Le CAS DE GAEL[1]

Article publié en anglais **in Journal of Mathematical Behavior, n°18 (1), 1-46, octobre 1999 Non encore publié enFrançais**

Guy Brousseau[2] Virginia Warfield[3]

Résumé

La théorie des situations didactiques tient un rôle central dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques en France depuis le début des années 70. Un des concepts principaux de cette théorie est « le contrat didactique », un aspect complètement implicite mais essentiel des relations entre l'enseignant et l'étudiant Dans cet article, nous rapportons la séquence d'enseignement qui a provoqué la formulation initiale de ce concept et qui a validé les premières applications de la théorie.

Gaël est un enfant intelligent mais en échec *électif* en mathématiques. Il est un des neuf cas étudiés entre 1980 et 1985 (au COREM de Bordeaux). En l'observant en classe et en lui proposant diverses situations, didactiques ou a-didactiques, nous avons émis l'hypothèse que Gaël mettait en œuvre une *stratégie d'évitement* du « conflit de savoir » que nous avons qualifiée d'« évitement de type hystéroïde » alors que d'autres enfants présentaient des « évitements de type obsessionnel » (surtout ne pas confondre ces comportements avec les catégories psychiatriques de même nom, qui sont des troubles graves de la personnalité). Il était possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais elles ne donnaient pas de moyen de corriger les évitements, et elles centraient l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des comportements et des conditions qui le provoquaient ou qui pouvaient le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte.

Il a permis aux expérimentateurs d'explorer et de comprendre les contraintes de la situation didactique, interprétée comme « *contrat didactique* ». C'est un simulacre de contrat, une illusion, intenable et nécessairement rompue, mais une fiction nécessaire pour permettre aux deux protagonistes, l'enseignant et l'apprenant, d'engager et de mener à son terme la dialectique didactique. Le moyen didactique de faire entrer l'enfant dans un tel contrat est la *dévolution*. Ce n'est pas un dispositif pédagogique car

---

[1] Ce texte présente la description et l'étude finale de quatre des huit séances qui ont permis à Gaël de continuer sa scolarité avec de bon succès en mathématiques. Il reprend l'essentiel d'un texte rédigé en 1981 par Guy Brousseau sur une recherche menée avec la précieuse collaboration de Jacques Pérès. Les transcriptions des huit séances et celles de leur « analyse à chaud » dues à Michèle Berrocq-Irrigoin, ont été publiées en polycopié de l'IREM pour les besoins des chercheurs, mais les quatre dernières n'ont jamais fait l'objet d'un résumé semblables à celui ci.
L'expérience a été effectuée en 1977. Elle a fourni le matériau de base de toute une partie de la théorie des situations. De nombreuses questions soulevées par cette expérience ont conduit à la création de nombreux concepts. Dans une période d'évolution rapide il m'a été impossible de rédiger des conclusions que je trouvais trop partielles, et l'étude de ces concepts et des rapports initiaux par de nombreux chercheurs proches ne rendaient pas leur publication nécessaire.

[2] Professeur émérite de Mathématiques à l'IUFM d'Aquitaine, à l'époque assistant au département de mathématiques de l'Université Bordeaux 1, chercheur à l'IREM, concepteur du dispositif de l'expérience,

[3] Senior Lecturer en Mathématiques à l'Université du Washington, participe à la nouvelle rédaction et la traduit en anglais

il dépend essentiellement du contenu, il consiste à renvoyer l'élève à un rapport avec un milieu dont le professeur peut s'exclure, du moins en partie (situation a-didactique). Le dispositif mis en œuvre est agencé pour engager progressivement mais explicitement Gaël dans un défi dans lequel le professeur pourra se mettre « du côté » de l'élève.
Cette situation se révélera par la suite être une des situations fondamentales de la soustraction.

Abstract

The Theory of Didactical Situations has had a central position in French mathematics education research since the early seventies. A major component of this theory is the didactical contract, a completely implicit but highly powerful aspect of the relationship between teacher and student. In this article we relate the series of tutorial sessions which provoked the original formulation of that theory, and in which the theory was validated by its first application.

Gaël was an intelligent child who was failing *exclusively* in mathematics. He was one of nine cases studied between 1980 and 1985 (at the Bordeaux COREM[4]). After observing him in class and offering him various learning situations, both didactical and adidactical, we arrived at the hypothesis that Gaël was implementing an *strategy of avoidance* of the "conflict of knowing" which we characterized as "hysteroid type avoidance", whereas the others exhibited "obsessional type avoidance" (note that these behaviors should not be confused with the psychiatric categories of the same name, which are serious personality disorders.) It was possible to offer psychological explanations for this behavior, but they did not provide the means for correcting the avoidance, and they focused the interest of the researchers on a characteristic of the child or on his competencies, rather than remaining at the level of his behavior and the conditions which provoked it or which might modify it. This behavior demonstrated the refusal, conscious or not, of the child to accept his share of the decision-making responsibilities in a didactical situation and hence to learn while working with an adult.

It made it possible for the experimenters to explore and understand the constraints of the didactical situation, interpreted as a "*didactical contract*". It is the simulacrum of a contract, an illusion, intangible and necessarily broken, but a fiction which is necessary in order for the two protagonists, the teacher and the learner, to engage in and carry out the didactical dialectic. The didactical means to get a student to enter into such a contract is *devolution*. It is not a pedagogical device, because it depends in an essential way on the content. It consists of putting the student into a relationship with a milieu from which the teacher is able to exclude herself, at least partially (adidactical situation). The mechanism implemented was devised to engage Gaël progressively but explicitly in a challenge in which the teacher could be "on the student's side."

This situation subsequently revealed itself to be one of the fundamental situations of subtraction.

[4] Centre d'Observation et de Recherches sur l'enseignement des Mathématiques

Le CAS DE GAEL[5]

Cet article est l'un des deux textes jumeaux[6] nés de la collaboration de Guy Brousseau et Virginia Warfield. Il a été entrepris et mené à son terme[7] sur le désir de cette dernière de mettre à la disposition de la communauté anglophone un article écrit par Guy Brousseau[8] en 1981. Les discussions qui ont résulté de ce travail ont produit tant de modifications et de clarifications que les deux auteurs ont entrepris de produire aussi la version correspondante en français. Le processus a montré une nouvelle fois avec une grande évidence que la confrontation de différentes perspectives linguistiques et culturelles peut être la source d'un enrichissement intellectuel considérable.

Introduction 1 (initialement pour l'édition en langue anglaise)

Un des articles les plus connus de la littérature grise dans le champ de la didactique des mathématiques est le "cas de Gaël" qui apparaît dans la thèse doctorale de Guy Brousseau en 1986. C'est cet article qui modifié, clarifié et traduit est le principal contenu du présent article. Dans le but d'expliquer son importance nous commencerons avec l'origine de cet article et de son auteur.

Guy Brousseau a commencé sa carrière dans une classe, enseignant, expérimentant, observant et écrivant des rames de notes. Il passa ensuite les années 60 à la fois à étendre ses connaissances mathématiques et à utiliser la connaissance qu'il avait acquise dans la classe, comme base pour interpréter les travaux de différentes disciplines qui à l'époque intéressaient l'enseignement, entre autres mais principalement ceux de Piaget, mais aussi ceux d'innovateurs comme Diénès. Cette combinaison produit, en 1970, la théorie des situations, qui va engendrer tout le champ de la didactique des mathématiques. Une brève présentation de cette théorie apparaît dans l'introduction générale ci dessous.

Mais ce n'était pas une théorie destinée à rester purement décorative. Brousseau était déterminé à l'éprouver, à la développer et au besoin à la changer au moyens d'expérimentations sérieuses. A cet fin, il se joignit aux efforts d'une équipe de mathématiciens de Bordeaux qui, dans le mouvement de nombreux mathématiciens français conduits par A. Lichnérowicz, essayaient d'obtenir du Ministère de l'éducation des moyens pour moderniser l'enseignement des mathématiques. Ces moyens furent les IREM (Instituts de Recherches pour l'Enseignement des Mathématiques) où les universitaires et les professeurs en activité pouvaient ensemble entreprendre des réflexions, des recherches et des actions combinant leurs champs respectifs de compétence. Leurs actions aboutirent. L'IREM de Bordeaux fut opportunément fondé,

[5] Ce texte présente la description et l'étude finale de quatre des huit séances qui ont permis à Gaël de continuer sa scolarité avec de bon succès en mathématiques. Il reprend l'essentiel d'un texte rédigé en 1981 par Guy Brousseau et Jacques Pérès. Les transcriptions des huit séances et celles de leur « analyse à chaud » dues à Michèle Berrocq-Irrigoin, ont été publiées en polycopié de l'IREM pour les besoins des chercheurs, mais les quatre dernières n'ont jamais fait l'objet d'un résumé semblables à celui ci.
L'expérience a été effectuée en 1977. Elle a fourni le matériau de base de toute une partie de la théorie des situations. De nombreuses questions soulevées par cette expérience ont conduit à la création de nombreux concepts. Dans une période d'évolution rapide il m'a été impossible de rédiger des conclusions que je trouvais trop partielles, et l'étude de ces concepts et des rapports initiaux par de nombreux chercheurs proches ne rendaient pas leur publication nécessaire.

[6] L'autre, le « case of Gaël », paraît dans le « Journal of Mathematical Behavior »

[7] Avec l'aide de Nadine Brousseau

[8] Sur une recherche menée en collaboration avec Jacques Pérès, Docteur en Psychologie, psychologue scolaire

un des premiers en France et Brousseau y entra pour l'aménager en fonction de ses projets.
Pour cela il persuada les responsables de l'éducation et ceux de son Université de créer un établissement organisé pour l'observation. Il comprend outre quelques moyens matériels et humains spéciaux, l'école J. Michelet qui combine les propriétés d'être une école élémentaire publique ordinaire et d'avoir un statut particulier pour permettre l'observation et l'enregistrement des activités normales d'enseignement des mathématiques et de leurs résultats et quelques expérimentations étroitement limitées et contrôlées (sans projet d'innovation).
Les conditions spécifiques des études sur les échecs électifs dont est extrait “ le cas de Gaël ” sont décrites ci après, mais il semble assez important de pointer une des nombreuses façons dont ces cas entrent en résonance avec des contextes familiers. Au cours de ma première lecture de l'article original, j'étais hantée par un sentiment que j'avais déjà rencontré Gaël et ses amis dans quelque autre circonstance, sous un autre nom. Par hasard, une illumination me saisit qu'ils pourraient être tout droit sortis des pages de "pourquoi les enfants échouent" de John Holt. Ruth influence son instructeur avec la même douce soumission que montre Gaël, mais elle l’oblige ainsi inconsciemment et progressivement à réduire à presque rien le contenu des problèmes, comme le fait Cyrille par des moyens fort différents plus proches de ceux d’Emily que Holt appelle “ l’arracheuse de réponses ”, probablement à cause de la même incapacité à supporter l’incertitude. Gaël et Cyrille eux-mêmes ont beau être de petits élèves français, ils représentent une légion internationale.

Introduction générale

Gaël est un des neuf enfants en difficultés électives que j’ai essayé d’aider par un petit nombre d’interventions didactiques cliniques entre 1976 et 1983. Je préparais alors mes interventions, les enregistrais, les transcrivais et les analysais avec mon ami Jacques Pérès et une petite équipe de collaborateurs et d’étudiants.
Les études portaient

1. sur le genre d’intervention susceptible d’améliorer les comportements et les connaissances mathématiques de ces enfants,
2. sur les caractères qui les différenciaient des autres (ils avaient une manière spécifique de se comporter ou d’échouer, échouaient ils sur les mêmes questions que les autres élèves en échec ou non?),
3. et sur les connaissances qui leur manquaient.

Elles ont attiré l'attention sur deux formes d'évitement de l'apprentissage en situation scolaire : l'évitement de forme "hystéroïde" de Gaël et l'évitement de forme obsessionnelle plus fréquent et plus visible.
Ces études étaient menées en parallèle avec d’autres recherches et toutes tendaient à développer et à mettre à l’épreuve la théorie des situations didactiques en cours d’élaboration.

La théorie des situations est fondée sur l’idée que les connaissances humaines se manifestent par leur rôle dans les interactions entre des systèmes : sujets, milieux ou institutions. A chaque connaissance il serait possible d’associer un nombre limité de types d’interactions spécifiques dont le bon déroulement requiert ou même fait développer cette connaissance. Les situations caractéristiques des connaissances mathématiques peuvent être étudiées et même modélisées dans le cadre des mathématiques ce qui permet parfois de prévoir leur évolution par le calcul.

L’enseignement d’une notion consiste donc à mettre en scène ses situations et à conduire les interactions dans lesquelles le sujet peut ainsi entrer. Il est lui même une interaction. On a montré que cette interaction est elle aussi largement spécifique du savoir enseigné mais qu’elle suit un modèle - la situation didactique - nécessairement différent des modèles de mise en œuvre non didactique du savoir. Ce résultat change toute l’approche de l’éducation mathématique et de la formation des professeurs.
L’étude théorique et expérimentale des situations didactiques et leurs conséquences pratiques est une longue histoire dans laquelle “ le cas de Gaël ” a tenu une place importante. On peut distinguer pour cela trois raisons principales :

1. La situation proposée à Gaël tend à remplacer les définitions constructives de la soustraction (l'élève reproduit un algorithme qui lui est montré et qui donne le résultat demandé) par une définition "algébrique": il faut trouver un nombre qui satisfait une condition (la différence est ce qu'il faut ajouter à un nombre pour en trouver un autre $39 + \square = 52$). Elle est le prototype des situations avec lesquelles on a exploré les possibilités de remplacement, dès que possible, de l'arithmétique par l'algèbre dans l'enseignement primaire.
2. En proposant la compréhension d'une relation et la recherche d'un objet qui la satisfait au lieu de l'apprentissage de la construction d'un terme, la situation a mis en évidence de façon aiguë les conditions paradoxales de toute situation didactique qui rend à la fois nécessaire et impossible à tenir tout *contrat didactique* effectif. Le concept a pris naissance dans cette expérience.
3. Enfin cette expérience met en lumière les rapports et les différences irréductibles entre les approches didactiques, psycho-cognitives et psycho-affective de la situation d'enseignement.

A. DESCRIPTION ET ETUDE DU CAS DE GAËL

1. PREMIERE SEANCE

1.1 - Soutien et observation : Les voitures rouges

Au début de cette première séance, l’intervenant pose à Gaël la question suivante : "Sais-tu qu'est-ce que tu n'as pas bien réussi cette semaine, et qu'est-ce que tu as bien su. faire". Il n'obtient que des réponses évasives. L'enfant prend son cahier et tous les deux examinent les travaux de la semaine. Ils choisissent finalement un problème que Gaël a fait faux et dont l'énoncé est :

> **Dans un parking il y a 57 voitures. 24 de ces voitures sont rouges. Trouver le nombre de voitures du parking qui ne sont pas rouges.**

Gaël réfléchit un instant puis déclare :
"Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse."
Il pose en colonne l'opération 57 + 24 et trouve 81. C'est exactement ce qu'il avait fait dans la semaine. Il semble donc que Gaël maîtrise l'addition qu'il doit manier fréquemment mais il ne se pose aucune question sur l'opportunité de son emploi, il se couvre de l'autorité de la maîtresse pour justifier un emploi automatique de l'opération. Il ne tient aucun compte des corrections faites en classe.

L'intervenant déclare, sans insister toutefois, comme une remarque générale, qu'il faut aussi savoir **quand** il faut faire une addition, une soustraction ou autre chose ; et plutôt encourageant, il propose à Gaël de dessiner les voitures "mais pas toutes, car ce serait trop long" .
Gaël dessine donc un rectangle et écrit 57 au milieu .

l'intervenant sera désormais désigné par « I » et Gaël par « G »

I questionne : "Est-ce qu'il y a toutes les voitures ? "
G: (Gaël) "Il y a toutes les voitures qui ne sont pas rouges. "
I: "Il n'y a que les voitures qui ne sont pas rouges ? "
G: "Il y a toutes les voitures et elles ne sont pas rouges ."

L'intervenant aurait pu continuer : "Où sont les rouges ?... ", mais il était évident que l'enfant n'avait pas de représentation correcte de la situation. Le mettre en contradiction formelle n'aurait servi qu'à l'embarrasser.

I : "Si on changeait le nombre de voitures, ça pourrait changer l'opération ? "
G affirme : " Oui ! "

Il est clair que Gaël appelle "opération" le triplet de nombres et non le type "addition" par opposition à "soustraction". L'intervenant espérait que Gaël pourrait avoir en tête cette question, (faire une addition ou une soustraction N). Dans ce cas, il aurait essayé de savoir si l'enfant était capable de construire un problème équivalent avec de tous petits nombres pour lesquels le dessin aurait été plus vite fait. Le fait que Gaël ne comprenne pas la question d'emblée interdit que l'on poursuive dans ce sens. L'intervenant demande a Gaël de dessiner les 57 voitures une par une. Gaël commence par s'efforcer de faire des dessins qui ressemblent à des voitures, mais très vite à l'instigation de l'intervenant il fait des traits. L'intervenant les fait disposer par lignes de 20.

I :"Est-ce que tu as dessiné toutes les voitures du parking ? "
G : "Non"
I : "On te dit 'Dans un parking, il y a 57 voitures. Dessine le parking.' Est-ce que dans ce parking il y a 57 voitures ? "
G : "Oui"
I : "Est-ce que toutes les voitures dont on te parle sont dans ce parking ? "
G : "Non, il y a aussi des voitures rouges. "

L'intervenant lui fait remarquer qu'il faut bien faire attention au texte car il y a un point après "57 voitures". Gaël admet alors que les rouges sont dans le parking mais pense devoir les dessiner car elles ne figurent pas sur son schéma.

On observe ici ses difficultés à envisager qu'il n'y a qu'un ensemble de voitures, avec deux propriétés : " être dans le parking " et " être rouge ". Pour lui, la deuxième propriété nécessite un deuxième ensemble, et s'il admet que le deuxième ensemble possède aussi la première propriété, il ne conçoit pas encore qu'il soit une partie de l'ensemble de départ. Est-ce parce qu'il n'a pas analysé l'énoncé ou parce qu'il ne peut pas utiliser l'opération d'inclusion ?

L’intervenant explique que les 24 rouges font partie de "ces 57 voitures" et Gaël doit les peindre en rouge sur son schéma. Dans cette phase, l'action de Gaël est complètement guidée par l'intervenant. Ils vérifient ensemble que le dessin concorde bien avec l'énoncé, puis Gaël doit trouver toutes les voitures qui ne sont pas rouges. Il en compte 31. L'intervenant demande :

I : "Si je te dis que ce n'est pas juste, crois-tu que j'aie raison ? "
G : "Je ne sais pas. "
I : "Qu'est-ce que tu ferais pour savoir si j'ai raison ? "
G : "Je recompterais"

Et il en trouve 33.

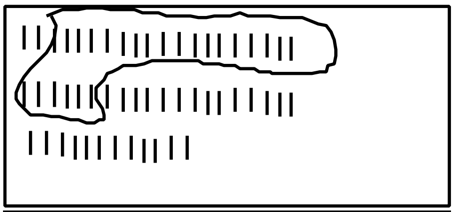
I : "Alors, qu'est-ce qui est juste, 31 ou 33 ? comment faire pour savoir ? "
G : "Il faut compter . "
I : "Il n'y a pas un autre moyen ? "

Pas de réponse.

Son dessin étant assez concret et lui permettant de donner une réponse, Gaël n’essaie pas ou ne pense pas à utiliser une opération pour vérifier sa réponse , puisqu’il peut compter autant de fois qu’il le veut. Son dessin est un appui sûr, auquel il peut se référer, tandis que l’opération fait appel <u>à certains mécanismes abstraits</u> et comporte une réversibilité que Gaël ne semble pas avoir acquise, à savoir le passage par le soustraction pour retrouver les deux termes de l’addition.

Gaël recompte à nouveau : "33"

L’intervenant entoure les voitures rouges,



Il fait observer à Gaël qu'on a donc 24 rouges et 33 pas rouges et demande:
- "Alors combien y a-t-il de voitures ? "
  - "Je fais 24, et puis 33 ? "

Gaël pose une addition 24 + 33 = 57.

I : "C'est bien ce qu'on te demandait ? Peux-tu répondre à la question de l'énoncé ? "
G : "Non."

Pour la plupart des enfants la réponse demandée doit être le résultat d'une opération, et le résultat est ce qui se trouve à un endroit précis dans la disposition de ce que l'on écrit. Cette habitude fait obstacle à l'identification du résultat cherché dans une égalité considérée comme une relation.

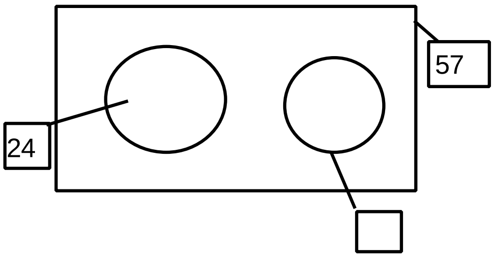
I :"Mais si ! Tu as écrit ce qu'on demande. "

G est étonné ; à la demande de l'intervenant il relit l ' énoncé .

I : "Combien y a-t-il de voitures pas rouges ? "

En s'aidant du dessin, il lui fait dire qu'il n'y en a que 33 et lui demande comment il a. trouvé, Gaël répond "en calculant" puis rectifie "en dessinant". I lui explique que le calcul "ça sert à trouver sans qu'on soit obligé de tout dessiner" et Gaël avoue que c'est ce qu'il ne sait pas faire.

L'intervenant entreprend de faire utiliser à Gaël la représentation symbolique en usage dans sa classe, dans une perspective de soutien. Gaël doit dessiner l'endroit du parking dans lequel on a mis les voitures rouges, puis les autres et il met des étiquettes.



I : "Si je compte les rouges, j'arrive à ? "
G : "24"
I : "Et si je continue à compter les autres, j'arrive à ? "
G : "57"

L'intervenant écrit alors

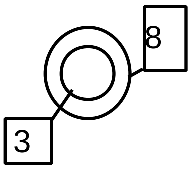
$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{+..} \\ 57 \end{array}$$

de façon à ce que Gaël ne fasse pas la soustraction pour trouver 33 mais essaie de déterminer le nombre qui, additionné à 24, donne 57, ce qu'il fait facilement.

Au cours de cette première phase commencent à apparaître certains caractères très fréquents chez les enfants en difficulté : difficulté à donner du sens à la question posée et à mettre en oeuvre des stratégies de contrôle de sa réponse, recours à des recettes, etc.

Pour bien mettre en évidence la nature des difficultés de Gaël et s'assurer qu'il ne va pas à nouveau tirer des conclusions automatiques de cette séquence, l'intervenant propose deux autres problèmes voisins :
Un premier avec des voitures formant deux ensembles disjoints clairement identifiés dans l'énoncé.
Il suffit d'additionner leur nombre pour avoir le total, ce que Gaël réussit rapidement.

Un autre comparable au à celui du départ, avec 8 voitures dont 3 rouges. Gaël dessine un rond avec 8 voitures, 8
puis refait son dessin pour y inclure les 3 rouges



et lorsqu'on lui demande combien ne sont pas rouges, il répond : “ 11 ”. Une nouvelle fois, il a appliqué d'autorité l'opération qu'il connaît avant de réfléchir. En peignant en rouge les 3 voitures, comme précédemment, il découvre alors le résultat.

Il faut préciser que dans la classe de Gaël la soustraction n'a pas été introduite comme moyen obligatoire pour trouver une différence. Souvent l'addition a trou a été utilisée. Ce procédé tend à obliger l'enfant à sortir d'un automatisme formel qui associe une opération mathématique à une opération matérielle. (+ si j'ajoute, - si je retranche) et à se centrer sur l'ensemble qu'il s'agit de compter et sur ses relations avec les autres données .

1. 2 - Epreuve de la quantification de l’inclusion

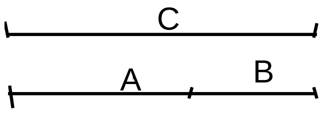
Cette incompréhension dont fait preuve Gaël lors de l'exercice peut tout simplement renvoyer à des causes psychogénétiques ; l'enfant est encore trop jeune pour effectuer le raisonnement nécessaire. Résoudre un tel problème où il s'agit de prendre en considération à la fois le tout et la partie pour les comparer suppose un type d'opération logique dont Piaget a montré le caractère complexe[9] . La quantification de l'inclusion qui sous-tend la compréhension du problème des voitures n'est en effet. construite par l'enfant qu'aux alentours de 7-8 ans. Il fallait donc d'abord s'assurer si Gaël possédait un schème opératoire et nous décidons alors sur le champ de lui faire passer le test des billes de couleurs. Cette épreuve très connue, utilisée par Piaget dans l'ouvrage cité consiste à présenter à l'enfant 8 perles en bois dont 5 sont rouges et 3 vertes.[10] Il s'agit pour le sujet de juger s'il y a plus de perles en bois ou plus de perles rouges et de justifier sa réponse. L'épreuve est passée avec succès par Gaël[11] et l'on est en droit de penser que les échecs répétés de l'enfant dans l'utilisation de la relation d'inclusion ne renvoie pas à des carences sur le plan de l'accession aux structures logico-mathématiques.

1. 3 - Test de la commutativité

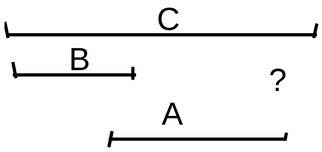
Nous avons alors décidé de présenter à Gaël une autre épreuve opératoire utilisée par Gréco, dans une recherche sur la genèse de l'opération de commutativité[12].
On présente à l'enfant un jeu de réglettes disposé de la façons suivante :

---

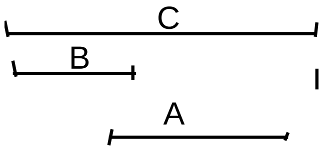
[9] cf. J. Piaget : « La genèse du Nombre chez l’enfant (avec A. Szeminska) Delachaux et Niestlé. Neuchâtel-Paris 1941
[10] cf. J. Piaget et B. Inhelder : De la logique de l’enfant à la logique de l’adolescent PUF 1955
[11] "G : Il y a plus de billes en bois que de billes rouges !
I : pourquoi ?
G : parce que en bois c'est tout (il montre l'ensemble des billes) et les rouges c'est quelques-unes !"
[12] cf. Gréco : « Les structures Numériques », Bibliothèque Scientifique Internationale, PUF



Le sujet peut constater que A + B = C.
On place alors la réglette B à la place de A (2) et on demande à l'enfant d'indiquer par une trace où sera l'extrémité de la réglette A quand on la placera à la suite de B



Gaël dit immédiatement : "ça s'arrêtera pareil qu'avant" et dessine un trait dans le prolongement de l'extrémité de C



La réponse de l'enfant caractérise les sujets ayant atteint le stade opératoire[13] et ceci ne nous surprend nullement, étant donné l'âge de l'enfant et sa réussite à l'épreuve précédente[14] Ce qui par contre est intéressant et peut nous apporter des informations, c'est l'attitude de Gaël lorsque nous mettons en doute son jugement par des objections du genre "mais un enfant disait tout à l'heure que ça s'arrêtera avant, etc." Aussitôt Gaël revient sur ses affirmations :

G : - C'est peut-être vrai. . .
I : - Qu'en penses-tu exactement ?
G :- Je ne sais pas !

Ce type de conduite lors de cette épreuve caractérise des enfants que Gréco situe dans un stade intermédiaire (pré-opératoire) et où les structures du sujet sont seulement en voie de constitution. Les compensations ne sont alors qu'incomplètes ou fragiles. Cela ne peut être le cas de Gaël. Il semblerait que sans doute, sa soudaine absence de conviction à partir d'une simple contre-proposition renvoie plutôt à son attitude générale vis-à-vis d'autrui lorsque sa propre connaissance est mise en jeu. Le sentiment de nécessité qui, pour Piaget, est le révélateur du fonctionnement d'une structure opératoire, disparaît ici sans qu'on puisse incriminer une fragilité des constructions logiques du sujet mais renvoie directement, pensons-nous, à la manière d'être avec autrui.

1. 4. - Analyse de la première séance

Parmi les questions posées par le comportement de Gaël, il en était une qu'il fallait rapidement régler. Toute activité mathématique est sous-tendue par les schèmes

[13] cf. Gréco : « Enfance : Opérations et structures intellectuelles », in Encyclopaedia Universalis 8, 343c
[14] La réussite à l'épreuve d'inclusion suppose nécessairement que l'enfant ait le stade opératoire et puisse très facilement maîtriser la relation de commutativité.

opératoires du sujet qui, selon Piaget, ne sont pas appris au sens strict mais construits au cours du développement.[15] Dans le cas du problème des voitures rouges et non rouges il était, nous l'avons vu, tout à fait nécessaire de s'assurer que Gaël possédait bien les structures opératoires d'inclusion .

Avec les résultats obtenus au cours de l'épreuve des perles, nous savons au moins que les échecs répétés de Gaël dans la compréhension du problème ne peuvent être expliqués par des carences au niveau des structures logico-mathématiques du sujet. Manifestement, il possède les schèmes opératoires nécessaires à la solution du problème proposé : comment expliquer alors son comportement au cours de la séance ?
La réponse ne peut être simple dés lors qu'on prend comme objet une relation entre un sujet singulier dont le rapport actuel au monde est le résultat d'une longue histoire et une situation didactique elle-même fort complexe.
Dans cette perspective, l'épreuve de Gréco peut nous donner quelques éléments de départ. Ce qui surprend d'emblée c'est l'impossibilité pour Gaël de soutenir une conviction face au démenti d'un autre. Une contre-proposition suffit à provoquer l'expectative là où tout laisse à penser qu'un sentiment de nécessité existait. Ainsi apparaît une caractéristique de l'enfant que nous avions déjà rencontrée au cours de l'examen psychologique, et sur un plan plus général : la fuite d'un affrontement possible, l'évitement à tout prix du conflit par le refuge dans des positions de dépendance et de soumission. Il nous semblait que cela pouvait avoir un effet dans les rapports de Gaël avec la connaissance mathématique.

Sur le plan de la connaissance, il existe, en effet, une attitude où la dépendance offre le bénéfice non négligeable d'une sécurité : là connaissance c'est toujours la connaissance d'un autre qu'il s'agit simplement de s'approprier ; alors, on supprime le risque d'être mis soi-même en question dans un débat sur la vérité. Il n'y a plus à rendre raison de ce que l'on tient pour vrai autrement qu'en invoquant l'autorité à laquelle on se réfère (Gaël dit "ce qu'on m'a appris", ce que la maîtresse dit "qu'il faut f aire ") .

Mais cette attitude se paie d'une incapacité à concevoir un processus de construction où la connaissance pourrait être le résultat d'une confrontation avec le réel et d'une série de décisions où le sujet devient l'auteur de son propre savoir. La connaissance mathématique risque alors de n'être qu'une activité ritualisée où l'on répète des modèles.

Les situations du type de celles que les élèves rencontrent habituellement en classe présentent pour la plupart un certain caractère de fermeture. Par exemple, le maître pose **un** problème et tous les enfants doivent trouver **la** solution, - la même - de sorte que la recherche des autres est arrêtée dès qu'un élève produit publiquement cette solution. De plus, c'est le maître qui déclare que telle solution est bonne de sorte que chaque élève n'a qu'**une** seule occasion de tenter de produire la bonne solution par problème. Ainsi, chacune de ces situations fonctionne comme un test et l'apprentissage doit se faire ailleurs - lors de la correction et des explications qui l'accompagnent par exemple - et par d'autres moyens que la tentative et l'observation des effets de sa propre décision. Enfin et en partie en conséquence, souvent la solution ne peut être envisagée que si l'enfant possède déjà une représentation de la situation qui lui permet de mettre en scène les objets cognitifs dont il s'agit. De plus, la vérification de la validité de la réponse et les explications du maître font appel à cette même représentation, ainsi qu'à la

[15] cf. J. Piaget "Apprentissage et développement » EEG,
J. Piaget : « Introduction à l'épistémologie génétique » PUF 1949

connaissance achevée qui produit la réponse. Autrement dit, cette situation d'apprentissage ne donne une occasion de décider ou de tenter une décision - donc d'apprendre - qu'à ceux qui savent déjà l'essentiel. Dans ces situations, l'élève ne peut acquérir la bonne représentation de la situation qu'en rapprochant des tests semblables par une sorte de renforcement d'associations convenables.

Les situations de ce type ne sont guère favorables à une modification des rapports avec les données du problème ou avec les objets de la connaissance chez des enfants comme Gaël.

Pour augmenter et enrichir les relations des élèves avec la situation, un procédé classique consiste à leur demander de représenter, de dessiner les éléments dont il s'agit - c'est ce qui a été fait au cours de cette séance et l'on a pu voir que le dessin correct exige lui aussi cette même représentation qui justement est absente. Il est assez clair ici que si la schématisation peut faire peut-être progresser une représentation mentale., elle ne peut pas la créer.

Au contraire, la répétition de situations-problèmes dont le maître attend qu'elles déclenchent la compréhension tend à mettre l'enfant lui aussi dans une situation de passivité et d'attente un peu anxieuse, où les activités ont un caractère rituel et presque magique. On peut voir cette réaction tout au long de la première séance : "Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse... " quand il compte, il récite soigneusement "Je pose, je retiens.. les dizaines... " Il indique les diverses étapes. Il fait des représentations plus ou moins analogiques et essaye de dessiner des choses qui ressemblent à des voitures. Mais le fait de rester très près du figuratif, loin de donner la signification escompte à l'opération elle-même, semble être récupéré par l'enfant comme un moyen de mettre à distance le raisonnement portant sur les objets.

Quand l'intervenant lui demande : " As-tu dessiné les rouges ? ", il répond : "Non, les noires seulement" et c'est vrai, il n'a pas dessiné les rouges (en rouge). Il reste centré sur son dessin sans lui faire jouer un rôle de représentation à contrôler par les indications de l'énoncé. Et quand on lui demande de repasser en rouge les traits représentant les autos rouges, il en oublie le nombre et l'intervenant doit l'arrêter à 25. De façon générale, les nombres n'ont pour lui qu'une importance très secondaire. Il dit 50, et il compte 31, puis 33, il oublie.., il reconnaît s'être trompé de bonne grâce... avec détachement.

Une approche classique des enfants en difficulté consiste à identifier les erreurs ou les fautes qu'ils
commettent et si elles se répètent, à les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce " qu'elles vont rendre l'enfant incapable à accéder aux mathématiques". [16] Par exemple ici, on repérerait que Gaël écrit souvent au lieu de 5 ou écrit 21 pour 12 et on identifierait là une insuffisance de **structuration spatiale** voire des troubles de la perception **spatio-temporelle**. De même les. difficultés de Gaël à confronter le dessin et le texte de l'énoncé pourraient se ranger parmi les accidents de la **fonction symbolique**.

[16] cf. F. Jaulin-Mannoni « Le pourquoi en Mathématiques » ESF, 1965 p. 13

Cette analyse classique permet de chercher des remèdes à ces troubles sous la forme d'exercices "du même type" au sens de ces fonctions : exercices de structuration spatiale...etc. Elle s'oppose à celle de 1'enseignant qui consiste à rechercher les exercices de même type" dans la catégorie qui traite du même sujet mathématique avec le même point de vue didactique : écriture de chiffres, dictée de nombres, problèmes de soustraction. En ce sens, la première apparaît comme thérapeutique par rapport à la seconde. L'approche que nous tentons ici est très différente, il s'agit d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités. Nous utilisons pour cela la théorie des situations. Cette théorie prend en compte, comme objet principal, les conditions du milieu qui rendent nécessaires et plausibles les comportements des sujets et les manifestations des connaissances.

Gaël n'a avec la connaissance - du moins celle dont il est question en classe - qu'un rapport superficiel. L'évitement du problème et la mise à distance débouchent sur des actions stéréotypées, purement "didactiques" c'est-à-dire centrées sur le rapport avec le maître, sans mobilisation des schèmes assimilateurs qu'il a pourtant à sa disposition. Gaël s'accommode de relations institutionnalisées qui font appel, de sa part, à des rites qui ne l'engagent pas. Nous pouvons alors penser que toute l'attitude de Gaël au cours de cette première séance est la conséquence d'un accord entre la situation didactique habituelle de la classe telle qu'il la perçoit et son rapport défensif à la connaissance dont nous parlions plus haut.

On ne peut pas soutenir que la situation didactique que Gaël rencontre habituellement est la cause (surtout unique) de ses échecs en mathématique, car on ne comprendrait pas pourquoi d'autres enfants qui ne sont pas mieux armés sur le plan cognitif réussissent. Mais nous pouvons penser que cette situation lui convient dans la mesure où elle lui permet d'échapper à la construction des connaissances.

Et il peut d'autant mieux y échapper que sa manière d'être avec les adultes, cette attitude sociale particulière faite de gentillesse et de soumission qui désarme la critique lui permet de se prémunir contre toue forme de conflit avec le maître. Car, si les situations didactiques habituelles permettent des apprentissages dans les conditions de fermeture dont nous avons parlé, c'est que le débat sur le savoir est remplacé par un autre type de débat; celui qui porte sur l'élève apprenant. Apprendre mal, ne pas savoir, faire telle erreur etc., c'est se heurter à la volonté du maître, c'est entrer en conflit avec lui. Dés lors l'enfant ne peut échapper à ce conflit et aux difficultés de toutes sortes qu'il entraîne, qu'en construisant quelque chose qui va tenir lieu de connaissance, d'apprentissage.

Or, Gaël disions-nous, échappe à ce débat dans la mesure où il désamorce tout conflit par une absence totale d'agressivité. Dans ce débat sur l'élève, le conflit se nourrit en effet de lui-même ; à l'agressivité du maître répond habituellement une autre agressivité de l'enfant qui alimente en retour l'agressivité du maître[17], etc. ... le sujet ne pouvant se soustraire à cette situation qu'en produisant des résultats attendus. Gaël, pour sa part, ne rentre pas dans ce jeu. Son attitude de profonde soumission désamorce toute hostilité ("il est toujours prêt à reconnaître ses erreurs et il en est navré" dit le maître ")

1. 5. - Projets pour la séance suivante

L'ensemble des analyses que nous pouvons faire nous conduit à envisager le type d'intervention pour la 2éme séance ; il va s'agir essentiellement d'introduire une rupture dans les conceptions que Gaël

[17] Comme l'observait Flanders

se fait d'une situation didactique, en lui proposant une situation qui va exiger de lui des anticipations, des prévisions, des prises de responsabilité, c'est-à-dire un investissement de l'objet de la connaissance. Pour cela, sur le même sujet mathématique, nous allons lui proposer ce que nous appelons une situation d'action.

C'est seulement s'il s'avérait que Gaël ne peut entrer dans ce type de rapport à la connaissance que nous chercherions d'autres voies.

1. 6. – Commentaire « à chaud » : Topaze, l'élève récalcitrant, et le contrat didactique

L'intervenant se trouve avec Gaël dans une situation typiquement « didactique », suivant le sens ancien donné à ce mot : « est didactique quelqu'un qui veut absolument enseigner quelque chose à quelqu'un qui ne veut pas l'apprendre ». Cette situation est éminemment comique (ce qui a beaucoup contribué à donner au mot « didactique » une connotation péjorative) et Marcel Pagnol l'utilise dans sa pièce « Topaze », comme paradigme introductif pour montrer la grandeur et la dérision du projet d'enseigner. L'étude de cette situation typique permettra peut être de penser les problèmes de Gaël non pas comme des accidents spécifiques mais comme un problème général.

« TOPAZE, il dicte en se promenant

“ Des moutons...Des moutons ...étaient en sûreté ... dans un parc. *(Il se penche sur l'épaule de l'Elève et reprend.)* Des moutons... moutonss...(*l'Elève le regarde ahuri.)* Voyons, mon enfant, faîtes un effort. Je dis *moutonsse.* Etaient *(il reprend avec finesse) étai-eunnt.* C'est à dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs *moutonsse.* ”
L'Elève le regarde, perdu. »[18]

Dans cette scène ironique et attendrie, Pagnol souligne avec une pertinence presque cruelle quelques caractéristiques fréquentes de telles situations.

Le maître veut obtenir un certain comportement de son élève - ici il faut écrire correctement sous la dictée le mot "moutons", ce comportement signifie que l'élève a correctement interprété une situation - ici la phrase - qu'il a reconnu un problème, au moins implicitement - moutons prend-il un s ou non ? - et qu'il l'a résolu par l'application d'une connaissance éventuellement pratique - ici la règle du pluriel des noms. Or, ici, l'élève ne résout pas le problème d'orthographe qui lui est posé et Topaze n'accepte pas cette situation. Le comportement attendu n'est pas seulement une information sur l'état de l'élève, c'est aussi la matière sur laquelle va s'exercer la suite de l'activité du maître.

Si le texte produit contient trop de fautes trop banales, il deviendra impossible d'en tirer aucune "leçon" raisonnable. Pour le maître, cette faute subalterne d'accord doit être éliminée tout de suite. Mais il ne se résout, ni à indiquer carrément la correction, ni à expliciter ses exigences : par exemple, à l'aide d'un avertissement du genre "faites attention !". Il transforme alors le test d'orthographe en mini-situation d'apprentissage. Et que fait-il ? Il essaye d'obtenir tout de même le bon comportement mais en changeant le problème. Sa deuxième lecture transforme totalement la situation. Un élève conscient du dilemme : "singulier ou pluriel" aurait trouvé sa réponse en résolvant un simple problème de phonétique. Il est bien évident qu'alors son comportement n'aurait eu ni la même signification ni la même valeur.

Hélas, l'élève n'entre pas dans un nouveau jeu. Il souligne par son air ahuri qu'il ne comprend pas pourquoi son professeur s'exprime d'une manière aussi extravagante. Et

[18] Pagnol ; Marcel, *Topaze*, Fasquelle éditeur, 1930.

Topaze est contraint d'expliquer sa pauvre ruse et de se justifier : "..un seul moutonne..', plusieurs moutonsse". Il fournit à la fois le choix ouvert entre les réponses possibles, c'est-à-dire la matière d'une leçon sans doute cent fois rabâchée et la solution dans le cas présent. L'élève reconnaît enfin en même temps le problème et sa réponse. Il s'est contenté d'identifier le désir du professeur à travers le voile transparent d'un déguisement didactique.

Ainsi, nous voyons comment Topaze propose une suite de situations qui, toutes, tendent à produire le même comportement mais qui lui donnent des significations complètement différentes : de moins en moins riches ou coûteuses en investissement et en connaissances pour l'élève. Il y a là une sorte de négociation: Topaze essaie d'obtenir le comportement de l'élève "au meilleur prix" c'est-à-dire avec la situation qui lui donnera la meilleure signification. Et tout montre ici que l'élève se contentera d'attendre que Topaze lui propose le contrat qui exige de lui le minimum d'effort.

En quoi, dans ces conditions, pourrait consister l'apprentissage escompté . Le maître choisit finalement une situation qui permet au système de connaissance de l'élève de lui fournir la réponse attendue. Le comportement correct peut être produit par un répertoire déjà acquis, mais qui n'a rien a voir avec la connaissance nouvelle visée. L'espoir d'un apprentissage avec cette stratégie repose sur la croyance que la répétition de questions pertinentes auxquelles s'associent des réponses correctes , mais obtenues avec des connaissances inadéquates, ferait surgir des connaissances correctes. Ceci est impossible même si l'échelle des questions de difficultés décroissantes posées à l'élève jusqu'à ce qu'il fournisse la bonne réponse, est graduée et souvent répétée. Entre un répertoire inadéquat et un répertoire adéquat, il existe un saut qui est justement la connaissance à acquérir.

1.7. – Commentaire 1999

On peut voir dans ce commentaire à propos de Gaël, l'amorce de plusieurs idées importantes de la théorie des situations qui se préciseront par la suite :

1. L'étude de la relation entre le professeur et l'élève comme *la gestion par le professeur de l'incertitude de l'élève*. A cette époque, la théorie des situations didactiques est celle des situations à usage didactique. Jusqu'à cette étude, l'élève était supposé engagé dans une situation a-didactique[19], c'est-à-dire un problème qu'il doit résoudre par ses seules forces. Le professeur fournissait les informations et les consignes et « dirigeait » le passage d'une action à une formulation ou à une validation logique ou culturelle. Ses actions n'étaient pas un objet de la théorie initiale. Plus exactement, nous supposions qu'elles relevaient de modèles identiques à ceux utilisés pour décrire les actions des élèves. A partir de l'étude de Gaël, la situation d'action du professeur va être étudiée, sous le nom de « *contrat didactique* [20]» pour marquer cette différence avec les situations à usage didactique. L'étude de ce contrat mettra en évidence les paradoxes qui le caractérisent et dont on montrera que la gestion ne peut pas relever des théories classiques de l'apprentissage scolaire. Par la suite, le contrat deviendra une des composantes de la « situation didactique » au sens de « situation dans laquelle se trouve le professeur ».
2. L'*effet Topaze*[21] : Cette expression caractérise l'une des issues de cette gestion considérée comme un échec au moins provisoire : le professeur obtient de l'élève

[19] Situation a-didactique TSD pp58-59
[20] contrat didactique: TSD p. 61 et Y. Chevallard (1985)
[21] effet topaze : TSD p52

qu'il donne la réponse souhaitée à la question qu'il a posée mais en fait, il le fait en remplaçant « sournoisement » la question initiale par une autre qui ne lui est pas du tout équivalente (elle est beaucoup plus fermée). Cette réponse est produite à l'aide de connaissances triviales, sans rapport avec celles que la question était supposé activer. Le professeur dissimule ainsi formellement le fait qu'il donne la réponse à l'élève pour sortir d'une situation sans issue et poursuivre la relation didactique.

Très vite les différentes possibilités de réponse du professeur aux échecs de ses tentatives vont être répertoriées. On montrera alors qu'aucune n'est une réponse logiquement satisfaisante au problème d'enseigner et que son usage « excessif » aboutit à des « effets » négatifs, qui sont à leur tour répertoriés. Et pourtant l'apprentissage s'effectue au cours de ces corrections d'une erreur didactique, remplacée par une autre erreur didactique. C'est précisément parce que l'apprentissage s'opère au cours des ruptures de contrat et non pas comme effet des contrats eux-mêmes.

3. Le *contrat didactique* : Topaze remplace sa première demande implicite par une autre, puis par une autre encore, chacune moins exigeante que la précédente. Il s'attend à ce que à l'une ou à l'autre étape, l'élève devine ce que le maître attend de lui. Mais l'élève attend seulement des ordres et n'engage aucune décision personnelle, ce qui oblige sans cesse le professeur (qui, lui, veut remplir son contrat avec les parents : faire apprendre quelque chose à l'élève) à entreprendre une nouvelle action. Chaque action prend la forme d'une sorte de contrat : « Si je vous dis ceci et que je vous demande cela alors vous devez me répondre ainsi ». Faux contrat, puisqu'il est implicite, et que les clauses de ruptures ne sont pas connues, mais tout se passe comme s'il y en avait un.
4. Pourquoi Topaze ne peut-il pas dire la réponse à l'élève : « mettez un « s » ici et « e, n, t, » ici ? La problématique du contrat commence avec cette question « Pourquoi le professeur ne peut-il pas réduire son action à des ordres ? ». L'étude des paradoxes du contrat didactique[22] commence avec ces questions et avec l'idée que si des milliers de professeurs réagissent de la même façon aux mêmes conditions, ça ne peut être pas inadvertance.
5. Les autres « effets »[23], (Topaze, Jourdain, abus de l'analogie, glissement métadidactique, émiettement…) sont des réponses « didactiques » aux difficultés de l'enseignement. réponses (aux ruptures du contrat). Ces réponses ont elles-mêmes des effets : elles concourent, entre autre, à « l'obsolescence des savoirs » et « des situations ». Elles sont abusives mais souvent inévitables, et c'est plutôt leur usage systématique qui est dommageable.
6. Les différentes stratégies didactiques ne seront étudiées que beaucoup plus tard[24].

Dans une classe réelle, le maître se sentirait sans doute triplement humilié, d'abord par le dédain, ou le « refus de l'élève » d'entrer dans son jeu et de fournir la réponse correcte sans comprendre pourquoi, ensuite sans doute par le fait déontologiquement un peu honteux d'avoir consenti à proposer ce contrat falsifié, et enfin par le fait que cette petite « escroquerie » intellectuelle n'ait même pas réussi. La « vengeance » pourrait alors venir sous la forme d'un contrat plus serré : « je vous ai enseigné une règle, vous

[22] paradoxes du contrat TSD pp. 72-80
[23] Cf. « fondements et méthodes de la didactique » in « Théorie des situations didactiques » La pensée sauvage Grenoble, 1998 pp 52-57 ou " Theory of didactical situations in Mathematics" Kluwer academic publishers pp. 25- 29
[24] Stratégies didactiques, (différentes formes du contrat didactique) "La théorie des situations didactiques et ses applications" Dans un ouvrage en préparation sous la direction de Jean Portugais (Université de Montréal)

devez la savoir, récitez la moi », suivi d’un autre « vous ne la savez pas, vous la copierez 10 fois », ce qui n’améliorera probablement pas les performances futures de l’élève mais qui sauveront la dignité du professeur.

2. DEUXIEME SEANCE

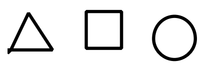
2.1. Soutien et observation

L'intervenant présente à Gaël les buts de la séance Il s'agit de lui enseigner ce qu'il n'a pas su faire la dernière fois et qu'un enfant de son âge devrait réussir, et que, lui aussi, réussira bientôt. Mais cet enseignement prendra la forme d'un jeu.

Cette déclaration liminaire n'a guère d'effet--le mot "jeu" a dû être souvent employé pour annoncer de simples exercices .

Le matériel est constitué de ronds et de triangles de petite et grande tailles. L’intervenant fait compter le nombre de pièces à Gaël, qui en trouve 52, et lui dit d'écrire le nombre sur une feuille. Puis, pour s'assurer qu'il y en a bien 52, l'intervenant recompte mais en lui faisant remarquer qu'il utilise des tas de 10 : une pile de 26 triangles. Puis on ajoute une pile de 10 ronds (ce qui fait 36); puis une autre (46) puis une pile de 6 ronds, total 52 pièces. Une fois que les pièces sont comptées, on les enfouit dans un sac que l'on ferme, et le jeu consiste à se rappeler ce qu'il y avait dans le sac.

L'intervenant demande à l'enfant s'il sait ce qu'il y avait, à quoi celui-ci répond : "des triangles", puis hésite et ajoute : "des carrés, (il n'y en a pas)... des ronds" puis à la demande de l'intervenant il dessine :



- On a compté qu'il y avait combien de pièces ? questionne l'intervenant.
- 26
- 26 ?
- Non, 52.
- Qu’est-ce que j'ai compté 26 ?

Gaël ne se souvient plus. Il réfléchit longuement mais il faut lui rappeler que c'étaient des triangles.
Puis: on lui explique qu'on va jouer aux devinettes

- Qu’est-ce que tu crois que je vais te demander ?
- Combien il y a de ronds
- Est-ce que tu le sais ?
- Non .
- Alors on peut regarder dans le sac si tu ne sais pas. Mais avant de défaire et de regarder, il faut parier. Tu sais ce que ça veut dire ?

Gaël dit que parfois il parie 1 franc avec son père qu’il arrivera le premier au bout du bassin à la piscine.

Le jeu consiste donc à parier combien il y a de ronds, à écrire le nombre supposé, et si la vérification confirme l'hypothèse, c'est gagné.

Premier pari : Gaël affirme qu'il y a 10 pièces rondes.

Vérification : Il y en a 26. Il sourit et constate avec l'intervenant qu'il a perdu son pari.

Dès ce premier pari, et cela se confirmera dans la suite du jeu , on constate que le nombre "10" joue un rôle particulier pour Gaël. Il a retenu que l'intervenant avait rangé les pièces par piles de 10 et peut-être ceci a-t-il contribué à ce premier choix, mais nous verrons plus loin que ce n'est pas la seule raison.

L'intervenant propose que l'enjeu soit désormais un caramel. Gaël sourit.

Après ce premier échec, ils décident de recommencer. Mais Gaël a déjà oublié le début de la séance, ne se souvient plus ce qu'ils ont commencé à compter et croit que ce sont les ronds. L'intervenant lui fait donc réécrire le nombre de pièces : 52, compter les grands ronds : 19. Il vérifie ce dernier nombre en faisant à nouveau une pile de 10 et une pile de 9, puis ils mettent tout dans le sac et le ferment. Gaël écrit sur sa feuille :

52 19

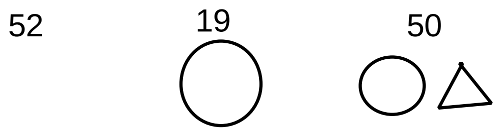
- Qu'est-ce qu'il faut faire ? demande l'intervenant.
- Trouver combien il y a de triangles .
- Oui.., il y avait des carrés ?
- Non, que des triangles et des ronds.

Lorsque l'enfant avait répondu la première fois qu'il avait des carrés, il avait probablement dit cela au hasard, n'ayant pas bien observé les différentes pièces, trop occupé qu'il était à les compter, et ayant du mal à prendre du recul pour savoir ce qu'il comptait.

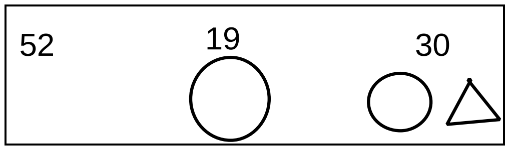
De .toute façon, cette première scène confirme la difficulté de Gaël à prendre en compte les données et même les consignes. Il s'agit cette fois-ci de chercher ce qui n'est pas "les gros ronds", c'est-à-dire le nombre de petits ronds et de triangles, les deux à la fois. Gaël réfléchit : "les triangles, y en a beaucoup..." puis répond au hasard 50.

Il écrit 52 19 50

L'intervenant lui fait confirmer qu'il s'agit des triangles et des petits ronds et dessine sous les chiffres ce qu'ils représentent d'après Gaël :



Il dit alors en résumé qu'on a 50 d'un côté et que si on y ajoute les gros ronds, on arrive à 52. Puis il lui demande s'il tient son pari. Gaël se rétracte alors car il constate que pour aller de 50 à 52, il n'y aurait pas beaucoup de gros ronds, "Il y en a plus que 2".
Il rectifie donc son choix et annonce 30, puis écrit :



Pour vérifier, il sort les objets du sac, en compte 33 et s'exclame : "j'y étais presque !"

Il est important de remarquer qu'il est vraiment resté au niveau de jeu des essais et erreurs et qu'à chaque fois il tente sa chance, mais petit à petit, on voit apparaître certains efforts de raisonnement.

L'intervenant profitant d'une circonstance favorable a, certes, introduit un moyen fondamental de vérification a priori des valeurs envisagées et provoqué ainsi une contradiction entre ce que l'enfant prévoit et ce qu'il constate ainsi qu'une première prise en charge de la situation. L'intervenant prenait un risque en sortant ainsi de sa neutralité encourageante : celui de replonger Gaël dans sa dépendance vis-à-vis de l'adulte qui le conduirait à chercher ses réponses dans les questions de l'intervenant. Mais cette observation de l'intervenant était faite comme résumé de ce que venait de faire et dire Gaël, résumé que l'adulte s'adressait à lui-même, sans même poser de question. L'observation était si évidente pour l'enfant qu'il n'y a pas détecté d'intention à son égard. L'intervenant s'est empressé d'accepter sans commentaire la proposition suivante.

"C'est mieux", déclare l'intervenant, "mais tu n'as pas encore gagné. On recommence ? "

Gaël accepte car on devine qu'il voudrait bien gagner. Il écrit à nouveau 52, puis compte les petits ronds (7) met toutes les pièces dans le sac. Il doit deviner le nombre d'éléments qui ne sont pas des "petits ronds".

Il réfléchit tout haut :
"Il y a 52... comme il y a 7 petits ronds..." Il rit car il essaie d'ajouter 7 à quelque chose pour obtenir 52 et sent qu'il est sur la bonne voie. Il écrit 42 (remarquons que c'est 52 - 10) et parie. Mais il vérifie d'abord en comptant sur ses doigts 42 + 7, constate son erreur, raye 42, et reprenant le même processus de réflexion, inscrit 49 (dernier nombre évoqué 42 + 7) il ne peut pas aller plus loin et parie.
On ressort tous les jetons du sac, l'intervenant les lui fait empiler par 10, il y en a 45 (qui ne sont pas des petits ronds). Gaël raye 49 et écrit 45, ce qui donne :
7 ~~42~~ ~~49~~ 45

L’intervenant déclare : "Il y a un truc... mais il faut le trouver".

Pour la première fois, l’intervenant indique que le résultat attendu est déterminé par les données. Il affirme qu’il existe une stratégie qui permet de gagner à coup sûr. L'anticipation commence à fonctionner ainsi que l'examen a priori de plusieurs solutions possibles. Le nombre de données que Gaël prend en compte a soudain beaucoup augmenté, et il ne peut accomplir qu'une fois le cycle : choix, vérification anticipée, rejet, nouveau choix. Le pari est une période de relâchement de la tension, un moment agréable où on fait semblant de réfléchir, on hésite un peu, puis on se décide, on tape solennellement dans la main de l'intervenant. Alors avec un peu d'excitation fébrile, on ouvre le sac, on compte, on compare le nombre trouvé à sa prévision sous l’œil froncé et dubitatif de l'intervenant à la fois désolé, encourageant et comiquement impuissant. Les paris doivent rester assez denses pour entretenir le plaisir de l'enfant : ce sont eux la véritable gratification .

Le 4éme pari a pour enjeu à nouveau un caramel (hypothétique, les caramels gagnés par Gaël sont comptabilisés mais à la fin, il prendra seulement un ou deux caramels, et il sera clair que cela ne dépend pas du résultat). Cette fois-ci on compte les petits triangles : 13, mais on les range dans un sac à part, dans lequel on va mettre aussi celui où sont les autres pièces.

52

Comme auparavant, Gaël parle à mi-voix lorsqu'il calcule : "là 52, là 13". Il compte sur ses doigts, ralentit à 10, puis continue jusqu'à 13, et répond "42". Mais il recompte longuement et rectifie: "41".

Pour vérifier, l'intervenant vide le premier sac, celui qui contient les 13 triangles qu’il étale sur la table et pose l'autre sac à côté, fermé.

- si tu as gagné, dit-il, on en a 41 là (il montre le sac fermé), et en comptant tout on aura ... ?
- 52.

Partant de 41, Gaël compte donc les 13 petits triangles : "42, 43..." et obtient 54. Comme on n'a pas ouvert le sac, il a encore le droit de changer d'avis et l'intervenant le laisse chercher.

Gaël était en train d'oublier la méthode de vérification (ou peut-être était-il en train d'essayer de compter à rebours, ce qui exigerait de compter à la fois ce qu'on enlève et le résultat : 1 - 51, 2-50 ; 3-49 - mais c'est peu probable). L'intervenant a suggéré opportunément à nouveau la méthode de vérification et en a facilité la mise en œuvre, mais Gaël n'a pas pris cela comme une indication nouvelle car il peut considérer la méthode comme déjà convenue et son problème principal, à ce moment-là c'est de compter correctement et d'avoir une stratégie de choix des nombres à essayer.

Gaël sourit, semble se souvenir de quelque chose qu'il a appris antérieurement, et compte sur ses doigts, de 13 à 52. Mais en cours de route, il s'arrête car il s'aperçoit qu'il n'a pas retenu combien il avait compté jusque là, et essaie une autre méthode :

"Ah, là il y a 13, j'enlève 10, il reste 3 et dans l'autre il y a ... 45... Il y a 52, j'enlève 10, il reste 40...5, 45 !" (peut-être 42 + 3 ?)

Vérifions ! A nouveau, ce résultat s'avère inexact et l'intervenant lui suggère d'essayer un autre nombre. Il choisit 40, ajoute 13 (en comptant tous les triangles un par un) et se voyant si près du but s'exclame : "ah, j'ai déjà une preuve !" mais laquelle ?

Il essaie ensuite 31. I écrit tous les nombres qui ne vont pas, et à côté le résultat obtenu en ajoutant 13, ce qui successivement :

~~41~~	54
~~40~~	53
~~31~~	44
~~43~~	56
~~33~~	46
~~42~~	55
~~34~~	47

Maintenant la méthode de vérification fonctionne bien, le fait de pouvoir compter les objets de la partie connue a différencié les fonctions des trois nombres : le nombre cherché - celui sur lequel on parie et à partir duquel on compte - le nombre des objets de la partie connue que l'on compte (au lieu d'additionner), le nombre total d'objets qui est le nombre final qu'on doit trouver. On peut douter que cet algorithme soit acquis en tant que solution générale des problèmes de soustraction ; mais il va aider à explorer les relations invariantes par translation et permettre, par là, d'aboutir à une méthode de solution et de régler quelques problèmes de numération et de structure primaire des naturels. Il permet surtout un investissement des termes de la relation à comprendre.

Observons sa stratégie. Tout se passerait bien si Gaël possédait parfaitement la numération à rebours, c'est-à-dire la soustraction de 1, car il commence avec 41 qui donne un résultat trop grand. Il essaye une autre méthode, correcte, mais qu'il ne maîtrise pas du tout en ce moment et essaye 45 qui l'éloigne **du but cherché** . Alors, il corrige et choisi 40 (le seul nombre qu'il peut facilement placer au voisinage de 41 et plus petit que lui). On peut penser qu'il utilise un principe de correction : "si un nombre plus grand m'éloigne, un plus petit me rapproche", ce qui implique qu'il postule à la monotonie de l'application. Et 40 donne un résultat excitant, il est tout près. On peut penser que pour Gaël le résultat confirme la validité de l'intuition -- " la preuve"-- et que de surcroît il voit qu'il faut enlever 1 à 40. Ceci impliquerait qu'il pressent qu'une correction de 1 dans les choix corrige le total de 1 dans le même sens. Le théorème va fonctionner pour 2 dans quelques instants. Il ne fonctionnerait probablement pas pour 8 ou 10. Mais Gaël ne sait pas trouver le nombre qui précède 40. Il enlève une dizaine et ajoute une unité : 31 - échec. Retour à la stratégie précédente : l'encadrement. Gaël va augmenter le nombre inférieur 31 . . . 33. . . 3 4. . , et diminuer le nombre supérieur

43...42.., même si les nombres supérieurs restent plus grands que 40 la stratégie peut aboutir.., qu'en est-il ?

Cette fois il utilise avec succès le théorème de conservation des différences dans la translation numérique (la différence entre les deux résultats totaux est égale à la différence entre le nombre essayé et le nombre cherché) mais il ne réussit que parce qu'il n'y a pas à changer de dizaine.

Le premier succès à l'exercice est salué comme il convient par un bavardage libre au cours duquel Gaël déclare qu'il voudra rejouer au jeu du sac et apprendre à trouver, à deviner. L'intervenant lui propose "tout de suite".

G : - Oui

I : - Avec des petits nombres alors parce que tu es fatigué. Il y a 7 pièces, des triangles et des rectangles.

Gaël compte 3 triangles et range le tout dans le sac.

- Combien y a t'il de rectangles ? demande I.
- 7
- Non, 7 en tout... .
- Combien il y a de rectangles ? il y en a 3, déclare Gaël
- On parie ?

L'enfant hésite, se pose des questions .

- Tu pourrais les dessiner pour deviner...

Il dessine 3 triangles, puis avant de dessiner les rectangles, annonce

- 4

L'intervenant lui dit de les dessiner mais il ne se souvient plus de la forme et doit la palper à travers le sac pour se la remémorer, puis il recompte après avoir fait ses rectangles.

Ce dernier épisode de l'observation est important, car il montre, accruees par la fatigue, les difficultés de Gaël a associer à un nombre ce qu'il représente. Il a bien observé les différentes classes d'éléments, il a compté les éléments, mais il semble se heurter à une barrière lorsqu'il passe d'une notion à l'autre. C'est ce passage laborieux qui cause en grande partie ses hésitations : il reste souvent du coté des classes d'éléments, et lorsque, enfin, il découvre une voie pour les dénombrer, il ne sait plus quel était son point de départ.

Une des sources de difficultés peut venir de la proximité des nombres, ici 4 et 3. Aussi nous avons pris soin dans le matériel de la séance de prévoir des cardinaux des parties assez différents : 45 - 7 puis 39 -13 (sauf pour la phase initiale 26 - 26 et c'était une erreur.)

2.2. - Discussion : Observation des difficultés de Gaël

Cette séance a mis en évidence des difficultés assez anciennes de Gaël avec le dénombrement :

- difficulté d'attribution durable d'un cardinal à une collection,

- difficulté de manier plusieurs nombres à la fois, surtout si les collections ne sont pas visibles, mais même si elles le sont,
- difficulté avec la numération : "rôle privilégié" du nombre 10 qui intervient fréquemment hors de propos comme un nombre fétiche. A ce sujet, on peut remarquer ceci : le rôle privilégié que joue le nombre 10 dans la numération, dans le calcul des sommes ou différences avec retenues ou dans la multiplication doit apparaître comme essentiellement magique à un enfant qui n'entre pas dans le jeu.
- Surtout difficulté à "passer les dizaines" dans le compte à rebours et donc à ranger les noms des nombres.

Il est clair aussi que nous avons pu observer d'autres difficultés, par exemple celle bien naturelle, à soutenir son attention à certains moments mais nous ne nous en occuperons pas pour l'instant.

2.3. – Discussion des effets de la séance

Avons-nous la possibilité de répondre à certaines questions que nous nous sommes posées avant cette séance ?

- Il semble tout d'abord que Gaël soit tout à fait capable de rentrer dans une situation d'action. Il a progressivement accepté des règles du jeu qui consistent à prendre en charge un objectif et les moyens de vérifier soi-même qu'on l'a atteint, à hasarder des solutions, à les confronter à un état du milieu. Il a progressivement investi la recherche d'une bonne solution, rejetant de lui-même les contradictions, les solutions inadéquates. Il a pris plaisir au jeu de la prévision et de la vérification, même lorsqu'il n'a pas gagné.

- Il s'est engagé volontiers dans la voie de l'anticipation. Ce dernier point est très important à plus d'un titre.

  - L'anticipation est le premier pas vers la création d'une théorie et le passage à des rapports expérimentaux : le sujet renonce au mode procédural, aux seules interactions directes avec le milieu, à la méthode des essais et des erreurs et prend de la distance par rapport à ses actions. Cette attitude réflexive le conduit au mode déclaratif.

  - L'anticipation repose sur l'existence d'un modèle au moins implicite, juste ou faux, sur lequel elle se fonde et que l'expression peut mettre à l'épreuve. Ici, le modèle est la relation : "nombre connu + nombre essayé = 52" et il parait assez sûr à Gaël pour lui permettre rapidement une simulation de l'expérience (Il n'est pas remis en cause du moins du point de vue de sa validité).

Il est intéressant de noter que Gaël a bien franchi aussi le pas de l'anticipation : nous avons voulu qu'il s'intéresse à la matérialité des données de l'énoncé, nous avons mis en scène les collections dont il s'agit avec un cérémonial insolite et captivant de façon à augmenter la charge affective perceptive et sensorielle de la recherche de la solution. Or l'investissement dans l'application est d'une certaine façon antagoniste de l'investissement dans l'action en ce sens qu'elle en suppose le refus, au moins provisoire. Ici Gaël doit renoncer aux plaisirs de l'action, de la décision, du pari, du jeu, pour les remplacer par des calculs et des simulations. Mais on peut remarquer toutefois que l'anticipation hérite, dans une certaine mesure, des motivations associées à la situation qu'elle simule. Gaël expérimente ses prévisions avec un petit frisson de plaisir qui rappelle celui qu'il éprouve au moment des paris.

Enfin, la considération successive de plusieurs prévisions possibles au cours d'un même pari et le fait de les écrire va permettre l'examen en même temps des divers choix, et par conséquent le choix d'une stratégie reposant sur la structuration de cet univers des possibles.

Le passage d'une prévision "contingente", où le sujet ne conçoit pas d'autre issue à la situation que celle qu'il envisage, à une prévision des possibles est une étape indispensable pour l'émergence d'une "prévision" du nécessaire où l'issue est prévue, parmi d'autres, pour des raisons logiques, mathématiques, ou autres, mais théoriques.

Gaël est donc capable d'entrer dans toutes ces phases de la dialectique de l'action, de produire et d'éprouver des modèles implicites, même si, comme nous le verrons ci-dessous, c'est avec une efficacité assez faible encore. Il est probable qu'il accomplit naturellement cette activité, ce qui explique le développement normal qu'on observe chez lui. Ses attitudes stéréotypes que l'on constate en classe et sa tendance à chercher des solutions faciles dans l'interprétation des suggestions de l'adulte sont donc un effet de sa manière d'utiliser la situation didactique.

Nous avons pu voir ici que cette situation n'est pas inéluctable, le choix d'une situation appropriée a bien produit la rupture que nous avions envisagée, avec les efforts prévus. Bien sûr, cette rupture "accidentelle" n'a pas encore changé Gaël, ni ses rapports avec la connaissance. Elle a été obtenue en partie en s'appuyant sur son défaut majeur, le désir de séduire l'adulte et d'entretenir avec lui des rapports affectifs et ludiques. Il faudrait que ce jeu avec la connaissance puisse s'instaurer régulièrement et se poursuivre dans les circonstances didactiques ordinaires. Il n'est pas question, en effet, de demander à la maîtresse de Gaël de beaucoup modifier sa méthode pédagogique qui convient à beaucoup d'autres enfants, et qui doit sans doute offrir des occasions similaires de fonctionnement correct, occasions qui ne sont pas saisies par Gaël.

La suite des situations qui permettent la dévolution du problème «chercher le terme inconnu d'une somme est explicitée en détail dans le chapitre sur le contrat didactique et sur le milieu de TSD[25]

2.4. - Projets.

Il faudra donc étudier les moyens d'engager Gaël dans cette voie et de lui donner le goût et les moyens d'assurer son apprentissage. Il reste aussi beaucoup à faire pour lui permettre d'acquérir la maîtrise des situations de soustraction et leur donner du sens.

Gaël n'a aucun mal à envisager la position des ensembles en présence. Il parvient sans difficulté à isoler les triangles et les "non triangles" et à les inclure dans la classe de départ, que les "non-triangles" soient clairement une propriété commune ou non (carrés et ronds...) On pourrait supposer qu'il lui suffirait à associer à ces opérations ensemblistes les opérations numériques correspondantes, inverses l'une de l'autre, l'addition et la soustraction.

- Certaines méthodes didactiques consistent alors à illustrer l'un et l'autre cas par un ensemble d'exemples et de problèmes, suffisant pour suggérer les champs

[25] "Théorie des situations didactiques" pp 304-310

d'application de chacun. Dans ces méthodes, les procédures de calcul, le modèle implicite, la théorie ne changent pas au cours de l'apprentissage ; il s'agit d'associer une structure mathématique déjà faite à des situations supposées déjà comprises ou compréhensibles et ce sont ces situations qui constituent le sens des opérations mathématiques.

Ces méthodes reposent sur des conceptions de la signification et de l'apprentissage assez anciennes et très discutées. En simplifiant beaucoup on peut les résumer ainsi :

- Le signifié d'une connaissance ou d'une théorie est constitué de l'ensemble de ses réalisations, c'est-à-dire des situations objectives dans lesquelles elle se trouve vérifiée. Donner du sens à une structure, c'est lui trouver des applications, des occasions de s'en servir. .

- Pour apprendre une connaissance théorique, il faut :
  - la constituer à partir de connaissances déjà acquises et par un discours ou des moyens logiques (ou mathématiques ou scientifiques ou rationnels, etc. ...) eux-mêmes déjà connus,
  - ou "l'apprendre" toute faite directement au sens de la mettre en mémoire comme un algorithme par exemple. Donner du sens à une telle connaissance reviendra à lui faire correspondre des problèmes ou des situations où elle est réalisée, c'est-à-dire où les objet dont elle parle sont présents et où les relations qu'elle envisage entre eux sont vraies. L'enseignement consistera à produire des conditions conduisant a associer les deux après avoir mémorisé l'un ou l'autre.
  - Généralement, du moins dans beaucoup de cas, le processus d'apprentissage se ramènera, avec des justifications diverses, à des conditionnements : soit que l'on parte de la théorie pour lui chercher des applications ou que l'on parte des cas pour faire abstraire la structure, ou les deux.

Cette association se fait mal car l'interprétation de la situation ne se produit que si l'on possède le schème théorique complet et inversement la théorie s'entend mal si elle n'a pas de justification ni de fonction explicative ou descriptive. L'adaptation miraculeuse et anhistorique de la théorie aux pratiques souhaitées fait obstacle à des apprentissages partiels. Il faut apprendre la théorie sous sa forme définitive et correcte, adaptée aux exemples complexes et achevés auxquels elle doit s'appliquer. Le mieux que l'on puisse faire sera de découper la théorie en fragments simples et de chercher des situations simplifiées où ces seuls fragments prendront valeur de théorie ou d'algorithme... toujours parfaitement adapté. Mais que l'on fragmente ou non, on en revient à devoir associer deux connaissances déjà achevées apprises ou constituées indépendamment l'une de l'autre.

Pour pallier aux difficultés de l'apprentissage de cette association, (non motivée pour l'élève et qui repose entièrement sur une décision didactique) l'enseignant peut raffiner la méthode par la mise en œuvre d'illustrations (manipulations, schémas, discours mnémotechniques) destinées à souligner l'association, mais qui ne font pas avancer 1 'un ou 1 'autre.

Ici, on pourrait "enseigner" à Gaël les éléments qui lui manquent : faire un schéma, identifier dans une situation le schéma convenable, concrétiser la soustraction par la répétition de manipulations et l'association d'un discours approprié. . , "j'enlève", "je retranche.. " , etc. . .

Nous cherchons au contraire à lui faire construire et apprendre une théorie en suivant un processus différent, historique celui-là. Nous expliquerons ce processus dans un autre chapitre mais on peut voir tout de suite en quoi il va différer des méthodes classiques.

Considérons une autre composante du sens de la soustraction [26] [27] :

Pour retirer 5 de 57 on peut compter à rebours en repérant éventuellement sur les doigts pour s'arrêter au bout de 5 : 56 55 54 53 52.

1 2 3 4 5 ...

Certes, c'est plus compliqué comme procédure, mais l'enfant peut se référer de façon très étroite à ce que représentent les nombres et les noms des nombres au cours du dénombrement. C'est donc plus économique (ou plus primitif en ce qui concerne les connaissances théoriques). C'est en tout cas impraticable s'il s'agit de retirer 39 de 57.

On peut prétendre qu'il est logiquement équivalent de retirer a ou b de c dés lors que a + b = c mais il est clair que ce n'est pas vrai dans le cas présent : pour retirer 52 de 57, il faut "inventer" un autre système et compter de 52 à 57 en comptant ce qui manque, soit sur les doigts soit d'une autre manière:

52	53	54	55	56	57
*	1	2	3	4	5

Il est bien connu que dés que les objets ne sont plus concrètement présents, ces procédures échouent car l'élève ne sait jamais s'il faut "compter 1 avec 52 ou avec 53".

Bien sûr, dans les méthodes classiques d'enseignement, le maître ne manquait jamais d'examiner "tous les sens" de la différence : ce qui manque, ce qui reste, de qui est en trop.., ou en moins.., etc.., mais toujours à plat comme les facettes d'un même savoir, et sans se soucier de l'adaptation de ces points de vue, ni de leur place dans une genèse de la communication.

La méthode qu'utilise Gaël ici est différente et basée sur une meilleure connaissance de l'ensemble ordonné des naturels et de leurs ordres de grandeurs. Pour trouver ce qu'il faut ajouter à 39 pour obtenir 59 elle consiste à prendre un nombre voisin du résultat et sur lequel les calculs sont simples par exemple 20, puis à corriger à l'aide du théorème de conservation des différences : 39 + 20 = 59 qui dépasse 57 de 2 alors il suffit d'ajouter 20 - 2 = l8. Cette méthode est très utilisée en calcul mental. Evidemment, elle n'est pas une "méthode" pour Gaël, elle n'est pas utilisable dans n'importe quel genre de situations, elle n'est pas reconnue pour telle, elle n'est même pas une connaissance : Gae1 serait bien incapable de dire à son père ce qu'il a appris au

[26] En théorie des situations le sens, en particulier celui de la soustraction, est constitué par :

1. l'ensemble des situations qui sont résolues par une " soustraction "
2. l'ensemble des procédures de résolution de ces situations (en particulier celles qui reposent sur des répertoires " primitifs " et dont la soustraction est une sorte de réécriture
3. l'ensemble des moyens culturels et des relations développés pour "expliquer" la soustraction. C'est-à-dire les connaissances (considérées) utilisées pour "contraindre" un apprenant et qui simulent sa compréhension (supposée) de la soustraction.

[27] A la suite de ce travail, la liste des stratégies des soustractions et leurs domaines de meilleure efficacité en fonction de diverses variables a été étudiée par I. Katembera dans sa thèse de 3ème cycle (dirigée par G. Brousseau).

cours de la 2éme séance. Il faudra tout un processus pour le conduire à un objet de connaissance à la fois efficace, bien conscient et bien maîtrisé sur le plan théorique.

Et pourtant cette méthode se heurte à des difficultés anciennes de Gaël avec la numération. Nous pourrions croire que nous voyons ici comment un défaut d'acquisition d'une notion ancienne peut rendre impossible une activité essentielle pour comprendre une notion nouvelle. En fait, nous sommes en présence d'une véritable situation **d'apprentissage de la numération**. Si Gaël a peu de prise sur la situation en tant qu'occasion d'apprendre la soustraction, puisqu'il ignore les intentions de l'intervenant et où se trouve l'objet de son désir didactique, il est clair pour lui qu'il bute sur la possibilité de compter certains nombres: (trouver le prédécesseur de 40). C'est ce qui l'empêche de mettre en œuvre une stratégie efficace. Pas de doute que lorsqu'il trouve 39, après un autre raisonnement, cette réponse vient prendre sa place aussi comme réponse à la question : "quel est le prédécesseur de 40 ?".

On pourrait tout de suite "didactifier" cette partie de l'apprentissage : reconnaître la difficulté, rappeler les moyens de la surmonter, expliquer à nouveau, faire des exercices de comptage à rebours, etc. ... nous ne le ferons pas. Mais pour bien repérer le caractère didactique des difficultés de Gaël, nous avons ménagé une courte séquence de ce type en fin de la séance suivante.

Pour revenir à un plan d'apprentissage de la soustraction, d'autres stratégies peuvent apparaître dans d'autres conditions (avec d'autres nombres) mais avec la même situation de base :

par exemple de 39 à 40 - 1, de 40 à 50 - 10, 10 et 1, onze et de 50 à 57 : 7, 11 et 7 : 18.

Cette méthode, la plus répandue en calcul mental, s'appuie, elle aussi, à la fois sur l'ordre et sur la numération décimale. Elle devient plus efficace pour de plus grandes différences. L'algorithme habituel peut apparaître comme un raccourci de la précédente ou comme le résultat d'un autre raisonnement. L'apprentissage pourra s'organiser en une présentation fréquente de la même situation didactique où ne varieront que certaines conditions, favorisant la constitution de ces stratégies. La possibilité de remplacer l'une par une autre va leur conférer une certaine équivalence (du point de vue du sens), le choix de l'une ou de l'autre dépendant de sa commodité ou de son efficacité. Ces stratégies mobilisent tous les schèmes fondamentaux de la somme et de la différence. L'ordre de leur apparition constitue une genèse (bonne ou mauvaise) du concept et lui donne un sens.

Nous n'évoquerons pas ici les processus de formulation, de validation, de l'institutionnalisation[28] qui permettent l'émergence de la soustraction en tant que théorie à là disposition de l'enfant.

Dans la 3ième séance nous allons reprendre la même situation.

3. TROISIEME SEANCE

3.1.Soutien et observation.

a) Le jeu des devinettes

[28] Cf. fondements et méthodes de la didactique ouv.cit.

L'intervenant reprend donc sans modification, le jeu de devinettes de la dernière fois : il y a 56 pièces que Gaël compte et met dans un sac, après avoir écrit le nombre sur une feuille. L'intervenant retire ensuite 10 gros ronds du sac, les fait compter par Gaël puis les enfouit avec le premier sac dans un second. Il s'agit de savoir combien il y a de pièces dans le petit sac intérieur.

Gaël réfléchit, compte jusqu'à dix et répond : “ cinq !” L'intervenant lui montre les 10 ronds puis secoue le petit sac et lui demande s'il croit vraiment qu'il n'y en a que 5. Gaël sourit, cligne des yeux et secoue la tète, exprimant qu'il se rend bien compte qu'il a fait une erreur. En fait, Gaël vient de reproduire son mode de réponse habituel ; il compte jusqu'à dix, comportement stéréotypé, puis puisqu'il faut bien répondre, dit n'importe quoi. L'intervenant n'accepte pas cette réponse. En classe, le maître ne peut pas avoir cette exigence têtue envers chaque élève pour chaque problème. Alors Gaël poursuit à mi-voix, "56.., il y en a 10 alors... (il compte jusqu'à 40), j'en suis à quarante, et on enlève 10,.., ça fait quarante ! " : En fait, il n'a pas changé de procédure, il a simplement donné un nombre plus plausible conformément à l'attente exprimée par l'adulte. Le fait de devoir retirer 10, le nombre magique, contribue peut-être à un désarroi.
L'intervenant, alors, lui rappelle le principe de la vérification de leurs affirmations pendant la séance précédente . "Nous faisions un pari et nous vérifiions si nous avions raison.... " sans dire, bien sûr, quelle opération était utilisée. Pendant ce temps, l'enfant réfléchit en riant, puis s'exclame :
- "46 ! "
Il semble évident qu'il est sûr de sa réponse. On pourrait penser qu'il a suffi de rappeler les conditions de la situation, pour rendre possible un contrôle de sa réponse, et donc l'apparition d'une réponse correcte. On pourrait aussi penser que Gaël a joué un jeu plus subtil, lâchant des réponses provisoires pour gagner le temps d'achever sa réflexion ou même simulant ses difficultés habituelles en taquinant l'intervenant. En tout cas, cette scène montre bien le besoin de Gaël de "meubler le silence".

I : - Pourquoi dis-tu que ça fait 46 ?- continue l'intervenant un peu interloqué par la rapidité de la réponse.
G.: - Parce que je sais qu'à 10 on enlève 5, alors ça fait 4 et puis il reste 6 alors ça fait 46.
I : - !!!

Sans doute faut-il traduire ainsi cette réponse : à 5 dizaines, on enlève une dizaine (formulé à l'envers), il en reste 4. Dans 56, il y a 5 dizaines et 6 unités, ces 6 unités ajoutées aux quatre dizaines on obtient 46.

Ici, Gaël utilise à plein les ressources de la numération pour effectuer sa soustraction selon le schéma suivant

$56 - 10 = (50 + 6) - 10 = (50 - 10) + 6 = 40 + 6 = 46.$

Il est vrai que cette méthode donne dans ces conditions une procédure plus simple que celle qui aurait été nécessaire lors de la séance précédente :

$52 - 7 = (50 + 2) - 7 = (50 + 2) - (2 + 5) = (50 + 2 - 2) - 5= 50 - 5 = (40 + 10) - 5 = 40 + (10 - 5) = 40 + 5 = 45$

Et déjà cependant Gaël éprouve des difficultés à formuler sa demande.

Cette difficulté se manifeste par l'incapacité à désigner l'ordre des nombres qu'il énonce et par l'apparition d'une inversion d'une relation ("à 10 on enlève 5" au lieu de "à 5 on enlève 1 dizaine"). Souvent, tout se passe avec Gaël comme s'il abordait les relations en deux temps : d'abord la relation binaire et la paire qu'elle lie, puis l'identification du couple. De même, par exemple, dans 21, il appréhende d'abord la paire et puis le couple (2,1), c'est-à-dire 2 "trucs" et 1 "machin", puis, si nécessaire, l'ordre 2 dizaines et 1 unité, c'est-à-dire 20 et 1.

Après avoir expliqué sa réponse (46) Gaël va la vérifier. Mais auparavant, I lui demande si l'on ne peut pas savoir combien il y a de morceaux sans ouvrir le sac.
Réponse de Gaël : "ah non, on peut pas savoir..."

L’intervenant lui rappelle alors la méthode utilisée la fois précédente, lorsqu'on considérait que le sac contenait un certain nombre de pièces et qu'à ce nombre on ajoutait les éléments dispersés sur la table : si l'on ne s’était pas trompé, on obtenait le nombre de pièces total. Gaël utilise donc cette méthode et s'aperçoit qu'effectivement, il ne s'est pas trompé. Pour être tout à fait sûrs du résultat, Gaël et l’intervenant vont vider le sac et compter toutes les pièces après avoir parié, mais Gaël dit qu'il n'est pas "tout à fait sûr" de gagner.
Ils comptent chacun une partie des pièces, l'intervenant faisant des piles de 10 éléments. Lorsqu’ ensemble ils ont dénombré 40 morceaux, Gaël s'arrête et dit :
"Ah, je sais que j'ai perdu"
mais l'intervenant lui conseille de continuer et il s'aperçoit, en fin de compte, que son résultat était exact.

Un observateur pourrait d'abord s'étonner de voir que Gaël a oublié ce qui avait constitué la clé, le moteur de l'anticipation, lors de la séance précédente. Mais nous savons qu'une des difficultés de Gaël provient de ce qu'il ne se souvient pas de ce qu'il a fait précédemment en mathématiques. De plus, la suggestion avait été faite par l'intervenant; Gaël s'était contenté de s'en saisir pour réaliser son projet de prévision de façon plus satisfaisante (pour l'intervenant) par soumission au désir de l'adulte. Celui-ci, d'ailleurs, n'avait rien fait pour attirer l'attention de l'enfant sur ce procédé. Dans le contrat didactique, c'était, pour l'un comme pour l'autre, un moyen, pas un objet de connaissance "à apprendre". Il est donc, d'une certaine manière, satisfaisant de contrôler "l’innocuité" d'une suggestion non institutionnalisée.

Si le moyen de contrôle avait été "enseigné", il y aurait eu danger de le voir utilisé comme moyen systématique de trouver la solution, et même sous la forme la plus évoluée, d'addition à trou. C'eut été dommage et sans doute raté d'ailleurs pour la création du sens.

Mais il est clair que Gaël fait immédiatement son affaire de la prévision, du pari et de la vérification. Pour lui, il serait très décevant "qu'on puisse savoir à l'avance" même la preuve, par conséquent, est douteuse, et Gaël entretient le suspense ("Ah... je sais que j'ai perdu") jusqu'au dernier moment.

I : - Est-ce que tu crois que tu saurais trouver si on faisait autre chose ?
G : - Peut-être, mais j'en suis pas sûr - (Ne prenons pas de risque !)

Ils prennent les petits ronds et remettent tout le reste dans le sac. Gaël est d'accord pour dire qu'il y a toujours 56 éléments dans le sac, et l'enfant fournit la réponse suivante :

"Là, je crois avoir trouvé. Là on fait 50 et puis là, y'en a 6, si on enlève 5 à 6 ça sera ceux-là (il montre les petits ronds) et puis y reste 1, alors ça fera 51".

Dans ce dernier raisonnement, apparemment, l'enfant a mis mentalement de côté 5 piles de 10 et a gardé les 6 éléments "unités" auxquels il a pu retrancher 5. Mais que serait-il advenu s'il y avait eu par exemple 7 petits ronds ?

L'intervenant lui fait écrire son résultat (51) et lui demande de le prouver, sans compter.

G : - Là y a 5, ça reste toujours pareil

I :- 5 quoi ? 5 dizaines ?

G : - Oui, ça, si on enlève 6, y en aura 5 d'enlevés, non si on enlève 5 y en aura plus qu'un, les 5 je les mets là (petits ronds), il reste 1 (sac) et là 5.

L'enfant a donné un certain caractère immuable aux dizaines : "ça reste toujours pareil". Dans 56 il y a 50 et 6. Si on enlève 5, il reste 1, donc il s'occupe de ces 6 éléments-là, rassuré, car il sait que les 50 autres n'ont à subir aucune opération.

L'intervenant le ramène à l'autre méthode de vérification, ajoutant 5 aux 51 supposés être dans le sac.

I : - Qu'est-ce qu'on fait là, 51 et puis ?...

G : - Ca y est, j'ai tout compris, comme y en a 51, on compte et on trouve le même nombre.

Il parait vraiment satisfait car il a retrouvé l'algorithme utilisé la fois précédente et y assimile la possibilité de preuve. Mais il est vraisemblable que cette fois, il a perçu l'intention didactique - à travers l'insistance de l'intervenant.

b) Le compte à rebours "le passage des dizaines"

Pour donner l'occasion à Gaël de s'exercer aux comptes à rebours et surtout au franchissement des nombres ronds de dizaines, l'intervenant utilise le même jeu. Il y a toujours 56 éléments dans le sac, mais il en sort certains (un par un, au début) et à un moment il dit "top" et l'enfant doit dire combien il reste dans le sac. Pour lui faire bien comprendre la règle du jeu, il prend le sac, ne sort aucune pièce, et dit "top". L'enfant répond "56. " Puis il en enlève une et dit "top". Gaël hésite puis déclare "55". L'intervenant continue, en retire 2, Gaël ne se trompe toujours pas et dit "53", mais lorsqu'on en enlève 3 autres, il répond "40. " Ils parient alors un caramel. Gaël compte à partir de 40 en ajoutant tous les éléments qui sont hors du sac. Arrivé à 46, il dit qu'il a gagné. L'intervenant lui fait remarquer qu'il y en avait 56 puis ils recommencent. Lorsqu'il y a 50 pièces dans le sac, il en enlève 3, mais l'enfant ne semble pas suivre l'action.

Décidément, tant qu'on était dans la même dizaine, de 56 à 50, il n'y avait pas de problème pour compter à rebours, mais la difficulté se situe au niveau de changement de dizaines auquel de heurte Gaël.

Gaël est un peu perdu, mais finit par découvrir la solution et désigne successivement les 3 derniers éléments en comptant : 49 , 48 , 47.

Le jeu se poursuit, avec un "top" à 43 qui ne pose aucun problème, puis on en enlève 3. Gaël répond : "39". Il parie, vérifie en ajoutant 3 à 39 puis se demande : "Il y a pas 39, alors qu'est-ce que ça peut bien être ?"

Il compte à rebours et trouve 40, nombre confirmé par la vérification.

Le jeu se poursuit ainsi quelques minutes, mais l'intervenant ôte ensuite les éléments par dizaines et Gaël n'a alors aucune difficulté à donner le résultat, terminant ainsi la séance sur un succès.

3.2. Commentaire sur l'appréciation des résultats.

La reprise du "jeu" des sacs avec des données un peu plus simples, il est vrai, a permis à Gaël de retrouver le schéma initial et de produire des raisonnements attendus. Nous avons retrouvé aussi chez lui les difficultés et les erreurs déjà connues. La répétition de situations de ce genre permettrait sans aucun doute de le conduite progressivement à corriger ses erreurs d'écriture des chiffres, à bien connaître la numération décimale et à donner du sens aux problèmes de soustraction. D'autant plus que l'intervenant a su développer avec Gaël une relation agréable. Nul doute que pour faire plaisir à l'adulte, Gaël identifiera ses intentions, manifestera les comportements attendus et simulera les acquisitions voulues. Cela lui donnerait le temps de lier des relations affectives qui ne reposerait plus sur le contrat didactique , et de se dérober à celles qui le contraindraient ; Mais le problème est justement celui-ci : les progrès seraient obtenus au prix du renforcement de ce qui conduit Gaël à l'échec. Le rapport de Gaël avec la certitude montre qu'il serait assez vain de poursuivre dans cette direction.

3.3. Observations et analyses : Gaël et l'incertitude

L'attitude d'évitement de Gaël face à la certitude, qui en soi est surprenante, devient plus compréhensible si on la met en relation avec tout ce qui particularise ses démarches cognitives. Depuis le début des interventions, nous avons été frappés par cette profonde tendance de Gaël à donner des réponses spontanées plus ou moins plausibles. Il semble incapable de suspendre quelque temps des réactions très impulsives afin de réfléchir, de rassembler des informations, de construire lentement les inférences nécessaires. Bref, on retrouve souvent cette difficulté à entrer dans des processus secondarisés.

Ce que nous pouvons admettre c'est qu'en l'absence de déficit sur le plan opératoire, une telle attitude a un sens du point de vue du sujet : à travers elle, il poursuit une satisfaction ou évite un déplaisir. Ce qui est mis à distance par ce comportement durant les apprentissages c'est bien le champ de la certitude. Nous avons plus haut remarqué combien il était malaisé de lui faire quitter le domaine du possible pour celui du nécessaire.

Fuir la maîtrise totale de la connaissance par l'évitement de tout raisonnement au profit de réponses données au hasard c'est en effet rester, pour Gaël, dans le domaine de l'incertitude. Cette tendance est si forte que, sûr du résultat, il tente encore, par un véritable déni, d'abolir le caractère de certitude de son raisonnement "Ah, je me suis trompé !".

Nous nous trouvons alors devant un des points les plus délicats d'une intervention didactique de ce type. L'échec en mathématique apparaît ici avec sa signification symptomatique, c'est-à-dire qu'il renvoie à l'organisation totale du sujet et à l'équilibre actuel de ses investissements.

Dès lors, si l'intervention prend l'aspect d'une rééducation au sens strict, visant la disparition du symptôme par la mise en oeuvre de stratégies diverses (aider l'enfant à utiliser des raisonnement etc.) on court le risque d'un échec : le contre-investissement de l'enfant va jouer et l'intervenant sera impuissant à modifier profondément les conduites d'évitement du sujet. Il est également possible d'entraîner des décompensations dans la mesure où ces attitudes jouent leur rôle de défense contre l'angoisse.

Faut-il alors adopter une approche clinique qui tendrait à déterminer le sens inconscient des conduites d'évitement que traduisent probablement les démarches de Gaël dans le domaine mathématique? Mais une telle approche est particulièrement malaisée. Elle le serait dans le cadre d'une thérapie analytique où toute forme d'inhibition intellectuelle devient un symptôme particulièrement complexe et largement surdéterminé. Elle l'est d'autant plus dans le cadre d'une intervention où le matériel, à travers les tests projectifs, reste fragmentaire et où tout ce qui a trait à l'histoire du sujet ainsi qu'aux relations intra-familiales nous reste inconnu pour la majeure partie.

Les seules hypothèses, quant au sens à donner au symptôme, s'appuieraient uniquement sur l'investigation psychologique faite avant la première séance. Nous pourrions mettre en effet en relation ce que Rorschach et le CAT nous avaient révélé avec les caractères symptomatiques du comportement de Gaël. Les conduites de stupeur et de profond bouleversement devant certaines planches chez un enfant, par ailleurs bien équilibré, nous avaient conduit à l'interprétation d'une angoisse et d'une culpabilité très forte, face à la curiosité liée à l'activité sexuelle des parents. On pourrait, et des références à la théorie psychanalytique nous y autoriseraient reconnaître dans les conduites d'évitement de Gaël, une signification latente liée à la scène primitive ; demeurer dans l'incertitude sur le plan des démarches de la pensée, c'est s'assurer contre l'angoisse de (re)connaître la sexualité des parents et d'affronter les pulsions sadiques liées à cette connaissance.

Mais, même si cette interprétation était vraie, elle ne nous serait d'aucune utilité. Notre projet n'est nullement de travailler avec l'enfant à l'élucidation du conflit oedipien ; dans un champ psychothérapique le projet didactique disparaît.

C'est donc dans le domaine de l'apprentissage mathématique que nous resterons, mais nous considérerons le fonctionnement mental que nous avons repéré dans ses rapports avec l'organisation globale et s'ingérant dans l'équilibre économique de l'enfant. Il s'agit, non d'apprendre l'enfant à raisonner, mais de lui donner au sein d'activités **mathématiques** dont nous allons parler, l'occasion de réinvestir cette fonction.

3. 4. - Projets d'interventions, situations à présenter à l'élève.

a) La conviction

Quels sont les moyens didactiques que nous connaissons et qui permettent de faire fonctionner des raisonnements ? Il ne s'agit pas pour l'instant de leur contenu ou de leurs méthodes, mais de leur motivation et surtout de leur contrôle par la conviction.

Techniquement, la conviction des élèves s'éprouve, se manifeste, s'affirme et se conforte dans les quatre grands types de situations didactiques, sous une forme différente spécifique à chacune : dans les situations d'action, la conviction s'affirme par les décisions qui expriment la confiance du sujet dans ses anticipations. Dans les situations de formulation, le fait de communiquer ou d’exprimer une idée ne témoigne pas toujours d’une grande conviction à son endroit. Mais précisément, la formulation produit une objectivation qui joue un rôle essentiel dans l’élaboration de la conviction. La distance ainsi instaurée, entre ce qui est dit et ce qui est pensé, entre une proposition et sa valeur implicite de vérité, entre ce qui est explicitement prévu et ce est constaté, conduit à mettre en cause la conviction du locuteur.

Les situations où s'expriment et s'éprouvent les jugements et les preuves sont les *situations de validation*. Dans la convention de cette situation, les élèves échangent des opinions à propos d'un fait et s'engagent à son sujet. En général, les situations de ce genre que nous proposons mettent en présence un proposant et un opposant qui sont tous les deux des élèves, afin qu'ils élaborent un système de preuve - une théorie - fondée sur la conviction intime et non sur l'autorité. C'est que la recherche de la vérité est une activité exigeante, il faut y tenir assez pour refuser de se laisser convaincre par autre chose que son propre jugement, sans jamais refuser toutefois d'examiner aucun argument. Il faut résister à l'autorité, à la séduction.; à la rhétorique, à l’intimidation, à la convention sociale, etc. Et lorsqu’il s'avère que son opinion est fausse, il faut aussitôt aller à résipiscence , se dédire et résister là aussi aux mêmes difficultés. Difficultés légitimes et qui tendent à l'établissement de vérités assez stables dont rendent compte par une sorte d'engagement personnel et social les personnes qui les professent. La pratique des situations de preuve permet au sujet de se construire un interlocuteur intérieur avec lequel il peut simuler des débats selon les règles qu’il a apprises.

Dans les situations d'institutionnalisation de la connaissance, contrairement aux précédentes, la conviction personnelle est suppléée, secourue ou supplantée par la référence à une norme extérieure au sujet. Sa conviction devient seulement adhésion fondée.

b) La manipulation du « contrat didactique »

Dans les “situations de recherches” en classe, dont le maître de Gaël nous a dit qu'elles provoquaient chez lui une bonne participation et des trouvailles intéressantes, Gaël peut dire ce qui lui passe par la tête, car il a confiance que le maître triera ce qu'il veut. Il peut donc dire des choses qu'il "voit" vraies sans être obligé d’affirmer qu'elles le sont. Cette attitude peut être encouragée ou même provoquée par les méthodes de maïeutique socratique collective souvent utilisées par les enseignants.

Quelles sont les situations les plus appropriées au cas de Gaël, et lesquelles pourront lui être proposées ?

Une méthode classique consisterait à "exploiter" la situation d'action que nous avons créée dans les séances 2 et 3, c'est-à-dire à pousser Gaël à prendre parti, à formuler des déclarations, à les affirmer, à les retirer, dans une relation duelle avec l'adulte. L'intervenant tirant à chaque instant une morale des actions de Gaël ou la lui faisant tirer. Par exemple, il répéterait des situations de pari en insistant : "il faut être sûr ! es-tu certain ?..." Nous savons que cette méthode ne peut aboutir.

D'autre part, l'intervenant étant seul avec Gaël, ne pourra pratiquement pas organiser de véritables situations de validation dans lesquelles l'enfant aurait à s'affirmer devant un égal. Il devra les simuler (et peut-être ceci vaut-il mieux dans la mesure où une certaine identification pourrait aider Gaël à sortir de son alternative.) Mais il y a un danger, à cause de ses tendances à rester avec l'adulte dans une relation superficielle et ludique, écartant toute possibilité d'un débat sur la connaissance. Les attitudes ludiques, sciemment utilisées par l'intervenant pour "justifier" les débats, risquent d'être "récupérées" pour reproduire le dilemme fondamental signalé plus haut. Il faudra donc que l'intervenant accomplisse une nouvelle modification du "contrat didactique" en réintroduisant des exigences. En fait, il serait souhaitable d'obtenir une suite de ruptures ; alternativement, l'intervenant se présenterait, soit comme un partenaire, un complice dans un jeu, soit comme un interlocuteur qui attend quelque chose de lui, et qui dit quoi. Il parait évident toutefois que l'objet de l'enseignement doit rester caché pour éviter l'adhésion immédiate et la soumission dont nous avons parlé.

Nous allons revenir sur le jeu auquel doit se livrer l'intervenant afin de faire multiplier et varier les positions de Gaël à propos de la certitude et de l'incertitude. Mais déjà, si l'on reprend le jeu des paris, on pourrait peut-être échapper à la récupération à laquelle nous avons fait allusion, sans que soit exigé un changement d'attitude de l'intervenant : en multipliant les paris et le nombre des données en présence. De cette façon, même si Gaël prend quelques calculs comme occasions de s'évader de l'exigence d'exactitude, on peut parier qu'il ne les fera pas tous faux pour peu que ses connaissances le lui permettent.

En ce qui concerne le contenu, il serait utile de continuer l'étude de la **numération**. De plus, la suite naturelle du processus engagé à propos de la soustraction va conduire à la construction et à l'usage d'un système de **symbolisation** des quantités en présence. Nous analyserons de ce point de vue les situations retenues après les avoir présentées.

Dans le cas de Gaël, quelle position ce partenaire peut-il occuper ? Nous savons combien Gaël est dépendant du climat affectif, à quel point son attitude est déterminée par celle de l'autre. Une attitude de trop grande neutralité affective le rejette aussitôt dans des réactions stéréotypées de fausse activité intellectuelle ; une trop grande connivence lui permet d'entrer dans des attitudes ludiques où il peut faire l'enfant. Trouver la bonne distance est primordial ; ce que l'intervenant vise c'est une complicité de bon aloi où intervient sans cesse la médiation de la connaissance et ses exigences propres.

4. QUATRIEME SEANCE

4. 1 . Soutien

L'intervenant, comme prévu, prend d'entrée une attitude un peu moins neutre vis à vis des connaissances et un peu plus didactique, quoique toujours encourageante. Il va exercer une certaine pression. Il consulte avec Gaël le recueil des exercices de la semaine. Ils choisissent notamment une addition :

$$\begin{array}{r} 129 \\ +78 \\ \underline{+136} \\ 352 \end{array}$$

L'enfant énonce : "9+8, 17, +6 = 23. Je pose 2 et je retiens 3."
"Ah! je vois ce que tu as fait", dit l'intervenant.

Gaël s'en aperçoit également, à moins qu'il n'en déduise, sans preuves précises, que si ce n'est pas cette solution c'est l'autre, et il corrige sur le champ. Il termine l'opération et écrit le résultat, 343, en dessinant son 4 à l'envers, ce que l'intervenant lui fait rectifier, par comparaison avec la manière dont lui-même l'écrit.

Il constate que les erreurs commises par Gaël sont surtout relatives à l'usage de la numération et aux transformations qui lui sont liées.

a) Jeu des estimations

L'intervenant propose à Gaël de reprendre le jeu des estimations. Il étale donc sur la table 10 jetons rouges, 10 verts, 9 bleus, 6 jaunes. Sur la feuille, l'enfant a donc écrit ces nombres selon la disposition suivante :

10 6

~~6~~ 9

10

Il enfouit le tout dans un sac. L'intervenant s'assure qu'il se souvient bien du nombre d'objets de chaque couleur, puis explique le déroulement du jeu : Gaël va extraire quelques objets du sac et devra deviner combien il en reste de chaque couleur.

1er essai :

Gaël sort deux poignées d'éléments, soit : 4 verts, 2 jaunes, 1 bleu, et tente de déterminer le nombre d'objets verts restants dans le sac, ce à quoi il parvient fort bien en comptant à rebours. L'intervenant lui fait donc noter son résultat : 6, et rajouter le nom de la couleur (pour se souvenir de quoi il s'agit.) Même processus pour les jaunes. Mais parvenu aux rouges, il hésite : y en avait-il 9 ou 10 au départ ? Il opte pour 9, tout comme il pense qu'il y avait 6 bleus.

L'intervenant lui suggère de vérifier en recomptant les objets et d'écrire pour ne plus oublier :

9 bleus 10 verts 10 rouges

6 jaunes

.

Ils remettent ensuite le tout dans le sac et recommencent.

On s'aperçoit que Gaël est continuellement sous le contrôle de l'intervenant qui intervient souvent et décide pour lui, mais il essaie de retrouver la situation de jeu, semblant vouloir échapper à cette relation didactique.

L'aspect de jeu reste malgré tout apparent , bien qu'on note une prépondérance de l'opération et une mise à distance de l'activité proprement dite : à chaque essai, Gaël doit faire quatre anticipations.

Le jeu des estimations a exactement la même structure que le jeu précédent mais les données sont des 4-uplets et la réponse aussi : par exemple au premier essai il faut effectuer :

(9 ; 10; 6; 10) - (1; 0; 2; 4) = (8; 10 4: 6)

Pour l'enfant, l'opération se présente comme une suite de trois soustractions, mais Gaël doit bien garder en mémoire les quantités par catégories : bleu, rouge, jaune, vert. Par rapport au jeu précédent, cette augmentation de la complexité (compensée en partie par le choix de petits nombres) va rapidement poser un problème d'ordonnancement des opérations et donc le classement des représentations données.

Mais il s'agit seulement de jeux "introductifs". Ils sont l'occasion de faire entrer progressivement en scène les éléments de représentation symbolique dans des conditions qui leur donnent un sens déterminé, mais il est supposé que ces représentations soient connues de Gaël et la situation donne un sens conventionnel. Par exemple, l'intervenant va faire faire un tableau qui, évidemment, préfigure la numération et qui résout ce problème. Dès l'essai suivant, Gaël sait parfaitement utiliser ce tableau. Mais une partie du discours de l'intervenant va porter sur la justification du tableau qui va prendre ainsi une signification explicitée et convenue avec l'enseignant.

S'il avait attendu que Gaël se rende compte lui-même de la nécessité de faire un tel tableau et le propose, il est probable qu'il aurait été déçu : Gaël peut parfaitement se tirer d'affaire avec la notation, même désordonnée, du premier essai. Il aurait fallu des conditions beaucoup plus dures (nombre de côtés élevé, grande fréquence des mouvements de pièces, nombres plus grands) pour justifier et provoquer l'invention d'une présentation « de comptable ». Le gain cognitif d'une telle situation aurait été bien faible par rapport à l'énergie et à la motivation qu'il aurait fallu y engloutir.

2éme essai.

L'intervenant propose à Gaël de décider à l'avance combien d'objets il va enlever du sac. Gaël retire 7 objets. Puis il détermine très exactement la quantité d'éléments de chaque couleur restant dans le sac, en regardant les chiffres inscrits sur la feuille, auxquels il retranche les objets étalés sur la table.

L'intervenant lui propose ensuite une "façon d'écrire qui économise du temps" c'est-à-dire un tableau qui se présente ainsi :

	bleu	rouge	jaune	vert
total				
enlève				
reste				

- Quand on compte tout, combien y a-t-il de bleus ? questionne l'intervenant
- 9
- Où vas-tu 1'écrire ?

Gaël indique la case et complète ainsi toute la ligne, réalisant "l'économie d'écriture".

Cette séance, du point de vue didactique, est une phase de transition destinée à mettre en place le décor d'une nouvelle situation d'apprentissage.

Cette nouvelle situation envisagée serait une phase d'institutionnalisation didactique. Pour préparer cette situation, qui simulerait un jeu connu demandant la participation de l'enfant à un niveau "subalterne" par rapport aux "nouveautés" introduites, l’intervenant communique les règles d'un jeu nouveau...à venir. Dans les situations ordinaires en classe, le jeu ne vient jamais sinon sous la forme d'un exercice d'application très fermé. Et Gaël ne s'y trompe pas : à mesure que le nombre des interventions didactiques augmente, il passe progressivement de son attitude vivante et souriante à une autre plus sérieuse, plus concentrée. Consciencieusement, il se met à la tâche. Appliqué, mais toujours gentil et même amical, il entre dans sa position d'élève qui apprend sous la houlette de son maître. Il est temps de rompre ce contrat confortable et dangereux pour Gaël et d'échanger les positions de l'intervenant et de l'élève.

b) Jeu du menteur.

L'intervenant et Gaël renouvellent le jeu mais cette fois-ci c'est l'intervenant qui retire les objets du sac et, par ailleurs, il inclut un nouvel élément dans la règle : on joue au menteur. Comme Gaël ne sait pas de quoi il s'agit, l'intervenant explique :

"Je vais retirer des objets, et quand j'aurai fini je dirai : il y a tant de verts, tant de bleus, etc. (dans le sac), et si je me trompe, tu me dis "menteur". Si j'arrive à mentir, je gagne, mais si tu réussis à m'attraper quand je mens, tu gagnes !"

Ils font une première tentative ; l'intervenant sort un petit tas d'objets et affirme :

- "Il reste 6 bleus dans le sac. "

A sa demande, l'enfant écrit le chiffre sur le tableau et vérifie en comptant à rebours, partant de 9 et ôtant tous les objets bleus en vue. Il est d'accord avec le chiffre annoncé. .

- Il reste 6 rouges déclare ensuite l'intervenant.

- 6 rouges, répète Gaël, 6, 7, 8, 9 (il rajoute les rouges étalés sur la table) : menteur !

Gaël a dit ce mot avec à la fois un peu de gène et beaucoup de plaisir. Il sourit. Il lui a fallu de l'audace bien qu'il sache que la convention autorisait cette licence. Sous la fiction du jeu, Gaël rentre dans l'autre rôle, celui de cet interlocuteur intérieur dont nous avons parlé. Le passage d'une position à l'autre, celle du déclarant à celle du juge, celle du menteur à celle de celui qui dit la vérité...et surtout la possibilité de passer d'un rôle à l'autre, offre à Gaël un moyen de rupture symbolique avec sa position antérieure. Ce rôle, vis-à-vis du savoir, peut être comparé à celui du célèbre jeu *Fört-Da* de Freud.

Vérification faite, oui Gaël a raison et l'intervenant est pris. Remarquons que son "erreur" était une malignité et pour Gaël la détection de cette erreur est devenue un jeu, une recherche de complicité et d'accord et non pas une agression. Il y a là plus qu'une nuance entre la signification classique de l'erreur et celle symbolique, qu'elle prend ici. Peut-être plus tard Gaël pourra-t-il traquer lui-même ainsi sa propre "malignité".

Ils continuent de même avec les autres couleurs et l'enfant ne se trompe pas ; mais il n'a pas inscrit, au fur et à mesure sur le tableau les objets enlevés et les objets restants. L'intervenant lui conseille de récapituler : pour les rouges, le chiffre annoncé était 6 et Gaël avait dit "menteur". A ce 6, il rajoute les 3 qui sont sur la table, ce qui confirme son jugement. Mais il ne sait plus comment faire pour obtenir 10 rouges en tout. Il faut l'aider:

- Combien y en a-t-il en tout ?
- 10
- Et là combien ? (sur la table)
- 3
- Alors il en reste...
- 7

Remarquons aussi que si Gaël ne cesse pas de faire les "petites erreurs" que nous lui connaissons, l'intervenant se garde bien d'en faire le procès et se contente de les faire rectifier.

A mesure que la situation devient plus complexe et que les occasions d'examiner des différences ou d'effectuer des soustractions se multiplient, Gaël développe des stratégies qui vont servir de signifié à l'opération et les met en œuvre avec de plus en plus de facilité. Ainsi, pour contrôler la validité de l'affirmation "10-3 = 6", il effectue 6 + 3 = 9.

Maintenant Gaël ne présente plus, comme auparavant, la même attitude d'échec face à la soustraction, cette sorte de refus qui semblait apparaître dans les premières séances. Il la manipule actuellement plus facilement , mais sans toutefois pouvoir toujours l'utiliser de façon systématique chaque fois que c'est nécessaire on tout au moins plus utile. Ainsi, quand il a 10 et 3, il sait qu'il faut "faire 10-3" pour trouver ce qui "reste" (but de la soustraction), mais lorsqu'il avait 6, puis 9, et qu'il voulait 10, le problème lui semblait totalement différent.

L'intervenant lui fait ensuite compléter la ligne des "enlevés" mais il se trompe et écrit 5 jaunes au lieu de 5 verts. L'intervenant le lui fait corriger avant de lui demander comment on se serait rendu compte de l'erreur si on n'avait pas rectifié.

Le tableau est le suivant :

	bleu	rou	jaune	vert
tout	9	10	6	10
enlevé	3	3	1	5
reste	~~6~~ 6	7	5	5

Gaël n'arrive pas à fournir l'explication demandée, mais peut-être est-ce dû au fait qu'il a le tableau complet sous les yeux. Peut-être aurait-il pu justifier plus facilement l'erreur s'il n'avait eu en vue que la colonne :

jaune
6
5
5

Il faut donc lui donner la solution.

La vérification que nous signalions plus haut fonctionne implicitement, mais elle n'est pas perçue comme un fait par Gaël ;elle n'est vraisemblablement pas susceptible d'être formulée par lui, et a fortiori, il ne peut pas la mobiliser comme preuve, même à l'intention d'un interlocuteur bienveillant et attentif.

Ainsi, on comprend mieux

- pourquoi il était nécessaire que l'intervenant propose l'addition comme moyen de vérification de la soustraction (Gaël ne l'aurait probablement pas inventé)

- pourquoi il n'était pas gênant de l'introduire,puisque ce moyen n'était pas proposé comme objet à apprendre, qu'il. avait un rôle et une signification évidents dans la situation et qu'il était donc seulement mis à la disposition de Gaël.
- comment Gaël s'est approprié ce moyen et l'a intégré à ses procédures. Il suffira peut-être désormais de créer des situations favorables à cette explicitation pour voir évoquer les rapports entre l'addition et la soustraction. De telles situations supposent que l'on ait rejeté, au moins provisoirement, les moyens effectifs de preuve : le recours au dénombrement, et par conséquent que l'on opère sur les systèmes symboliques.

L'intervenant va s'employer immédiatement à préparer cette nouvelle phase en materialisant une séparation entre deux systèmes : celui des collections sur lesquelles on agit physiquement et celui des écritures avec lequel on parle de ce qui arrive dans le premier. Ce matérialisation leur donnera à tous les deux des moyens de rappeler éventuellement cette situation plus tard.

c) Symbolisation par des étiquettes.

Ils entreprennent un nouveau jeu : des groupes d'objets sont figurés par des papiers. L'intervenant va mettre dans un sac des papiers qui représenteront les objets que Gaël mettra dans l'autre sac : par exemple, il écrit 6 verts sur un papier et Gaël met 6 objets verts dans le sac. Il fait ainsi un certain nombre de papiers

vert	vert	rouge	rouge	vert	jaune	jaune	rouge
6	4	5	7	3	9	3	5

et ils remplissent chacun leur sac, puis les échangent, Gaël tenant alors celui qui contient les papiers.

- Est-ce que tu peux dire combien il y a d'objets rouges dans mon sac ?,demande l'intervenant. "Je ne te le laisse pas ouvrir, mais tu peux ouvrir le tien."
- Alors là c'est sûr que je sais ! répond Gaël en ouvrant son sac, souriant.

Il trouve un premier papier $\boxed{\text{rouge } 7}$ et déclare
- 7 rouges !

-C’est tout?

Il vérifie alors tous les petits papiers et additionne les chiffres inscrits sur tous ceux indiquant la couleur rouge : 7 + 5 + 5 = 17.

Il écrit 17 sous le tableau précédent, puis compte les autres couleurs et inscrit également le résultat trouvé :

	bleu	rouge	jaune	vert
tout	0	17	12	13
enlevé				
laissé				

Lorsque l'intervenant lui demande s'il est sûr des résultats qu'il vient de trouver, l'enfant se montre un peu hésitant et préférerait vérifier. Ils recomptent tous les deux ensemble.
Pour les verts, il explique:
"6 et 3, 9. Et 4... Si on a 4, on enlève une unité (pour la rajouter à 9) ça fait 10 et comme là on en a enlevé une, ça fait 3, alors ça fait 13".

Puis l'intervenant écrit le nombre d'objets qu'il va enlever (théoriquement) : 10 de chaque couleur, et Gaël sans hésitation, trouve le nombre d'objets qu'il restera dans chaque série.

4.2. - Comportements attendus au cours de ces situations : incertitude et connaissance.

Gaël répugne à renoncer aux charmes de l'incertitude. Pour comprendre COMMENT une telle attitude peut bloquer des acquisitions et comment les situations que nous proposons sont susceptibles d'opérer, il est utile d'examiner de plus près les rapports qui s'établissent entre connaissance et incertitude dans une situation d'enseignement.

Une connaissance se manifeste par une décision, ou plutôt par un choix entre plusieurs décisions, ou entre plusieurs opinions. Pour qu'un élève ait la possibilité de mettre en oeuvre une connaissance, il faut donc lui offrir des situations qui puissent avoir plusieurs issues selon les choix qu'il fera lui-même en fonction de ses connaissances. La signification de cette connaissance est faite, comme nous l'avons dit, de l'éventail des issues envisageables qu'elle a permis de rejeter. Lorsqu'une connaissance permet d'éliminer toutes les issues sauf une, elle permet une décision certaine. Mais il arrive que les connaissance du sujet laissent subsister plusieurs issues, avec peut-être quelques préférences qu'on peut traduire en probabilité de
choisir chaque issue. Nous dirons alors que la situation présente pour le sujet une certaine **incertitude**, plus ou moins grande selon le nombre des issues et leur caractère d'égales probabilités. L'apprentissage d'une connaissance se manifeste par une diminution de l'incertitude dans les situations où elle est engagée (on peut même évaluer la quantité d'information que représente une connaissance par la variation d'incertitude qu'elle apporte).

En général, l'apprentissage se produit dans une situation, motivé par le désir du sujet de diminuer son incertitude .

Ainsi, on peut comparer les situations didactiques à des jeux. Le maître communique à l'élève une situation problème qui met en scène les objets dont il s'agit et indique ce qui correspond aux règles : c'est-à-dire les moyens qu'il est permis d'utiliser pour obtenir tous les états possibles du jeu. Il fixe certains objectifs c'est-à-dire des résultats qu'il faut obtenir en agissant conformément aux règles avec, explicitement ou implicitement, un enjeu. Bien sûr les caractères de ce jeu didactique peuvent beaucoup varier selon les sujets et les types de pédagogie choisis : en particulier selon que l'on considère que le maître doit préalablement communiquer les stratégies de résolution ou que c'est l'élève qui doit les produire comme moyen de s'adapter. Mais au bout du compte à un moment donné, l'activité de l'élève va consister, devant une situation problème qui présente a priori pour lui une certaine incertitude, à la réduire en choisissant une solution : l'élève ne fait pas de mathématiques s'il ne résout pas de problèmes.

Pourtant, il serait faux de croire que l'acceptation des règles et la réduction de l'incertitude est la seule manifestation de la connaissance et de l'acquisition.

Une information peut augmenter l'incertitude du sujet en lui signalant des choix qu'il n'envisageait pas. Ce qu'il apprend referme quelques questions, mais en ouvre des nouvelles.

La recherche de situations nouvelles, de questions ou de règles nouvelles - qui accroissent l'incertitude - est une tendance inverse et complémentaire de celle exposée plus haut. La production de questions et la production de réponses sont deux manifestations très différentes des connaissances et de leur genèse. Elles se répondent "dialectiquement" d'un moment à un autre chez le sujet épistémique, d'une notion à une autre dans l'organisation de son savoir et enfin entre le savoir et le sujet au cours de son développement. La recherche de nouveaux problèmes répond à des motivations différentes selon que cette dialectique vise l'adaptation du monde au sujet et du sujet au monde (l'assimilation de Piaget) ou qu'elle vise la transformation interne au sujet, pour son organisation, sa consistance et son ergonomie propre (l'accomodation de Piaget).

Pour comprendre la profonde unité de cette quête des connaissances examinons du côté du sujet la fonction à laquelle elle répond.

Tout d'abord l'absence d'incertitude ne peut pas être une position stable. D'une certaine façon, le sujet se définit, existe, a ses propres yeux, face à un milieu par les modifications qu'il lui fait subir. Un milieu qui ne lui donne aucune occasion d'action - c'est-à-dire de décision ou de choix, le nie comme sujet autonome. C'est le cas en particulier des situations fermées. A l'inverse, mais pour la même raison, le choix purement aléatoire n'est pas une expression du sujet et ne lui donne pas non plus d'existence. On peut donc imaginer que le sujet recherche toujours des situations,

- soit relativement ouvertes qu'il réduit par l'exercice de la création de connaissance et de son pouvoir de décision et d'action,
- soit relativement fermées et qu'il ouvre par la considération de nouvelle variables ou de nouvelles règles.

La psychanalyse donne une analyse plus profonde sur ce phénomène et permet de comprendre les rapports de la connaissance considérée comme objet symbolique avec les motivations du sujet.

5. DERNIERES SEANCES ET RESULTATS POUR GAËL

Il reste encore quatre séances où l'intervenant continue de lutter pour introduire de plus en plus de difficultés et pour mettre Gaël dans l'obligation de les surmonter. Chaque relation est gérée sur le même principe. Les progrès ne sont pas spectaculaires, mais il semble bien après coup que cette quatrième séance ait été décisive. La rencontre qui s'est nouée avec l'intervenant et une certaine prise de conscience des difficultés à éviter ont suffi à déclencher une nouvelle attitude chez Gaël.

La suite a montré que l'enfant s'est bien intégré dans sa classe et a rapidement comblé ses lacunes.

B. COMMENTAIRES

1. LES BUTS DE L'INTERVENTION

Les buts généraux des interventions étaient les suivants :

a) Dans un premier temps, établir un climat de confiance ; une relation duelle agréable et prenant néanmoins en compte les difficultés en cause.

b) Dans un deuxième temps, prendre appui sur cette relation pour proposer à Gaël des situations didactiques convenables où la connaissance n'est pas à prendre dans le discours ni dans le désir du maître, mais dans une relation avec le milieu. Ces interactions doivent être motivées par le désir de l'enfant lui-même et le conduire à prendre en charge les décisions spécifiques de la connaissance à maîtriser : tâtonner, dérider, chercher...

c) Dans un troisième temps, par de nouvelles ruptures du contrat didactique il s'agit de le conduire à donner du " prix " à la vérité et à la préférer éventuellement au confort d'un consensus : à choisir par exemple la vérification, malgré l'angoisse de constater son erreur. Il ne s'agit évidemment pas de faire un discours moralisateur à ce sujet, mais d'obtenir ces comportements de manière effective. Nous avons cherché à l'habituer à se définir, à se reconnaître, à se plaire dans la position de constructeur de la connaissance et de responsable de sa conviction, devant les faits ou devant autrui. Nous avons voulu le conduire à ne plus vivre l'activité mathématique comme " la découverte de son erreur ", " la reconnaissance de l'échec ", " la mise en évidence de son péché ", ou encore comme " le regard porté dans la chambre des parents " mais comme un exercice équilibrant, libérateur et fondateur du " moi ",

Ces formulations ne doivent pas tromper le lecteur, il ne s'agit pas de psychothérapie mais de didactique, c'est-à-dire d'activités spécifiques organisées intentionnellement en vue de l'acquisition des connaissances précises. Mais il faut être conscient de la dimension psychologique de ces interventions.

2. CONCLUSIONS DE L'APPROCHE CLINIQUE. COMPORTEMENTS D'ELEVES

Du point de vue des rééducations, si nous avons obtenu quelques succès ou demi-succès , nous avons eu aussi des échecs . Mais aucun caractère commun n'apparaissait entre tous ces cas, sinon peut-être l'importance de leurs problèmes psycho affectifs.

L'intervenant pris dans une relation difficile et les observateurs surplis par les échecs massifs de l'élève ont tendance à concentrer leur attention sur les caractéristiques de l'enfant et non pas sui les conditions des situations qu'ils affrontent.

2. 1. - Deux types de réactions aux difficultés

En première approche pourtant nous avons remarqué deux types de réactions opposées qui nous ont paru importantes. Ces réactions ne peuvent s'observer que si l'enfant a accepté une activité où il engage sa responsabilité et où il peut savoir par lui-même s'il a réussi ou échoué.

En constatant que les résultats ne sont pas conformes à leurs prévisions, certains enfants pâlissent et se troublent ; ils lisent ce résultat comme un échec personnel et prennent une attitude de découragement et de culpabilité. Même s'ils se remettent bravement au travail, leur comportement montre que la situation est vécue sur le mode *introverti.*

D'autres, au contraire, dans les mêmes circonstances semblent s'éveiller soudain : il arrive quelque chose d'imprévu, d'intéressant; l'échec personnel est dépassé, minimisé, au profit de la curiosité et de l'ouverture vers l'extérieur.

Ces deux façons opposées de réagir aux difficultés des situations d'apprentissage (c'est-à-dire où la relation avec l'adulte n'est pas en cause directement), sont relativement stables chez les sujets, dans le temps, et dans des secteurs étendus de problèmes différents. Les enfants en échec électif que nous avons rencontrés appartenaient tous à la première catégorie.

2.2. Deux modes d'évitements

La deuxième remarque est venue en opposant les comportements de Gaël à ceux de Cyrille dans leurs rapports avec l'intervenant. Tous deux voulaient éviter une relation qu'ils vivaient comme conflictuelle. Mais ils le faisaient avec des stratégies diamétralement opposées. L'obligation de prendre la responsabilité de produire sa propre réponse à une question posée par un adulte est une expérience pénible pour les enfants en échec : il y a au moins deux manières de l'éviter :

L'une consiste à la prendre excessivement au sérieux, à la dramatiser autant que possible selon un mode que nous qualifierons métaphoriquement "*d'obsessionnel*" (type Cyrille). L'autre consiste au contraire à s'évader le plus possible en simulant plus ou moins adroitement une participation minimale que nous qualifierons tout aussi métaphoriquement « *d'hystéroïde* » (type Gaël).

Toute question met les enfants du premier type dans une situation inquiétante, même dangereuse, et les renvoie à la « situation originelle ». Pour échapper à cette grave agression, il faut qu'ils referment cette question tout de suite, n'importe comment, au besoin en l'ignorant totalement. En s'appuyant sur le contrat didactique, ils n'acceptent une question que s'ils ont déjà la réponse en leur possession. Ils exigent du professeur qu'il enseigne les réponses avant de poser les questions, qu'il transforme les solutions en algorithmes. Ils veulent connaître de plus les critères d'emploi des algorithmes, et recevoir de plus des signes rassurants qu'ils sont en bonne voie..., l'assurance qu'en mémorisant tout ce qu'on a dit en classe, ils pourront immédiatement répondre à cette situation horrible. Et plus ils apprennent, et plus ils ont de réponses à produire et moins ils ont de chances de trouver la bonne...

Pour les autres, rien n'est grave, rien n'est sérieux, tout est théâtre. Dans les phases collectives, ils entrent dans le jeu, répondent avec les autres, prennent des risques, le professeur est convaincu que ce sont des enfants éveillés qui ont compris, peut-être même répondent-ils juste sur le moment, mais lorsqu'ils sont interrogés personnellement, par écrit par exemple, ils ne savent plus, ils n'ont pas appris, pas retenu, ils ne sont pas concernés, n'ont pas thésaurisé. Ils sont agréables et pas contrariants, mais ils ne sont pas là en personne et finalement n'apprennent pas.

Les uns et les autres, à leur manière, évitent la confrontation avec la situation d'apprentissage.

Les premiers pèsent beaucoup, directement sur la gestion du contrat didactique et tendent rapidement à le pétrifier. Les seconds sont beaucoup plus difficiles à détecter dans les classes. Le professeur ne s'aperçoit souvent que trop tard que ces élèves "intelligents" et éveillés ont raté leur première composition, puis la seconde, etc. et qu'à la fin de l'année, de façon incompréhensible, ils ne savent rien.

Voici les conclusions provisoires qui pouvaient être tirées de ces travaux en 1980 :

3. LE CONTRAT DIDACTIQUE

3.1. Première approche

Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (situation didactique), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le martre reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressions plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées : nous appelons “ contrat didactique ” l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître.

Présent dans cette question, ce “ contrat ” régit les rapports du maître et de 'l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques. C'est lui qui, à chaque instant, précise les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies ; “ que faut-il savoir faire ”, “ à quoi voit-on qu'on a réussi ” que faut-il faire si on n'a pas réussi, qu'est-ce qu'il fallait savoir pour réussir, qu'est-ce qu'il faut dire, qu'est-ce qu'on aurait pu faire d'autre, qu'est-ce qui aurait été une erreur, qu'est-ce qu'il faut apprendre, comment apprendre, comment se rappeler, etc. C'est lui qui fixe explicitement le rôle de la connaissance, de l'apprentissage, de la mémoire, etc.

Il est la règle de décodage de l'activité didactique par laquelle passent les apprentissages scolaires. On peut penser qu'à chaque instant, les activités d'un

enfant dans un processus dépendent du sens qu'il donne à la situation qui lui est proposée, et que ce sens dépend beaucoup du résultat des actions' répétées du contrat didactique.

Le contrat didactique se présente donc comme la trace des exigences habituelles du maître (exigences plus ou moins clairement perçues) sur une situation particulière. Ce qui est habituel ou permanent s'articule plus ou moins bien avec ce qui est spécifique de la connaissance visée ; certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et certains enfants liraient ou non les intentions didactiques du professeur et auraient ou non la possibilité d'en tirer une formation convenable.

Est-ce que certains contrats didactiques n'empêcheraient pas certains enfants d'entrer dans le processus d'apprentissage?

Les causes des échecs seraient alors à chercher dans le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques et non dans ses aptitudes ou dans ses caractéristiques permanentes générales.

3.2. – La transposition didactique[29]

Ces contrats didactiques révèlent l'idée que se font les professeurs et les élèves du fonctionnement des mathématiques (de leur création, de leur usage, etc.). En choisissant une situation didactique (c'est-à-dire une situation problème, des objectifs pour l'élève, des informations, des objectifs pour le maître, etc.) pour enseigner une certaine connaissance, le professeur fabrique, qu'il le veuille ou non une image souvent très déformée des situations réelles (culturelles, historiques, etc." dans lesquelles fonctionne (a été découverte, utilisée) cette connaissance. Ce sont les circonstances dans lesquelles les connaissances sont employées qui leur donnent leur signification. Ainsi, une connaissance mathématique n'a pas la même signification pour un élève et pour un mathématicien. Nous appelons " transposition didactique " le passage de l'une à l'autre.

3.3. – L'épistémologie des professeurs

La théorie des situations didactiques a pour objet de fournir les moyens de contrôler ces transpositions didactiques. La transposition didactique dépend fondamentalement des conceptions qu'ont les professeurs au sujet de la pensée mathématique. Dans leur activité d'enseignement, les professeurs sont donc obligés d'utiliser de façon plus ou moins explicite une sorte de théorie de la connaissance, d'épistémologie des mathématiques. Ces conceptions à usage strictement professionnel n'ont généralement pas de caractère scientifique (ni même consistant) même si localement elles portent la trace de théories plus ou moins récentes. Elles n'en sont pas moins utiles et légitimes. Nous appelons " pensée mathématique scolaire, ou « épistémologie des professeurs " ces pseudo-théories.

Le maître enseigne - au moins implicitement - cette " philosophie " en même temps que les mathématiques et comme elle n'est pas une bonne description de l'appropriation des connaissances, peut-elle expliquer certains échecs ? Cette épistémologie spontanée n'est pas toujours bien représentée par les discours « pédagogiques » des professeurs. Il peut y avoir une grande différence entre ce qu'ils disent ou croient qu'ils font, et ce qu'ils font effectivement. [30]

4. REFLEXIONS METHODOLOGIQUES ET DEONTOLOGIQUES ; CONCLUSIONS

Dans les observations dont nous venons de rendre compte nous avons - comme la plupart des chercheurs qui nous avaient précédés - mis d'abord au premier plan le profil de l'élève et les facteurs personnels provoquant l'échec, ou liés à ses effets, cet échec étant presque toujours considéré comme un phénomène pathologique lié à l'élève.

---

[29] Yves Chevallard "La transposition didactique" La pensée sauvage Grenoble 2ième éd. 1985

[30] On trouve un exemple de telles erreurs dans le livre de F. Jaulin Mannoni, *Le Pourquoi en mathématiques (cité plus haut)*. La première partie est une théorie très intéressante de la compréhension des mathématiques, où l'on trouve beaucoup d'idées justes. La seconde présente des cas de rééducation d'enfants en difficultés. Les séances ne correspondent pas du tout au discours « théorique : dans le cas de Nadine, on assiste à un parfait conditionnement. Le lecteur trouvera l'analyse de cette rééducation dans ([2] 77 tome 3).

Cette conception correspond bien à la plus forte *des trois modalités de réponses à l'échec :*

- dans la première les parents réagissent à l'inquiétude que leur causent 1es difficultés de leurs enfants par des *pressions* sur l'enfant lui-même : injonctions, sanctions diverses, cours particuliers, examens médico-psycho-pédagogiques, rééducation... De la même manière, les maîtres sont entraînés à réduire les insuffisances excessive par des interventions d'enseignement décidées en fonction d'objectifs à court terme tendant à imposer à l'enfant un itinéraire transparent aux contrôles. Les pressions sont d'autant plus fortes que l'élève a pu donner la preuve qu'il réussit bien dans d'autres matières.

Mais la mise en cause de l'élève est peut-être une entreprise aussi vaine que celle qui consisterait à analyser l'eau qui est sortie d'un seau percé pour voir en quoi elle diffère de l'eau qui est restée dans le seau.

- La mise en cause de l'institution scolaire, en tant qu'exécutant du contrat d'enseignement, des méthodes pédagogiques, des professeurs, de leur formation... constitue 1a seconde modalité.

Nous avons montré l'intérêt que nous y prenons.

- La troisième consiste en la remise en cause du contrat lui-même (pourquoi enseigner tant - ou si peu - de mathématiques, pourquoi la sélection par les mathématiques, pourquoi la sélection tout court. etc.).

Chacune de ces trois modalités de réponses sont aussi soutenues par des hypothèses sur différentes causes des échecs en mathématiques niais très peu sont accompagnées d'une méthode de recherche utilisable.

Je me suis longtemps demandé si ces hypothèses sur l'origine instrumentait, de certaines difficultés en calcul n'étaient pas complaisamment accueillies principalement parce qu'elles justifiaient centaines interventions souhaitées des parents et probablement utiles aux enfants (pour d'autres raisons) mais lucratives pour d'autres. On peut de même s'étonner de la persistance et du retour périodique de déclarations tonitruantes manifestement fausses ou excessives imputant à l'école la responsabilité de phénomènes qui notoirement impliquent la société tout entière. Aucune forme de difficultés scolaires ne semble provoquer autant de réactions passionnées ni susciter autant de préjugés que l'échec en mathématiques.

Curieusement, à côté d'une masse de publications et de textes d'opinion, la rareté des ouvrages objectifs est frappante, comme si la complexité de la tâche ou la résistance des forces à l'œuvre avaient inhibé toute recherche scientifique. Il est vrai que les systèmes dont le fonctionnement ou le dysfonctionnement est susceptible de jouer un rôle dans ce phénomène sont nombreux, et en interactions complexes : l'enfant, les parents, les maîtres, l'école, la Société, la discipline peuvent être impliqués au cours d'approches très diverses : cognitives, psychologiques voire psychanalytiques, pédagogiques ou sociologiques. Les enjeux économiques de ces relations sont parfois importants et ont contribué à développer un enchevêtrement de jugements de valeurs subjectifs qui égarent l'observateur. Si cette complexité peut stimuler l'imagination des innovateurs désireux d'aider les enfants en difficulté ou des polémistes, elle peut légitimement décourager le chercheur qui peut redouter la stérilité d'une hypothèse trop restrictive ou les aléas d'un terrain en proie à l'idéologie.

Nous espérons toutefois que les recherches actuelles permettront bientôt d'orienter un peu le débat.

Sources

Mémoires d'orthophonistes.

1. **Chauvet, Le Bars. Le Léon.** - Pédagogie moderne de la mathématique et dyscalculie. Centre de phono-audiologie de Bordeaux 2. Bordeaux, 1973.

2. Deveyle P. Frisson L. et Gauthier J. - Recherche d'une concordance entre l'échec en mathématiques et les résultats du bilan orthophonique (dyscalculie). .Mémoire pour le C. C. d'orthophonie, Lyon 1973

3. Etude de la détection des enfants en difficultés électives en mathématiques et analyses statistiques. – Mémoires dirigés par G. Brousseau, dept Mathématiques, institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques. Université Bordeaux 1) et Centre de phono-audiologie de l'Université Bordeaux 2.

1976, tome 1 : Moras F., Molia C. - Etude des échecs en mathématiques à travers quelques articles relatifs à la dyscalculie.

1977, tome 1 : Berrocq-Irigoin M. Dupuch M.-A. Fruchard C. - Elaboration d'un questionnaire

1977, tome 2 : Berrocq-Irigoin M. Dupuch M.-A. Fruchard C. – Monographie d'un enfant en difficultés

1978, tome 1 : Dugué C. - Etude critique de la détection dans le cadre de l'institution scolaire.

1978, tome 2 : Trolonge D. - Comparaison des questionnaires aux maîtres avec les acquisitions scolaires.

1978, tome 3 : Château F. Analyse comparée et étude longitudinale des questionnaires.

1978, tome 4 : Amirault C. Chéret M.. - Monographie de deux enfants en difficultés

1979, tome 1 : Mora M. Monographie de deux enfants en difficultés.

1979, tome 2 : Bonais M. - Détection des enfants en échec électif au CM1

1980, Leygue R. M. Monographies de trois enfants en difficulté.

1983, Sevaux P. A propos d'un soutien d'enfant en mathématique : échec électif ou dyscalculie ?

Mémoire de Psychiatrie

Bourrel M.-J. Echec en calcul à travers 570 dossiers. Place des troubles relationnels au père. Mémoire pour le CES de Psychiatrie. U.P.P.A Pau

Bibliographie antérieure aux travaux

1. Dugas et Guillarme. - introduction à l'étude des difficultés en calcul chez l'entant, Revue de neuro-psychiatrie infantile, 1970, n°1-2.

2. Laffon. - Vocabulaire de psychopédagogie et de psychiatrie de l'enfant Paris. P. U. F., 1963,

3. Gibello B. - Dysharmonies cognitives et dyscalculies. Revue de neuropsychiatrie infantile, 1973, n°6.

4. Hasaerts Van Gertruyden - La dyscalculie chez l'enfant, Diagnostic différentiel Revue de neuropsychiatrie infantile, 1975 n° 10-11

5. Eyraguibel J. Brousseau G. Appareillage de mesure automatique des stratégies d'apprentissage. Application à un jeu logique : les tours d'Hanoï in Mesures régulation automatisme " n°1 Bordeaux, 1978

6. Jaulin-Mannoni F.- Le pourquoi en mathématiques. E.S.F-, 1978.
7. **Pagnol ; Marcel**, *Topaze*, Fasquelle éditeur, 1930

Bibliographie ultérieure aux travaux

Brousseau G. (1980) Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. in Revue de Laryngologie otologie rhinologie, 101, 3-4, pp 107-131.
Brousseau G et Jacques Pérès (1985): Le cas de Gael, Irem de Bordeaux
Brousseau Guy , Theory of Didactical Situations in Mathematics, Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, et Virginia Warfield ed. Kluwer Academic Press 1997.
Yves Chevallard "La transposition didactique" La pensée sauvage Grenoble. 2ième éd. 1985

Guy Brousseau[31], Jacques Péres[32], Virginia Warfield[33]

Le cas de Gaël[34]

La théorie des situations didactiques tient un rôle central dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques en France depuis le début des années 70. Un des concepts principaux de cette théorie est « le contrat didactique », un aspect complètement implicite mais essentiel des relations entre l'enseignant et l'étudiant Dans cet article, nous rapportons la séquence d'enseignement qui a provoqué la formulation initiale de ce concept et qui a validé les premières applications de la théorie.

Gaël est un enfant intelligent mais en échec *électif* en mathématiques. Il est un des neuf cas étudiés entre 1980 et 1985 (au COREM de Bordeaux). En l'observant en classe et en lui proposant diverses situations, didactiques ou a-didactiques, nous avons émis l'hypothèse que Gaël mettait en œuvre une *stratégie d'évitement* du « conflit de savoir » que nous avons qualifiée d'« évitement de type hystéroïde » alors que d'autres enfants présentaient des « évitements de type obsessionnel » (surtout ne pas confondre ces comportements avec les catégories psychiatriques de même nom, qui sont des troubles graves de la personnalité). Il était possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais elles ne donnaient pas de moyen de corriger les évitements, et elles centraient l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des comportements et des conditions qui le provoquaient ou qui pouvaient le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte.

---

[31] Professeur émérite de Mathématiques à l'IUFM d'Aquitaine, à l'époque assistant au département de mathématiques de l'Université Bordeaux 1, chercheur à l'IREM, puis Dr du LADIST

[32] Docteur en Psychologie, Psychologue scolaire en retraite

[33] Professeur de Mathématiques à l'Université du Washington, participe à la nouvelle rédaction et la traduit en anglais

[34] Ce texte présente la description et l'étude finale de quatre des huit séances qui ont permis à Gaël de continuer sa scolarité avec de bon succès en mathématiques. Il reprend l'essentiel d'un texte rédigé en 1981 par Guy Brousseau et Jacques Pérès. Les transcriptions des huit séances et celles de leur «analyse à chaud » dues à Michèle Berrocq-Irrigoin, ont été publiées en polycopié de l'IREM pour les besoins des chercheurs, mais les quatre dernières n'ont jamais fait l'objet d'un résumé semblables à celui ci.
L'expérience a été effectuée en 1977. Elle a fourni le matériau de base de toute une partie de la théorie des situations. De nombreuses questions soulevées par cette expérience ont conduit à la création de nombreux concepts. Dans une période d'évolution rapide il m'a été impossible de rédiger des conclusions que je trouvais trop partielles, et l'étude de ces concepts et des rapports initiaux par de nombreux chercheurs proches ne rendaient pas leur publication nécessaire.

Il a permis aux expérimentateurs d'explorer et de comprendre les contraintes de la situation didactique, interprétée comme «*contrat didactique* ». C'est un simulacre de contrat, une illusion, intenable et nécessairement rompue, mais une fiction nécessaire pour permettre aux deux protagonistes, l'enseignant et l'apprenant, d'engager et de mener à son terme la dialectique didactique. Le moyen didactique de faire entrer l'enfant dans un tel contrat est la *dévolution.* Ce n'est pas un dispositif pédagogique car il dépend essentiellement du contenu, il consiste à renvoyer l'élève à un rapport avec un milieu dont le professeur peut s'exclure, du moins en partie (situation a-didactique). Le dispositif mis en œuvre est agencé pour engager progressivement mais explicitement Gaël dans un défi dans lequel le professeur pourra se mettre « du côté » de l'élève.
Cette situation se révélera par la suite être une des situations fondamentales de la soustraction.