

# Aspetti percettivi dell'apprendimento delle Trasformazioni Geometriche

Daniela Galante – Filippo Spagnolo

[daniela.galante@yahoo.it](mailto:daniela.galante@yahoo.it) , [spagnolo@math.unipa.it](mailto:spagnolo@math.unipa.it)

*G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche) – Dipartimento di Matematica ed Applicazioni dell'Università di Palermo, via Archirafi, 34 – 90123 Palermo (Italy).*

## ABSTRACT

*Questa ricerca contribuisce a chiarire questioni relative alle rappresentazioni delle conoscenze isometriche e il modo di risoluzione di problemi dal punto di vista degli allievi, attraverso l'aspetto percettivo dello studio delle trasformazioni geometriche con la musica. La sperimentazione si basa su una comparazione tra allievi di Liceo che studiano musica al Conservatorio e allievi di Liceo che non studiano musica al Conservatorio ma che comunque hanno una conoscenza teorico musicale di base. Tale ricerca si è focalizzata sulle concezioni spontanee riguardo le trasformazioni geometriche in generale e il loro collegamento con la musica.*

*Nel quadro di riferimento teorico sono utilizzati sia i riferimenti storico-epistemologici della matematica che della musica sia i riferimenti delle neuroscienze con le riflessioni sull'apprendimento associativo tramite il sistema ippocampo-amigdala. Il lavoro sperimentale ha come riferimento metodologico-didattico la teoria delle situazioni di G. Brousseau. Nello studio della musica si ha una situazione a-didattica poiché attraverso la ripetizione delle melodie, contenenti una illimitata quantità di trasformazioni geometriche, esse vengono memorizzati nei corpi striati attraverso le vie acustiche e i recettori neuro tendinei diventando patrimonio linguistico acquisito.*

**PAROLE CHIAVE:** *trasformazioni geometriche, processo compositivo, percezione, concezioni spontanee, teoria delle situazioni.*

## 1. INTRODUZIONE

Recentemente la ricerca ha dimostrato il vantaggio dell'insegnamento della matematica attraverso il collegamento con le arti (Keen, 2003; Marrongelle, Black & Meredith, 2003). Questa connessione offre agli studenti l'opportunità di dare un senso alla matematica attraverso un collegamento con le conoscenze già esistenti (Schoenfeld, 1988) e la possibilità di sperimentare l'estetica delle arti per l'apprendimento della matematica (Betts & McNaughton, 2003; Eisner, 2002). Raramente le lezioni di matematica sono abbinate con le arti in generale e la musica in particolare (Johnson & Edelson, 2003; Rothenberg, 1996) e quando ciò avviene di solito è superficialmente incentrato sul conteggio dei ritmi e la natura frazionaria dei valori delle note. Per questo motivo gli educatori sono chiamati ad ampliare la programmazione didattica e l'attuazione di ulteriori attività basate sul rapporto tra matematica e musica (Rogers, 2004).

Questo rapporto ha radici lontane e il linguaggio della musica si riferisce internamente ed esternamente alla matematica da diverse prospettive: note, intervalli, scale, armonia, accordatura e temperamenti si riferiscono a proporzioni, rapporti numerici, interi, logaritmi, operazioni aritmetiche, trigonometria e geometria (Beer, 1998; Harkleroad, 2006); la melodia e il ritmo si possono rappresentare matematicamente e le forme musicali possono anche essere rappresentate da modelli matematici (Beer, 1998); i concetti matematici della sequenza di Fibonacci e la teoria della Sezione Aurea vengono utilizzate anche da parte di alcuni compositori (Garland & Kahn, 1995; maggio, 1996).

Fiske (1999) ha sintetizzato e dimostrato che l'insegnamento attraverso l'arte può: (a) trasformare l'ambiente per l'apprendimento; (b) raggiungere gli studenti che non possono essere facilmente raggiungibili in altro modo; (c) connettere gli studenti a se stessi e agli altri; (d) fornire nuove esperienze di apprendimento per gli adulti coinvolti nella vita degli studenti; (e) aprire nuove sfide per gli studenti eccellenti; (f) collegare le esperienze di apprendimento dalla scuola al mondo.

Inoltre, i ricercatori hanno dimostrato i benefici dello studio integrato fra matematica e le arti in generale per tutti gli studenti, anche per quelli con caratteristiche particolari: (a) la motivazione efficace nel coinvolgimento degli studenti in matematica (Fernandez, 1999; Hewitt, 2006; Pitman, 1998; Shilling, 2002),

(b) notevole miglioramento sulla comprensione in matematica (Autin, 2007; Catterall 2005; Shaffer, 1997), (c) lo sviluppo di abilità cognitive (Eisner, 1985; Peterson, 2005), (d) il miglioramento nel pensiero critico e le competenze di problem solving (Wolf, 1999), (e) sviluppo della capacità di collaborare in gruppi (MacDonald, 1992; Wolf, 1999), (f) il potenziamento negli studenti della fiducia in se stessi (MacDonald, 1992), (g) il miglioramento di empatia e di tolleranza in classe (Hanna, 2000) e (h) notevole miglioramento nella concettualizzazione della matematica (Harris, 2007; Upitis & Smithrin, 2003).

Il presente studio parte dalla considerazione che le trasformazioni geometriche hanno avuto un ruolo importante e per certi aspetti fondamentale nello sviluppo del linguaggio della musica occidentale (Scimemi, 1997).

Infatti, le trasformazioni geometriche sono state utilizzate nelle tecniche compositive fin dal XII sec. quando mosse i suoi primi passi la musica polifonica, ed ebbero un'ulteriore applicazione con l'affermazione del sistema tonale fino al XVIII sec.. Dopo un periodo di declino dobbiamo aspettare il XX sec. per trovare di nuovo degli esempi di strutture geometriche applicate alla musica. L'uso delle trasformazioni geometriche viene ripreso in maniera del tutto nuova dalla scuola dodecafonica di Vienna e dalle avanguardie che la seguirono (Galante, 2005).

Queste considerazioni ci mostrano la dimensione percettiva delle trasformazioni geometriche e poiché tradizionalmente l'insegnamento delle trasformazioni geometriche si è basato sulla percezione visiva di oggetti geometrici ed elaborazione di grafici o disegni (Galante, 1999) lo scopo di questa ricerca è di verificare se lo studio costante di uno strumento musicale crea potenzialità inconsce che si traducano in strategie e metodologie per la soluzione di problemi relativi alle isometrie.

La sperimentazione si basa su una comparazione tra allievi di Liceo che studiano musica al Conservatorio e allievi di Liceo che non studiano musica al Conservatorio ma che comunque hanno una conoscenza teorico musicale di base. Tale ricerca si è focalizzata sulle concezioni spontanee riguardo le trasformazioni geometriche in generale e il loro collegamento con la musica.

La ricerca sperimentale è stata condotta seguendo il filone della *Teoria delle situazioni* di Guy Brousseau (1997).

## 2. LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NEL LINGUAGGIO DELLA MUSICA: i riferimenti epistemologici

Il mondo della musica presenta due componenti strettamente connesse: quella “artistica” e quella “scientifica”. Da una parte, vi è l'aspetto emozionale che coinvolge sia chi esegue che chi ascolta; dall'altra vi sono aspetti essenzialmente fondati su basi fisico-matematiche che è necessario analizzare per comprendere come l'evento musicale si realizzi, come esso si possa ripetere e quali siano le leggi che lo condizionano. Con questo lavoro mostriamo un esempio di come con l'ausilio della musica sia possibile non solo vedere le possibili applicazioni delle trasformazioni geometriche ma anche ascoltare l'effetto che esse hanno su una melodia e ciò a nostro avviso rende lo studio della geometria decisamente più coinvolgente.

Infatti la traslazione è una delle tecniche compositive frequentemente utilizzata per trasformare una melodia e in musica questa trasformazione si chiama *trasposizione*.

Un'altra tecnica compositiva utilizzata da secoli è la riflessione che può essere *inversione* (riflessione rispetto all'asse  $x$ ), *retrogrado* (riflessione rispetto all'asse  $y$ ) o *retrogrado dell'inverso* (riflessione rispetto all'origine). Infine anche la rotazione appartiene al linguaggio della musica attraverso la *modulazione* (Galante, 1999).

### 2.1 La Traslazione

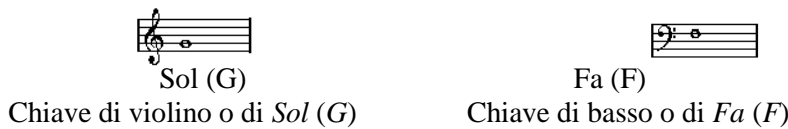
La *traslazione* (Dedò, 1996) di un vettore  $\mathbf{v}$  è l'applicazione  $\tau_{\mathbf{v}}$  che ad ogni punto  $P$  del piano associa il punto  $P' = \tau_{\mathbf{v}}(P)$  tale che il segmento orientato di primo estremo  $P$  e secondo estremo  $P'$  rappresenti il vettore  $\mathbf{v}$ .

In musica possiamo riconoscere delle trasformazioni geometriche. Infatti, in molte forme polifoniche, come il *canone* e la *fuga*, una melodia o *tema principale*, intesa come una ordinata successione di suoni aventi altezze diverse, viene prima esposta da un'unica voce (o strumento) e poi mediante opportune trasformazioni successive è affidata alle altre voci.

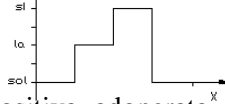
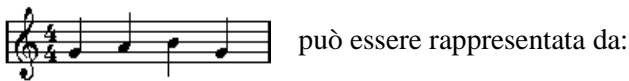
In pratica alcune trasformazioni della melodia utilizzate nella tecnica compositiva corrispondono proprio alla traslazione.

Prendiamo il piano  $(x,y)$  e riportiamo sull'asse  $x$  il tempo che in musica corrisponde a una successione di battiti ad intervalli costanti (quelli prodotti, per esempio, da un metronomo) e sull'asse  $y$  l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto. Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge  $f$  in modo che  $y = f(x)$ . Ciò premesso scegliamo come unità di misura il minuto secondo e l'abbiniamo alla figura musicale semiminima per l'asse  $x$  e scegliamo come unità di misura il semitono<sup>1</sup> temperato e l'abbiniamo all'asse  $y$ ; possiamo così avere una rappresentazione grafica mediante quadretti che simultaneamente indicano il valore di durata di ogni singolo suono, ossia il loro scorrere nel tempo e l'altezza assoluta di ognuno di esso riferita alla scala temperata.

Inoltre, nella scrittura musicale (Rossi, 1977) le note segnate sul pentagramma ricevono il loro nome e indicano una loro altezza assoluta grazie all'impiego delle *Chiavi*<sup>2</sup>: ad esempio alla chiave di violino corrisponde la nota *sol* ( $G$ ) nella seconda linea e alla chiave di basso la nota *fa* ( $F$ ) nella quarta linea.



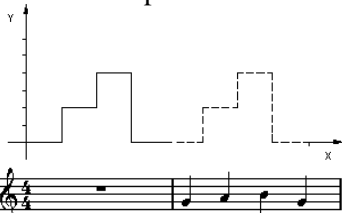
Di conseguenza, se poniamo come origine del nostro sistema di riferimento, cioè  $y = 0$ , l'altezza del suono corrispondente ad un *sol* ( $G$ ), la seguente melodia:



La traslazione in musica corrisponde a una tecnica compositiva adoperata da secoli per sviluppare polifonicamente una melodia.

Così la melodia già esaminata può essere così trasformata:

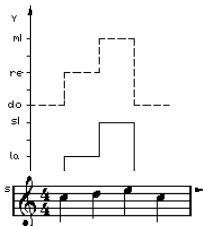
a) traslazione rispetto all'asse  $x$



- rappresentazione originale
- rappresentazione del traslato

La melodia traslata viene eseguita dopo il momento di silenzio indicato dalla pausa che in questo caso corrisponde al valore dell'intera battuta.

b) traslazione rispetto all'asse  $y$



- rappresentazione originale
- rappresentazione del traslato

La melodia traslata viene eseguita una quarta sopra: ciò vuol dire che tutti i suoni sono stati innalzati di due toni e un semitono, riproducendo la stessa melodia ad una altezza superiore.

Possiamo vedere un esempio completo di traslazione lungo l'asse  $x$  attraverso la popolare melodia *Fra Martino campanaro* (Scimemi, 1997) che è formata da quattro incisi ciascuno ripetuto due volte.

Il risultato è il seguente:



<sup>1</sup> E' la distanza, fra un qualsiasi suono della scala temperata e il suo immediatamente successivo, sia in senso ascendente che discendente. Esso è l'intervallo più piccolo del nostro sistema musicale e corrisponde alla metà di un tono.

<sup>2</sup> Si tratta di simboli grafici che, fissando sul pentagramma la posizione di un certo suono, stabiliscono, in rapporto a questo, la posizione di tutti gli altri.

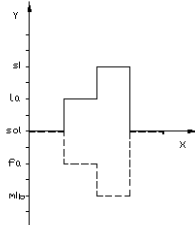
## 2.2 La Riflessione

La *riflessione* (Dedò, 1996) in una retta  $r$  è l'applicazione  $\sigma_r(P)$  che ad ogni punto  $P$  del piano associa il punto  $P' = \sigma_r(P)$  che appartiene alla perpendicolare a  $r$  per  $P$  e tale che  $r$  intersechi il segmento  $PP'$  nel suo punto medio; in particolare, se  $P \in r$ , allora  $\sigma_r(P) = P$ .

Un'altra tecnica compositiva frequentemente utilizzata per sviluppare una melodia è la *riflessione*. Osserviamo nuovamente la melodia prima esposta:

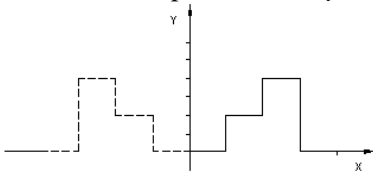
Avremo le seguenti riflessioni:

a) riflessione rispetto all'asse  $x$



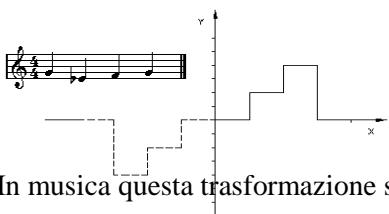
In musica questa trasformazione ha il nome di *canone per moto contrario* o *inversione* o ancora *canone a specchio*. La melodia originale e riflessa iniziano simultaneamente.

b) riflessione rispetto all'asse  $y$



In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado* o *canone a granchio*.

c) simmetria rispetto all'origine (composizione delle riflessioni rispetto all'asse  $x$  e all'asse  $y$ )



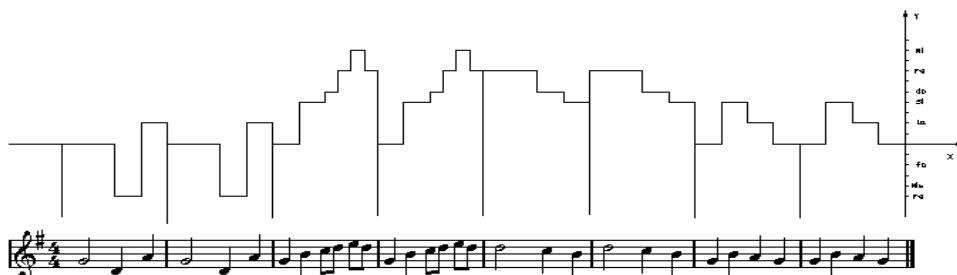
In musica questa trasformazione si chiama *retrogrado dell'inverso*.

Utilizzando nuovamente la melodia *Fra Martino* ed applicando ad essa la riflessione lungo l'asse  $x$  otteniamo una sensazione malinconica caratteristica del modo minore che non sfugge all'ascolto.

Il risultato grafico è il seguente:

Per quanto riguarda la riflessione rispetto all'asse  $y$  va osservato che la melodia rovesciata ha un significato assai diverso da quello originale e in questo caso assume un carattere solenne e da marcia, rafforzato dal rapporto fra la struttura ritmica del brano e i valori di durata dei suoni della melodia. (Galante, 1999)

Il risultato grafico è il seguente:





apprendimento della matematica ed in questo caso specifico attraverso l'interazione con il linguaggio musicale.

L'attività di percezione del suono, di decodificazione e di analisi del linguaggio musicale unito al linguaggio matematico può essere analizzata anche dal punto di vista neurofisiologico.

La psicologia è senza dubbio essenziale per l'attività didattica, ma per pervenire a dei risultati essa deve combinare lo studio del comportamento con lo studio parallelo di ciò che accade nel cervello. Da qui deriva l'importanza di capire come avvengono i processi di apprendimento dal punto di vista biologico (Ferreri 1992).

Funzione generale del cervello è quella di essere informato su ciò che avviene nel corpo, su ciò che avviene nel cervello stesso e sull'ambiente che circonda l'organismo, in modo che tra organismo e ambiente si possa raggiungere un *adattamento adeguato e propizio alla sopravvivenza* (Damasio, 2000). La percezione è il nostro mezzo per esplorare il *mondo esterno e interno e costituisce il fondamento della nostra conoscenza*.

Le singole vie di un sistema sensoriale sono organizzate in modo seriale e le diverse vie di ogni sistema sono organizzate in parallelo (Galzigna, 1986).

### **3.1 Le vie acustiche e le aree cerebrali uditive**

L'apparato percettivo uditivo è costituito dalla via acustica centrale, cioè dalle strutture comprese fra il nervo acustico e la corteccia uditiva primaria. Dal complesso funzionamento di questa parte del sistema deriva la sensazione uditiva.

Le informazioni acustiche vengono elaborate lungo vie parallele, ciascuna delle quali è devoluta all'analisi di una particolare caratteristica del suono (Kelly 2005). Ciascuna aria uditiva riceve le informazioni dai due orecchi. Subito dietro si trovano le arie secondarie che costituiscono il *planum temporale*. Il planum a sinistra è più sviluppato a destra e ed è più sviluppato nei musicisti professionisti rispetto ai non musicisti. La parte vicina del corpo calloso è allo stesso modo ipertrofica. Questa ipertrofia è legata alla dominanza cerebrale e all'espressione di questa dominanza nell'analisi della parola. Sembra che questa simmetria sia innata, si nota sin dal settimo mese di vita. Queste due particolarità anatomiche del cervello dei musicisti sono più nette se l'inizio della pratica musicale è più precoce nell'infanzia (Zatorre, 2001).

Il processo di analisi della musica è estremamente complesso e oltre le aree uditive coinvolge molte altre strutture: sistema limbico, talamo, aree temporali, parietali, frontali e cervelletto.

Accanto all'aree uditive primarie sono state identificate altre nove aree coinvolte nell'analisi della musica, ma il cui funzionamento è tutto da scoprire (Kelly 2005). In questo lavoro ci riferiremo alle conoscenze acquisite ad oggi.

### **3.2 La memoria**

William James (1950) introdusse l'idea della memoria distinta in due componenti discrete: Memoria Primaria (a breve termine) e Memoria Secondaria (a lungo termine) (Costa, Barbaccia, 1989). Il cervello elabora le informazioni che riceve sotto forma di input sensoriali (visione, udito, tatto, gusto, olfatto) e l'iterazione dell'informazione comporta il passaggio dalla memoria a breve termine alla memoria a lungo termine, ossia il consolidamento. Avvenuto il consolidamento il ricordo è incancellabile (Robustelli, 1974).

Nel passaggio dalla percezione al ricordo una funzione determinante è svolta dall'Ippocampo e dall'Amigdala e da strutture sottocorticali, chiamate Corpi Striati. Il sistema di apprendimento è assai complesso e al suo interno si possono estrapolare due sistemi d'apprendimento: il primo basato sull'associazione emozione-apprendimento (sistema limbico); il secondo basato sulla ripetizione dello stimolo (corpi striati) (Ferreri, Spagnolo, 1994).

### **3.3 L'apprendimento associativo tramite il sistema ippocampo-amigdala e le altre aree prefrontali**

Quando un'informazione viene percepita dai sensi (input sensoriale) arriva al talamo che la invia alle aree prefrontali e al cingolato anteriore.

Siccome l'informazione per potere essere conservata ha bisogno di una codifica, sia dal punto di vista spaziale che dal punto di vista temporale, l'ippocampo mette l'imprinting dal punto di vista dello spazio, mentre le aree prefrontali dal punto di vista del tempo.

Quando richiamiamo alla memoria un'informazione (ad esempio la successione esatta della linea melodica di un brano famoso), dato l'input otteniamo subito un'immagine sonora (o visiva) parziale: al primo istante disponiamo soltanto di parziali indici di spazio e tempo. Quando vengono richiamati questi indici parziali, l'ippocampo compie l'operazione di reintegrazione degli indici di spazio e tempo e attraverso le aree sensoriali primarie e poi quelle associative ricostruisce l'immagine completa. Questo è il meccanismo della

memoria associativa (Galzigna, 1986). All’informazione, con il suo contenuto di indici spaziali e temporali, si aggiunge un terzo indice che è quello dello stato del corpo. Teniamo presente che gli input sensoriali non sono mai degli input monomodali, nel senso ad esempio di solo ascolto, perchè essi vanno in parallelo e contemporaneamente si ha l’input visivo, l’input uditivo, quello sensoriale tattile, quello olfattivo e del gusto. In particolare, per il musicista, l’apprendimento non avviene solo attraverso l’input sensoriale uditivo ma attraverso tutto il corpo. Ad esempio con i barorecettori che sono al livello addominale si percepiscono frequenze intorno ai 50 Hz che arrivano al nostro cervello come altre sensazioni dell’informazione musicale. La musica si percepisce con la “pelle” cioè con i barorecettori presenti in tutto il corpo (Pribram, 1969). La fisicità della musica è una fondamentale componente dell’apprendimento sia per gli esecutori che per i fruitori. Il corpo, rispetto all’informazione percepita, assume un aspetto positivo, negativo o neutro. Il nucleo Accumbens, che ha dei collegamenti con l’amigdala e l’ippocampo, manda l’informazione del piacere e l’amigdala manda all’ippocampo le informazioni della paura. Lo stato neutro del corpo invece non fornendo l’imprinting all’informazione non ne favorisce la conservazione. Quando un bambino suona uno strumento musicale o canta, l’informazione musicale che passa non è soltanto legata al contesto di spazio e tempo ma anche al contenuto del piacere. L’informazione più è ricca di input, più facilmente viene appresa. (Ferreri, 1993).

### **3.4 L’apprendimento ripetitivo tramite i corpi striati**

Al sistema di apprendimento associativo legato all’ippocampo e all’amigdala, dobbiamo aggiungere quello legato alla ripetizione dello stimolo che è la cosiddetta memoria del “saper fare” che si utilizza ad esempio per camminare o per guidare un’automobile. In una prima fase si apprende con il sistema associativo ippocampale, che corrisponde al momento in cui, per compiere un’azione, si “deve pensare cosa fare”; se l’azione è ripetuta viene demandata al *corpo striato*. Il corpo striato lavora in automatismo permettendo di compiere le azioni senza la necessità di dovere riflettere prima di compiere l’azione stessa. Quando si impara a suonare uno strumento musicale o a cantare bisogna compiere simultaneamente diverse azioni: leggere il codice musicale, posizionare le mani nello strumento, oppure controllare con la bocca il processo di fonazione per i cantanti, percepire e riconoscere e intonare correttamente i suoni generati. Soltanto con la continua ripetizione della pratica del “suonare” o “cantare” le strutture geometriche, ritmiche e melodiche insite nel linguaggio musicale si consolideranno nel corpo striato e verranno acquisite dallo studente senza che egli se ne renda conto. Inoltre, più informazioni si hanno su un argomento più facile risulterà l’accesso all’argomento stesso. E quindi, quando si suona uno strumento musicale, il musicista non ha bisogno di pensare per ogni nota come posizionare le mani nello strumento, perché la continua ripetizione delle cellule melodico-ritmiche (scale musicali, arpeggi, sviluppo della tecnica dello strumento musicale, repertorio) favorisce gradualmente, attraverso i *fusi neuro muscolari tendinei*, la memorizzazione del corretto rapporto notazione musicale - posizione delle mani. Infine, bisogna aggiungere che le aree logico grammaticali della musica sono vicine alle aree di calcolo e a quelle linguistiche, tutte posizionate nell’emisfero sinistro (Lalitte, Bigand, 2006).

## **4. LA SPERIMENTAZIONE**

### **4.1 Metodologia della ricerca**

La metodologia della ricerca è basata sulla teoria delle situazioni didattiche di G. Brousseau (1997). Le fasi della sperimentazione sono state caratterizzate dalla:

- Formulazione del problema didattico: le trasformazioni geometriche si apprendono con il linguaggio geometrico e il linguaggio musicale attraverso il quale è possibile non solo vederle ma anche sentirle.
- Formulazione dell’obiettivo della ricerca: favorire negli allievi l’apprendimento attraverso l’interdisciplinarietà intesa come unità della cultura nella diversità dei saperi.
- Analisi a priori della situazione-problema che ha tenuto conto (Spagnolo, 1998):
  - della rappresentazione epistemologica dei concetti sia matematici che musicali;
  - della rappresentazione storico-epistemologica (variazioni che hanno interferito nel corso del tempo) degli stessi concetti;
  - dei comportamenti ipotizzabili degli allievi rispetto alla situazione – problema.
- Ipotesi di ricerca.
- Costruzione degli strumenti per la falsificazione delle ipotesi:

- con questionari (analisi quantitativa): correlazione dei dati sperimentali in funzione dell’analisi a priori. Utilizzo dell’analisi delle similarità di Lerman<sup>5</sup> con l’utilizzo del software C.H.I.C. *Classification Hiérachique Implicative et Cohésive* (Gras 1997, 2000).
- con interviste a coppie. La consegna è stata quella di scrivere le loro considerazioni comuni stese dopo un accordo comune (registrazione dei protocolli delle interviste) (analisi qualitativa).
- Documentazione e comunicazione dei risultati della ricerca.

#### 4.2 L’obiettivo del lavoro, le ipotesi di ricerca e il campione

Da un punto di vista generale, questa ricerca contribuisce a chiarire questioni relative alle rappresentazioni delle conoscenze isometriche dal punto di vista degli allievi. E’ anche un contributo alla didattica della matematica per il contributo interdisciplinare dello studio delle trasformazioni geometriche con la musica. Tra le principali funzioni che lo studio della musica è in grado di svolgere, oltre a quella conoscitiva, linguistico-comunicativa, culturale, critica, estetica e affettiva, si annovera quella cognitiva perchè la musica esercita e sviluppa le capacità di pensiero: il pensiero produttivo immaginativo in primo luogo (nelle attività sia compositiva che di produzione sonora), ma anche il pensiero analitico, logico, inferenziale (nelle attività di riflessione e interpretazione) (Della Casa, 1989).

Con questa considerazione abbiamo formulato le seguenti due ipotesi di ricerca:

**H1** *Negli studenti musicisti (Liceo Musicale-Conservatorio) lo studio costante di uno strumento musicale crea potenzialità inconsce che si traducono in strategie e metodologie per la soluzione di problemi relativi alle isometrie, rispetto agli studenti non musicisti (Liceo Pedagogico).*

**H2** *Gli allievi che possiedono la conoscenza delle strutture ritmiche musicali hanno una maggiore capacità nel riconoscere il ritmo delle forme geometriche per la ricostruzione degli oggetti, rispetto a coloro cui manca tale conoscenza .*

Per verificare le due ipotesi abbiamo realizzato una sperimentazione didattica che è stata effettuata presso il Liceo Statale “Regina Margherita” di Palermo dove abbiamo individuato due diversi campioni di allievi:

- allievi del Liceo Musicale abbinato al Conservatorio di Musica di Stato “Vincenzo Bellini” di Palermo: alunni coinvolti n.70 di età compresa fra 14 e 16 anni (classi I e II).

---

<sup>5</sup> Questa operazione segue l’indice di similarità di Lerman e classifica le variabili secondo livelli gerarchici. L’indice di similarità di Lerman segue la legge di Poisson e viene così definito:

\* P. 9, nota 5: la definizione di Lerman l’indice è mancante, e l’esempio deve essere spiegata.

$$s(a,b) = \frac{n_{a \wedge b} - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}}$$

ed é legato all’indice di implicazione dalla relazione :

$$\frac{q(a, \bar{b})}{s(a, b)} = -\sqrt{\frac{nb}{n\bar{b}}}$$

Un esempio chiarisce bene il significato di indice di similarità di Lerman:

Esempio 1	Esempio 2	Esempio 3	Esempio 4
0 0	1 1	0 0	0 1
1 0	1 1	0 0	1 0
1 1	1 1	0 0	0 1
1 1	1 1	0 0	1 0
1 1	1 1	0 0	0 1
-0,44721	0	0	-2,23607



- allievi del Liceo Socio-psico-pedagogico: alunni coinvolti n.70 di età compresa fra 14 e 16 anni (classi I e II).

Inoltre, sono state coinvolte otto coppie di alunni delle classi terze, (quattro per ogni corso di studio di età compresa fra 16 e 17 anni) per le interviste a coppia con la consegna di scrivere le loro considerazioni stese dopo un accordo comune con registrazione dei protocolli delle interviste stesse (Tabella1). Dunque la ricerca sperimentale si basa su una comparazione tra allievi di Liceo che studiano musica al Conservatorio e allievi di Liceo che non studiano musica al Conservatorio ma che comunque hanno una conoscenza teorico musicale di base. Tale ricerca si è focalizzata sulle concezioni spontanee riguardo le trasformazioni geometriche in generale e il loro collegamento con la musica.

**Tabella1**

	Liceo Musicale	Liceo Socio-psico-pedagogico
Analisi quantitativa	70 allievi che studiano uno strumento musicale o canto al Conservatorio. (età 14-16 anni)	70 allievi che non studiano musica al Conservatorio ma hanno una conoscenza teorico musicale di base. (età 14-16 anni)
Analisi qualitativa	4 coppie di allievi che studiano uno strumento musicale o canto al Conservatorio. (età 16-17 anni)	4 coppie di allievi che non studiano al Conservatorio ma hanno una conoscenza teorico musicale di base. (età 16-17 anni)

### 4.3 Il riferimento teorico della metodologia sperimentale

La teoria delle situazioni è in piena evoluzione attraverso numerosi lavori sperimentali e teorici all'interno della comunità dei ricercatori in didattica delle matematiche (Brousseau, 1997; Spagnolo, 1998) e questa ricerca sperimentale è stata condotta seguendo i riferimenti metodologici della *Teoria delle situazioni* di Brousseau (1997).

La ricerca sperimentale si è focalizzata sull'analisi della *situazione problema* relativa alle concezioni spontanee riguardo le trasformazioni geometriche in generale e nel loro collegamento con la musica. Per *situazione – problema* intendiamo:

- a) Un problema la cui soluzione richieda da parte dell'allievo una conoscenza ben determinata senza che intervengano altre conoscenze.
- b) Una situazione nella quale le variabili didattiche siano esplicitate e il loro cambiamento provochi delle modificazioni qualitative delle strategie ottimali.
- c) Una situazione che permetta di generare, per mezzo di questo sistema di variabili, tutti i problemi dove interviene la conoscenza in questione (Spagnolo,1998).

La situazione-problema presentata possiamo anche considerarla come situazione *a didattica* in quanto l'insegnante trasmettendo il sapere delle trasformazioni geometriche, non ha l'intenzione di trasmettere il sapere relativo alla tecnica compositiva musicale e viceversa l'insegnante di strumento musicale trasmettendo il sapere del linguaggio della musica (teorico-pratico) non ha l'intenzione di trasmettere il sapere delle trasformazioni geometriche. Infatti nel cammino didattico educativo degli allievi, presi in considerazione nella sperimentazione, i saperi delle due discipline sono stati trasmessi sempre separatamente.

Allo stato attuale delle ricerche scientifiche, l'aspetto interdisciplinare dello studio delle matematiche e in particolare il rapporto tra le trasformazioni geometriche e le tecniche compositive musicali non ha esplorato l'ambito delle concezioni spontanee degli allievi. Con questo lavoro esploro quali sono i meccanismi inconsci che favoriscono l'apprendimento della matematica attraverso l'analisi delle concezioni spontanee comparate fra alunni che praticano lo studio di uno strumento musicale e alunni che non praticano lo studio di uno strumento musicale.

Considerato che la sola analisi comportamentale risulta essere insufficiente per spiegare le concezioni spontanee, si deve fare riferimento alle neuroscienze che indagano sui meccanismi di apprendimento e consolidamento delle informazioni nel cervello.

#### 4.4 Il questionario e l'analisi a-priori

A entrambi i campioni presi in esame sono stati proposti 4 blocchi di questionari. Il primo è costituito da 6 quesiti sulle trasformazioni geometriche nel piano senza riferimenti analitici, presenti in qualunque libro di biennio di scuola secondaria superiore; il secondo è costituito da 5 quesiti sulle trasformazioni geometriche con i riferimenti analitici del piano cartesiano; il terzo è un problema riguardante la ricostruzione di un mosaico attraverso l'individuazione e l'iterazione di figure geometriche; infine il quarto questionario è costituito da 5 quesiti riguardanti l'applicazione delle trasformazioni geometriche in incisi melodici.

In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno ho indicato con il valore 1 le strategie utilizzate e con il valore 0 le strategie non applicate. I dati rilevati sono stati analizzati in modo quantitativo, utilizzando la similarità di Lerman.

#### 4.5 Primo questionario<sup>6</sup>

Domanda A: le due figure sono simmetriche? Motiva la tua risposta

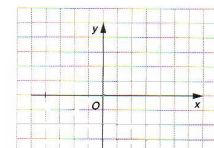
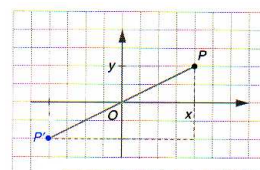
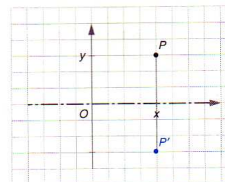
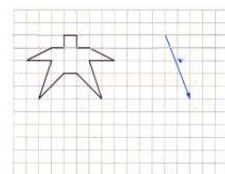
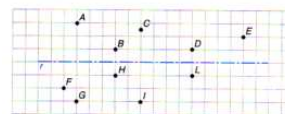
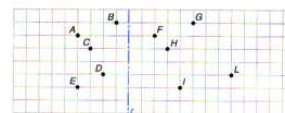
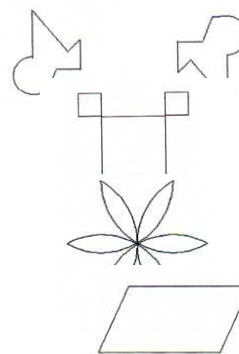
Domanda B: Quanti assi di simmetria può avere la seguente figura? Dopo averli individuati, tracciali e motiva la tua risposta.

Domanda C: Quanti assi di simmetria si possono tracciare nella figura seguente? Motiva la tua risposta.

Domanda D: Il parallelogramma ha assi di simmetria o centri di simmetria? Quanti? Motiva la tua risposta

Domanda E: Tra i seguenti punti indica le coppie di punti che sono simmetrici rispetto a r. Motiva la tua risposta.

Domanda F: Rispetto all'asse r indicato, disegna la figura simmetrica della seguente. Indica a parole il procedimento che hai seguito.



#### Questionario 2

Domanda A: Disegna la figura corrispondente di quella data nella traslazione rappresentata dal vettore v. Indica a parole il procedimento che hai seguito.

Domanda B: Trova la relazione che lega il punto P(x,y) al punto P'(x',y'). P' è simmetrico di P, rispetto a quale asse o centro? Determina i punti simmetrici corrispondenti dei punti A(0;-1), B(-2;-

2), C( $\frac{1}{2};0$ ). Motiva la tua risposta.

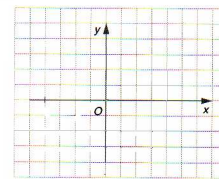
Domanda C: Trova la relazione che lega il punto P(x,y) al punto P'(x',y'). P' è simmetrico di P, rispetto a quale asse o centro? Determina i punti simmetrici corrispondenti dei punti A(0; -1), B(-2;

-2), C( $\frac{1}{2};0$ ). Motiva la tua risposta.

Domanda D: Disegna il triangolo ABC con A(3;1), B(2; -1), C(0;4). Trova il suo simmetrico rispetto all'asse x scrivendo le coordinate dei vertici. Motiva la tua risposta.

<sup>6</sup> Nell'agenda il primo numero indica il questionario, la lettera maiuscola si riferisce al esito, il secondo numero indica la strategia applicata. Ad esempio 1A1 = primo questionario, prima domanda prima strategia.

Domanda E: Disegna il quadrilatero ABCD con A(1;0), B(3;1), C(3;3), D(1;2). Trova il suo simmetrico rispetto all'origine O scrivendo le coordinate dei vertici. Motiva la tua risposta.

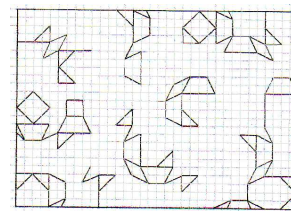


### Questionario 3

#### PROBLEMA

Un archeologo, durante alcuni scavi, ha rinvenuto frammenti di un antico pavimento in mosaico bizantino e li ha riprodotti su un foglio a quadretti. Vorrebbe ricostruire l'intero mosaico. Potete dargli una mano? Provate, a completare il mosaico disegnando le parti mancanti.

Siete riusciti a ricostruire l'antico mosaico? Spiegate quali strategie avete utilizzato per la soluzione del problema e, se non ci siete riusciti, spiegate il perché.



### Questionario 4

#### PROBLEMA

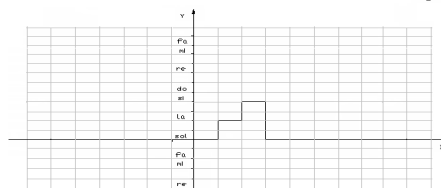
Prendiamo il piano cartesiano  $(x, y)$  e riportiamo sull'asse  $x$  il tempo che in musica corrisponde a una successione di battiti ad intervalli costanti (quelli prodotti, per esempio, da un metronomo) e sull'asse  $y$  l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto. Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge  $f$  in modo che  $y = f(x)$ . Ciò premesso scegliamo come unità di misura il minuto secondo e l'abbiniamo alla figura musicale semiminima (velocità metronomica = 60) per l'asse  $x$  e il semitono<sup>7</sup> temperato per l'asse  $y$ ; possiamo così avere una rappresentazione grafica mediante quadretti che simultaneamente indicano il valore di durata di ogni singolo suono, ossia il loro scorrere nel tempo (sull'asse  $x$ ) e l'altezza assoluta di ognuno di esso riferita alla scala temperata (sull'asse  $y$ ).

Inoltre, nella scrittura musicale le note segnate sul pentagramma ricevono il loro nome e la loro altezza assoluta grazie all'impiego delle *Chiavi*<sup>8</sup>: ad esempio alla chiave di violino corrisponde la nota *sol* (G) nella seconda linea del pentagramma.



Chiave di violino o di *Sol* (G)

Di conseguenza, se poniamo come origine del nostro sistema di riferimento, cioè  $y = 0$ , l'altezza del suono corrispondente ad un *sol* (G), il seguente inciso melodico si rappresenta in un grafico cartesiano in questo modo:

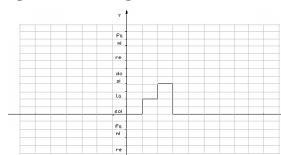


Sulla base di queste indicazioni provate a completare i grafici seguenti.

Domanda A:

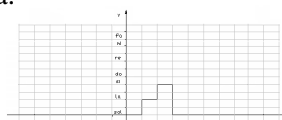
Nel seguente piano cartesiano trovi raffigurata la melodia originale.

Disegna, nello stesso piano cartesiano, questo inciso melodico:



Individua se si tratta di traslazione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o di riflessione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o rispetto all'origine della melodia originale. Motiva la tua risposta.

Domanda B:



<sup>7</sup> E' la distanza, fra un qualsiasi suono della scala temperata e il suo immediatamente successivo, sia in senso ascendente che discendente. Esso è l'intervallo più piccolo del nostro sistema musicale e corrisponde alla metà di un tono.

<sup>8</sup> Si tratta di simboli grafici che, fissando sul pentagramma la posizione di un certo suono, stabiliscono, in rapporto a questo, la posizione di tutti gli altri.

Nel seguente piano cartesiano trovi raffigurata la melodia originale.

Disegna, nello stesso piano cartesiano, questo inciso melodico:

Individua se si tratta di traslazione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o di riflessione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o rispetto all'origine della melodia originale. Motiva la tua risposta.

Domanda C:

Nel seguente piano cartesiano trovi raffigurata la melodia originale.

Disegna, nello stesso piano cartesiano, questo inciso melodico:

Individua se si tratta di traslazione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o di riflessione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o rispetto all'origine della melodia originale. Motiva la tua risposta.

Domanda D:

Nel seguente piano cartesiano trovi raffigurata la melodia originale.

Disegna, nello stesso piano cartesiano, questo inciso melodico:

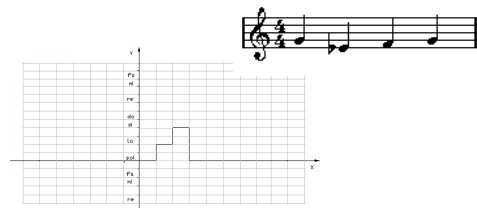
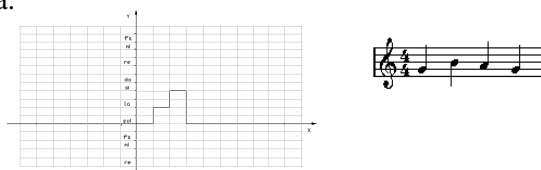
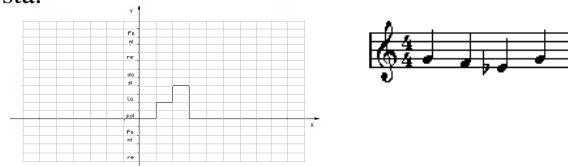
Individua se si tratta di traslazione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o di riflessione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o rispetto all'origine della melodia originale. Motiva la tua risposta.

Domanda E:

Nel seguente piano cartesiano trovi raffigurata la melodia originale.

Disegna, nello stesso piano cartesiano, questo inciso melodico:

Individua se si tratta di traslazione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o di riflessione rispetto all'asse  $x$  o  $y$  o rispetto all'origine della melodia originale. Motiva la tua risposta



#### 4.6 Analisi quantitativa dei dati

Nel primo questionario la prima reazione di alcuni alunni del pedagogico, che non avevano studiato le trasformazioni geometriche, è stata di cercare i termini che non conoscevano sul dizionario di lingua italiana prima di cominciare a svolgere gli esercizi. Dal Grafico delle Similarità e dall'analisi quantitativa emerge che in generale entrambi i campioni manifestano difficoltà nell'individuare e riconoscere la simmetria. Entrambi i campioni hanno cercato di rispondere ai quesiti attingendo esclusivamente al linguaggio matematico.

Nel secondo questionario dal Grafico delle Similarità e dall'analisi quantitativa si evidenzia che in generale entrambi i campioni manifestano difficoltà nell'individuare e riconoscere la simmetria nel piano cartesiano. Anche in questo caso entrambi i campioni hanno cercato di rispondere ai quesiti attingendo esclusivamente al linguaggio matematico.

Nel terzo questionario osservando il Grafico delle Similarità e dall'analisi quantitativa si evidenzia che in generale entrambi i campioni individuano la ricorsività e il ritmo della sequenza delle forme; analizzando i campioni separatamente emerge che gli alunni del pedagogico riescono ad individuare una parte del mosaico mentre è maggiore il numero di alunni del musicale, sia strumentisti che pianisti, che individuano la ricorsività dell'intero disegno.

Ciò è dovuto al fatto che il musicista, giocando molto con il ritmo musicale durante lo studio dello strumento musicale, consolida nella mente la tecnica della ripetizione ricorsiva; così che individuando la cellula<sup>9</sup> di partenza, automaticamente egli è in grado di ricostruire la struttura ritmica dell'intero mosaico.

<sup>9</sup> Ossia la seguente figura

Possiamo di conseguenza affermare che la maggiore abilità del campione dei musicisti nell'individuare il ritmo delle forme che costituiscono il mosaico risiede nella struttura ritmica del linguaggio musicale che viene acquisito tramite il continuo studio dello strumento musicale e che inconsciamente crea le strutture mentali per l'acquisizione e il riconoscimento della ricorsività e del ritmo delle figure geometriche.

Il quarto questionario è stato affrontato con interesse ed entusiasmo da entrambi i campioni di allievi perché ha incuriosito l'abbinamento tra trasformazioni geometriche e musica. Gli alunni del Liceo Socio-psico-pedagogico, che hanno elementari conoscenze musicali,<sup>10</sup> hanno preferito cercare le soluzioni nell'ambito della musica più che in quello geometrico: ad esempio nel primo esercizio hanno individuato la traslazione perché c'è la pausa. Il campione degli allievi musicisti, in particolare, ha utilizzato il termine *trasposizione* per indicare la *traslazione* perché in musica trasportare una melodia significa spostarla in altezza, quindi gli allievi hanno correttamente individuato il termine *trasposizione* come sinonimo di *traslazione*.

In generale si è osservato una maggiore disponibilità, da parte di entrambi i campioni, nel cercare la soluzione ai quesiti musicali e questo ha comportato anche una maggiore capacità nell'individuare le isometrie attingendo al linguaggio sia geometrico che musicale.

Osservando il Grafico delle Similarità in Fig.1 che raggruppa i due campioni presi in esame e analizzando tutti i dati raccolti dei due campioni si evidenziano 4 tipologie di strategie principali:

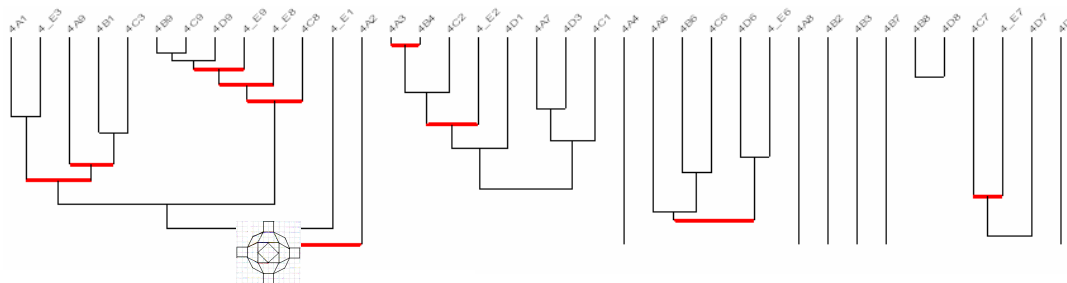


Fig.1 Similarità nel Liceo Musicale e Socio-psico-pedagogico

- individua la traslazione rispetto all'asse x e la traslazione rispetto all'asse y (ossia risponde correttamente alle domande (4A1) e (4B1) ) ma confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione* nei quesiti (4C1) e (4D1) pur rispondendo correttamente al quesito (4E1);
- individua la riflessione rispetto all'asse x e la riflessione rispetto all'asse y (ossia risponde correttamente alle domande (4C1) e (4D1) ) ma confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione* nei quesiti (4A1) e (4B1);
- disegna il grafico ma non dice se si tratta di riflessione o traslazione;
- non disegna il grafico dell'inciso melodico ma afferma che si tratta di riflessione.

Dall'analisi quantitativa si è evidenziato che in generale è presente un errore concettuale tra i termini *traslazione* e *riflessione* sia per i musicisti che per i non musicisti.

Per individuare eventuali diversi comportamenti sono stati analizzati i due campioni separatamente e dall'analisi del Grafico delle Similarità in Fig. 2 è emerso che il campione del Liceo Pedagogico si è assestato su 3 tipologie di strategie principali:

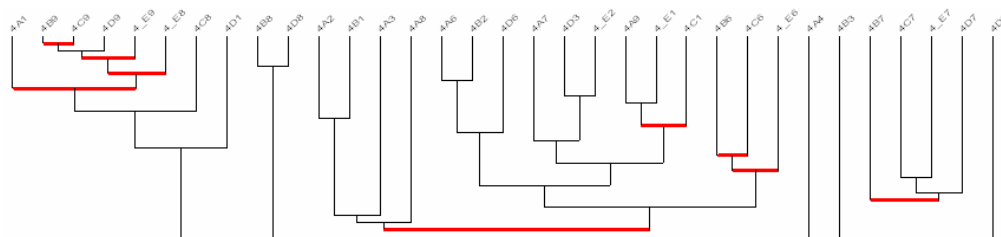


Fig.2 Similarità nel Liceo Socio-psico-pedagogico

- individua la traslazione rispetto all'asse x (4A1) e la riflessione rispetto all'asse y (4D1), ma considera gli altri grafici come *identità* ossia né traslazione né riflessione;

<sup>10</sup> Nel sistema scolastico italiano si studia un poco di teoria musicale soltanto nelle scuole medie inferiori, mentre lo studio professionale della musica è affidato ai Conservatori di Musica di Stato.

- individua la traslazione rispetto all’asse  $y$  (4B1), la riflessione rispetto all’asse  $x$  (4C1) e la riflessione rispetto all’origine (4E1) ed è comunque in grado di disegnare il grafico, ma confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione*;
- non disegna il grafico dell’inciso melodico ma afferma che si tratta di traslazione.

Dall’analisi del Grafico delle Similarità in Fig. 3 del campione del Liceo Musicale sono emerse 5 tipologie di strategie principali:

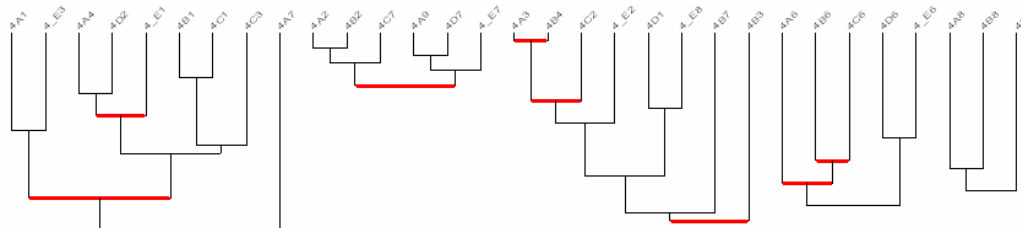


Fig.3 Similarità nel Liceo Musicale

- individua la traslazione rispetto all’asse  $x$  (4A1), la traslazione rispetto all’asse  $y$  (4B1), la riflessione rispetto all’asse  $x$  (4C1) e la riflessione rispetto all’origine (4E1), ma confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione*;
- confonde sempre il concetto di *traslazione* con *riflessione*;
- confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione* ma riesce ad individuare la riflessione rispetto all’asse  $y$ ;
- disegna il grafico ma non dice se si tratta di riflessione o traslazione;
- non disegna il grafico dell’inciso melodico ma dice che si tratta di riflessione.

Poiché il campione del Liceo Musicale è costituito sia da strumentisti (archi, fiati) che da pianisti ho analizzato il sottocampione costituito dai soli pianisti e dall’analisi del Grafico delle Similarità in Fig. 4 si rileva che si è assestato su 3 tipologie di strategie principali:

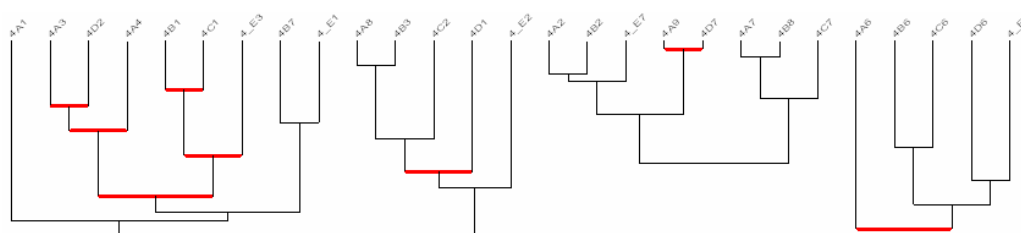


Fig.4 Similarità nel Liceo Musicale, pianisti

- individua la traslazione rispetto all’asse  $x$  (4A1), la traslazione rispetto all’asse  $y$  (4B1), la riflessione rispetto all’asse  $x$  (4C1) la riflessione rispetto all’asse  $y$  (4D1) e la riflessione rispetto all’origine (4E1), ma confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione*;
- non disegna il grafico dell’inciso melodico ma dice che si tratta di riflessione o traslazione e confonde il concetto di *traslazione* con *riflessione*;
- disegna il grafico ma non dice se si tratta di riflessione o traslazione.

Dall’analisi delle risposte date ai questionari proposti si evidenzia che in generale, sia per gli allievi del Liceo Pedagogico che per quelli del Liceo Musicale è presente un errore concettuale tra i termini *traslazione* e *riflessione* (che possiamo ipotizzare essere un “misconcetto”) e questo si rileva anche nei primi due blocchi di questionari, strettamente geometrici. Dall’analisi del sottogruppo dei pianisti è emerso che questo “misconcetto” è meno presente e ciò è dovuto alle caratteristiche del pianoforte; infatti, esso è uno strumento che tendenzialmente obbliga ad utilizzare le due mani in maniera simmetrica effettuando sia *traslazioni* che *riflessioni* che vengono apprese in modo inconscio attraverso i recettori neuro-tendinei degli arti superiori.

Dall’analisi del Grafico delle Similarità in Fig.5 del sottocampione costituito dagli strumentisti, emerge che fiati e archi hanno più difficoltà nell’individuare la riflessione rispetto all’asse  $y$ ; infatti mentre per i pianisti possiamo dire che individuano “l’asse  $y$ ” attraverso il Do (C) centrale del pianoforte, agli altri strumentisti manca tale riferimento.

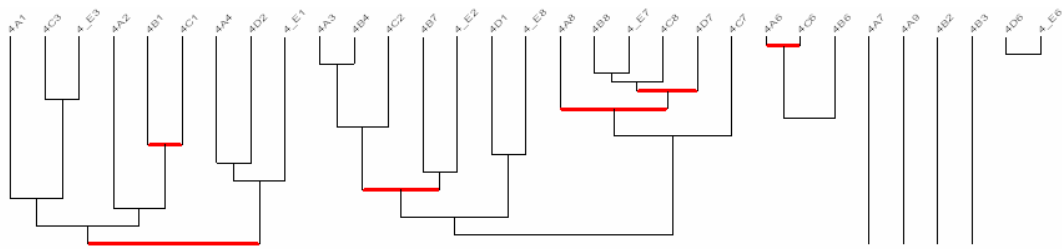


Fig.5 Similarità nel Liceo Musicale, strumentisti (fiati e archi)

#### 4.7 Analisi qualitativa dei dati

Il quarto blocco di esercizi, riguardante le trasformazioni geometriche in musica è stato proposto a 8 coppie di studenti di cui 4 coppie del Liceo Socio-psico-pedagogico e 4 coppie del Liceo Musicale che a sua volta erano suddivisi in due coppie di pianisti e due coppie di strumentisti.

La I coppia del Liceo Socio-psico-pedagogico nel primo quesito concorda che l'immagine disegnata è uguale al grafico dell'inciso originario ma è presente la pausa. Nel secondo quesito individua la riflessione rispetto all'asse  $y$ . Nel terzo quesito individua la riflessione rispetto all'asse  $x$ . Nel quarto quesito individua la riflessione rispetto all'asse  $y$  come immagine ribaltata. Nel quinto quesito non individua la riflessione rispetto all'origine. Dall'analisi del loro comportamento è emerso che per gli studenti "riflessione" è sinonimo di "uguale" mentre "traslato" è sinonimo di "spostato". La strategia adottata è quella di disegnare i grafici degli incisi melodici e confrontarli con il grafico dell'inciso originario. La coppia non è riuscita a individuare la traslazione e la riflessione rispetto all'origine. Ha individuato la riflessione rispetto all'asse  $x$  perché ha immaginato di ribaltare la figura. Ha individuato la riflessione rispetto all'asse  $y$  perché l'ha considerata come in uno specchio.

La I coppia del Liceo Musicale nel primo quesito individua correttamente la traslazione rispetto all'asse  $x$ . Nel secondo quesito individua correttamente la traslazione rispetto all'asse  $y$  perché *"il grafico è lo stesso (del grafico della melodia originaria) trasportato una quarta sopra"*. Nel terzo quesito individua correttamente la riflessione rispetto all'asse  $x$  trovando le coordinate cartesiane dei punti del grafico; ha inoltre collegato queste coordinate con la simmetria degli intervalli dei suoni dell'inciso melodico proposto. Nel quarto quesito individua correttamente la riflessione rispetto all'asse  $y$  *"perché il grafico è invertito rispetto a  $y$  e cambiano i segni di  $x$ "*. Nel quinto quesito individua correttamente la riflessione rispetto all'origine perché *"i segni di  $x$ ,  $y$  sono invertiti"*. Analizzando il loro comportamento, si osserva la presenza dell'alunna M. che studia violino, pianoforte e composizione al Conservatorio di Musica di Stato "V. Bellini" di Palermo. L'alunna M. grazie alla qualità e profondità degli studi musicali, insieme all'ottimo profitto scolastico al Liceo Musicale, interagendo con la compagna, è stata in grado di attingere ad entrambi i linguaggi, musicale e matematico, per individuare la soluzione dei quesiti proposti. Infatti ha utilizzato correttamente il termine trasposizione per indicare la traslazione della melodia rispetto all'asse  $y$  e ha ricavato le coordinate cartesiane dei punti del grafico rispettando correttamente le simmetrie dell'inciso melodico.

#### CONCLUSIONE

Con questo lavoro abbiamo messo in risalto l'aspetto percettivo dello studio delle trasformazioni geometriche perché esse sono presenti nelle tecniche compositive del linguaggio musicale.

Allo stato attuale ci sono numerose ricerche che mostrano una profonda connessione tra matematica e musica anche nel successo scolastico da parte di coloro che sono impegnati nello studio della musica; tali studi si limitano ad un'osservazione dei risultati scolastici senza porsi la domanda sul perché ciò avviene.

Nella ricerca di questo scritto sono state considerate le "concezioni spontanee" di due diversi campioni di alunni (musicisti e non musicisti) per analizzare i dati al fine di comprendere in che modo lo studio della musica possa avere influito nelle loro capacità di apprendimento delle isometrie.

Come abbiamo visto, nella prima parte spieghiamo come vengono utilizzate le trasformazioni geometriche nelle tecniche compositive e come si sia sviluppato il linguaggio musicale nel corso dei secoli; nella seconda parte attingo alle neuroscienze per spiegare, alla luce delle ultime ricerche in campo neurologico, come funziona il nostro cervello e come avviene l'apprendimento: nel cervello la comprensione e l'immagazzinamento delle esperienze della vita (e di conseguenza anche quelle didattiche) avvengono attraverso gli input sensoriali che non sono mai degli input monomodali, nel senso ad esempio di solo

ascolto, perchè essi vanno in parallelo e contemporaneamente si ha l'input visivo, l'input uditivo, quello sensoriale tattile, quello olfattivo e del gusto: l'informazione più è ricca di input, più facilmente viene appresa e consolidata nel cervello. Ciò premesso ci siamo chiesti, nella terza parte dello scritto, qual è la relazione fra i meccanismi di funzionamento del cervello e le concezioni spontanee degli alunni. L'analisi dei dati acquisiti dimostra che esiste un forte parallelismo e una vera e propria corrispondenza fra i meccanismi di funzionamento del cervello e le concezioni spontanee. L'informazione matematica (e musicale) imitando il sistema dell'ippocampo e delle aree prefrontali, se è ricca di input multimodali, si apprende con più facilità, con una maggiore profondità di contenuti e si consolida rapidamente nel cervello.

In concreto, attraverso la sperimentazione, ci siamo chiesti se lo studio costante di uno strumento musicale crea potenzialità inconse che si traducono in strategie e metodologie per la soluzione di problemi relativi alle isometrie e abbiamo esaminato se la conoscenza delle strutture ritmiche musicali favorisce il riconoscimento del ritmo delle forme geometriche. Per verificare le due ipotesi, la ricerca sperimentale si è focalizzata sull'analisi della *situazione-problema* relativa alle concezioni spontanee riguardo le trasformazioni geometriche in generale e il loro collegamento con la musica.

La ricerca sperimentale si basa su una comparazione tra allievi di Liceo che studiano musica al Conservatorio e allievi di Liceo che non studiano musica al Conservatorio ma che comunque hanno una conoscenza teorico musicale di base. Inoltre, sono state coinvolte otto coppie di alunni delle classi terze, (quattro per ogni corso di studio) per le interviste a coppia con la consegna di scrivere le loro considerazioni stese dopo un accordo comune con registrazione dei protocolli delle interviste stesse.

A entrambi i campioni presi in esame sono stati proposti 4 blocchi di questionari analizzati in modo quantitativo, utilizzando la similarità di Lerman.

Dall'analisi dei dati sperimentali, dalle riflessioni epistemologiche e dalle conoscenze neurofisiologiche si può ipotizzare che si sia verificata una situazione di apprendimento didattico che include una situazione *a didattica*. Infatti la situazione di apprendimento didattico la si riscontra nella volontà dell'insegnante (matematica o musica) di trasmettere il *sapere specifico della disciplina* (trasformazioni geometriche o tecnica e repertorio dello strumento musicale) e nello stesso tempo l'allievo passa da una conoscenza ad un'altra; simultaneamente si è verificata una situazione *a didattica* perchè l'insegnante trasmettendo il sapere delle trasformazioni geometriche non aveva l'intenzione di trasmettere il sapere relativo alla tecnica compositiva musicale e viceversa l'insegnante di strumento musicale trasmettendo il sapere del linguaggio della musica (teorico-pratico) non aveva l'intenzione di trasmettere il sapere delle trasformazioni geometriche. Infatti nel cammino didattico educativo degli allievi i saperi delle due discipline sono stati trasmessi sempre separatamente, con evidente contrasto rispetto al profondo legame che le unisce.

Infatti, dall'analisi quantitativa delle risposte date ai questionari proposti si evidenzia, sia per gli allievi del Liceo Pedagogico che per quelli del Liceo Musicale, la presenza di un errore concettuale tra i termini *traslazione* e *riflessione* (che possiamo ipotizzare essere un "misconcetto"). Questo si rileva anche nei primi due blocchi di questionari, strettamente geometrici. Dall'analisi del sottogruppo dei pianisti è emerso che questo "misconcetto" è meno presente e ciò è dovuto alle caratteristiche del pianoforte; infatti, esso è uno strumento che tendenzialmente obbliga ad utilizzare le due mani in maniera simmetrica effettuando sia *traslazioni* che *riflessioni* che vengono apprese in modo inconscio attraverso i recettori neuro-tendinei degli arti superiori. Nel caso degli strumentisti (fiati e archi), dall'analisi dei dati, emerge che hanno più difficoltà nell'individuare le riflessioni rispetto all'asse y; infatti mentre per i pianisti possiamo dire che individuano "l'asse y" attraverso il Do centrale del pianoforte, agli altri strumentisti manca tale riferimento.

Per quanto riguarda l'analisi qualitativa si è fatto riferimento soltanto al quarto questionario che è stato sottoposto, come abbiamo già detto, ad 8 coppie di studenti dei due campioni (4 coppie per ogni corso di studio) attraverso interviste.

Dall'analisi del comportamento delle coppie del Liceo Socio-psico-pedagogico, è emerso che per gli studenti "riflessione" è sinonimo di "uguale", mentre "traslato" è sinonimo di "spostato" o "diverso". La strategia adottata è quella di disegnare i grafici degli incisi melodici e confrontarli con il grafico dell'inciso originario.

Dall'analisi del comportamento delle coppie del Liceo Musicale, in generale, è emerso che gli studenti hanno individuato correttamente le traslazioni e le riflessioni e per la soluzione dei quesiti hanno fatto riferimento sia al linguaggio musicale che a quello geometrico.

In ultima analisi, quanto detto finora ci permette di affermare che con l'ausilio della musica è possibile non solo vedere le possibili applicazioni delle trasformazioni geometriche ma anche ascoltare l'effetto che esse



hanno su una melodia e ciò suggerisce ulteriori approfondimenti e ricerche sperimentali per comprendere meglio il complesso meccanismo del processo di insegnamento-apprendimento.

La ricerca vuole essere un contributo al dibattito sull'insegnamento attraverso l'interdisciplinarietà e l'analisi dei dati ha dimostrato che il legame tra matematica e musica è talmente profondo che nei musicisti l'apprendimento dei contenuti delle trasformazioni geometriche avviene in maniera inconscia.

Più in generale, con questo studio si afferma il valore pedagogico della l'interdisciplinarietà, che permette agli studenti di comprendere l'unità della cultura nella diversità dei saperi.

*Ringraziamo il Dott. Mario Ferreri per averci dato utili consigli per la parte relativa alle neuroscienze ed il Maestro Francesco Di Peri per la consulenza sulla composizione musicale.*

## BIBLIOGRAFIA

- Altenmüller E. (2005), *La musica in testa*, in *Mente e Cervello* n. 14, anno III, pp. 42-53, Le Scienze S.p.A., Roma.
- Artigue M. (1988), *Ingénierie didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9 (3) pp.281-308, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Autin, G. (2007). *The artist teacher uses proportions, the math teacher helps students understand the how and why, fractions fly the kites*. *Journal for Learning through the Arts*, 3(1-6), 1-20.
  - Basso A. (1985), *L'età di Bach e di Haendel, Storia della musica a cura della società italiana di musicologia*, Torino , E.D.T.
  - Beer, M. (1998). *How do mathematics and music relate to each other?* Brisbane, Queensland, Australia: East Coast College of English.
  - Betts, P., & McNaughton, K. (2003). *Adding an aesthetic image to mathematics education*. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved January 20, 2008, from <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm>.
  - Boulez P. (1968), *Note di apprendistato* a cura di Paule Thévenin, Torino, Einaudi Editore.
  - Boulez P.(1979), *Pensare la musica oggi*, Torino, Einaudi Editpre.
  - Boulez P.(1984), *Punti di riferimento* acura di Jean-Jacques Nattiez, traduzione di G. Guglielmi, Torino, Einaudi Editpre.
  - Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht: Kluwer.
  - Catterall, J. (2005). *Conversation and silence: Transfer of learning through the arts*. *Journal for Learning through the Arts*, 1(1), 1-12.
  - Costa E., Barbaccia M.L. (novembre 1989) *Meccanismi molecolari operativi nella memoria: nuove ipotesi*  
- Fidia biom. inform.
  - Damasio A. R., *Emozione e coscienza*, Adelphi, Milano 2000
  - Dedò M., *Trasformazioni geometriche*, Bologna, Zanichelli, 1996
  - Della Casa M. (1974). *La comunicazione musicale e l'educazione*. Brescia: La Scuola Editrice.
  - Eisner, E. (1985). *Aesthetic modes of knowing*. In E. Eisner (Ed.), *Learning and teaching the ways of knowing: Eighty-fourth yearbook of the Society for the Study of Education, Part II* (pp. 23-36). Chicago: The University of Chicago.
  - Eisner, E. (2002). *The arts and the creation of mind*. New Haven, CT: Yale University Press.
  - Fernandez, M. (1999). *Making music with mathematics*. *The Mathematics Teacher*, 92(2), 90-92.
  - Ferreri M. (1992), *Evoluzione come apprendimento, l'apprendimento come evoluzione* “Parte 1”, in *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M), Palermo, n°2, pp.87-148.
  - Ferreri M. (1993), *Evoluzione come apprendimento, l'apprendimento come evoluzione* “Parte 2”, in *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M), Palermo, n°3, pp.99-153.
  - Ferreri M., Spagnolo F. (1994), *L'apprendimento tra emozione ed ostacolo*, in *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M), Palermo, n°4, pp.1-151.
  - Fiske, E. B. (1999). *Champions of change: The impact of the arts on learning*. Washington. D.C: The Arts Education Partnership and The President's Committee on the Arts and Humanities.

- Galante D. (1999), *Aspetti didattici dello studio delle trasformazioni geometriche: l'Offerta Musicale di J. S. Bach*, in *Quaderni di Ricerca in Didattica*, Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), Palermo, n°8, pp.1-25. Pubblicazione on– line su Internet nel sito <http://math.unipa.it/~grim/quaderno8.htm>.
- Galante D. (2005), *I suoni armonici, le trasformazioni geometriche e i processi compositivi in J. S. Bach: una proposta didattica*, nei *Proceeding del CIEAEM 57 Changes in society: a challenge for Mathematics Education*, Piazza Armerina.
- Galante D. (2006), *Le matrici come espressione delle isometrie nel procedimento compositivo di Pierre Boulez: la serialità integrale in Structures I per due pianoforti. Proposte didattiche*. “Quaderni di ricerca in didattica” a cura del G.R.I.M. (Gruppo Ricerca Insegnamento Matematica) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università - via Archirafi, 34 - 90123 – Palermo, n°16, pp.61-102 [http://math.unipa.it/~grim/quad16\\_galante\\_06.pdf](http://math.unipa.it/~grim/quad16_galante_06.pdf).
- Galzigna L. (1986) *Meccanismi biochimici della memoria* - Fed. medica n. 39
- Garland, T. H., & Kahn, C. V. (1995). *Math and music: Harmonious connections*. Palo Alto, California, USA: Dale Seymour.
- Gras R. (1997), Metodologia di analisi di indagine, *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche* (G.R.I.M.), N. 7, Palermo, pp.99-109.
- Gras R. (2000), Les fondements de l'analyse statistique implicative, *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche* (G.R.I.M.), N. 9, Palermo, pp.189-209.
- Hanna, J. (2000). *Learning through dance*. American School Board Journal, 187(6), 47- 48.
- Harkleroad, L. (2006). *The Math Behind the Music*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Harris, M. (2007). *Differences in mathematics scores between students who receive traditional Montessori instruction and students who receive music enriched Montessori instruction*. Journal for Learning through the Arts, 3,(10-10), 1-50.
- Hewitt, D. (2006). *The role of aesthetics in mathematics in mathematics education*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 26(1), 79-88.
- James W. (1950), *Principi di psicologia*, introduzione, versione e note di Giulio Preti, Milano, Messina, Principato.
- Johnson, G., & Edelson, R. J. (2003). *The integration of mathematics and music in the primary school classroom*. Teaching Children Mathematics, 4, 475-479.
- Keen, V. L. (2003). *Using children's literature to support early childhood mathematics education*. In S. A. McGraw (Eds.), *Integrated mathematics: Choices and challenges*. (pp. 189-202).
- Kelly James P. (2005), *La funzione uditiva in Fondamenti delle neuroscienze e del comportamento* di Kandel E. R., Schwartz J.H., Jessell T. M., Ed. Ambrosiana, Milano, pp.485-504.
- Lalitte P., Bigand E. (2006), *Quando la musica sfida il cervello*, in *Mente e Cervello* n.22, anno IV, pp.62-67, Le Scienze S.p.A., Roma.
- Lanza A. (1980), *Il Novecento II, parte seconda*, in *Storia della Musica* a cura della Società Italiana di Musicologia, vol,10, Torino, Edizioni di Torino.
- Ligeti G. (1958), *Structures I*, in *Die Reihe* IV, Vienna, Universal Editino.
- MacDonald, C. (1992). *Effects of an in-service program on eight teachers' attitudes and practices regarding creative dance*. The Elementary School Journal, 93(1), 99-115.
- Marrongelle, K., Black, K., & Meredith, D. (2003). *Studio calculus and physics: Interdisciplinary mathematics with active learning*. In S. A. McGraw (Eds.), *Integrated mathematics: Choices and challenges*. (pp. 103-116).
- Peterson, R. (2005). *Crossing bridges that connect the arts, cognitive development, and the brain*. Journal for Learning through the Arts: A Research Journal on Arts Integration in Schools and Communities, 1(2), 13-45.
- Pitman, W. (1998). *Learning the arts in an age of uncertainty*. Toronto: Arts Education Council of Ontario.
- Pribram K. (giugno 1969), *La neurofisiologia della memoria*, *Le Scienze* n. 10.
- Robustelli F. (gennaio 1974), *Memoria e apprendimento*, *Le Scienze* n. 65
- Rogers, G. L. (2004). *Interdisciplinary lessons in musical acoustics: The science-math-music connection*. Music Educators Journal. 91(1), 25-30.
- Rossi L. (1977), *Teoria Musicale*, Bergamo, Edizioni Carrara.
- Rothenberg, B. (1996). *The measure of music*. Teaching Children Mathematics, 2, 408–410.

- Salveti G. (1977), *Il Novecento I*, in Storia della Musica a cura della Società Italiana di Musicologia, vol. 9, Torino, Edizioni di Torino.
- Schoenfeld, A. H. (1988). *When good teaching leads to bad results: The disasters of well taught mathematics classes*. Educational Psychologist, 23(2), 145-166.
  - Scimemi B. (1997), *Contrappunto musicale*, in Matematica e Cultura a cura di Emmer M., pp.119-134, Atti del Convegno di Venezia, 1997, Milano, Sprinter.
  - Shaffer, D. W. (1997). *Learning mathematics through design: The anatomy of Escher's world*. The Journal of Mathematical Behavior, 16(2), 95-112.
  - Shilling, W. A. (2002). *Mathematics, music, and movement: Exploring concepts and Connections*. Early Childhood Education Journal, 29(3), 179-184.
  - Spagnolo F. (1998), *Insegnare le Matematiche nella scuola secondaria*, Firenze, La Nuova Italia.
  - Spagnolo, F. (2006). La modélisation dans la recherche en didactiques des mathématiques: les obstacles épistémologiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(3), 337-379.
  - Spagnolo, F., Gras, R., Suzuki, E. & Guillet, F. (Eds.). (2008). *Statistical Implicative Analysis: theory and applications*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
  - Squire L, Kandel E., *La Mémoire, de l'esprit aux molécules*, De Boeck Université, Paris 2002
  - Upitis, R., & Smithrim, K. (2003). *Learning through the arts: National assessment final report*. Submitted to the Royal Conservatory of Music, Toronto.
  - Vinay G. (1978), *Il Novecento II, parte prima*, in Storia della Musica, a cura della Società Italiana di Musicologia, vol.10, Torino, Edizioni di Torino.
  - Wolf, D. (1999). *Why the arts matter in education*. In E. Fiske (Ed.), *Champions of change: The impact of the arts on learning* (pp. 91-98). Washington. D.C: The Arts Education Partnership and The President's Committee on the Arts and Humanities.
  - Zatorre Robert J., Peretz Isabelle (2001), *The biological foundations of music*, Annals of the New York Academy of Sciences volume 930.

#### **DISCOGRAFIA**

- Bach, J. S. (1995), *Musikalisches Opfer*, Kuijken B., Kuijken S., Kuijken W., Deutsche Harmonia Mundi.  
Boulez P. *Structures pour deux pianos*, Alfons und Aloys Kantarsky, Wergo, 6011

#### **PARTITURE**

- Bach J. S. (1952), *Musikalisches Opfer*, Londra, ed. Bosey e Hawkes.
- Boulez P. (1972), *Structures, 2 pianon à 4 main*, Wien, Universal Edition.