provano a calcolare il limite commettendo errori.

2.3. Conclusioni relative alla seconda fase sperimentale

Si mettono, adesso, a confronto, i risultati dei questionari svolti in entrambe le classi, che nei precedenti paragrafi sono stati analizzati singolarmente.

Nello svolgimento del quesito n.1, gli studenti avrebbero dovuto tener conto dell’unicità del limite, strettamente connessa all’unica posizione assunta dal pallino nel gioco delle bocce.

Infatti gli studenti della classe sperimentale che hanno risposto correttamente al quesito, hanno tenuto conto di questa proprietà facendo riferimento alla situazione a-didattica; mentre l’unico studente della classe di controllo che ha risposto correttamente si è accorto che la successione proposta è indeterminata.

Per quanto riguarda i quesiti n.2 e n.3, i risultati complessivi delle due classi non presentano differenze rilevanti; probabilmente ciò è dovuto al fatto che per rispondere hanno fatto appello alle nozioni (seppur marginali) già in loro possesso.

Il quesito che più richiama la situazione a-didattica è il n.6 in quanto la successione proposta $\left(a_n = \frac{n+1}{n}\right)$ si presenta analiticamente simile alla successione presentata durante l’attività a-didattica $\left(a_n = \frac{n-1}{n}\right)$. Nella classe di controllo nessuno studente è riuscito a risolvere l’esercizio in maniera corretta, solo uno ci ha provato, ma calcolando direttamente il limite.

Invece, nella classe sperimentale tutti hanno svolto l’esercizio ed undici di questi in maniera corretta (verificando il limite mediante la definizione).

Il quesito n.5 richiama la situazione a-didattica in maniera meno esplicita rispetto al quesito n.6, infatti si parla di numero di punti che stanno al di fuori di un certo intervallo che possono essere pensati come il numero dei lanci da determinare nel gioco delle bocce $(n(\varepsilon))$.

La forma meno esplicita del quesito ha comportato difficoltà in entrambe le classi, ma nonostante ciò, la classe sperimentale ha prodotto risultati migliori rispetto alla classe di controllo.

Riguardo alla situazione a-didattica, assume importanza anche il quesito n.4, che si presenta in una forma più semplice rispetto ai quesiti n.5 e n.6; per questo motivo, in entrambe le classi, tutti gli studenti hanno provato a risolvere il quesito. Nella classe di controllo un solo studente è riuscito a risolverlo correttamente, mentre in quella sperimentale addirittura in otto hanno presentato una soluzione corretta.

In conclusione, l’analisi comparativa dei risultati di entrambe le classi, induce a pensare che la classe sperimentale abbia tratto beneficio dalla situazione a-didattica. Quindi la sperimentazione condotta ha, secondo noi, validato l’ipotesi secondo la quale proporre agli allievi una situazione di gioco mirata all’acquisizione embodied dei concetti di intorno, successione, distanza infinitesima etc. può dare loro una maggiore consapevolezza dell’idea di limite e della sua definizione formale.

Ma l’esperienza descritta è stata svolta soltanto in due classi di una sola scuola di Palermo, quindi è necessario evidenziare il fatto che il campione in esame risulta limitato per poter affermare con certezza il buon esito dell’esperimento.

3. Considerazioni finali dell’indagine sperimentale

Dai risultati ottenuti nel complesso delle due sperimentazioni, riteniamo necessario, infine, discutere alcune questioni che, dal nostro punto di vista, ricoprono particolare rilevanza.

Nella prima situazione sperimentale a nostro parere lo studente si trova di fronte ad una tipologia di esercizio diversa da quella che usualmente è abituato ad affrontare. Allo stesso tempo si trova costretto a dover analizzare il problema da più punti di vista dal momento che viene richiesta più di una modalità di risoluzione e, quindi, a dover far ricorso a nozioni acquisite durante tutto il corso di studi.

Mentre nella seconda situazione sperimentale, secondo noi, lo studente, di fronte ad una situazione di gioco mirata all’acquisizione embodied dei concetti di intorno, successione, distanza infinitesima etc. ha la possibilità di acquisire una maggiore consapevolezza dell’idea di limite e della sua definizione formale.

Per quanto riguarda lo sperimentatore la prima situazione è utile perchè, in base alle strategie risolutive adottate dai ragazzi, evidenzia quali sono gli argomenti in cui lo studente risulta essere più preparato e quelli in cui possiede maggiori lacune.

Inoltre, dal confronto tra gli elaborati prodotti dagli studenti e l’analisi comparativa dei testi utilizzati nelle classi, risulta evidente come i differenti approcci siano influenzati dai diversi metodi di esposizione e di presentazione degli argomenti adottati da ciascun testo. Quindi, dalla sperimentazione è possibile ricavare dati utili per riconoscere quali, tra i vari metodi, hanno maggiori probabilità di produrre una migliore comprensione degli argomenti trattati e una assimilazione più profonda dei concetti.

Ancora, riteniamo che le strategie risolutive non previste e i piccoli errori commessi dagli studenti, abbiano avuto un ruolo fondamentale, non solo nell’ambito della prima esperienza, mettendoci di fronte a situazioni che in precedenza non avevamo pensato potessero prodursi, ma anche nella costruzione della seconda situazione sperimentale, in quanto ha evidenziato alcuni aspetti sulla cui trattazione abbiamo, così, potuto porre maggiore attenzione.

In questa ultima fase del lavoro, ciò che crediamo ci abbia portato alla elaborazione di maggiori spunti di riflessione e di discussione, in maniera piuttosto vivace e costruttiva, è stata la realizzazione di una situazione a-didattica, con il successivo apportarvi di modifiche nell’intento di renderla effettivamente realizzabile in classe, con lo scopo di avere la possibilità di interagire coi ragazzi in modo diverso dal consueto.

La situazione a-didattica, come già detto, si è rivelata, a nostro parere, un utilissimo strumento per i ragazzi, che hanno potuto acquisire una maggiore consapevolezza di concetti che prima avevano, per loro, un carattere quasi del tutto astratto e di conseguenza problematico; ma anche per noi sperimentatori, che ci siamo trovati a dover sciogliere tutti i nodi teorici resi evidenti man mano che la nostra analisi si faceva più approfondita. In questo processo, quindi, anche noi siamo andati più a fondo nei concetti, acquisendo, così, una maggiore padronanza dei concetti.

Si è trattato di una vera e propria traduzione di un concetto astratto in qualcosa di reale, con cui fosse possibile avere un approccio concreto e, il più possibile, semplice.

Pertanto, siamo riusciti a catturare l’interesse degli studenti che hanno partecipato attivamente e con entusiasmo all’esperimento.

La buona riuscita degli esperimenti ci dà ragione di credere, come futuri insegnanti, che situazioni sperimentali come quelle trattate siano molto utili ai fini della didattica; infatti, dando modo di evidenziare pregi ed eventuali lacune dei percorsi didattici seguiti e fornendo un possibile approccio all’argomento trattato, si propongono come utili strumenti per un successivo miglioramento dei metodi di insegnamento da adottare.

Nonostante l’esito degli esperimenti sia stato positivo, ci teniamo a sottolineare che tali esperimenti sono stati effettuati presso due scuole della provincia di Palermo, con contesti molto simili; non è quindi da escludere che, in un contesto diverso, l’esito di sperimentazioni analoghe possa non essere il medesimo o altrettanto soddisfacente.

In ogni caso, il fine che abbiamo cercato di perseguire con questo nostro lavoro, è stato quello di fornire un piccolo contributo allo studio in didattica, anche se, il tutto costituisce, a nostro parere, soltanto un possibile punto di partenza, che, rimesso ad ulteriori sperimentazioni e rielaborazioni, potrebbe essere maggiormente utile ai fini didattici.

Appendice I

FASE 1. Il gioco delle bocce richiede abilità e strategia. Si può giocare uno contro uno, a coppie, a terne….. Ciascun giocatore a turno fa rotolare (accostare) la boccia verso il pallino (la boccia più piccola), precedentemente lanciato sul campo. I punti vengono assegnati ai giocatori le cui bocce si sono avvicinate di più al pallino.

Supponiamo che le posizioni assunte dalle bocce siano le seguenti:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \ldots$$

Osservando tale sequenza, esiste una formula matematica che permetta di esprimere tali posizioni?

In caso affermativo, determinare tale formula.

Vince questa prima fase, lo studente che la determina per primo ed ottiene un punto bonus che andrà a sommarsi ai punti della squadra di cui successivamente farà parte.

FASE 2. Si lancia il pallino su una guida graduata (con attrito). A seconda della forza che si esercita sul pallino, questo si posizionerà ad una certa distanza ℓ dall'origine 0 (posizione iniziale di lancio).

Stabiliamo che tale distanza sia pari ad $\ell = 1$.

Si formano tre squadre: la prima (squadra A) costituita da noi tirocinanti, le altre due (squadra B e squadra C) ottenute suddividendo la classe in due gruppi. Ogni squadra deve avere un proprio portavoce.

Comincia il gioco la squadra A scegliendo un numero positivo ε abbastanza piccolo, contrassegnando così sulla guida i valori $\ell - \varepsilon$, $\ell + \varepsilon$.

Le squadre B e C iniziano a lanciare a turno le bocce in modo tale che la posizione occupata dalla boccia nell'n-esimo lancio rispetti la formula determinata nella prima fase.

Inoltre, si deve rispettare la condizione che ogni lancio sia più prossimo al pallino rispetto al lancio precedente. Da ciò segue che: al lancio 1 corrisponde la posizione 0, al lancio 2 corrisponde la posizione $\frac{1}{2}$, al lancio 3 corrisponde la posizione $\frac{2}{3}$, e così via.

Determinare (se esiste) il numero minimo di lanci n che bisogna effettuare affinché, a partire dal lancio successivo, la distanza della boccia dal pallino sia sempre minore di ε.

Vince questo primo round del gioco chi tra le squadre B o C riesce a trovare per prima il valore di n ed ottiene un punto. Se tale valore non viene trovato allora vince la squadra A.

Si prosegue il gioco per round successivi con ulteriori valori di ε via via sempre più piccoli.

Vince la squadra che totalizza più punti.

Appendice II

COGNOME………………………………..NOME……………………………. CLASSE……….

Nelle applicazioni si presentano frequentemente funzioni reali $y = f(x)$, il cui insieme di definizione è l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali.

Def. *Si chiama successione reale ogni funzione avente per dominio l'insieme* $\mathbf{N}$ *dei numeri naturali e per codominio un insieme di numeri reali* $\mathbf{R}$.

Dalla definizione di limite di una funzione per $x \to +\infty$ si deduce immediatamente quella di limite di una successione.

Def. *Data la successione di numeri reali* $a_1,\ a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ *si dice che essa ha per limite il numero* ℓ *(o converge ad* ℓ*), per* $n \to +\infty$ *e si scrive* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$*, se* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon)$ *tale che* $\forall n > n(\varepsilon)$ *risulti* $|a_n - \ell| < \varepsilon$, (cioè, comunque si fissi il numero, $\varepsilon > 0$ è sempre possibile trovare un termine della successione dopo il quale tutti i termini differiscono da ℓ, in valore assoluto, di una quantità minore di ε).

Una tale successione si dice *convergente*.

QUESTIONARIO

1) La successione $(-1)^n$ ammette come limiti 1 e -1 $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Perché? ………………………………………………………………………………………

2) La successione $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge a $\ell = 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Perché? ………………………………………………………………………………………

3) Scrivere i primi quattro termini delle seguenti successioni, i cui termini generali sono dati dalle formule: $a_n = \dfrac{\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n}$, $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

4) Consideriamo la successione il cui termine generale è $a_n = \dfrac{5n-3}{2n}$ con $n \in \mathbf{N}_0$; si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{5}{2}$.
Infatti, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo è $\left|\dfrac{5n-3}{2n} - \dfrac{5}{2}\right| < \varepsilon$ per:

$\boxed{A}$ $n > \dfrac{2\varepsilon}{3}$, $\boxed{B}$ $n > \dfrac{3}{2\varepsilon}$, $\boxed{C}$ $n > \dfrac{3}{2}\varepsilon$, $\boxed{D}$ $n > -\dfrac{3}{2\varepsilon}$, $\boxed{E}$ $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$

Perché? ………………………………………………………………………………………

5) Data la successione di termine generale $a_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$ e sapendo che è $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-5}{9n+4} = \dfrac{1}{3}$ determinare il numero dei punti a_n posti al di fuori dell'intervallo $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1000},\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1000}\right)$.

6) Verificare, applicando l'opportuna definizione, la seguente uguaglianza $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$

Bibliografia

- L. Geymonat, *Storia e filosofia dell’Analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, Torino (1947)
- C. Boyer, *Storia della Matematica*, ISEDI (1976)
- M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi (1991)
- F. Spagnolo, *Obstacles Epistemologiques: Le Postulat de Eudoxe-Archimede*, Cogras (1996) (pp. 33 – 37)
- Materiale didattico dal sito http://math.unipa.it/~grim/FP_progr_prove_09.htm
- L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica per i licei scientifici sperimentali* - Tomo 2B, ETAS (2006) (pp. 221 – 222 – 223 – 244)
- N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Nuovi Elementi di Matematica* - Tomo B, Ghisetti e Corvi Editori (2004) (pp. 375 – 377 – 378 – 379)
- M. Battelli, U. Moretti, *Corso di Matematica Sperimentale e Laboratorio* - Vol.4, Le Monnier (1992)
- G. Zwirner, L. Scaglianti, A. Brusamolin Mantovani, *Conoscere la Matematica* – Vol. 3 CEDAM
- M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, *Corso base blu di matematica 5 moduli* - Vol. 3, Edizioni Zanichelli