HIERARCHIE DE REGLES EN A.S.I. ET CONCEPTUALISATION

Régis Gras[1], Nadja Acioly-Régnier[2]

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article une méthode alternative et complémentaire au graphe implicatif pour représenter les relations implicatives nouées au sein de variables qualifiant ou quantifiant des sujets ou des objets. Mais ici les règles extraites des données sont de degré supérieur et apparaissent comme métarègles ou règles de règles. Nous axomatisons ces règles généralisées et les représentons selon une hiérarchie ascendante orientée. En psychologie différentielle et en didactique de sciences (champs conceptuels), la complexité cognitive nous semble apparaître comme métaphore ou avatar privilégié de ce type de hiérarchie. Nous présentons deux exemples illustratifs en montrant l'intérêt prédictif de cette représentation.

Mots-clés : *Hiérarchie, classes orientées, axiome, distance ultramétrique***,** *psychologie différentielle, champ conceptuel.*

ABSTRACT

In this article we present an alternative and complementary method to the implicative graph to represent the implicative relationship to present the knotted within the variables qualifying or quantifying either subjects or objects. But here, the data extracted rules are of a superior level and appear as metarules or as rules of rules. We axomatise those generalised rules and we represent them according to an oriented ascendant hierarchy. In differential psychology and in science didactic (conceptual fields), cognitive complexity seems to appear as a privileged metaphor or avatar for this type of hierarchy. We present two illustrative examples by showing the predictive interest of this representation.

Keywords : *hierarchy, oriented classes, axiom, ultrametric distance, differential psychology, conceptiual field.*

1 Introduction

A notre connaissance, d'une part, les développements existant en matière de mesures de qualité de règles d'association s'arrêtent généralement à la proposition d'un indice d'implication partielle pour des données binaires et, au mieux, à la représentation arborescente des règles (par exemple : Agrawal, R. et al, 1993, Guillet F. et Hamilton H.

[1] Laboratoire d'Informatique de Nantes-Atlantique (LINA) Site Polytech Nantes - La Chantrerie, rue C.Pauc, BP 44306, Nantes cedex 3, e-mail : regisgra@club-internet.fr,

[2] Laboratoire SIS - Santé, Individu, Société, ESPE, Université de Lyon I

2007, Hiep J. et al 2000, Lenca P. et al, 2007 et tous les travaux portant sur les réseaux bayesiens et les treillis de Galois, voir Cadot M. 2009). D'autre part, cette notion n'est pas étendue à l'extraction de règles de règles où les prémisses et les conclusions peuvent être elles-mêmes des règles. A l'instar de certaines méthodes d'analyse de données, l'intérêt de passer, non linéairement, du niveau relationnel à celui de hiérarchie nous est apparu évident, comme une réponse à la question brûlante, dans la construction des concepts, de non-linéarité[3]. Nous pouvions nous appuyer sur notre expérience en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive. Nous avons alors prolongé notre recherche de règles dans un corpus de données à son extension théorique, celle de règles de règles ou méta-règles (ou règles généralisées). *Ainsi, notre recherche de relations causales sera* ***non-réductionniste*** *puisqu'elle dépassera le simple dénombrement et conduira au nouveau choix d'un indice, ceci en élargissant le champ opérationnel de l'ASI à des règles de niveau supérieur, à leur représentation, à l'identification et à la mesure du rapport dual sujets-variables.*

Nous proposons *donc* ici ces prolongements dans le cadre de l'A.S.I., en formalisant la notion de hiérarchie orientée. Celle-ci vise la prise en charge de la représentation graphique de la structure de l'ensemble des associations des variables selon **des règles de règles**, susceptibles pour certaines de se situer en toute hypothèse à un niveau conceptuel supérieur. Une première version formelle a été présentée dans (Gras et, 1996). L'approche en était intuitive et pragmatique. Depuis, (Gras et Kuntz, 2005) a permis de réviser la notion de hiérarchie orientée par une présentation algébrique plus formelle mais en accord avec les propriétés rigoureuses de la notion de hiérarchie orientée.

La forme graphique obtenue peut nous faire penser, toutes réserves faites et par analogie de structure, dans son architecture logique, au modèle théorique épistémologique de J. Piaget[4]. Ce modèle, aujourd'hui relativisé pour sa rigidité, sinon contesté, conçoit le développement cognitif de l'enfant selon une organisation élaborée passant par une succession de stades emboîtés successifs. Le passage d'un stade à un autre selon une conception établie sur un mode implicatif strict n'est pas sans poser problème (Pellois C., 2002, 2010 et 2013) car il se fait, notamment, mais pas seulement, par le bais de ce que Piaget appelle l'abstraction réfléchissante « Elle est réfléchissante aux deux sens suivants : elle transpose sur un plan supérieur de conceptualisation ce qu´elle emprunte à un palier précédent » écrit Sylvie Lucas dans Le Tome 52 du Bulletin de Psychologie, juillet-août 1999. Ecartant provisoirement toute référence à cette théorie, l'objectif central de ce texte réside dans l'étude de l'adéquation métaphorique de la représentation de règles de règles avec une démarche conceptualisante.

---

[3] Relisons G.Bachelard : « *Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien de va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit* ». (Extrait de « La Formation de l'esprit scientifique », 1938).

Rappelons qu'une représentation structurée des relations quasi-implicatives dans l'ensemble des variables instanciées a été obtenue, dans le cadre de l'A.S.I., par un graphe implicatif sans cycle, pondéré par les intensités d'implication, fermé transitivement à un seuil donné. Cette première représentation serait-elle comparable aux mécanismes de conceptualisation qui semblent se mettre en œuvre formellement pour aboutir, in fine à l'organisation cognitive du sujet épistémique, telle que la présente Piaget J. (J.Piaget, 1970) ? Répondre à cette question nécessiterait très certainement bien des discussions et quelques approfondissements, mais dans des situations d'apprentissage ou d'évaluation, elle nous a permis d'interpréter des chemins de ce graphe, constitués de suites d'arcs qui lient certaines variables, en termes de genèses relevant d'une forme particulière de conceptions différentielles. Cette théorie piagétienne du développement cognitif du sujet, dans sa forme originelle exprimée en termes de stades ordonnés indépendants des contenus est cependant, comme nous l'avons dit, à relativiser dans sa rigueur formelle. Elle fait actuellement la place, non seulement à la psychologie différentielle sous différentes conceptions (Cf. par exemple, Pellois, C., 2008, en particulier p. 91.), mais aussi à la théorie des champs conceptuels[5] où le développement cognitif serait fortement lié au contenu conceptuel des domaines dans lesquels il s'opère plus qu'à des structures logico-mathématiques de la pensée. On en fera l'observation dans l'exemple 2 du § 4.2.

La méthode d'organisation hiérarchique des données, non symétrique que nous présentons maintenant, va doubler les informations fournies par les règles d'association implicative en organisant leur ensemble selon une structure ordonnée en méta-règles, en méta-méta-règles, etc.. Nous verrons, par la suite, quelle proximité de structure (quel homomorphisme ?) existe entre ce type de représentation et l'organisation de règles nécessaires à la conceptualisation. Les deux premiers paragraphes 2 et 3 présenteront une modélisation d'une hiérarchie orientée de règles de règles. Le paragraphe 4 étudiera en quoi la hiérarchie ainsi modélisée pourrait être une métaphore d'un processus de conceptualisation.

2 Hiérarchie de classes de variables[6]

Afin de soutenir l'intuition, nous baserons le modèle de la **hiérarchie orientée cohésitive** sur la correspondance linguistique suivante :

1. *les variables* (ou attributs) de l'ensemble V (card V=p) constitueront l'ensemble les *lettres de l'alphabet V,*
2. *les classes de k variables*, éléments de V^k, par exemple $(a_1, a_2,\dots, a_k)$, constitueront les *syllabes du vocabulaire,*

[5] Vergnaud (Vergnaud 1981 et 1990) définit la notion de champ conceptuel « comme un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. »
[6] Ce paragraphe 2 est une composante de l'article Gras et Kuntz (2005), reprise d'ailleurs dans Gras et al. (2009 et 2013) . On la retrouve présentée dans Régnier et Acioly-Régnier (2007). Dans un souci d'homogénéisation, nous tenions à le rappeler ici.

3. *les classes maximales*, i.e. telles qu'aucune variable ne la complète, constitueront *les mots* du vocabulaire,

4. *l'organisation hiérarchique* de l'ensemble des classes constituera une *phrase,* structurée par des propositions incises.

D'autres métaphores peuvent illustrer le modèle que nous allons construire comme, par exemple, l'ensemble des séquences constituant le génome ou encore une théorie mathématique organisée en théorèmes et corollaires. Mais nous verrons que ces métaphores ne satisfont pas totalement la structure du modèle.

On va également constater que ce modèle hiérarchique, où l'ordre intervient, ne s'apparente pas au modèle classique d'une hiérarchie ascendante, par exemple celle basée sur un indice de similarité entre attributs, car les classes d'une telle hiérarchie sont des sous-ensembles de variables et non pas des k-uplets.

2.1 Hiérarchie orientée. Définitions. Propriétés

Ce paragraphe théorique rend compte de la formalisation de la construction d'une hiérarchie dans laquelle l'ordre ascendant de classification se doit de respecter le fondement asymétrique de l'implication. C'est donc sur ce projet, cette base épistémologique que nous construirons ce nouveau modèle hiérarchique.

Définition 1: On appelle hiérarchie orientée **H** sur l'ensemble des variables V, une suite d'arrangements (au sens de la combinatoire, donc suite de k-uplets) des éléments de V, vérifiant les axiomes 1. 2 et 3 énoncés ci-dessous. Ces arrangements sont appelés classes de H.

Par exemple, {(j), (f,g), (b,c), (e,f,g), (b,c,d), (h,i), (a,b,c,d), (e,f,g,h,i)} est une hiérarchie orientée sur V={a,b,c,d,e,f,g,h,i} et (a,b,c,d) est une classe de cette hiérarchie.

Définition 2: On appelle classe **C** de degré k de la hiérarchie **H** un arrangement (ou k-uplet) de k éléments de V appartenant à **H**. On notera $\prec$ la relation d'ordre induite sur **C** par le tirage d'un arrangement.

Par exemple, $(a_1, a_2,\ldots, a_k)$, pour $k \leq p$, est une classe de degré k et $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_k$. Mais également, par convention, (a) est une classe de degré 1. Elle est dite élémentaire

Définition 3: On appelle troncation de **C**, tout sous-arrangement des éléments de **C** respectant la structure d'ordre $\prec$ et la consécutivité.

Par exemple, si **C** $= (a_1, a_2,\ldots, a_k)$, la classe **C'** $= (a_i, a_{i+1},\ldots, a_j)$ où $1 \leq i$ et $j \leq k$, est une troncation de **C**.

Définition 4: On note **C'** $\hat{\subset}$ **C** si et seulement si **C'** est une troncation de **C**. Une classe est dite maximale s'il n'existe pas de classe qui la contienne dans **H**. Elle est dite minimale si elle ne contient aucune classe de la hiérarchie **H**. En particulier, une classe élémentaire est donc minimale (mais elle peut être aussi maximale).

On peut comparer, sans la confondre cependant, cette relation à l'inclusion ensembliste. Dans l'exemple initial, les classes (a,b,c,d), (e,f,g,h,i) et (j) sont maximales. Cette dernière est aussi minimale.

Définition 5: La trace de **C** sur **C'** est constituée d'éléments communs à **C** et **C'** et elle respecte la structure d'ordre $\prec$ et la consécutivité. La trace est une opération commutative notée $\hat{\cap}$.

Ainsi on peut comparer, sans la confondre, cette opération à l'intersection ensembliste.

Par exemple, (d,f,g,a,e) $\hat{\cap}$ (f,g,a,e,b,h)= (f,g,a,e)

Définition 6: Si les deux classes quelconques **C'** et **C''** ont une trace vide (**C'** $\hat{\cap}$ **C''**$=\varnothing$), la concaténation de **C'** et **C''** notée **C'**$\hat{\cup}$**C''** est la classe **C** dont les éléments appartiennent à **C'** et **C''** et à elles exclusivement. Elle respecte les ordres au sein de **C'** et **C''**et le plus grand élément de **C'** précède le plus petit de **C''**. On dira que **C'** et **C''** sont des classes génératrices de **C'**$\hat{\cup}$**C''.**

Cette opération, comparable à la concaténation ordinaire, ainsi qu'à la réunion ensembliste sans se confondre avec elle, est non commutative et respecte donc un ordre.

Par exemple, si **C'** = (d,f,g,a) et **C''** = (b,u,r,p,y), **C'** $\hat{\cup}$ **C''** = (d,f,g,a,b,u,r,p,y), alors que **C''**$\hat{\cup}$ **C'** = (b,u,r,p,y,d,f,g,a)

2.2 Axiomes d'une hiérarchie orientée

Axiome 1 : $\forall$ **C** et $\forall$ **C'** classes de **H** , **C**$\hat{\cap}$**C''**$\in\{\varnothing$**, C, C'}**

Axiome 2 : $\forall$ **C**$\in$**H**, si **C** n'est pas élémentaire ou minimale, elle est la concaténation de classes de **H**

Axiome 3 : Il existe une permutation des éléments de V qui coïncide avec la concaténation de toutes les classes maximales de **H**

2.3 Algorithme de construction de l'ensemble des classes

Nous définissons ci-dessous un critère algébrique en vue de nous permettre de construire de façon ascendante, la hiérarchie organisatrice de l'ensemble V des variables et qui respecte les trois axiomes d'une hiérarchie orientée.

2.3.1 Critères algébriques

Définition 7: La cohésion d'une classe de degré 2, correspondant au couple (a,b) est définie, à partir de l'entropie au sens de Shannon, par la formule, $coh(a,b)=\left(1-\left[-p(\log_2(p))-(1-p)(\log_2(1-p))\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$ où p=φ(a,b)≥0,50 et $coh(a,b)=0$ si p=φ(a,b)<0,50.

Cette notion de cohésion nous conduit, dans le cadre de l'ASI, de parler aussi bien de **hiérarchie orientée** que de **hiérarchie cohésitive.**

Définition 8: La cohésion d'une classe **C** = (a_1, a_2,…, a_r) de degré r, est définie par la formule : $coh(C)=\left[\prod_{i=1,\dots,r-1}^{j=2,\dots,r;\,j>i} coh(a_i,a_j)\right]^{\frac{2}{r(r-1)}}$

Définition 9 : La cohésion d'une classe **C** = (a) de degré 1, est définie par $coh(a)=1$

2.3.2 Algorithme de construction de la hiérarchie

Cet algorithme est implémenté dans le logiciel CHIC (logiciel de traitement non symétrique de données, Couturier R. et Ag Almouloud S., 2013).

Niveau 0

Les classes sont élémentaires et toutes les cohésions sont égales à 1

Niveau 1

On compare toutes les cohésions des arrangements 2 à 2 de V.

On conserve celle, notée C_1, qui correspond au maximum, soit par ex. C_1=(a,b).

Définition 1: On appelle nœud 1, la règle $a \Rightarrow b$

Niveau 2

On compare toutes les cohésions des classes à 2 éléments, sauf C1, à celles des classes à 3 éléments du type (x, a, b) et (a, b, x).

On conserve celle, notée C_2, correspondant au maximum obtenu.

Le nœud 2 sera :

1. soit une classe à 2 éléments, et dans ce cas le nœud sera du type : c=>d
2. soit une classe à 3 éléments, et dans ce cas le nœud sera noté (a=>b)=>c ou c=>(a=>b).

Ces dernières règles sont dites composées ou généralisées. Pour restituer l'ordre dans lequel est constituée la classe, on notera, par exemple ici, ((a,b),c) ou, dans l'autre cas, (c,(a,b)).

Niveau k

On compare toutes les cohésions des concaténations de 2 des classes déjà formées aux niveaux inférieurs, du type C_i et C_j avec i<k et j<k. On conserve celle $C_k = C_i \,\hat{\cup}\, C_j$ qui satisfait le maximum et est la concaténation de C_i et C_j.

Le nœud k correspondant sera noté par extension $C_i \Rightarrow C_j$. Mais on peut expliciter des nœuds correspondant à la formation des troncations respectives et génératrices de C_i et C_j aux niveaux inférieurs.

Par exemple, la règle composée $((f \Rightarrow (e \Rightarrow u)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow d))$ est l'explicitation d'un nœud particulier. Afin de faire apparaître les classes formées à des niveaux successifs, on notera aussi la règle sous la forme : ((f(eu))((ab)(cd)))

L'algorithme s'arrête, au plus tard, au niveau p-1, lorsque toute concaténation conduirait à une classe de cohésion nulle ou à une permutation de l'ensemble V des variables . Les classes formées au niveau ultime et qui n'admettent pas de classes qui les contiennent sont donc maximales. Certaines classes maximales peuvent aussi être élémentaires. La hiérarchie est composée de l'ensemble des classes maximales et de toutes leurs parties.

2.4 Conformité de la construction aux axiomes d'une hiérarchie orientée

La hiérarchie ainsi construite vérifie les trois axiomes d'une hiérarchie orientée. En effet :

Axiome 1 :

Deux classes de **H**, **C'** et **C''** étant données,

1. ou bien elles sont associées dans une même concaténation et la constituent entièrement, alors **C'** $\hat{\cap}$ **C''**$=\varnothing$
2. ou bien l'une est la concaténation de l'autre et d'une troisième et alors **C'** $\hat{\subset}$ **C''** ou **C''** $\hat{\subset}$ **C'**
3. ou bien elles ne sont pas associées dans une concaténation et alors elles sont des arrangements sans élément commun, donc **C'** $\hat{\cap}$ **C''**$=\varnothing$

Axiome 2 :

Pour toute classe C de la hiérarchie :

1. ou bien elle est constituée d'un élément et c'est une classe élémentaire
2. ou bien elle est constituée de plus d'un élément et elle est alors la concaténation de deux ou plusieurs classes par construction.

Axiome 3 :

On range toutes les classes maximales par ordre croissant de la cohésion ; les classes élémentaires seront les éléments maximaux de cet ordre. Toutes les classes sont 2 à 2 disjointes et tous les éléments de V appartiennent à l'une et l'une seulement des classes. La concaténation de leur ensemble constitue alors une permutation particulière de tous les variables de V.

Notons qu'à une permutation de V peuvent correspondre plusieurs hiérarchies.

2.5 Exemples

Exemple 1: Si l'on range les classes maximales de la hiérarchie donnée au début du texte par ordre croissant de la cohésion, on obtient par exemple :

coh(e,f,g,h,i)$\leq$coh(a,b,c,d)$\leq$coh(j) et (e,f,g,h,i,a,b,c,d,j) est une permutation de A.

Mais à cette permutation, peut aussi correspondre la hiérarchie :

{(g,h), (b,c), (e,f), (a,b,c), (g,h,i), (d,j), (a,b,c,d,j)} dont les classes maximales sont (e,f), (g,h,i) et (a,b,c,d,j).

Exemple 2 : Reprenant encore l'exemple initial, l'autre hiérarchie {(j), (f,g), (b,c), (e,f,g), (b,c,d), (h,i), (a,b,c,d), (h,i,e,f,g)}ne coïncide pas avec la première. La permutation correspondante de A est (h,i,e,f,g,a,b,c,d,j).

Exemple 3

La figure ci-dessous montre la hiérarchie obtenue, artificiellement, à partir de 7 variables. Des interprétations de telles règles généralisées sont quelquefois complexes, comme par exemple, la règle $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (t \Rightarrow v)$. Mais quelques règles sont réductibles à des assemblages plus aisément interprétables. Par exemple, la règle $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ se ramènerait, dans le cas formel, à $x \wedge y \Rightarrow z$. Une cohésion de qualité (proche de 1) autoriserait cette extension sémantique. La règle $(d \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow f)$ ou ((db)(af)), illustrée par la figure (Fig. 1), peut s'interpréter par la phrase: le « théorème » $d \Rightarrow b$ a généralement pour conséquence le « théorème » $a \Rightarrow f$. Cette figure montre aussi que la variable *e* n'a ni prémisse ni conclusion.

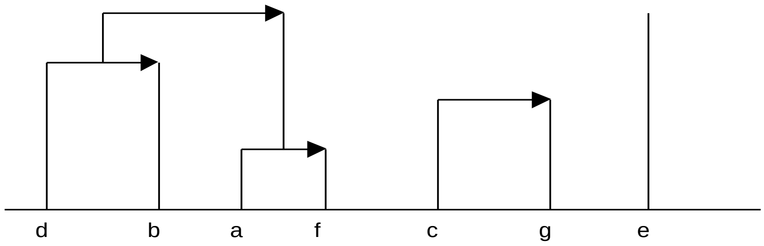

Figure 1 *Un exemple de hiérarchie orientée*

Exemple 4

Par exemple, de théorèmes comportementaux, on peut dégager **un trait** ou une **conception** (ex : conceptions du hasard par (Lahanier-Reuter D., 1999)). Un indice statistique permet en outre de repérer les niveaux hiérarchiques correspondant à une **significativité des classes** formées à ces niveaux (en rouge sur la Fig.2). La hiérarchie de la Fig. 2 est produite, à l'aide de CHIC, à partir d'un fichier constitué par les réponses à un questionnaire figurant en annexe et présenté à des enseignants de mathématiques dans des classes terminales de lycée (18-19 ans). Ces enseignants devaient choisir et pondérer les objectifs qu'ils assignaient aux cours de mathématiques de leur programme. Nous reviendrons plus loin sur cet exemple.

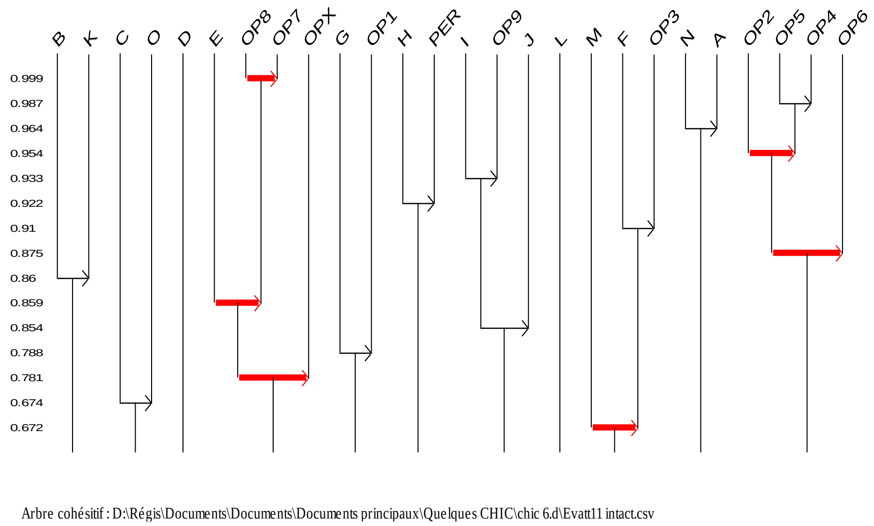

Figure 2 Hiérarchie des objectifs et attitudes propres à l'enseignement des mathématiques donnée par le logiciel CHIC

Il n'y a pas de raison fondamentale d'utiliser le type de représentation (« vers le haut ») de la fig.1 ou celui de la fig. 2 (« vers le bas »). La première est traditionnellement utilisée dans les hiérarchies de la théorie des graphes. La seconde, obtenue par pliage axial, organise la hiérarchie selon la cohésion croissante. Elle permet un accès privilégié aux noms des variables.

3 La hiérarchie cohésitive basée sur une distance ultramétrique (ce paragraphe peut survolé en première lecture)

On part de l'algorithme de construction de H déjà défini et par lequel la cohésion de la classe en voie de formation, à un niveau donné, est inférieure à la valeur de la cohésion au niveau immédiatement inférieur et est supérieure à celle du niveau immédiatement supérieur. C'est donc une fonction décroissante des niveaux et, a fortiori, avec l'inclusion des parties de H. C'est la propriété de la cohésion qui va permettre de définir la distance ultramétrique d, pour laquelle tous les triangles sont isocèles. Cette propriété d'ultramétricité de la cohésion va justifier, a posteriori, le bien-fondé de l'expression « hiérarchie » employée pour la construction.

Il suffit de choisir pour un couple quelconque de variables (x, y) :

$$d(x,y) = 1 - coh(C_{(x,y)})$$

où $coh(C_{(x,y)})$ est la cohésion de la plus petite classe $C_{(x,y)}$ contenant x et y. Rappelons les propriétés suivantes de la hiérarchie :

1. quelles que soient les classes C et C' de H, ou bien $C \hat{\subset} C'$ ou bien $C \hat{\supset} C'$ ou bien $C \hat{\cap} C' = \varnothing$
2. si $C \hat{\subset} C'$, alors $coh(C) \geq coh(C')$ par construction.

Vérifions alors que les trois axiomes d'ultramétricité sont bien valides sur l'ensemble V des variables

Axiome 1 :

Pour tout $x \in V$, d(x,x) = 0 par construction de d car $coh(x,x) = 1$

Axiome 2 :

Pour tout couple $(x,y) \in VxV$, d(x,y)=d(y,x) par construction

Axiome 3 :

$$(x,y,z) \in VxVxV,\ d(x,y) \leq \sup[d(x,z),\ d(y,z)]\ (1)$$

La définition adoptée respecte aussi l'axiome 3. En effet, soit $C_{x,y}$, $C_{x,z}$, $C_{y,z}$ les plus petites classes contenant respectivement x et y, x et z, y et z.

Alors $z \in C_{(x,z)} \hat{\cap} C_{(y,z)} \neq \varnothing$ d'où $C_{(x,z)} \hat{\subset} C_{(y,z)}$ ou bien $C_{(x,z)} \hat{\supset} C_{(y,z)}$ d'après les propriétés des classes de H. Supposons alors: $C_{(x,z)} \hat{\supset} C_{(y,z)}$. On en déduit d(x,z)≥d(y,z) et par suite d(x,z)=sup[d(x,z) ; d(y,z)] (2). De plus, on a à la fois : $x \in C_{(x,z)}$ et , par conséquent $C_{(x,y)} \hat{\subset} C_{(x,z)}$

Comme l'indice d croît avec l'inclusion en raison de la décroissance de la cohésion, alors : $d(x,z) \geq d(x,y)$ (3)

Par (2) et (3) on obtient donc (1) : $d(x,y) \leq \sup[d(x,z), d(y,z)]$

H est donc bien une **hiérarchie indicée** la distance d au sens strict de hiérarchie mathématique.

4 Hiérarchie cohésitive, modèle de la conceptualisation ?

En psychologie du développement, et, ceci afin de poursuivre l'analogie avec les conceptions piagétiennes, la notion d'abstraction réfléchissante associée à celle d'abstraction empirique et d'abstraction « réfléchie », constituant différentes étapes de « prise de conscience », tente de rendre compte du mécanisme d'équilibration majorante et de conceptualisation. Celle-ci fait passer d'un niveau de l'organisation conceptuelle (par exemple, un schème, une règle d'action, un stade donné du développement cognitif) à un niveau supérieur de cette organisation conceptuelle (le stade suivant du développement cognitif) ; chacun des niveaux étant constitué de règles, par exemple des théorèmes en acte dirait G.Vergnaud, portant sur des contenus à chaque fois différents, d'opérations portant sur ces contenus, enfin sur des opérations sur ces opérations. On retrouve, d'ailleurs, dans une théorie mathématique ces mêmes élargissements lorsque l'on passe d'un théorème qui établit l'implication d'une propriété sur une autre, à un corollaire qui fait découler d'un théorème un autre théorème ou une simple propriété. C'est le cas, par exemple, dans l'étude des fonctions, puis à l'étude de fonction de fonctions en analyse fonctionnelle. D'où l'idée que nous avons eue, de construire un second plan de relations implicatives, celui de **règles de règles** selon une **hiérarchie dite cohésitive** en raison de l'indice de **cohésion** qui permet d'engendrer des classes orientées de règles. Cet indice est à une règle généralisée ce que l'intensité d'implication est à une règle. C'est-à-dire que contrairement aux mathématiques où la validité est absolue, celle d'une règle de règle en ASI est relativisée à la valeur de la cohésion, nombre compris entre 0 et 1, croissant avec la qualité de l'implication d'une règle sur une autre.

4.1 Un détour par la philosophie des sciences.

A travers ces deux types de représentations de règles simples (graphe implicatif) ou généralisées (hiérarchie cohésitive), qui mettent au jour deux types de structures dans l'ensemble des variables, nous répondons à la philosophie structuraliste, donc non réductionniste, tout comme la théorie générale des systèmes de L. Von Bertalanffy[7], qui estime que le **« tout » est plus riche que la somme de ses « parties ».** Citons, à ce sujet, deux extraits du livre de L.Sève (ib. p. 58) « *...le **tout** ne se compose de rien d'autre que de ses **parties**, et pourtant il présente, en tant que tout, des propriétés n'appartenant à aucune de ses parties. Autrement dit, dans le passage **non additif**, **non linéaire** des parties au tout, il y a apparition de propriétés qui ne sont d'aucune manière précontenues dans les parties et ne peuvent donc s'expliquer par elles* ».

[7] Cf. Théorie générale des systèmes, 1973, édition de 1980, Dunod, p. 66 notamment

Et plus loin *« Tout se passe donc comme si se produisait une génération spontanée de propriétés du tout…C'est le paradoxe de* ***l'émergence****».*

4.2 Illustrations

Exemple 1

Appuyons-nous sur l'exemple 4 du § 2.5. La classe M => (F => OP3) est constituée de 3 objectifs et attitudes attendus par les professeurs de mathématiques au lycée :

- OP3 : « Dans ma notation, j'attache plus d'importance à la démarche qu'au résultat »,
- F : « développement de la capacité à prouver et valider sa preuve »,
- M : « développement de la capacité à mathématiser et à formaliser.

OP3 apparaît comme une opérationnalisation de l'objectif spécifique F. M exprime une position supérieure sur le plan cognitif, quasi-finalité de la discipline « Mathématiques ». Il y a donc bien élévation du niveau conceptuel du « théorème » F => OP3 à M. M apparaît comme large enveloppe émergeant d'une spécification.

On retrouve, de la même façon, le passage des comportements spécifiques exprimés par E => (OP8 => OP7) vers un objectif général E qui n'est pas la seule addition de OP8 et OP7 :

- OP7 : ....pouvoir reconnaître si un nombre entier écrit dans la base 10 est divisible par 4 impliqué par …
- OP8 : pouvoir donner un exemple ou un contre-exemple personnels à l'affirmation.…
- E : « développement de l'imagination et la créativité ».

Nous constatons, ici aussi, le passage, par un saut qualitatif, d'un niveau d'activité élémentaire OP7 à un niveau supérieur E via un niveau intermédiaire OP8 dont OP7 est un exemple. La classe (E(OP8, OP7)) traduirait, en fait, l'émergence d'une qualité intellectuelle E génératrice d'une règle opératoire inférée par E.

Cette propriété disparaît ou s'estompe lorsque, sur le même fichier, en utilisant le même type d'algorithme de base[8], on construit avec CHIC la hiérarchie de similarité sur l'ensemble des variables. On observe (voir la Figure 3) des classes regroupant des variables vis-à-vis desquelles les enseignants ont adopté des attitudes identiques ou voisines. Par exemple, la classe {E, I, OP9, J} rassemble 3 objectifs généraux (E,I,J) de mise à distance non nécessairement disciplinaire et un savoir de type critique (réfuter vs accepter). Contrairement aux classes cohésitives ordonnées, celle-ci est homogène : les comportements qui l'illustrent relèvent du même modèle attendu de l'élève. Ce n'est donc pas comme avec la hiérarchie cohésitive l'image d'un modèle en construction mais en action.

---

[8] La similarité entre deux variables est évaluée à partir du nombre statistiquement étonnant d'exemples satisfaisant simultanément les deux variables eu égard aux nombres de sujets satisfaisant séparément chacune des variables. Des paires sont alors réunies en une classe. La liaison entre deux classes est établie de façon comparable.

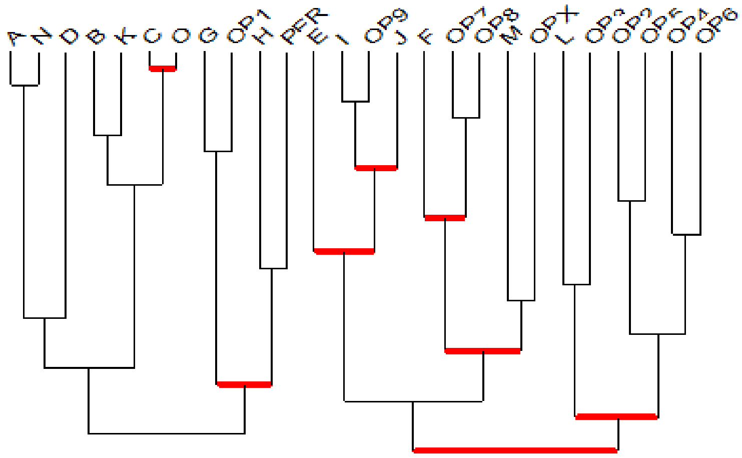

Figure 3 Hiérarchie des similarités

Exemple 2

Dans sa thèse où il a fondé l'A.S.I., Gras R. (1979) a également construit, dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, une taxonomie d'objectifs cognitifs selon 5 niveaux allant de la « Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématique » jusqu'à la « Critique et évaluation ». Cette taxonomie ne décrit pas des phases d'apprentissage conceptuel cumulatives qui s'étireraient linéairement dans le temps au cours d'une scolarité, mais une hiérarchie de niveaux de complexité cognitive. Dans le but de valider ponctuellement ou simplement interroger la taxonomie[9], un questionnaire portant sur la notion de symétrie centrale (géométrique et algébrique) a été proposé à 401 élèves de 13-14 ans. Il était constitué d'une cinquantaine d'items supposés opérationnalisant a priori la taxonomie, c'est-à-dire organisant les réussites attendues selon un préordre respectant peu ou prou l'ordre taxonomique.

Les résultats obtenus par une analyse implicative montrent bien le phénomène attendu en tant qu'illustration des paragraphes plus haut. L'échelle de complexité prévue est relativement bien validée. Les items de niveaux supérieurs géométriques (resp. algébriques) (critique, évaluation,..) se placent généralement en racines des classes cohésitives en impliquant ceux de niveaux inférieurs (connaissance de faits, de définitions, de techniques,…) avec des décalages comme il s'en trouve dans des tests de psychologie différentielle. L'observation de certains décalages montre en particulier des différences de réussite très nettes entre les items algébriques et les items géométriques supposés de même niveau « piagétien ». Mais ces items, opérant dans des domaines non isomorphes, conformément à la théorie des champs, ne mobilisent pas les mêmes structures logico-mathématiques de Piaget, les mêmes schèmes, les mêmes invariants opératoires, les mêmes théorèmes et concepts en acte. On trouvera ainsi des classes

---

[9] C'est d'ailleurs dans cette intention que R.Gras a conçu la notion d'Analyse Statistique Implicative afin de rendre compte du préordre partiel sous-jacent aux comportements de réponse des élèves à ce questionnaire. Il ne disposait pas, parmi les méthodes d'analyse de données de moyen de mettre en évidence ce phénomène. L'échelle de Guttman ne répondait que partiellement à sa demande.

orientées spécifiques d'un champ géométrique et d'autres d'un champ algébrico-numérique.

Exemple 3

Dans Régnier et Acioly-Régnier (2007), les auteurs traitent un questionnaire sur les représentations de 320 sujets relativement aux phases de la lune. Une première analyse avait été menée déjà dans Acioly-Régnier et Régnier (2005) mais approfondie en 2007 par un usage du concept de cohésion. Ils ont été conduits, dans ces deux articles, à une interprétation dans le cadre théorique psychologique. Entre autres classes, ils s'intéressent à deux classes formées très tôt par la hiérarchie cohésitive. L'une d'entre elles, renverrait au poids de la culture, l'autre à des niveaux de conceptualisation plus élevés. On retrouve donc, dans ces textes, une démarche interprétative comparable à celle emboîtée ci-dessus.

Dans les ouvrages cités en bibliographie, on trouvera de multiples exemples tant en psychologie, sociologie, qu'en biologie, en art, en médecine, etc.

4.3 Le rapport tout-partie.

Nous insistons sur cette propriété spécifique de l'ASI que la hiérarchie cohésitive satisfait de façon originale à travers l'extension des relations entre variables. C'est par un saut qualitatif, produit généralement par un effet de seuil dans la quantité (ex. psychologie de groupe, vaporisation de l'eau…), que le tout, au prix d'une synthèse, prend son sens. Celui-ci s'extrait de la lecture véritablement dialectique du **rapport non-linéaire tout/partie**[10] (non-proportionnalité et non-additivité de la cause sur l'effet). Avec l'ASI, il y a alors **paradoxe** entre des contraires, lien et absence de lien, car le tout, constitué (on devrait dire *organisé*) de parties en un **système dynamique**, possède des propriétés que ne possèdent pas les parties et qui sont généralement de **niveau supérieur**. De la même façon, et métaphoriquement, en linguistique, la signification d'une phrase ne se fait pas uniquement par l'analyse du sens de chacun de ses mots mais par le sens de chacun de ces mots inscrit donné par l'interaction de ceux-ci[11]. La logique qui sous-tend ce rapport tout/parties est **dialectique** (et non pas dichotomique) car elle concilie interactivement des contradictions : règle et non-règle,

[10].. comme le montrent les équations différentielles non-linéaires de l'indice fondamental par rapport aux paramètres cardinaux des observations, contrairement à ce qui est observable avec d'autres indices concurrents..
« *La société n'est pas constituée d'individus, mais exprime la somme des relations, des rapports où ces individus se situent les uns par rapport aux autres* » (K. Marx, « Manuscrits de 1857-1858).
Une rue n'est pas la somme des maisons qui y figurent. De même une ville n'est pas somme de ses rues, etc.

[11] « *Il n'y a ni additivité ni proportionnalité entre le sens des unités (mots) et celui de la phrase. On voit se dessiner une topologie du sens* » (F. Gaudin dans « Emergence, complexité et dialectique »).
« *…le mot isolé de la langue chinoise n'a en vérité ni signification ni existence à part, chacun ne reçoit sa signification que du parler même (de l'intonation, etc….), pris isolément il a dix, voire quarante significations,… ; si nous soustrayons ce mot à la totalité, il se perd dans une creuse infinité.* « (F.-W. Schelling, « Philosophie de la mythologie », p.361).

instabilité d'un système dynamique et stabilité structurelle. Elle se fonde en règle sur l'inexistence importante du contre-exemple et en méta-règles sur la négation de l'entropie, du désordre comme on le constate dans les relations d'un fleuve et de ses affluents. En cela, la logique dialectique s'oppose à la logique stricte (du mathématicien) sans, bien sûr, être un sophisme, c'est-à-dire un raisonnement faux. La fécondité et l'originalité de l'ASI tiennent à ce caractère, particulièrement dans l'analyse hiérarchique manifestement non-linéaire où le tout fonde son sens, non par addition des propriétés de ses parties (sous-classes) mais par la synthèse, voire par une reconstruction, des interactions inférentielles. C'est par la notion de **niveau significatif** que nous pouvons mettre en évidence le phénomène de **propriété émergente**. En ce sens, l'A.S.I. apparaît comme une sorte d'avatar de l'apprentissage non linéaire des connaissances, apprentissage fait de dépassements, de ruptures et de reconstruction dialectique (cf. l'épistémologie de G. Bachelard ou de Lev Vygotsky). A l'opposé de l'A.S.I., le rapport tout-parties serait **linéaire** dans le cas d'emboîtements de classes comme en classification fondée sur la similarité jusqu'à son nœud terminal (cf. § 3.2). Et ce linéaire infécond ne peut pas surprendre. Dans l'ouvrage « Dans la lumière et les ombres, Darwin et le bouleversement du monde » (2011), Jean-Claude Ameisen cite François Jacob : « On mesure l'importance d'une découverte à la surprise qu'elle cause » et il ajoute ; « A son caractère profondément inattendu. A ce qui nous manquait pour simplement nous y attendre » (p. 468).

5 Conclusion

A la suite de ces réflexions reliant psychologie de l'apprentissage et représentation hiérarchique de données, on peut se poser la question que se pose Gérard Vergnaud relativement à la correspondance entre signifiés et signifiants qu'il qualifie d'homomorphisme de structure : y aurait-il, de façon semblable, entre classes et sous-classes, au moins morphisme de structures préordonnées : celle de la pensée conceptualisante et celle de la hiérarchie des règles généralisées telle que la présente une hiérarchie cohésitive ? Celle-ci serait-elle une métaphore graphique de la pensée ? *Comme l'avance Thom R. (1980, p.142) au sujet de l'analogie : " ou bien elle est vraie et alors elle s'avère sterile, ou bien elle est audacieuse et alors elle peut être féconde"*. Les deux exemples présentés ici semblent soutenir cette conjecture. D'autres situations expérimentales l'ont confortée. La comparaison entre ces deux structures nous a conduits à aller au delà de la seule construction (spéculative ?) d'un outil classifiant d'analyse de données et, par suite, à donner un sens spécifique à ce mode de représentation par rapport aux modes classiques de représentation hiérarchique. *Mais, ce faisant, ne satisfait-on pas au voeu de Thom R. (1980, p.58) qui écrit encore : "…je localise l'effort théorique de la science dans sa capacité d'organiser les données de l'expérience selon des schémas imposés par des structures théoriques" ?*

Références

Acioly-Régnier, N. M, Régnier, J-C, (2005), Repérage d'obstacles didactiques et socioculturels au travers de l'A.S.I. des données issues d'un questionnaire. Gras R., Spagnolo F., David J.(coord). *Proceedings Third International Conference A.S.I. Implicative Statistic Analysis* Palerme 6-8 octobre 2005, p.63-87.

Agrawal R., Imielinsky T. et Swami A,(1993), Mining association rules between sets of items in large databases, *Proc. of the ACM SIGMOD' 93, p.* 207-216

Bachelard G., (1967), *La Formation de l'esprit scientifique*, Paris, 5e édition, Librairie philosophique J. Vrin.

Cadot M., (2009), Graphe de règles d'implication statistique pour le raisonnement courant. Comparaison avec les réseaux bayesiens et les treillis de Galois**,** *Analyse Statistique Implicative, Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*, sous la direction de Gras R., réd, invités Gras R., Régnier J-C., Guillet F., Cépaduès Ed. Toulouse, p.223-250

Couturier R. et Ag Almouloud S., (2013), Historique et fonctionnalités de CHIC*, L'analyse statistique implicative, Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*, sous la direction de Gras R., eds Gras R., Régnier J.-C., Marinica C., Guillet F., Cépaduès Editions,, p.313-325.

Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G. and Smyth P. From Data Mining to Knowledge Discovery. In Advances In Knowledge Discovery and Data Mining, Fayyad U., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P, and Uthurusamy R. eds, AAAI/MIT Press, 1-31,.

Gras R., (1979), *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1.

Gras R., Kuntz P., Briand H., Couturier R. (2002), Hiérarchie de règles généralisées et notion de variable supplémentaire en analyse statistique implicative, *Actes des IX*[èmes] *Rencontres de la Société Francophone de Classification*, Université de Toulouse, 2002, p. 211-214.

Gras R., Kuntz P. et Briand H. (2003), Hiérarchie orientée de règles généralisées en analyse implicative, *Extraction des Connaissances et apprentissage, Hermès*, 145-157.

Gras R., Couturier R.., Blanchard J., Briand H., Kuntz P., Peter P., (2004), Quelques critères pour une mesure de qualité de règles d'association. Un exemple : l'implication statistique, *Mesures de qualité pour la fouille de données, RNTI-E-1, Cépaduès –Editions*, 3-32.

Gras R., Kuntz P. et Régnier J.C., (2004), Significativité des niveaux d'une hiérarchie orientée en analyse statistique implicative, *Classification et fouille de données,M. Chavent et M. Langlais Eds, RNTI-C-1, Cépaduès,* 39-50.

Gras R. et Kuntz P., (2005), Discovering R-rules with a directed hierarchy, *Soft Computing, A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, Volume 1, Springer Verlag*, 46-58..

Guillet, F. et Hamilton H.J. (2007) (Eds.). *Quality Measures in Data Mining*. Springer.

Hipp J., Guntzer U., Nakhaeizadeh, J.(2000), Mining association rules: Deriving a superior algorithm by analyzing today's approach , *Proc. of 4th Eur. Conf. on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery, Lect. N. in Art. Int. 1910*, 160-168.

Lahanier-Reuter D. (1999), *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, Éducation et Formation, PUF.

Lenca P., Vaillant B., Meyer P., et Lallich S. (2007), Association Rule Interestingness Measures : Experimental and Theorical Studies, *Guillet F. and Hamilton H.J. eds, Studies in Computational Intelligence 43, Springer*, p. 51-76.

Pellois, C., (2002**.** Apprentissage et développement de la personne dans l'enseignement et la formation, Tome 1 : du rationnel au complexe, l'harmattan, *Collection : « Recherches et innovations sur et pour des enseignants et des formateurs »*, p. 105 et suivantes

Pellois, C., (2008). Contrainte et liberté du sujet : entre incertitude et prévisibilité ? *In Cognition, incertitude et prévisibilité, Cadet B. Chasseigne G., Foliot G., Editions Publiboock, Sciences Humaines et Sociales, Coll. « Psychologie cognitive »*, Paris, 77-100

Pellois, C., (2010**),** Sens et incertitude, une forme de complexité en psychologie : des contraintes aux parts de liberté, le développement et ses contextes, *in Cadet, C., Chasseigne, G. Traitement de la complexité dans les sciences humaines, Editions Publibook Université, Coll. « Psychologie Scientifique »*, 177-207

Pellois, C., (2013). La psychologie et l'usage du traitement mathématique des données statistiques. Nouvelles perspectives conceptuelles, *Revista Brasiliera de Ensino de Ciencia e technologia*, *Vol. 6,* n° 1, 230-259

Jean Piaget, (1970), *« L'épistémologie génétique »*, PUF Paris

Régnier, J.-C. et Acioly-Régnier, N.M. (2007) Analyse cohésitive et interprétations des données dans le champ de l'éducation. In Régis Gras et al. *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implicative et applications.* Castellón : Innovació Digital Castelló, p.329-343

Thom, R (1980). *Paraboles et catastrophes*, Flammarion.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques – *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.2,* 215-232.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10* (23), 133-170.

Vygotsky L. (1997). *Pensée et langage* (1933) (traduction de Françoise Sève, avant-propos de Lucien Sève), suivi de « Commentaires sur les remarques critiques de Vygotski » de Jean Piaget,(Collection « Terrains», Éditions Sociales, Paris, 1985) ; Rééditions : La Dispute, Paris.

Ouvrages de référence

L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de donnée, sous la direction de R.Gras et la collaboration de S. Ag Almouloud, M. Bailleul, A. Larher, M. Polo, H. Ratsimba-Rajohn, A.Totohasina, La Pensée Sauvage, Grenoble (1996)

Mesures de Qualité pour la Fouille de Données, H.Briand, M.Sebag, R.Gras er F.Guillet eds, RNTI-E-1, Cépaduès, 2004

Quality Measures in Data Mining , F.Guillet et H.Hamilton eds, Springer, 2007,

Statistical Implicative Analysis, Theory and Applications, R.Gras, E. Suzuki, F. Guillet, F. Spagnolo, eds, Springer, 2008.

Analyse Statistique implicative.Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités, sous la direction de Régis Gras, réd. invités R. Gras, J.C. Régnier, F. Guillet, Cépaduès Ed. Toulouse, 2009.

Teoria y Aplicaciones del Analisis Estadistico Implicativo, Eds : P.Orus, L.Zemora, P.Gregori, Universitat Jaume-1, Castellon (Espagne), ISBN : 978-84-692-3925-4, 2009..

L'Analyse Statistique Implicative : de l'exploratoire au confirmatoire. Eds : J.C. Régnier, Marc Bailleul, Régis Gras, Université de Caen, ISBN : 978-2-7466-5256-9, 2012

L'analyse statistique implicative, Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités, sous la direction de Gras R., eds Gras R., Régnier J.-C., Marinica C., Guillet F., Cépaduès Editions, 522 pages, ISBN 978.2.36493.056.8, 2013.

ANNEXE- QUESTIONNAIRE

L'APMEP conduit une réflexion sur l'enseignement des mathématiques au lycée. Elle souhaite recueillir l'opinion du plus grand nombre possible de professeurs de mathématiques. Les résultats nous aideront aussi dans la préparation de l'opération EVAPM Terminale.

Les conclusions serony publiées dans un prochain BGV et sur le site INTERNET de l'APMEP :

http:/www.univ-lyon1.fr/apmep

An nom de quelle série répondez-vous :...

(Vous pouvez, bien sûr, répondre pour plusieurs séries, mais utilisez un questionnaire par série)

I Objectifs de la formation mathématique

A votre avis, quels sont les objectifs essentiels de la mission d'un professeur de mathématiques dans la série pour laquelle vous répondez. Pour répondre à cette question, classez par ordre préférentiel décroissant de 1 à 6 (1 : le plus important,...) six des objectifs majeurs de cette formation en les choisissant parmi les objectifs proposés ci-dessous :

A- acquisition de connaissances

B- préparation à la vie professionnelle

C- préparation à la vie civique et sociale

D- préparation aux examens, concours, au passage dans l'enseignement supérieur

E- développement de l'imagination et la créativité

F- développement de la capacité à prouver et valider sa preuve

G- développement de la capacité d'accepter des points de vue différents

H- développement de la volonté et la persévérance

I- développement de l'esprit critique

J- développement de la capacité à communiquer avec objectivité, clarté et précision par des modes de représentation divers

K- développement de compétences utiles dans les autres disciplines

L- développement de la pratique de calculs formels, donc sans nécessité de signification

M- développement de la capacité à mathématiser et à formaliser

N- acquisition de savoir-faire

O- participation au développement d'une culture générale

Réponse (par exemple : 1 : I, 2 : G, 3 : M, 4 : D, 5 : A, 6 : J)

1	2	3	4	5	6

II Votre opinion sur des....opinions

Voici quelques opinions entendues dans la salle des profs. Vous pouvez être d'accord, ou un peu d'accord ou pas d'accord avec l'une ou l'autre. Entourez votre choix :

1-(OP1) C'est vrai que les math constituent un instrument de sélection excessif.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

2-(OP2) An bac, je préfère qu'il y ait un grand problème avec plusieurs parties plutôt qu'un ensemble de petits problèmes indépendants.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

3-(OP3) Dans ma notation, j'attache plus d'importance à la démarche qu'au résultat.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

4-(OP4) Quand je corrige, j'aime bien un barème très détaillé sur les résultats à obtenir.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

5-(OP5) La démonstration est la seule façon rigoureuse de faire des mathématiques.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

6-(OP6) Je préfère des programmes bien définis indiquant ce que je dois et ce que je ne dois pas faire.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

A la sortie de la terminale de la série sur laquelle vous répondez, un élève devrait....

7-(OP7) ....pouvoir reconnaître si un nombre entier écrit dans la base 10 est divisible par 4.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

8-(OP8) ....pouvoir donner un exemple ou un contre-exemple personnels à l'affirmation :

"si deux applications *f* et g sont strictement croissantes sur un intervalle, l'application produit *fxg* y est également croissante".

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

9-(OP9) ...avoir appris à faire un test statistique pour pouvoir réfuter ou accepter l'hypothèse d'adéquation d'une loi théorique à une distribution empirique.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD

10-(OPX) ...estimer à vue, à 30% près, le périmètre et l'aire du plancher ainsi que le volume de la salle de classe.

D'ACCORD UN PEU D'ACCORD PAS D'ACCORD