IL PERCORSO DIDATTICO SECONDO LA DIDATTICA PER CONCETTI

Nucleo di ricerca in didattica della Matematica, Università di Udine *

25 novembre 2002

Sommario

Le proposte della Didattica per Concetti hanno suggerito agli autori riflessioni ed esperienze, una prima parte delle quali è stata riportata in un precedente articolo. In questo lavoro sono presentate quelle riguardanti progettazione, analisi e verifica di un percorso didattico.

Abstract

The approach of Didactics through Concepts suggested some considerations and experiences to the authors. Some of these were collected in a previous article. In this paper we present further remarks and examples concerning project, analysis and evaluation of a teaching path.

Sommaire

Les contenus de la Didactique par Concepts ont suggéré aux auteurs des réflexions et des expériences dont une première partie a déjà été recueillie dans un article précédent. Dans cet ouvrage sont présentées celles qui concernent le projet, l'analyse et le contrôle d'un parcours didactique.

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale delle Scienze 206, 33100 Udine, Italia

1 Premessa

Il Nucleo di ricerca in didattica della matematica del dipartimento di matematica e informatica dell'Università di Udine [1] da alcuni anni studia la Didattica Per Concetti (DPC) secondo la proposta di E. Damiano ([10], [11], [12], [25], [1], [2]) e la sperimenta nell'insegnamento della matematica nelle scuole elementari e nelle scuole medie superiori, prevalentemente nel biennio.

Tra le finalità dell'insegnamento, la DPC, che si ispira al costruttivismo ed allo strutturalismo, include non solo l'acquisizione di procedure corrette ma anche la consapevolezza dei processi di pensiero, la capacità di organizzare e di riorganizzare le proprie conoscenze e l'autonomia nel gestire situazioni nuove ([5], [6], [29]). In un precedente articolo ([25]) abbiamo esaminato le prime due tappe del metodo DPC: la mappa concettuale e la conversazione clinica.

In questo nuovo lavoro invece si espongono brevemente le proposte della DPC per la progettazione, l'analisi e la verifica di un percorso didattico, le riflessioni su tali proposte e sulle relative esperienze condotte dagli insegnanti del Nucleo. Infine vengono analizzate delle unità didattiche, una sulla geometria dello spazio alle elementari, un'altra sulle trasformazioni geometriche per il biennio delle medie superiori e, ancora per il biennio, una "ricetta" per le operazioni.

2 Progettazione, analisi e verifica di un percorso didattico secondo la DPC

Dopo la compilazione della mappa concettuale, la registrazione della conversazione clinica e l'individuazione del compito didattico conseguente, la DPC propone agli insegnanti di preparare e analizzare l'unità didattica tenendo presente che:

- l'attività è efficace se, in linea di massima, due terzi del lavoro complessivo sono svolti dallo studente, in base al principio secondo cui "chi fa impara";

- la qualità dell'attività didattica è determinata dalla scelta critica dell'organizzazione della classe e dei mediatori: essi devono essere i piú

[1]Fanno parte del Nucleo: Maurizio Trombetta (direttore), Evi Azzali (coordinatrice), Marinella Bassi, Sylviane Beltrame, Diana Bitto, Marco Calvani, Giuliana Catanese, Agostino Margari, Silvana Sclippa, Giuseppina Trifiletti, Ida Visintin.

vari possibile in modo che ogni allievo trovi la situazione piú adatta al suo stile di pensiero, al suo mondo culturale e di esperienza ([17], [4]);

- le verifiche devono essere omogenee al percorso didattico, prevedendo non solo l'esecuzione di procedure standard, ma anche indagini sull'organizzazione dei concetti e sulla padronanza del loro uso.

La **proposta** conseguente si articola in vari punti.

- È opportuno che nell'unità didattica siano presenti tre blocchi, che possono anche intersecarsi, caratterizzati dalla scelta dei mediatori:
  - il blocco dell'esperienza, dove si recuperano i copioni presentati dagli allievi nella conversazione clinica e si propongono situazioni nuove, epistemologicamente significative;
  - il blocco della critica, nel quale si confrontano, si discutono e vengono eventualmente messi in crisi i risultati del blocco precedente, creando l'esigenza di una loro generalizzazione e sistemazione;
  - il blocco della sistemazione formale e delle applicazioni.
- All'interno di ogni blocco ci possono essere delle fasi con caratteristiche diverse e con le relative verifiche formative, che permettono di valutare l'efficacia dell'azione didattica e, se necessario, di ritornare sull'argomento con mediatori diversi.
- L'organizzazione dell'attività riguarda tre aspetti: l'ambiente dove si svolge la lezione, il tipo di raggruppamento degli alunni insieme al ruolo dell'insegnante e degli allievi, i mezzi e gli strumenti adottati. A questo proposito viene fornito un dettagliato elenco dei vari casi possibili (repertorio ORM, riportato in Appendice).

3 Riflessioni sulla proposta della DPC

3.1 Le modalità organizzative: il repertorio ORM

La classificazione delle modalità organizzative, riportate nel repertorio ORM, è molto dettagliata. Ad un'occhiata superficiale, potrebbe sembrare eccessiva, soprattutto per le scuole superiori; in genere si pensa che per la matematica esistano solo lezioni, conversazioni ed esercitazioni di rinforzo. Questo è dovuto anche al fatto che, soprattutto alle superiori, le situazioni didattiche non standard (escursioni, manipolazioni, lavori di gruppo, laboratori, recite, ecc.) vengono sottovalutate dagli studenti e, ancor prima, dagli insegnanti. Come acutamente si osserva in [13], tali situazioni vengono viste come attività di svago e di socializzazione, misconoscendo la loro importante funzione cognitiva e formativa.

La classificazione proposta, se riferita ad un preciso percorso didattico, aiuta a prendere coscienza di ogni piccola conquista concettuale associata ai vari momenti didattici.

Nel **punto A** è descritta l'**organizzazione della classe**, classificata prima in base al numero e poi in base al ruolo dei componenti all'interno dei gruppi formati nell'ambito scolastico.

Per quanto riguarda l'importanza di variare i tipi di raggruppamento durante una unità didattica, è esperienza comune che alcune persone si esprimono piú facilmente in piccoli gruppi o in gruppi i cui componenti si sentono alla pari, mentre altre sono stimolate dalla presenza di un pubblico piú numeroso, o dell'insegnante. Nel processo di apprendimento è essenziale il rispetto di queste caratteristiche individuali, come viene sottolineato dal costruttivismo. I percorsi descritti piú avanti testimoniano che, con un po' di attenzione da parte dell'insegnante, anche alle superiori è possibile sfruttare questa varietà di organizzazione all'interno di una normale attività didattica.

Vorremmo però segnalare anche l'importanza didattica della situazione allievi-pubblico, non prevista nel repertorio ORM: la nostra esperienza riguarda gli studenti delle ultime classi delle superiori e dell'università, che si sono volontariamente offerti di fare da guida alle mostre di matematica cui il Nucleo ha collaborato. [1] Alcuni nostri colleghi hanno sperimentato con soddisfazione un'altra occasione di incontro fra allievi e pubblico durante le Giornate Scientifiche; [2] gruppi di studenti delle scuole superiori hanno presentato le attività ritenute piú interessanti, fra quelle svolte in classe. Queste situazioni hanno creato una forte motivazione, entusiasmo e impegno anche in ragazzi meno interessati alla matematica.

Un altro tipo di gruppo non contemplato nel repertorio ORM è la classe con l'intervento di esperti esterni alla scuola. Le nostre esperienze si sono svolte alle elementari, sia nel percorso sui cinque anni (4.1), sia con attività di laboratorio matematico nell'ambito delle Giornate Scientifiche. Questo

[1] "Oltre il compasso", ottobre-novembre 1997; "Numeri e macchine", febbraio 2000.
[2] Organizzate dall'Università di Udine, Anni 2001 e 2002.

tipo di rapporto motiva la partecipazione degli alunni, agendo sul loro amor proprio.

Nel **punto B** si classificano escursioni, esercitazioni, lezioni, conversazioni.

Le **escursioni** potrebbero sembrare non interessanti per la matematica. In realtà le visite alle mostre di argomento matematico si sono rivelate occasione di approfondimento e di conoscenza duratura: dopo alcuni anni le mostre venivano spontaneamente ricordate dagli allievi in situazioni opportune. Uscire dalla scuola per fare geometria nel megaspazio (cioè all'aperto) o addirittura nel macrospazio (cioè osservare il cielo e le relazioni terra-cielo) dà un sapore completamente diverso alla geometria, dall'età della scuola elementare all'età adulta. A questo proposito, citiamo le attività proposte da N. Lanciano ([18], [19], [20]) da noi in parte sperimentate, attività che si prestano come una riserva di vivaci spunti per chi volesse trattare la trascurata geometria dello spazio.

Le **esercitazioni** si possono suddividere in tre tipi: manipolative (da 1 a 4), concettuali (da 5 a 8), creative (da 9 a 12). All'interno di ogni tipo c'è una gradualità di concettualizzazione: classificazioni, esercizi di rinforzo, applicazioni di quanto appreso a situazioni nuove, studio di situazioni problematiche per approfondimenti e generalizzazioni.

I tre tipi possono riguardare tutti i livelli scolastici, anche se con modalità e tempi diversi. Per le elementari tutti i tipi sono basilari e da svolgersi con l'insegnante: dalla nostra esperienza è risultato importante che alla fine della fase manipolativa ci sia sempre una esplicitazione e formalizzazione delle osservazioni e dei risultati raggiunti, altrimenti resta solo una miglior abilità manuale. Alle superiori, la fase manipolativa e di gioco diventa uno spunto ([9]) o un compito per casa (4.2.2), ma non per questo è trascurabile, poiché rientra tra gli irrinunciabili mediatori attivi di cui si dirà piú avanti.

Lezioni e **conversazioni** sono classificate come: occasionale, guidata, finalizzata, centrata, riassuntiva. Nell'analisi delle unità didattiche piú avanti riportate è citata la classificazione dei vari interventi, ove non sia già evidente dal contesto.

Nel **punto C** l'elenco di **mezzi** e **strumenti** presentato è suscettibile d'essere ampliato a piacimento: certamente bisogna aggiungere il televisore, il videoregistratore, il computer e il materiale non strutturato.

I materiali, nell'attività di laboratorio e di gioco svolta nelle nostre classi, sono stati scelti con opportuni criteri.

Alla scuola elementare si è ritenuto importante coinvolgere l'emotività e la creatività degli alunni, facendo raccogliere a loro stessi del materiale (non strutturato), di cui a scuola venivano sottolineate le proprietà generali, fino ad arrivare a costruire con loro degli oggetti acontestuali (4.1). In altri casi l'emotività è stata sollecitata attraverso il senso estetico, presentando solidi platonici realizzati in perspex a vari colori (anche i colori avevano un significato geometrico). [3]

Anche alle superiori si è usato materiale "povero": i cartoncini (4.2.2), la carta ([9]), il tangram ([25]). L'esperienza ha dimostrato che anche a questo livello tale materiale può essere efficace se è fonte di osservazioni non banali o di situazioni impreviste. In particolare, l'uso delle mani e dei materiali contribuisce a fissare l'esperienza nella memoria per lungo tempo: non è un caso, poiché una grande parte della corteccia cerebrale è dedicata al governo della mano, come ben risalta nella rappresentazione dell'*homunculus* di Penfield ([27]). A questo proposito si è voluto fare una verifica a distanza di un anno dalle lezioni sulle coniche, in cui si era usato anche il piegamento della carta ([9]): tutti gli studenti ricordavano l'esperienza, parecchi con precisione di particolari, e quattro di loro hanno rilasciato questa dichiarazione: "l'uso del computer ci permetteva di osservare piú dettagliatamente quanto prodotto con la carta; d'altra parte, però, ci è piaciuto molto lavorare con il supporto cartaceo perché ognuno di noi poteva avere *tra le proprie mani* un esempio immediato di quello che l'insegnante avrebbe di lí a poco spiegato". Ci piace sottolineare questo commento per ricordare che la matrice della geometria sta nei movimenti del nostro corpo nello spazio, mentre il nostro stile di vita oggi tende ad allevare dei giovani a due dimensioni, privi di esperienze e quindi di immagini mentali di tipo spaziale con un impoverimento della fantasia e della creatività. A questo proposito, ancor piú forti sono i messaggi di [17] e [23].

Naturalmente, non si può trascurare il computer: esso ha assunto ormai un ruolo preponderante tra gli strumenti. Esercita molto fascino sugli studenti, che in generale lo maneggiano con disinvoltura, anche se non sempre con consapevolezza.

In laboratorio (4.2.5) è stato usato come alternativa ai classici esercizi ripetitivi di rinforzo sulle trasformazioni geometriche: la versatilità del Cabri ha dato un tocco di novità e di divertimento agli esercizi di costruzione di figure isometriche, di riconoscimento delle isometrie ottenute dalla composizione di simmetrie (individuando gli elementi caratteristici) e di verifica sperimentale dei risultati e delle generalizzazioni ipotizzate. Si è dimostrato un ottimo mediatore analogico che, da un lato ha uguagliato l'esperienza diretta per efficacia emotiva e mnemonica, dall'altro è stato insostituibile per suggerire congetture e fare le relative verifiche, permettendo agli studenti percorsi individuali (4.2.5, [9], [21]).

Le esperienze condotte da una nostra collega all'interno di un progetto

[3]Solidi regalati alla Sezione Mathesis di Udine dal Prof. Carlo Felice Manara.

SET [4] riguardano invece l'uso del computer come mediatore logico-simbolico per presentare il concetto di algoritmo. L'implementazione di un algoritmo in uno specifico linguaggio di programmazione ha fatto sí che progettare algoritmi avesse un "senso concreto" e che i risultati fossero immediatamente osservabili. Alcuni studenti hanno accettato volentieri di affrontare una quantità di lavoro non indifferente potendo verificare da soli che la loro idea funzionava e provare la soddisfazione di aver raggiunto l'obiettivo. La possibilità di rendere realtà concreta e funzionante un'idea è risultata in questo caso la motivazione piú importante per mettere in moto un processo di apprendimento e creare un clima favorevole allo sviluppo della creatività, pur rispettando regole rigorose. Infatti la comunicazione con la macchina e la programmazione hanno costretto insegnante e studenti ad esplicitare tutti i passaggi ed ottimizzare le strategie risolventi per questioni di spazio, di tempo e di relativo costo.

Alcuni ragazzi hanno osservato con interesse il lavoro dei compagni e hanno tentato a loro volta, anche se non sempre con successo, di realizzare programmi che non fossero troppo banali. Il contagio è stato tale che tutta la classe ha voluto poi partecipare alle gare di programmazione organizzate dal Dipartimento di matematica e informatica. Deve essere sottolineata la varietà dei contributi degli studenti, sollecitati dalla prospettiva di presentare i propri lavori al pubblico in occasione delle Giornate Scientifiche 2002: sono state realizzate "macchine" per concretizzare algoritmi, presentazioni con vari software, animazioni, programmi in Pascal e in C.

3.2 I mediatori

Secondo la DPC:

- "l'insegnamento viene definito come mediazione, anzi, piú precisamente come azione che produce mediatori. . . " ([11], pag 225);

- i mediatori sono "interfaccia della relazione fra soggetto conoscente ed oggetto della conoscenza" ([11], pag 243);

- i mediatori ". . . sono cosí chiamati perché: - si dispongono tra la realtà e la rappresentazione. . . - regolano la distanza analogica tra il Soggetto in Apprendimento e l'Oggetto Culturale" ([11], pag 225).

[4] Insegnante Giuseppina Trifiletti, triennio del liceo scientifico; si veda il sito http://www.dimi.uniud.it/ cicloinf/didattica/C4/inizio/default.htm

I mediatori devono quindi avere un potenziale emotivo e cognitivo ([11], pag 225).

Inoltre "...i tipi fondamentali di mediatori sono i seguenti:

I) mediatori **attivi**, che fanno ricorso all'esperienza diretta...;

II) mediatori **iconici** che contano sulla rappresentazione propria del linguaggio grafico e spaziale;

III) mediatori **analogici**...i quali si esprimono attraverso i giochi di simulazione;

IV) mediatori **simbolici**, in fine, che consistono nei codici di rappresentazione piú arbitrari, convenzionali e universali....".

I mediatori vengono analizzati secondo le loro diverse valenze didattiche e sono disposti in ordine decrescente di vicinanza all'esperienza diretta ed in ordine crescente di vicinanza all'oggetto culturale formalizzato. I mediatori attivi sono i piú "caldi", i piú legati alla percezione e all'esperienza diretta: essi costituiscono la base per la creazione delle immagini mentali e per la formazione concettuale, come si può verificare dai percorsi presentati.

Anche per i mediatori la DPC raccomanda l'uso piú vario possibile. Ad ogni persona adulta è certamente capitato di incontrare un insegnante che sia riuscito a farle imparare qualcosa che altri, pur esponendo l'argomento in modo corretto dal punto di vista formale, non erano riusciti a fare. Probabilmente quell'insegnante nella scelta dei mediatori ha rispettato lo stile di pensiero e l'area di prossimità culturale dell'allievo, pur senza banalizzare o distorcere il concetto ([4], [14]).

Questa presentazione dei mediatori ha ispirato agli insegnanti del Nucleo alcune riflessioni generali e altre, legate alle particolari situazioni sperimentate, su laboratorio, giochi, libro di testo, lezioni.

È parso importante analizzare con gli studenti stessi i diversi ruoli dei mediatori, il loro contributo al processo di assimilazione e l'importanza dei vari approcci (percettivo, emotivo e logico) per la memoria a lungo termine. Cosí l'allievo impara ad usare di volta in volta la modalità piú opportuna e a non limitarsi alla prima che gli viene presentata.

La varietà dei mediatori rende inoltre giustizia all'attività matematica, facendo apprezzare i vari aspetti del pensiero in essa coinvolti e cosí diversi tra loro: intuizione, immaginazione, flessibilità, progettazione, induzione, deduzione, controllo, rigore formale.

Con il termine **laboratorio** ci riferiamo ad un'atmosfera didattica, piuttosto che ad un particolare luogo o all'uso di strumenti; indichiamo cioè l'attività durante la quale, a partire da una situazione aperta, gli studenti cercano di trovare regolarità, generalizzazioni, proprietà, procedendo con congetture, verifiche sperimentali, individuazione degli errori, nuove congetture, ecc. ([28]). È quindi il caso di un mediatore attivo o analogico.

Nel percorso alla scuola elementare (4.1) quasi tutte le attività di geometria nello spazio hanno la caratteristica di laboratorio. Si sono svolte attività di laboratorio di geometria, analoghe a quelle proposte nel percorso, anche nelle classi dove gli insegnanti del Nucleo sono intervenuti come esperti esterni, a seguito delle Giornate Scientifiche.

In entrambi i casi tutti gli alunni si mostrano invogliati a partecipare, perché si sentono in grado di portare un contributo allo studio proposto e vedono che un'osservazione semplice ne suggerisce un'altra piú completa: sono molto soddisfatti di veder crescere la loro conoscenza come una costruzione ad incastro e poi di vederla esplicitata e riassunta nella verbalizzazione finale. In particolare, in una quinta elementare [5] gli alunni stessi hanno formulato una, se pur semplice, deduzione. Giunti allo studio dell'icosaedro, dopo aver contato facce, spigoli e vertici degli altri solidi platonici, hanno osservato che le facce sono 20, triangolari e ogni spigolo appartiene a due facce: quindi gli spigoli sono $(20 \times 3) : 2 = 30$. Si è presentata cosí l'occasione per riflettere sulla possibilità di ottenere dei risultati sulle figure operando con la logica, anziché con l'esperienza. Una situazione analoga potrebbe essere utile per introdurre il metodo ipotetico-deduttivo alle superiori.

Nelle scuole superiori i tempi dedicati al laboratorio si sono necessariamente ridotti e sono stati usati nella fase dedicata alle esperienze dirette all'inizio dell'argomento (4.2.2) e nella fase finale di verifica (4.2.5). In entrambi i casi, è stata importante la presenza di questi momenti creativi per liberarsi dalla pesantezza del "tutto sistemato" e mostrare un aspetto della matematica poco frequentato nelle nostre scuole. "In quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici 'puri'): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi, che via via si perfezionano" ([31], pag 135).

Al termine dei laboratori non c'è stata valutazione con voto per l'allievo: questo ha permesso agli studenti di non aver paura dell'errore ed ha sviluppato lo spirito di autocritica attraverso la ricerca delle verifiche per le proprie congetture. Ad esempio, durante la costruzione del solido con il DAS c'era un continuo confronto tra l'immagine mentale e la forma che si veniva costruendo sotto le dita (4.1.2); lo stesso atteggiamento critico si poteva riscontrare nella composizione di simmetrie con il Cabri (4.2.5).

Alcune attività di laboratorio si sono prestate anche alla verifica formativa, come la costruzione della città (4.1.1), lo studio della geometria

[5] Gemona del Friuli, insegnante Angela Ricciulli.

dell'occhio (4.1.3) e la composizione di simmetrie (4.2.5). I ragazzi, individualmente o a piccoli gruppi, sono stati invitati ad indagare situazioni nuove con gli strumenti concettuali acquisiti precedentemente: gli insegnanti hanno cosí potuto rendersi conto di quanto gli studenti fossero autonomi e consapevoli nell'usare i concetti appresi. Queste stesse situazioni possono poi essere riprese, come fase dell'esperienza, nello studio degli argomenti successivi raccogliendo le osservazioni e le conclusioni parziali degli studenti, per inserirli in una sistemazione formale. Ad esempio, la costruzione della città è stata il punto di partenza per la discussione sulle convenzioni nella rappresentazione bidimensionale dello spazio; la geometria dell'occhio può diventare punto di partenza per lo studio delle trasformazioni geometriche e la composizione di simmetrie può essere l'inizio di uno studio piú organico del gruppo delle isometrie.

I **giochi** sono attività di studio e pensiero, classificate come mediatori attivi o analogici, che presentano un immediato risvolto gratificante. Una stessa attività può essere considerata gioco o esercizio a seconda di come viene vissuta dagli allievi.

Le attività di questo tipo che abbiamo svolto hanno avuto caratteristiche di modi e di tempi molto diverse, in relazione al livello scolastico.

Sono state molto libere e a carattere percettivo tutte quelle del primo ciclo elementare, strutturate quelle del secondo (la città, i percorsi ad occhi chiusi): tutte da considerarsi mediatori attivi.

Alle superiori sono state presentate situazioni intellettualmente stuzzicanti, da considerarsi mediatori analogici. Per giustificare l'introduzione di una sistemazione ipotetico-deduttiva della geometria si è ricorsi a illusioni ottiche e problemi curiosi. [6] Per introdurre all'algebra ed alle espressioni si sono proposte progettazioni di alcune insegne a forma di pupazzo [7] e la redazione di un ricettario in forma iconico-simbolica (4.3).

L'attività di laboratorio e di gioco può creare un'atmosfera di creatività, ma anche di incertezza, dispersione e precarietà da bilanciare con una fase di sistemazione formale, tramite il libro di testo, le mappe concettuali, la lezione frontale.

Il **libro di testo** in matematica è spesso un problema piú che un aiuto. Se è discorsivo, risulta anche dispersivo; se è sintetico, è pesante da leggere per gli studenti. In 4.2.4 è stata usata una strategia che supera queste difficoltà. Dopo una fase manipolativa sulle trasformazioni geometriche, l'insegnante ha presentato uno schema sulle isometrie da completare a casa

[6] Insegnante Giuliana Catanese, quarta ginnasio: illusioni ottiche e paradossi tratti da [16] e [26].

[7] Insegnante Diana Bitto, prima liceo scientifico.

con le nozioni esposte nel testo. Questa proposta costringe lo studente a leggere il libro, lo aiuta con lo schema ad estrarre dal testo i dati importanti che poi deve ricordare; alla fine, l'allievo memorizza in forma logico-iconica la struttura del discorso, sperimentando un metodo di studio che potrà applicare nel seguito anche da solo. La proposta dell'insegnante quindi ha sostenuto l'allievo, senza sostituirsi a lui, nelle diverse tappe verso la formalizzazione del concetto di isometria, come previsto dalla DPC.

Un'altra occasione per valorizzare il libro di testo è stata la riorganizzazione di un suo breve argomento sotto forma di ipertesto: [8] operazione fatta eseguire agli studenti con il sostegno dell'insegnante e con l'uso del programma Power Point. Ciò ha costretto ad analizzare con cura il testo, distinguendo la struttura essenziale dai collegamenti e scegliendo le immagini da evocare ed animare; importante anche l'educazione alla scelta critica tra le varie possibilità offerte dal programma in relazione al contenuto da comunicare.

La **mappa concettuale** è stata diffusamente trattata in [25]. Essa permette di rappresentare la struttura reticolare della conoscenza ([24]) e si rivela un efficace mediatore logico-iconico. La sua efficacia forse consiste nell'agire su due fronti diversi (logica e immagine), ciascuno di pertinenza di un diverso emisfero cerebrale.

La **lezione frontale** è un mediatore verbale-simbolico essenziale in tutta l'attività scolastica, di cui tutti hanno varie esperienze da poter confrontare.

La comprensione di un concetto talvolta è agevolata da una lezione ad esso finalizzata, di contenuto storico. La **storia della matematica** è generalmente poco conosciuta ed insegnata, nonostante sia ritenuta un ottimo mediatore, come ampiamente argomentato in vari testi ed articoli e si presti ad interessanti collegamenti con le altre materie. Ad esempio, in una prima liceo classico è stata sfruttata per introdurre il metodo sperimentale:[9] sono stati scelti l'esperimento di Aristarco per determinare il rapporto tra le distanze della terra dal sole e dalla luna e quello di Eratostene per calcolare la lunghezza della circonferenza terrestre ([22]). Le grandezze fisiche coinvolte in queste esperienze sono angoli e lunghezze, le proprietà che si applicano sono semplici proprietà geometriche che lo studente ha già approfondito; egli può azzardare qualche intervento per risolvere i vari problemi che l'insegnante man mano propone. Lo studente cosí è parte attiva di ciò che sta studiando, avendo una versione delle fasi del metodo sperimentale semplificata rispetto a quella descritta nel libro di testo ([3]).

[8] Insegnanti Sylviane Beltrame e Agostino Margari, biennio del liceo scientifico.

[9] Insegnante Marco Calvani.

3.3 La verifica e la valutazione

Per la verifica e la valutazione di una unità didattica la DPC propone di abbandonare i criteri della norma, che sceglie un gruppo di allievi come riferimento, e dello standard con prestazioni a punteggio prestabilito, perché legati alla selezione ed alla competizione, spesso in contrasto con l'attività educativa. Suggerisce invece il criterio della padronanza della materia ([11], pag 373–374).

La valutazione, se correttamente intesa secondo la DPC, è presente in ogni passaggio della progettazione e dell'attuazione di una unità didattica e accomuna insegnante ed allievo in un processo di riflessione e di metaconoscenza ([11], pag 377). Per esempio, la stesura di una rappresentazione logico-iconica (schema o mappa), riassuntiva dei risultati insegnati o appresi, costituisce un momento di valutazione e consente di mettere in evidenza il grado raggiunto nel processo di concettualizzazione ([25]).

A questo proposito, la DPC avverte la difficoltà di avere tassonomie generalizzabili per ogni concetto e per ogni disciplina. Comunque propone di confrontarsi con la seguente tassonomia della padronanza concettuale (tabella di [11], pag 383, qui riportata con qualche lieve modifica), che viene interpretata come capacità di definire un concetto:

	problema	**operazione**	**processo**
I	che cos'è? a quali eventi / oggetti corrisponde?	**riconoscimento**	denominare, assegnare una etichetta, enumerare, esemplificare ...
II	insieme a che cosa lo metto? da quale altro insieme lo escludo?	**categorizzazione**	includere, escludere
III	che cos'hanno in comune? che cosa hanno di diverso?	**definizione**	identificare gli attributi specifici, discriminare gli attributi mancanti
IV	quali rapporti si danno fra loro? come li possiamo ordinare in relazione fra loro	**gerarchizzazione**	ordinare i livelli, coordinare i livelli fra gli attributi e fra i concetti

Essa è risultata utile per la descrizione della graduale conquista intellettuale degli allievi delle elementari nell'esperienza sulla geometria; non è risultata però completamente trasferibile alle esperienze condotte alle superiori. Nel primo caso gli allievi hanno a che fare con le forme che sono strettamente legate alla percezione e vengono successivamente formalizzate: esse si possono definire concetti di base (basic) per analogia con la classificazione di E. Rosch ([11], pag 199) riguardante gli oggetti. Questa tassonomia si rivela ugualmente utile per il concetto di “trasformazione” secondo il linguaggio naturale (anche se le trasformazioni non sono direttamente percepibili, ma lo sono solo i loro effetti); però essa non si adatta piú a concetti quali “isometria”, “rotazione”, “glissosimmetria”, ecc., che sono concetti subordinati, relativi ad una scissione convenzionale in sottocategorie, prodotto di una elaborazione culturale: il riconoscimento in questo caso non è piú il primo grado di concettualizzazione, perché richiede un’elaborazione teorica della definizione.

Certamente è necessario reperire o costruire altre tassonomie, se si considera l’argomento “simboli e sintassi” (4.3), cosí caratteristico e pervasivo in matematica: lo si tratta già alle elementari con la rappresentazione dei numeri (anche multibase), le operazioni e le loro proprietà, i numeri decimali e invade poi tutto lo studio successivo.

Inoltre, a questa tassonomia vorremmo aggiungere un grado iniziale corrispondente allo stadio preverbale del concetto, previsto anche nello schema sullo sviluppo del sistema concettuale di K. Nelson, citato in [29], pag 309, e in [11], pag 198.

Nelle nostre unità didattiche alcuni momenti di verifica e di valutazione, ispirati ai criteri illustrati in precedenza, si discostano dalla comune pratica didattica in matematica.

Nell’U.D. sulla geometria solida alle elementari (4.1):

- la costruzione con DAS di un solido, a partire dalla sua immagine mentale, ha permesso agli insegnanti di verificare, a prescindere dalla competenza verbale, che gli alunni avessero presente di fatto gli elementi costitutivi delle forme e le reciproche relazioni di parallelismo e perpendicolarità (grado preverbale di concettualizzazione);

- nella costruzione della città c’è stato un controllo sulla padronanza della nomenclatura scientifica, attraverso una relazione di gruppo (grado I di concettualizzazione);

- la compilazione degli schemi sulle forme e sulle curve ha esplicitato agli alunni l’organizzazione reciproca dei concetti studiati (grado II di concettualizzazione);

- le attività di laboratorio sulla prospettiva hanno permesso ad insegnanti ed alunni una verifica sull’autonomia e sulla precisione acquisite nell'uso dei concetti di geometria euclidea (grado III di concettualizzazione).

Nelle U.D. al biennio delle superiori:

- lo schema riassuntivo dei risultati ottenuti dagli studenti a proposito di trasformazioni con luci ed ombre (4.2.3) ha permesso una verifica a livello del II e III grado di concettualizzazione;
- lo schema proposto per la lettura del testo (4.2.4) riguarda il IV grado di concettualizzazione;
- nelle esercitazioni di laboratorio con Cabri sulla composizione di simmetrie (4.2.5) si è verificata la padronanza della definizione di isometria a livello del III grado di concettualizzazione;
- discutendo la decodificazione degli schemi di ricette preparati dai compagni (4.3.4), gli studenti stessi hanno corretto carenze ed errori nella rappresentazione formale: un esempio di autoverifica ad un livello di concettualizzazione non classificabile secondo la tassonomia proposta.

Anche nella classica verifica costituita dal compito in classe (ovviamente per le superiori), la DPC ha dato occasione di escogitare nuove proposte: si vedano ad esempio l'esercizio sulle isometrie (4.2) e quello sulle ricette (4.3), oppure i compiti sulle equazioni lineari e sui vettori ([25]) in cui si usano le mappe concettuali.

4 Le esperienze

In questa sezione la scansione delle attività didattiche è riportata in caratteri inclinati, mentre in caratteri normali sono presentate ulteriori analisi e considerazioni.

4.1 Geometria dello spazio nella scuola elementare

(di **Ida Visintin**; insegnante esterna **Evi Azzali** - dalla classe prima alla quinta)

Questo percorso didattico è stato descritto in modo particolareggiato in [7] e in [8]; qui se ne riporta solo una relazione succinta, articolata in tre unità didattiche, per rendere comprensibile l'analisi del percorso stesso, secondo i criteri e le proposte della DPC.

U.D. 1. *Riconoscimento e denominazione di forme solide, piane e lineari* *(10 ore, classi prima, seconda e terza)*

1*a* *Raccolta di materiale non strutturato ed esplorazione spontanea e guidata con tutti i sensi per uno sviluppo consapevole della percezione.*
I bambini muovono, toccano, annusano, assaggiano (se possibile!) gli oggetti; sfregandoli e urtandoli fra loro ne ascoltano il suono; guidati da opportune domande, esprimono con le parole le sensazioni percepite con il corpo.

1*b* *Classificazione di scatole, di impronte, di linee al fine di un'iniziale sistemazione razionale dell'esperienza.*
Gli alunni raggruppano in scatoloni, su banchi diversi, i materiali, considerando somiglianze e differenze nelle forme; si classificano secondo il criterio "avere la stessa forma". Dopo aver costruito gli oggetti-simbolo in gesso bianco (cubo, cilindro, ecc.), si dà loro il nome.

1*c* *Esercizi di riconoscimento delle forme ad occhi bendati per favorire la capacità di visualizzazione e relativa formazione di immagini mentali.*
Gli allievi cercano di riconoscere un oggetto nascosto in una scatola, esplorandone la forma con una mano; ad occhi bendati esplorano con il tatto la forma di una linea, materializzata con un cordoncino incollato su un cartone, che poi disegnano in assenza dell'oggetto; rappresentano un percorso lungo il quale sono stati condotti ad occhi chiusi.

1*d* *Comunicazione delle conoscenze acquisite tramite verbalizzazione orale e schemi per un avvio alla sistemazione formale.*
Con la guida dell'insegnante, gli alunni raccolgono, riassumono e completano le osservazioni e le nozioni riguardanti le forme; analizzano i componenti dei solidi (facce, spigoli e vertici), ne ricavano le impronte e riassumono i nomi di figure solide, piane e lineari in uno schema.

1*e* *Verifica di concetti acquisiti, cioè denominazione dei solidi e delle superfici.*
Gli alunni, divisi in gruppi, rivestono e dipingono scatoloni di varie forme, in modo da rappresentare edifici; con essi compongono una città,

che diventa luogo emotivamente coinvolgente per varie attività nell'ambito della geometria dello spazio. La "città" viene rappresentata graficamente e descritta con linguaggio sia spontaneo che specifico.

Le prime quattro fasi si sono svolte nella classi prima e seconda e l'ultima all'inizio della terza.

L'attività manipolativa (mediatore attivo, blocco dell'esperienza) è stata preponderante; si è svolta con materiale non strutturato, individualmente o a piccoli gruppi, in modo libero. L'insegnante invece ha guidato la classe nelle discussioni finalizzate e nelle esposizioni riassuntive (mediatori logico-iconici, blocco della formalizzazione).

Il blocco della critica e del confronto, anche se non esplicitato verbalmente, è stato presente nel momento della classificazione, in cui si è presentata la possibilità di usare criteri diversi.

Rispetto alla tassonomia della padronanza concettuale, si è trattato di operazioni di primo e secondo livello, cioè di riconoscimento e di categorizzazione.

U.D. 2 *Relazione di parallelismo e perpendicolarità tra gli elementi delle figure* *(8 ore, classi terza e quarta)*

2*a* *Costruzione della forma di un solido, in assenza di modello.*
Gli allievi modellano secondo la loro immagine mentale uno dei solidi studiati e confrontano il risultato con limmagine stessa; esprimono insoddisfazione per il risultato dimostrando di avere a livello preverbale i concetti di parallelismo e perpendicolarità.

2*b* *Conversazione clinica tendente ad individuare i concetti spontanei in merito a piano, retta, parallelismo e perpendicolarità.*
Piano e retta sono pensati limitati, come è naturale; il piano è quasi sempre visto come orizzontale o verticale; il parallelismo comporta vicinanza o contemporaneità, come nel linguaggio naturale; le parole "perpendicolarità" ed "ortogonalità" sono completamente sconosciute.

2*c* *In palestra (mesospazio) presentazione dei concetti di retta e piano e delle relazioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani.*
L'insegnante suggerisce l'immagine di retta e piano come figure illimitate; stecche e cartoni aiutano gli alunni a visualizzare le varie posizioni reciproche possibili di rette e piani.

2*d* *Relazioni di parallelismo e di perpendicolarità tra facce e tra spigoli di un poliedro. Verifica con il gioco dei bollini colorati.*
Il gioco dei bollini colorati richiede di riportare su un foglio la congettura sulle relazioni fra gli elementi di un solido in assenza del solido stesso; poi di descrivere i risultati dell'autoverifica sperimentale con l'oggetto tra le mani.

Questa unità si è tenuta in classe terza (2*a*, 2*b*, 2*c*) e quarta (2*d*).

Si è usato materiale non strutturato (DAS, stecche, cartoni, scatole, bollini), predisposto dall'insegnante per la scoperta delle relazioni tra le forme, con attività individuali (2*a*, 2*d*) e discussione nel gruppo classe (2*b*, 2*c*) e relazione finale (2*d*), anche alla presenza di una insegnante esterna. Anche in questa unità l'intervento delle insegnanti si è limitato alla presentazione del materiale e della consegna, e alla guida della sistemazione formale delle esperienze; i mediatori attivi sono stati prevalenti rispetto a quelli iconico-logici, ma operavano sul terzo livello di padronanza concettuale (definizione): individuazione di attributi e di relazioni.

Il blocco della critica è stato presente in tutta l'unità didattica: nella fase 2*a* il commento sugli elaborati ha creato la necessità di descrivere e denominare le relazioni tra gli elementi delle figure. L'attività in palestra (2*c*) ha esaminato casi critici suggeriti dalla conversazione clinica (2*b*). In 2*d* l'autocorrezione della propria congettura attraverso la verifica concettuale è stata una valida esperienza formativa.

U.D. 3 ***La geometria dell'occhio*** *(8 ore, classe quinta)*

3*a* *Confronto tra le rappresentazioni grafiche della "città" eseguite in classe terza.*
Alcuni disegni rappresentano con precisione particolari di tipo affettivo (finestre con cuoricini, fiorellini . . .), altri la pianta della città, altri ancora un tentativo di visione prospettica. Le insegnanti propongono alcune riflessioni sulle convenzioni per la rappresentazione grafica dello spazio. Nel seguito si studierà la rappresentazione grafica secondo la visione.

3*b* *La prospettiva come esperienza quotidiana non euclidea. Riflessione sulla trasformazione della forma nella visione e sulle elaborazioni del cervello.*
Le insegnanti fanno osservare le stranezze della visione bioculare; sottolineano le limitazioni e le deformazioni della visione su dimensioni, direzioni e forme rilevate dagli alunni; insegnano ad eseguire la copia

dal vero di semplici oggetti (si rilevano proporzioni e relazioni con un bastoncino/matita, tenendolo col braccio teso e guardando con un occhio solo).

3*c* *Le proprietà geometriche della prospettiva.*
Gli alunni si appropriano in modo piú personale e sistematico delle precedenti riflessioni, attraverso alcune esercitazioni individuali.

Le consegne sono:

- i *"Disegna come immagini di vedere una scatola cubica sospesa sopra la lavagna". (È stata volutamente scelta una posizione nella quale è visibile la faccia inferiore e non quella superiore.)*
- ii *'Copia dal vero la scatola cubica sospesa sopra la lavagna".*
- iii *"Confronta i tuoi disegni e commenta".*

Si ripete l'esercitazione con analoghe consegne, sostituendo "scatola" con "porta (dell'aula) chiusa" e con "porta (dell'aula) semiaperta".
Si confrontano i lavori individuali e si fa una discussione di classe finalizzata a sintetizzare le osservazioni.
Ogni allievo copia dal vero un 'metro-cubo' con i soli spigoli e commenta.
Ogni allievo redige una relazione commentata su tutta l'unità didattica.

Questa unità si è tenuta in classe quinta con la presenza di una insegnante esterna.

3*a* e 3*b* sono state esposizioni finalizzate dell'insegnante al gruppo classe, con interventi degli alunni, mentre 3*c* è stato un lavoro individuale, sia nella rappresentazione che nel commento, ed ha costituito una verifica dell'insegnamento e dell'apprendimento, attraverso l'applicazione alla nuova situazione, data dalla prospettiva, di concetti, relazioni e schemi operativi appresi nella geometria euclidea. L'autonomia e la padronanza raggiunte dagli allievi nell'uso dei concetti geometrici è testimoniata dai protocolli, alcuni dei quali sono riportati in [8].

In tutta l'unità didattica, esperienza, critica e sistemazione logico-formale sono risultati strettamente connessi.

Il livello di concettualizzazione è ancora il terzo (definizione), ma usato dagli alunni in modo autonomo.

4.2 Le isometrie del piano

(di **Sylviane Beltrame** - prima liceo scientifico)

Questa unità didattica è stata sperimentata anche da Silvana Sclippa in una classe parallela, permettendo cosí di apportare alcuni miglioramenti.

È stata preceduta da una **mappa concettuale** ([25], pag 21), da una **conversazione clinica** della quale si riporta un breve riassunto (punto 1) ed è proseguita secondo questo schema.

Struttura dell'unità didattica

Blocco	**Fase**	**Prot.**	**Med.**
2 - Esperienza (Varianti e invarianti nelle trasformazioni)	2.1 Consegna del lavoro per casa	I	Ls
	2.2 A casa, esperimento e disegno	S	At, Ls
	2.3 Confronto dei risultati	G	Ls
3 - Raccolta e analisi dei risultati	3.1 Sistemazione delle proprietà invarianti e varianti	I+C	An, Ls
	3.2 Osservazioni e deduzioni	I+C	Ls
4 - Sistemazione formale (Isometrie del piano)	4.1 Consegna del lavoro per casa	I	Ls
	4.2 Studio della teoria e sintesi	S	Ic, Ls
	4.3 Correzione della scheda	I+C	Ls
5 - laboratorio con Cabri (Composizioni di isometrie)	5.1 Composizione di simmetrie ass.	G	An
	5.2 Congruenze e isometrie	G	An
	5.3 Composizione di isometrie	G	An
	5.4 Divertimenti con le simmetrie	G	An
6 - Verifica sulle isometrie	6.1 Compito sulle isometrie	S	Ic, Ls
	6.2 Correzione del compito	I+C	Ls

Legenda
Protagonisti: I = Insegnante; C = tutta la classe; G = piccolo gruppo di studenti; S = singolo studente.
Mediatori: At = attivo; Ic = iconico; An = analogico; Ls = logico-simbolico.

protagonisti / **mediatori**	singolo studente	piccolo gruppo di studenti	insegnante e classe	insegnante
attivo	2.2			
iconico	4.2; 6.1		3.1	
analogico		5.1; 5.2; 5.3; 5.4		
logico-simbolico	2.2; 4.2; 6.1	2.3	3.1; 3.2;4.3; 6.2	2.1; 4.1

Questa tabella rende esplicito come la struttura dell'unità didattica progettata abbia rispettato i criteri di varietà nella scelta del raggruppamento studenti, dei mediatori e soprattutto di spazio lasciato agli studenti.

Il percorso si svolge alla fine dell'anno scolastico, quando sono già stati trattati i concetti di:

- "movimento rigido", assunto come concetto primitivo;

- figure congruenti (quelle che si sovrappongono con un movimento rigido), con i criteri di congruenza dei triangoli, presentati come teoremi;

- rette parallele e perpendicolari;

- funzione e funzione biiettiva.

1. La conversazione clinica (*20 minuti, tutta la classe*)

Durante la conversazione clinica, l'insegnante chiede:

Cosa significa per voi il termine "trasformazione geometrica"?

Cosa si trasforma?

Avete degli esempi concreti nella vita quotidiana o nei vostri studi precedenti?

Perché si usa il termine "trasformare" invece che, ad esempio, "sostituire"?

Gli studenti citano come esempi:

le figure riflesse in un specchio deformante

le ombre di persone e oggetti

una fotografia

la sagoma di una finestra illuminata dal sole, proiettata sul pavimento

i triangoli simili studiati alla scuola media.

Inoltre, durante il dibattito a proposito dell'ultima domanda, gli studenti considerano che

una trasformazione altera alcune proprietà della figura di partenza, ma...

...ne mantiene alcune proprietà che permettono di riconoscerla

si può elencare cosa rimane invariato nella trasformazione della figura e cosa cambia.

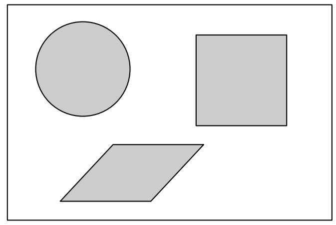
2. L'esperienza

2.1 Consegna del lavoro per casa (*15 minuti, tutta la classe*)

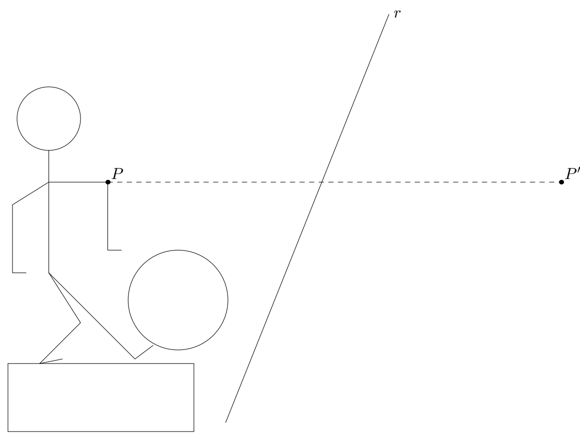
[1] *Ritagliare alcune figure geometriche su una mascherina di cartone* (23×28):

1a) *Appoggiando la maschera di cartone sul vetro di una finestra in una giornata di sole, osservare e ricopiare la proiezione delle figure su un foglio bianco appoggiato su un piano perpendicolare al vetro.*

1b) *Stessa operazione con le proiezioni ottenute sostituendo al sole una torcia elettrica.*



[2] *Riprodurre su foglio a quadretti un omino che gioca a calcio:*



2a) *Costruire la figura dell'omino trasformata, punto per punto, con la simmetria obliqua di asse r, rappresentata nel disegno;*

2b) *Costruire la figura dell'omino trasformata con una simmetria ortogonale di asse r (con r perpendicolare alle righe del foglio).*

2.2 *Esperimento e disegno* *(40 minuti, individuale a casa)*

2.3 *Confronto dei risultati dell'esperienza* *(50 minuti, gruppi di tre studenti, in classe)*

A gruppi di tre, in classe, gli studenti confrontano gli esperimenti fatti a casa e osservano le figure trasformate secondo la consegna.

Per ogni trasformazione concordano, dopo una discussione all'interno del gruppo, un elenco delle proprietà distinguendole in invarianti e varianti.

Alla lettura degli elaborati, si constata che globalmente la classe è riuscita a individuare tutti gli invarianti per ogni trasformazione proposta e quindi è stata raggiunta la comprensione del concetto di invariante. Alcuni elaborati contengono risultati osservati in posizioni particolari degli oggetti, ad esempio piano di proiezione e mascherina paralleli oppure lampadina che proietta il lato di una figura all'infinito, fornendo materiale per future discussioni sulle similitudini, sulle proiettività e sui punti all'infinito.

3. *La raccolta e l'analisi dei risultati*

3.1 *Sistemazione delle proprietà invarianti e varianti* *(30 minuti, tutta la classe)*

Gli elaborati vengono consegnati con una valutazione dal 6 all'8, a seconda del numero e della accuratezza delle osservazioni.

Proiezione con luce puntiforme (da un piano P in un piano P')	
Invarianti	*Varianti*
retta $\rightarrow$ retta (allineamento dei punti)	posizione
	lunghezza segmenti
	ampiezza angoli
	parallelismo
	forma cerchio ($\rightarrow$ ellisse)
	area

Proiezione con raggi solari (da un piano P in un piano P')	
Invarianti	*Varianti*
retta $\rightarrow$ retta (allineamento dei punti)	posizione
parallelismo	lunghezza segmenti
rapporto tra segmenti paralleli	ampiezza angoli
	forma cerchio ($\rightarrow$ ellisse)
	area

Simmetria obliqua di direzione d (da un piano P in sé)	
Invarianti	*Varianti*
retta $\rightarrow$ retta (allineamento dei punti)	posizione
parallelismo	lunghezza segmenti
rapporto tra segmenti paralleli	ampiezza angoli
lunghezza segmenti di direzione d	forma cerchio ($\rightarrow$ ellisse)
direzione d	ordine circolare dei punti (orario o antiorario)
area	

Simmetria ortogonale (da un piano P in sé)	
Invarianti	*Varianti*
retta $\rightarrow$ retta (allineamento dei punti)	posizione
parallelismo	ordine circolare dei punti (orario o antiorario)
lunghezza segmenti	
ampiezza angoli	
forma cerchio	
area	

L'insegnante ricostruisce alla lavagna, con la collaborazione di tutti, un quadro riassuntivo dei risultati dei lavori di gruppo.

3.2 *Osservazioni e deduzioni* *(20 minuti, tutta la classe)*

A questo punto sorgono spontanee alcune osservazioni.

a) Una trasformazione muta
- una figura in una figura (esperienza con la maschera di cartone)
- un punto in un punto (trasformazione punto per punto dell'omino)
quindi una trasformazione è una funzione del piano.

b) Una trasformazione può essere una funzione da un piano in un altro (proiezioni dal piano della maschera al piano del foglio), oppure da un piano in sé (simmetrie del piano del foglio in sé).

Questa semplice constatazione elimina la difficoltà generalmente incontrata dagli studenti quando si parla di trasformazione del piano in sé.

c) Il raggruppamento costante "lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, forma del cerchio" fra le proprietà varianti o fra quelle invarianti fa intuire che la conservazione dell'ampiezza degli angoli e della forma del cerchio è strettamente collegata alla conservazione della distanza. Si dimostra alla lavagna questa intuizione.

4. *La sistemazione formale*

4.1 *Consegna del lavoro per casa* *(20 minuti, tutta la classe)*

Isometrie del piano

isometria	simmetria assiale	simmetria centrale	trasla-zione	rotazione	glisso-simmetria
notazione					
definita da					
punti uniti					
ordinamento dei punti (varia o no?)					
involuzione ($f \circ f = id$)					
funzione inversa					
proprietà particolari					

L'insegnante precisa che ora saranno oggetto di studio le isometrie, trasformazioni del piano che conservano la distanza, e distribuisce a ogni studente la scheda "Isometrie del piano"; illustra la scheda con il caso della simmetria assiale, appoggiandosi al libro di testo ([30]) dove ogni isometria viene definita a partire dai suoi elementi caratterizzanti (asse di simmetria, centro di simmetria, vettore, centro e angolo di rotazione); chiede che un analogo lavoro di sintesi sia fatto per ogni isometria.

4.2 *Studio teoria e sintesi* *(1 ora individuale, a casa)*

4.3 *Verifica dell'apprendimento mediante la correzione della scheda* *(1 ora, tutta la classe)*

Durante la lezione seguente si corregge il compito eseguito a casa. Le maggiori difficoltà si hanno nell'individuazione della trasformazione inversa di ogni isometria. Durante la correzione si pone l'accento sul fatto che un'involuzione ha per inversa se stessa. Nella nuova edizione il libro di testo non tratta la glissosimmetria e questo piccolo imprevisto per gli studenti è (oltre che una verifica del puntuale svolgimento del lavoro assegnato a casa) oggetto di curiosità. L'insegnante aiuta ad intuire la definizione di questa nuova isometria, in base all'etimologia della parola, poi il completamento della scheda avviene in classe.

5. *Laboratorio con Cabri*

L'insegnante propone di esplorare alcune situazioni geometriche con il programma Cabri *per consolidare la padronanza dei concetti studiati (le isometrie, le loro definizioni e proprietà), per "scoprire" alcuni risultati sulla composizione di isometrie, consentendo un approfondimento a misura di ogni studente (durante il laboratorio, alcuni studenti riescono ad intuire e verificare... altri a dimostrare).*

5.1 *Composizione di simmetrie assiali* *(1 ora o piú, gruppi di 2 studenti; 1 ora, tutta la classe)*

L'insegnante dimostra che nel piano una isometria si può individuare assegnando un triangolo ABC e il suo corrispondente $A'B'C'$.

Agli studenti viene presentata la scheda sulle composizioni di due o di tre simmetrie assiali.

Composizione di simmetrie

n. di simmetrie	posizione degli assi	isometria ottenuta	classificazione
1	1 asse	simmetria assiale	invertente
2	2 assi paralleli	traslazione	diretta
2	2 assi perpendicolari	simmetria centrale	diretta
2	2 assi incidenti	rotazione	diretta
3	3 assi paralleli	simmetria assiale	invertente
3	3 assi incidenti in un unico punto	simmetria assiale	invertente
3	2 assi paralleli e il terzo incidente	glissosimmetria	invertente
3	3 assi incidenti a due a due	glissosimmetria	invertente

L'insegnante chiede ad ogni coppia di studenti di

- realizzare in Cabri ogni composizione, trasformando un triangolo scaleno;

- riconoscere l'isometria ottenuta, individuando i suoi elementi caratterizzanti (asse, vettore, centro, ecc.) anche aiutandosi con operazioni di "copia-incolla" sui triangoli presenti nella figura, e quindi di verificare, con gli strumenti di Cabri, che la trasformazione individuata sia quella giusta.

A coloro che terminano presto queste attività basate sulla manipolazione, l'intuizione e la verifica sperimentale, l'insegnante chiede ancora di

- dimostrare perché si è ottenuto una determinata isometria;

- dimostrare, come naturale proseguimento di quanto precede, che ogni isometria può essere ottenuta come composizione di simmetrie assiali.

Molti di essi riescono, con qualche suggerimento dell'insegnante, a dimostrare il risultato nel caso della composizione di due simmetrie e notano le relazioni tra distanza o angolo degli assi di simmetria e modulo della traslazione o angolo della rotazione risultante. Notano anche che la composizione di coppie diverse di simmetrie può dare lo stesso risultato. Viene osservata anche la non commutatività della composizione.

Dallo studio della composizione di tre simmetrie con assi paralleli segue anche l'osservazione che in una glissosimmetria la traslazione componente non è perpendicolare all'asse di simmetria.

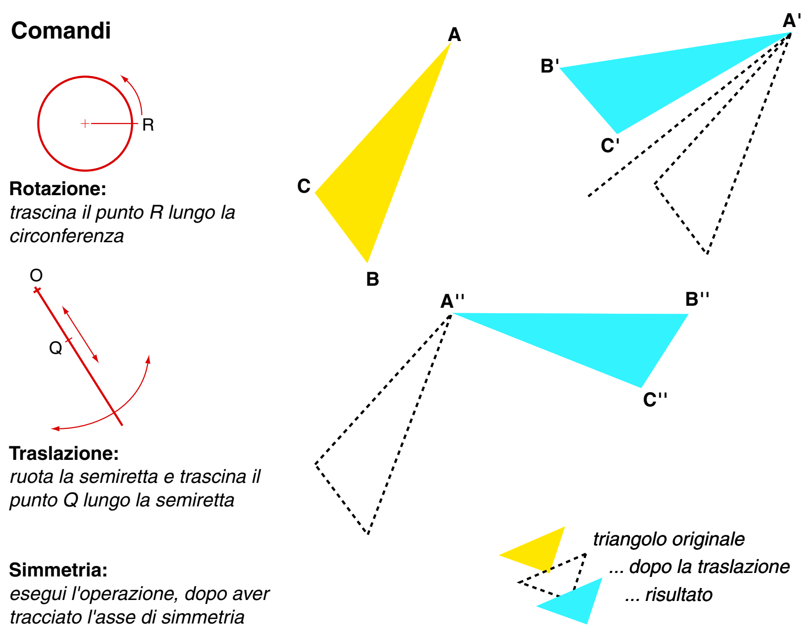
Le dimostrazioni ottenute vengono poi proposte dagli stessi studenti a tutta la classe durante una lezione successiva.

5.2 *Triangoli congruenti e triangoli isometrici* *(1 ora, gruppi di 2 studenti)*

Gli studenti già sanno operare con il Cabri una traslazione di vettore assegnato o una rotazione di centro e angolo assegnati. L'insegnante presenta loro una sua tecnica per ottenere rotazioni e traslazioni animate di una figura. Si tratta di rappresentare il vettore traslazione e l'angolo di rotazione, in modo da poterli variare con "continuità" (se si può usare questa parola per lo schermo a puntini).

Per ottenere una rotazione: in un angolo dello schermo si assegna una circonferenza con un raggio origine, si individua l'angolo di rotazione scegliendo un secondo raggio della circonferenza; al variare di questo si ottengono le corrispondenti rotazioni della figura intorno al centro di rotazione prefissato.

Per ottenere una traslazione: in un angolo dello schermo si disegna una semiretta uscente da un punto O fisso e passante per un punto Q mobile; OQ è il segmento orientato che definisce la traslazione; variando la posizione di Q nel piano, cambiano direzione, modulo e verso del vettore.



L'insegnante presenta al computer un percorso geometrico realizzato con Cabri Java dove, grazie all'animazione, si evidenzia che due triangoli congruenti (cioè che verificano i criteri di congruenza dei triangoli) sono in effetti isometrici (cioè trasformati l'uno nell'altro con una isometria).

Gli studenti hanno, sullo schermo del computer, la descrizione della costruzione realizzata e la possibilità di spostare le figure.

Costruzione:

> *Tracciare un triangolo ABC (vertici in senso orario, colore giallo), poi, sfruttando il primo criterio di congruenza, tracciare due triangoli congruenti al primo: $A'B'C'$ (vertici in senso antiorario, colore verde) e $A''B''C''$ (vertici in senso orario, colore blu). Nascondere le costruzioni e lasciare solo i tre triangoli.*
>
> *Costruire uno strumento per traslare in modo animato ABC fino a fare coincidere A con A'; mettere in evidenza il vettore traslazione; costruire l'asse della simmetria che trasforma il nuovo triangolo in $A'B'C'$.*
>
> *Analogamente traslare ABC fino a far coincidere A con A''; mettere in evidenza il vettore della traslazione; costruire la rotazione animata intorno ad A'', che trasforma il triangolo traslato in $A''B''C''$; mettere in evidenza l'angolo di rotazione.*

Gli studenti si divertono a muovere il triangolo ABC e verificare che si trasforma in $A'B'C'$ con una composizione "traslazione e simmetria assiale" o in $A''B''C''$ con una composizione "traslazione e rotazione".

Successivamente l'insegnante fa notare che ABC si trasforma in $A'B'C'$ mediante una isometria già nota (glissosimmetria), mentre ABC si trasforma in $A''B''C''$ mediante la composizione "traslazione e rotazione". Chiede di verificare, con una nuova costruzione, che questa composizione è ancora una rotazione, individuandone centro e angolo.

5.3 *Composizione di isometrie* *(1 ora, gruppi di 2 studenti)*

A partire da alcuni esempi, osservando il comportamento di un triangolo scaleno, si tratta di verificare che la composizione di due isometrie ha sempre come risultato una isometria già nota (traslazione, simmetria assiale, rotazione, glissosimmetria).

La consegna è composta da tre punti, di cui gli ultimi due sono facoltativi:

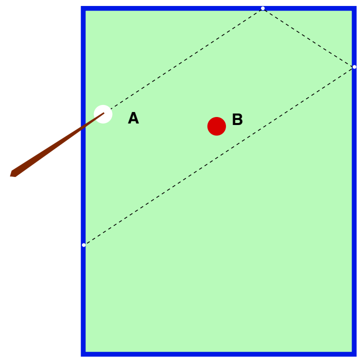
- comporre con Cabri due isometrie scelte (per esempio, traslazione e rotazione) e individuare l'isometria risultante e gli elementi caratterizzanti;

- dimostrare il risultato precedente;

- costruire un'animazione che realizzi l'isometria risultante.

5.4 *Divertimenti con le simmetrie*

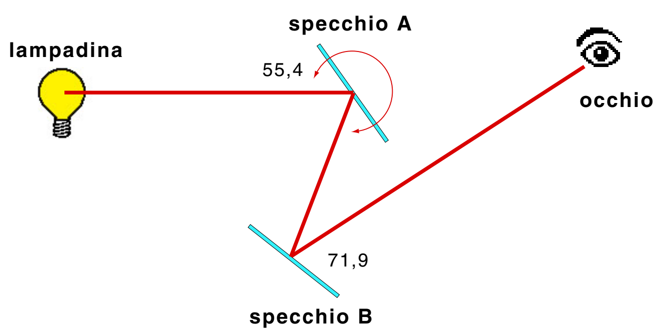
Il biliardo.



Al biliardo si vuole colpire una pallina rossa con una gialla dopo avere fatto rimbalzare quest'ultima su due sponde.

Disegnare con Cabri un biliardo e una stecca con orientamento variabile (raggio di una circonferenza che possa ruotare intorno al centro A) in modo che il percorso della pallina possa colpire B. Il percorso sarà tracciato usando le simmetrie assiali rispetto alle sponde del biliardo.

Il gioco degli specchi



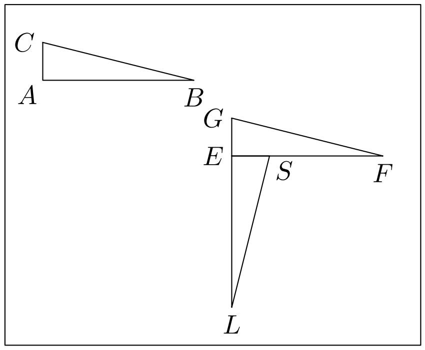
Dati una lampadina, uno specchio A di orientamento variabile e uno specchio B, si vuole colpire l'occhio di un osservatore con un raggio luminoso proveniente dalla lampadina.

Costruire con Cabri (usando le simmetrie assiali rispetto agli specchi A e B) il percorso del raggio luminoso che potrà variare a seconda dell'orientamento di A, mentre B resta fisso.

6. *Verifica sulle isometrie*

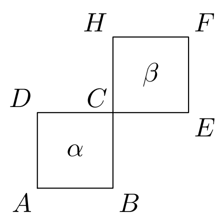
6.1 *Compito in classe* *(50 min)*

[1] *Completare le frasi con il nome dell'isometria opportuna:*



Il triangolo ABC è trasformato in EFG con . . . .
Il triangolo EFG è trasformato in ELS con . . . .
Il triangolo ABC è trasformato in ELS con una rotazione: trovarne graficamente il centro (giustificare rapidamente la sua costruzione).

[2] *Elencare almeno quattro isometrie che trasformano il quadrato α nel quadrato β.*



isometria	definita da

[3] *Disegnare due triangoli equilateri ABC e ABD che hanno il lato AB in comune e i vertici C e D da parti opposte rispetto ad AB.*

a) Determinare l'angolo della rotazione di centro B che trasforma il primo triangolo nel secondo.

b) Usando la rotazione di centro B dimostrare che, detti M e N i punti medi di AC e AD, BMN è anch'esso un triangolo equilatero.

6.2 *Correzione del compito in classe* *(discussione in classe 30 min; compito a casa 1 ora; laboratorio 50 minuti)*

[1] *L'esercizio è un esempio del fatto che la composizione di una traslazione e di una rotazione è una nuova rotazione; risulta facile alla maggior parte degli studenti. Solo un numero esiguo di studenti (4 su 28) si confonde tracciando gli assi di AB e di EL!*

[2] *Le isometrie individuate dagli studenti sono*

isometria	definita da
traslazione	vettore AC
simmetria assiale	asse del segmento DH
sim. centrale (o rotazione)	centro C
glissosimmetria	vettore DC e asse DE
glissosimmetria	vettore BC e asse CH

Le prime tre vengono citate da quasi tutti gli studenti, alcuni invertono il verso del vettore di traslazione. Metà classe pensa a una glissosimmetria.

L'insegnante spiega che in effetti ci sono otto isometrie che trasformano il quadrato α nel quadrato β: sono le coppie di isometrie (una diretta e una inversa) che trasformano A rispettivamente in C, in E, in F e in H, e gli altri vertici di conseguenza. Propone agli studenti di individuare (compito a casa) tutte le isometrie, anche con la manipolazione di due quadrati di carta, scrivendo i risultati in una tabella.

Successivamente gli studenti verificano in laboratorio, con Cabri, che le isometrie individuate trasformano effettivamente il quadrato α (colorato in rosso) nel quadrato β (colorato in blu).

[3] *La risposta al punto (a) non crea difficoltà, anche se generalmente la giustificazione non è rigorosa.*

La dimostrazione con l'uso della rotazione, richiesta al punto (b) è in generale "adattata" a una forma piú classica con l'uso dei triangoli congruenti.

Alcuni studenti intuiscono come dimostrare con la rotazione ma formalizzano in modo approssimativo (durante l'U.D. non è stato sviluppato in modo sistematico l'uso delle trasformazioni per dimostrare le proprietà delle figure).

Questo argomento viene svolto alla fine dell'anno scolastico; l'insegnante non si propone tanto di esporre in modo completo l'argomento isometrie, quanto di provocare attenzione ed esperienze a riguardo, incoraggiando quegli studenti che riescono, nel poco tempo a disposizione, ad ottenere anche risultati teorici.

Negli anni precedenti lo studio delle isometrie era finalizzato alla dimostrazione di proprietà delle figure e aveva prodotto risultati poco soddisfacenti: solo una parte esigua della classe riusciva a giustificare in modo rigoroso le dimostrazioni con l'uso delle trasformazioni e l'argomento "isometrie" rimaneva un capitolo difficile da capire e ricordare.

Con questo approccio, che privilegia la manipolazione e il laboratorio, quasi tutti gli studenti hanno avuto in seguito un ricordo netto e consapevole dell'argomento e qualcuno è comunque ricorso alle isometrie nella dimostrazione di proprietà delle figure.

Molte di queste attività di laboratorio si prestano ad essere punti di partenza per ulteriori sviluppi teorici, ad esempio la tecnica escogitata per l'animazione di traslazioni e rotazioni fa divertire gli allievi ma riesce anche ad associare in modo naturale alle isometrie dirette i movimenti rigidi che le generano, salvo poi fare le opportune osservazioni (ci sono movimenti diversi che generano la stessa isometria). Inoltre suggerisce l'idea di animare anche simmetria e glissosimmetria . . . : questo permette di sottolineare l'importanza spesso trascurata dell'orientazione del piano e delle figure in generale. L'esercizio [2] della verifica finale si presta ad inserire in modo naturale i gruppi di isometrie che mutano i poligoni regolari in sé, gruppi che sono la premessa per l'analogo studio sui poliedri regolari. Tutta l'attività di laboratorio sulla composizione di isometrie costituisce per gli studenti un bagaglio di esperienze e immagini mentali utili a dare significato e corpo ad una successiva trattazione dei gruppi di trasformazioni geometriche e quindi delle diverse geometrie, come previsto nella mappa concettuale.

4.3 Le operazioni per una ricetta o una ricetta per le operazioni?

(di **Diana Bitto** - prima liceo scientifico)

Spesso gli allievi della prima classe superiore si avvicinano allo studio dell'algebra con l'insofferenza di chi conosce già la materia, sa già tutto sulle operazioni e considera una bizzarria noiosa del docente l'andare ad investigare sulle loro proprietà.

Questa U.D. vuole presentare un argomento che si stacca da quanto già studiato e contemporaneamente contiene i germi di quanto sarà formalizzato nel seguito del corso.

Essa è costituita prevalentemente da situazioni in cui si usa un linguaggio logico-simbolico, anche se l'introduzione ha carattere di mediatore analogico e il primo compito a casa ha quello di mediatore attivo. Nel suo complesso, però, è un mediatore attivo, perché gli studenti sono coprotagonisti nel processo di formalizzazione di un loro vissuto, che viene cosí a far parte del blocco dell'esperienza dando significato al successivo studio delle operazioni formali e dell'algebra in generale.

Schema dell'unità didattica "Ricette"

fase	**protagonisti**
1. introduzione	insegnante + classe
2. rappresentazione iconica presentazione esercitazioni	 insegnante gruppetto di studenti
3. compito per casa	singolo studente
4. verifica traslitterazione schemi confronto risultati	 singolo studente gruppetto di studenti
5. compito per casa	singolo studente
6. espressione formale	insegnante + classe
7. verifica compito in classe correzione	 singolo studente insegnante

Nei primi quindici giorni di scuola tutto il consiglio di classe progetta l'accoglienza: tale lavoro consiste in uno studio interdisciplinare della comunicazione che coinvolge i docenti di lettere, religione, disegno e matematica.

Ogni insegnante presenta all'interno della propria disciplina semplici elementi di linguaggi formali: alfabeto, sintassi, semantica e formule ben formate, con esempi di codifica e riconoscimento delle regole di sintassi in linguaggi (codici) di uso comune.

In particolare nell'ambito della matematica si presentano codici a barre, fiscale e telefonico (codici descrittivi), codici degli origami e delle costruzioni Lego (codici imperativi), codici del bridge e degli scacchi (codici legislativi).

I numerosi esempi servono a presentare vari linguaggi formali sottolineando come ognuno descriva in maniera precisa e univoca azioni e/o situazioni relative all'ambiente in cui opera. Inoltre vengono svolti esercizi di traslitterazione dalla lingua italiana ad alcuni codici e viceversa.

1. *Introduzione* *(20 minuti, tutta la classe)*

Si chiede agli allievi di costruire, in modo analogo ai linguaggi presentati, un linguaggio culinario: l'insieme referente è quello degli elementi commestibili.

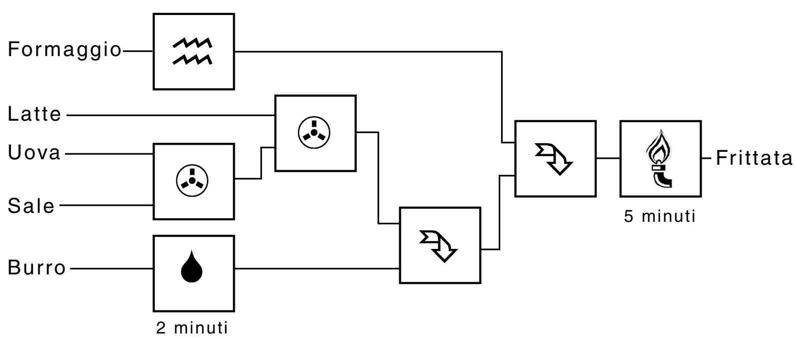
Durante una vivace conversazione, e con la guida dell'insegnante, gli studenti convengono che in cucina ci sono cose da mangiare, ma anche attrezzi che sono strumenti per compiere "operazioni". Questa parola, usata nell'ora di matematica, con riferimento alla cucina, suscita un po' di salutare sorpresa e richiede qualche riflessione.

A questo punto la lezione continua definendo operazioni unarie, binarie, ternarie...

2. *Rappresentazione iconica di una ricetta: presentazione ed esercitazioni* *(40 minuti, insegnante; 1 ora, gruppetto di studenti)*

Per semplificare le successive rappresentazioni l'insegnante stabilisce che le operazioni con tre o piú argomenti verranno rappresentate come operazioni binarie ripetute; presenta, come esempio, una ricetta e la sua traduzione sotto forma di schema ad albero.

"La frittata alla francese. *Mettere a sciogliere il burro in una teglia (2 min.). Nel frattempo sbattere assieme le uova con il sale e il latte. Versare il composto sul burro fuso, aggiungere il formaggio grattugiato, cuocere per 5 minuti a pentola coperta."*



I ragazzi commentano l'esempio e osservano che:

ogni operazione corrisponde ad un verbo di azione;

ogni operazione viene rappresentata da un segno convenzionale, quindi è necessaria una legenda per interpretare lo schema;

la stessa operazione può essere associata a diversi verbi, che esprimono la stessa azione (aggiungi - versa su, grattugia - trita,...), come spesso succede quando si cerca di formalizzare un linguaggio naturale;

le operazioni possono essere commutative o non (versare il preparato per la frittata sul burro e non il burro sul preparato per la frittata) e questo comporta una convenzione sulla posizione degli ingredienti: si conviene che, nel caso in questione, il burro sia rappresentato piú in basso del preparato per la frittata;

l'insieme di definizione è quello dei cibi commestibili: in questo caso operazioni come "cuocere" non sono operazioni ben definite in quanto il risultato potrebbe non appartenere piú all'insieme (bruciato); esse necessitano quindi di una "condizione" (il tempo di cottura) che le limiti.

Si osserva inoltre che, nel caso della ricetta precedente le operazioni sono: sciogliere, sbattere assieme, versare, aggiungere, cuocere.

Sciogliere e cuocere sono unarie;

versare, aggiungere e sbattere insieme sono binarie;

sciogliere e cuocere non sono ben definite;

versare e aggiungere non sono commutative.

Vengono proposte ora altre ricette, che la classe, a piccoli gruppi, cerca di schematizzare.

Alcuni termini come "saltare in padella" vengono chiariti e sono fonte di battute che servono comunque ad alleggerire l'atmosfera.

Emergono subito delle difficoltà nell'assimilazione e nel rispetto delle convenzioni spazio-temporali, quelle relative a "sopra-sotto" e "nel frattempo".

3. *Compito per casa* *(30-40 minuti, singolo studente)*

Reperire ricette con al massimo sette ingredienti e redigere il relativo schema ad albero.

4. *Verifica: traslitterazione degli schemi e confronto dei risultati* *(30 minuti, singolo studente; 30 minuti, gruppetto di studenti)*

Nella lezione seguente vengono raccolti gli schemi e ridistribuiti a caso. La consegna è: ricostruire la ricetta in forma verbale.

Quando un alunno ritiene di aver decodificato lo schema ad albero chiede di confrontare la sua versione con la ricetta dalla quale è partito il compagno. Ne nascono discussioni e contestazioni che servono all'insegnante da spunto per chiarire e sottolineare alcune proprietà ed individuare i ragazzi in difficoltà.

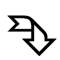
Da queste discussioni emerge la necessità di avere a disposizione una legenda dei simboli usati sia per gli ingredienti, sia per le operazioni e di conoscere le proprietà delle operazioni utilizzate.

5. *Compito per casa* *(20-30 minuti, singolo studente)*
L'insegnante assegna per casa una o due ricette da tradurre in uno schema ad albero.

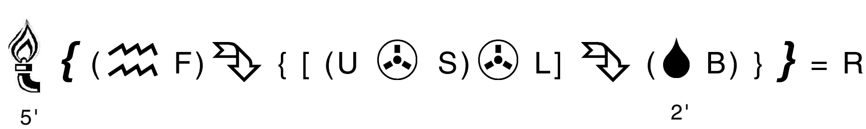
6. *Espressione formale* *(60 minuti, insegnante piú classe)*
L'insegnante corregge il compito eseguito a casa e, con riferimento agli stessi esercizi, definisce un linguaggio formale che ha l'alfabeto formato da caratteri alfabetici per rappresentare i cibi, da segni di interpunzione per le operazioni, dalle parentesi e dal segno di uguale.
Le regole di sintassi sono:
l'operazione unaria va segnata davanti al cibo;
l'operazione binaria va indicata fra due cibi;
ogni risultato parziale va tra parentesi;
il risultato finale va dopo l'uguale.

Per la ricetta precedente vengono preparate le seguenti tabelle

cibo	Formaggio	Latte	Uova	Sale	Burro	Risultato (frittata)
simbolo	F	L	U	S	B	R

simbolo	**operazione**	**tipo**	**proprietà**
	sciogliere	unaria	non ben definita
	sbattere assieme	binaria	commutativa, ben definita
	versare, aggiungere	binaria	non commutativa, ben definita
	cuocere	unaria	non ben definita
	grattuggiare	unaria	ben definita

Si traduce infine il diagramma ad albero in una espressione secondo le regole stabilite.



Questo è il livello di formalizzazione che l'insegnante si era prefisso: la padronanza dell'uso delle parentesi e la conoscenza delle proprietà delle operazioni (ad esempio il formaggio, pur citato in fondo alla ricetta deve essere posto all'inizio perché l'operazione nella quale è coinvolto non è commutativa).

La stesura di questa espressione crea una certa difficoltà negli alunni per l'ordine in cui si devono eseguire le operazioni e per la presenza di operazioni non commutative.

La consegna per formalizzare una ricetta diventa la seguente: componi la tabella delle operazioni della ricetta con le loro proprietà; rappresenta la ricetta con lo schema ad albero e la relativa espressione.

Esercizi di questo tipo vengono quindi svolti e corretti durante le lezioni seguenti.

7. Verifica: compito in classe e correzione *(20 minuti, singolo studente; 20 minuti, insegnante)*

Il percorso didattico prosegue con la presentazione dei primi elementi di logica (connettivi) e reti logiche, esplicitando le relazioni tra questi argomenti con particolare riguardo alle operazioni ed alle loro proprietà.

Alla fine viene assegnato un compito in classe nel quale il primo esercizio riguarda una ricetta: in termini di tempo, vale circa un terzo dell'intero compito. Uno dei testi è stato:

*"**Pollo alla contadina:** Tritate il rosmarino con il prezzemolo, mescolateli in un piatto con sale, pepe ed olio. Tagliate a pezzi il pollo, versatevi sopra il trito preparato e fate cuocere per 5 minuti. Aggiungete il pomodoro tritato e continuate a cuocere per altri 40 minuti."*

Componi la tabella delle operazioni della ricetta con le loro proprietà.

Rappresenta la ricetta con lo schema ad albero e con la relativa espressione.

Inizialmente, l'unità didattica era stata ideata per una classe di un istituto alberghiero ed è stata accettata di buon grado anche al liceo scientifico. Nonostante l'apparenza, nell'atteggiamento verso il problema presentato non c'è alcuna differenza fra maschi e femmine: nelle attuali situazioni familiari, i figli o non vengono mai coinvolti in attività domestiche oppure, femmine o maschi che siano, a volte collaborano alla preparazione del pasto di mezzogiorno.

Per l'apprendimento della matematica, questa attività ha offerto i seguenti vantaggi:

generalmente gli allievi sono attratti dall'aspetto ludico del problema;

si ampliano i confini del concetto di operazione, generalmente limitato a quelle numeriche;

emerge la necessità di conoscere a priori le proprietà di una operazione;

vengono esercitate le abilità trasversali di translitterazione e di individuazione delle frasi elementari del discorso;

le difficoltà incontrate nella traslitterazione forniscono una buona idea dei vantaggi ma anche dei limiti di un linguaggio formale;

piú in generale, si incomincia a tradurre da un tipo di rappresentazione ad un altro, attività che viene ripresa ripetutamente negli argomenti seguenti: secondo Duval ([15]) "la coordinazione dei registri di rappresentazione semiotica" è "essenziale per l'attività matematica".

L'aspetto piú interessante di questa proposta è che, da un lato, non richiede prerequisiti matematici, quindi supera quei blocchi emotivi e quei preconcetti che si sono accumulati intorno alla matematica negli anni scolastici precedenti; dall'altro, arriva ad una formalizzazione evidentemente analoga alle espressioni algebriche.

L'insegnante ha osservato una particolare correlazione fra la difficoltà incontrata da alcuni alunni nel formalizzare le ricette e i complessivi risultati scolastici. Per esempio, fra i 24 alunni che negli ultimi tre anni hanno avuto notevoli difficoltà in questo tipo di esercizio, ben 19 si sono ritirati durante l'anno o sono stati respinti, 3 sono stati promossi col debito formativo in piú materie, 2 sono stati promossi anche in matematica. Ciò ha fatto pensare che questa proposta metta in evidenza difficoltà di tipo molto generale, come problemi di linguaggio, di comprensione del testo e di rappresentazione simbolica, capacità di ordinamento in sequenze e di organizzazione spazio-temporale. Queste abilità sono essenziali non solo nella redazione dello schema ad albero e della sua traduzione in espressione, ma coinvolgono tutta l'attività di lavoro e di pensiero. Si suppone quindi che lacune del genere richiedano da parte del docente di matematica un'attività concordata con gli altri insegnanti e con l'eventuale sostegno di uno psicologo; questo è un punto che intendiamo sviluppare in una futura ricerca.

5 Conclusioni

Nella classica lezione frontale, l'insegnante è regista e protagonista. Quando però si sono adottati nuovi tipi di raggruppamento degli alunni o nuovi metodi didattici, in cui gli allievi sono almeno coprotagonisti, il ruolo dell'insegnante è rimasto altrettanto importante, ma è diventato piú difficile: infatti egli ha dovuto accompagnare gli allievi verso l'obiettivo didattico prefissato rispettando i loro tempi, i percorsi da loro intrapresi, i loro errori, ritenendoli tappe importanti dell'apprendimento. In questi casi all'insegnante sono richiesti spirito di osservazione, autocontrollo per non lasciarsi prendere dall'impazienza di arrivare alla meta e capacità comunicativa per smuovere gli allievi da un atteggiamento passivo, tanto piú resistente quanto piú numerosi sono gli anni scolastici in esso trascorsi. Questo spiega anche perché le nostre esperienze hanno finora riguardato per lo piú delle prove locali e di breve durata.

Nelle esperienze qui documentate i cambiamenti introdotti sono stati fruttuosi perché il tempo perso per seguire gli alunni nei loro percorsi di scoperta è stato ripagato da una maggiore consapevolezza e indipendenza da parte loro nel proseguire lo studio intrapreso.

Dobbiamo ancora una volta sottolineare come il lavoro ed il confronto in gruppo degli insegnanti siano stati essenziali per la serietà dell'analisi e la motivazione psicologica. L'insegnante che si appresta ad esporre ai colleghi la sua proposta didattica è costretto ad organizzarla in modo piú preciso e a riflettere sulle motivazioni e sugli effetti della sua attività. Già la semplice videoregistrazione di alcune lezioni, sebbene condotta in modo ingenuo e forse poco espressivo per persone esterne al gruppo, ha provocato sorpresa negli insegnanti protagonisti: dall'esterno hanno visto la loro lezione diversa da come percepita dall'interno, rendendosi conto, per esempio, di aver lasciato poco tempo agli allievi per le risposte o le proposte, oppure di non aver colto al momento alcuni buoni spunti offerti dagli allievi. La registrazione ha permesso inoltre la discussione sulla lezione reale anziché su una relazione inevitabilmente filtrata dall'interpretazione del relatore.

Certamente non è sufficiente riunirsi per rendere proficua l'attività; occorre anche un tema che renda organica la discussione.

In conclusione, riteniamo irrinunciabile il lavoro di gruppo per qualsiasi ricerca di innovazione nell'insegnamento e la DPC con le sue proposte teoriche e pratiche è stata un buon argomento di aggregazione e di riflessione sul lavoro dell'insegnante.

6 Appendice: Repertorio ORM (1983)

Riportiamo, per comodità del lettore, il Repertorio ORM tratto da [11].

A. Raggruppamenti degli alunni

a. lavoro individuale

1. libero
2. con assistenza dell'insegnante
3. programmato su materiale autocorrettivo o strutturato

b. lavoro a due

1. insegnante/alunno
2. alunno/alunno (alla pari)
3. l'alunno piú capace aiuta il compagno

c. lavoro in piccolo gruppo

1. interno alla stessa classe
2. fra alunni di classi parallele
3. fra alunni di classi non parallele
4. omogeneo per livello di rendimento
5. integrato con criteri sociometrici
6. per attività libere
7. con assistenza dell'insegnante/i
8. per attività programmate (vedi sopra)

d. lavoro in classe

1. alunno/alunni
2. insegnante/alunni (a senso unico)
3. insegnante/alunni (a senso multiplo)
4. due o piú insegnanti in compresenza

e. lavoro in grandi gruppi

1. due o piú gruppi provenienti da classi parallele
2. due o piú classi parallele al completo
3. due o piú gruppi provenienti da varie classi, parallele e non
4. assemblee per prendere decisioni comuni
5. tutte le scolaresche del plesso al completo.

B. Metodi

a. escursioni

1. *esplorative:* stimolo all'osservazione e alla verbalizzazione
2. *finalizzate:* messa a fuoco di un oggetto specifico o di un fenomeno particolare
3. *strutturate:* applicazione e controllo di concetti, relazioni e principi definiti in precedenza

b. esercitazioni

1. *attività libere* con materiali vari e scarsamente strutturati volte alla realizzazione di prodotti creativi
2. *realizzazione di oggetti* su materiale semilavorato o comunque preordinato
3. *ideazione, progettazione e costruzione di un oggetto* con materiale scelto o adattato allo scopo

4. *manipolazione di materiali* predisposti per la "scoperta" di somiglianze, differenze, regolarità e la definizione di concetti
5. *esercizi di consolidamento* e di memorizzazione di abilità strumentali, di schemi operativi, di concetti e relazioni
6. *attività di applicazione* a contenuti diversi di schemi operativi, concetti, relazioni già conosciuti
7. *attività ordinate a classificare* fenomeni diversi mediante l'individuazione di somiglianze e/o differenze
8. *attività ordinate al'approfondimento,* all'estensione o al trasferimento di schemi operativi, concetti, relazioni già conosciuti
9. *attività ordinate a inventare* altre dimensioni mediante processi di liberazione, proiezione
10. *attività ordinate a riprodurre vissuti* per verbalizzare le proprie esperienze
11. *attività di drammatizzazione* ordinate a riprodurre i vissuti per mettersi nei panni degli altri: role-play
12. *simulazione e giochi* in cui sulla base di vincoli e di canovacci predisposti, gli alunni sono orientati a comprendere relazioni di varia complessità

c. lezioni

1. *commento dell'insegnante* di cronache, racconti, brani letterari
2. *lettura guidata* di brani proposti dall'insegnante per problematizzare, per integrare, per approfondire le attività precedentemente svolte
3. *esposizione finalizzata* alla presentazione metodica di un oggetto, di un fatto o di una attività
4. *esposizione centrata* alla messa in evidenza di una regola, di un concetto, di una relazione, di un principio
5. *proiezione e commento di audiovisivi* quali illustrazioni, diapositive, film, lucidi, cartelloni

d. conversazioni

1. *conversazione occasionale,* a senso multiplo su un episodio di attualità
2. *conversazione clinica* tendente a individuare le conoscenze e i concetti spontanei degli alunni intorno a determinati contenuti e problemi
3. *discussione finalizzata* a chiarire informazioni, a illustrare aspetti particolari di un problema o a motivare al lavoro
4. *discussione riassuntiva* finalizzata alla sistemazione di esperienze e informazioni raccolte in precedenza
5. *discussione orientata* mediante domande proposte dall'insegnante o risposte suggerite dagli interventi degli alunni, ad analizzare e/o comparare fatti e fenomeni

6. *discussione sistematica* finalizzata a verbalizzare concetti, a definire ipotesi interpretative, a sintetizzare l'attività svolta.

C. Mezzi e strumenti

a. *sussidi visivi:* diapositive, fotografie, episcopio. . .

b. *sussidi uditivi:* radio, dischi, registratori. . .

c. *sussidi audiovisivi:* diapositive sonorizzate, film uniconcettuali. . .

d. *supporti:* lavagne a gesso, in panno, lavagne luminose, cartelloni. . .

e. *ausili occasionali:* foglie, fiori, oggetti d'uso quotidiano, giocattoli. . .

f. *giochi didattici aperti* coi quali, cioè, è possibile stimolare comportamenti liberi e creativi, situazioni immaginarie

g. *risorse umane:* testimonianze, esperienze dirette, interviste. . .

h. *materiali strutturati:* schede, esercitazioni, blocchi logici, con la caratteristica di poter essere utilizzati direttamente dagli alunni, senza richiedere l'intervento o la guida dell'insegnante.

Bibliografia

[1] ALBERTI C.: *La matematica ed il suo insegnamento: alcuni principi didattici*, Nel mondo dei numeri e delle operazioni, vol. 1, a cura di C. Bozzolo e A. Costa, Erickson, 11-19, 2002.

[2] ALBERTI C.: *Didattica per Concetti*, Nel mondo dei numeri e delle operazioni, vol. 1, a cura di C. Bozzolo e A. Costa, Erickson, 21-26, 2002.

[3] AMALDI U.: *Fisica: idee ed esperimenti dal pendolo ai quark*, vol. 1, Zanichelli.

[4] ANTONIETTI A. et alii: *Successo-insuccesso in matematica e stili di pensiero*, La matematica e la sua didattica, n. 4, 423–443, 1998.

[5] ATTI DEL CONVEGNO DI VERONA: *La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media*, Verona 1993, SEI, Torino.

[6] AUSUBEL D.P.: *Educazione e processi cognitivi*, Angeli, 1990.

[7] AZZALI E., VISINTIN I.: *La formazione dei concetti geometrici nel primo ciclo: dalle sensazioni alle immagini mentali*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 16 n. 9, 821–858, 1993.

[8] AZZALI E., VISINTIN I.: *Primi concetti di geometria nello spazio: un'esperienza nel secondo ciclo della scuola elementare*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21A n. 2, 111–155, 1998.

[9] CALVANI M.: *Origami, coniche e inviluppi*, Didattica delle scienze, n. 210, 50–52, 2000.

[10] DAMIANO E.: *Scienza e insegnamento. Modelli didattici a confronto*, I.S.U. Università Cattolica, 1991.

[11] DAMIANO E. (a cura di): *Guida alla Didattica per concetti*, Juvenilia, 1995.

[12] DAMIANO E.: *L'azione didattica. Per una teoria dell'insegnamento*, Armando Editore, 1993.

[13] D'AMORE B., GIOVANNONI L.: *Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico*, La matematica e la sua didattica, n. 4, 360–399, Pitagora Editrice, 1997

[14] DI MARTINO P.: *Alcune riflessioni critiche sulla definizione di atteggiamento nei confronti della matematica*, Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo, Pitagora, Bologna, in corso di stampa.

[15] DUVAL R.: *L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?*, La matematica e la sua didattica, n. 1, 17–42, Pitagora Editrice, 1999.

[16] FALLETTA N.: *Il libro dei paradossi*, TEA.

[17] GARDNER H.: *Formae mentis. Saggio sulla pluralità dell'intelligenza*, Feltrinelli, 1987

[18] LANCIANO N.: *Strumenti per i giardini del cieli*, Quaderni di Cooperazione Educativa, Ediz. Junior.

[19] LANCIANO N.: *Concezioni ostacolo in astronomia: la visione spaziale*, A scuola di luna, Macroedizioni.

[20] LANCIANO N et alii.: *Geometria in città*, Centro ricerche didattiche Morin, Battagin editore, 1998.

[21] MARIOTTI M.A.: *Quaderno di geometria elementare: Attività geometriche per un'introduzione alla dimostrazione in geometria*, a cura del Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Pisa.

[22] MONCECCHI G.: *Distanze astronomiche tra storia e matematica*, Scuola Viva, anno XII, n. 2/3, 1986, SEI.

[23] MOSCUCCI M., PICCIONE M.: *Intelligenza e apprendimento della matematica*, L'educazione matematica, vol. 4 n. 1, 25–37, 2002.

[24] NOVAK J. D., GOWIN D.B.: *Imparando a imparare*, SEI, 1989.

[25] NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA (Univ. di Udine) *Mappa concettuale e conversazione clinica: due tecniche della didattica per concetti nell'insegnamento della matematica*, Quaderni di Ricerca in Didattica del GRIM, n. 10, 1–61, Palermo, 2001

[26] ODIFREDDI P.: *C'era una volta un paradosso*, Grandi Tascabili Einaudi.

[27] PENFIELD W., ROBERTS L.: *Speech and brain mechanisms*, Princeton University Press.

[28] POLO M.: *Verso un modello di analisi della pratica didattica: il caso di un percorso di insegnemento/apprendimento su contenuti di geometria nella scuola elementare*, Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo, Pitagora, Bologna, in corso di stampa.

[29] PONTECORVO C.: *Concettualizzazione e insegnamento*, Concetti e conoscenza, a cura di C. Pontecorvo, 262–354 Loescher, Torino, 1983.

[30] RE FRASCHINI M., GRAZZI G.: *Geometria*, Atlas.

[31] SPERANZA F.: *La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità*, Definire, argomentare, dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto, a cura di F. Furinghetti, Quad. n. 13, 135–141, C.N.R., T.I.D., F.A.M.I., 1992.