Problems of Representing Concepts in the Learning of Mathematics

Concettualizzazione, registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica

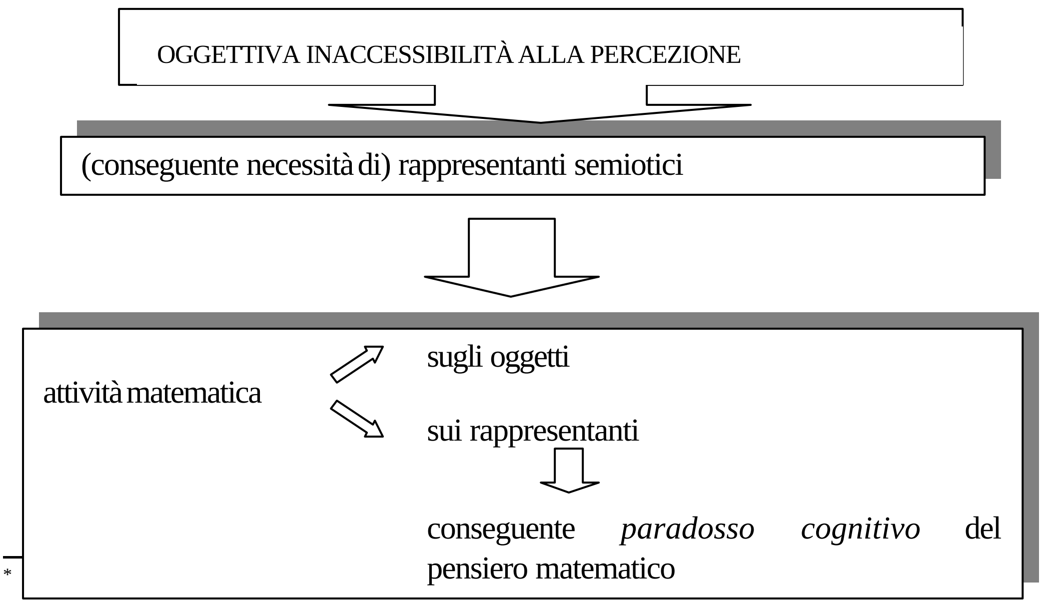
Bruno D'Amore*

Dipartimento di Matematica – Università di Bologna – Italia
damore@dm.unibo.it

ABSTRACT. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c 1993) , and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substabtiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessfull devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schoolong of mathematical awareness (D'Amore, 1999a).

1. Il "paradosso cognitivo"

Nel corso di questa conferenza, voglio prendere in esame il seguente schema:



* *sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*. Questo testo è il sunto di uno molto più esteso ed articolato in corso di stampa.

Vediamo in che cosa consiste questo *paradosso* (Duval, 1993, pag. 38):

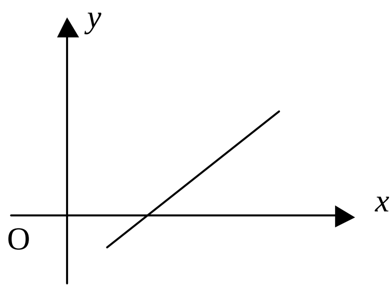
> "(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un'apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche".

In questo paradosso, così ben evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni?[1]
Secondo l'insegnante, secondo la noosfera[2] e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell' "oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all' "oggetto" e l'insegnante e la noosfera confondono le due cose; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. E quindi, di fronte ad un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la

[1] Per "devoluzione" si intende l'atto con il quale l'insegnante delega allo studente di farsi carico diretto della responsabilità della costruzione del proprio sapere. In taluni casi lo studente accetta e l'apprendimento è possibile; in altri casi lo studente non accetta di impegnarsi personalmente, ed allora l'apprendimento è impossibile. Su questo punto si fonda gran parte dello studio della didattica della matematica di stile europeo. La parola "devoluzione" è tratta dallo studio del diritto: si tratta di un passaggio di beni da una persona ad un'altra. (Perrin Glorian, 1994; D'Amore, 1996b)

[2] Per "noosfera" si intende tutto quanto circonda il mondo della scuola e dunque ha influenza più o meno diretta sull'azione didattica, cioè sul triangolo: insegnante – allievo – sapere. Per esempio: genitori, mondo del lavoro, dirigenti scolastici, opinioni esterne etc.

noosfera non capiscono il perché ed accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli non capisce.
In realtà: in questa fase paradossale, nessuno capisce più quel che sta accadendo in quanto ciascuno degli attori di questa avventura ha una percezione diversa del problema.
D'altra parte, l'analisi delle rappresentazioni è fatto nuovo, nello studio dei processi cognitivi, anche se lo è meno sul piano strettamente filosofico.
Si pensi al passaggio dal registro figurale a quello algebrico nella geometria analitica:
da:



a:
x-2y-2=0

c'è un cambio di registro non banale da dominare per un allievo di 14-15 anni. In nessuno dei due casi si è di fronte all' "oggetto retta", ma ad una sua rappresentazione semiotica.
Come altro esempio, si pensi al passaggio dal registro decimale a quello figurale nella rappresentazione dei numeri:
molti studenti di 11-12 anni trovano complesso rappresentare numeri decimali come 1,75 oppure come 1,8 sulla retta numerica razionale per il cambio di registro semiotico che non dominano; in un certo senso è questo cambio di registro che fa dire a qualcuno che 1,75>1,8 (qui si aggiunge anche un'interpretazione ambigua della scrittura decimale).

Più volte ho usato il verbo "apprendere", difficile da definire, ma che ritengo necessario almeno chiarire.
Intenderò con "apprendere" una costruzione più o meno personale, ma sottoposta al bisogno di "socializzare", il che avviene ovviamente grazie ad un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro semiotico di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze).

2. Semiotica e noetica nell'apprendimento della matematica

In Matematica, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice per primo Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dei quali il lavoro del 1993 costituisce un primo tentativo di sintesi (1993); ma Duval pubblica su questo argomento anche lavori nel 1989 e 1990]; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994).
Dunque, prendendo a prestito da Duval: **non c´è noetica senza semiotica.**

Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso, preferisco esplicitarne i significati dei quali mi servo:

semiotica $=_{df}$ acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni

noetica $=_{df}$ acquisizione concettuale di un oggetto[3]

Intenderò, d'ora in poi:

$r^m =_{df}$ registro semiotico ($m = 1, 2, 3, \ldots$)

$R^m_i(A) =_{df}$ rappresentazione semiotica i-esima ($i = 1, 2, 3, \ldots$) di un contenuto A nel registro semiotico r^m

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.
Ancora una volta, uso un grafico per illustrare tutta la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace:[4]

caratteristiche della semiotica	*rappresentazione* *trattamento* *conversione*	queste tre sono attività cognitive diverse

[3] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.
[4] Faccio ancora riferimento a Duval (1993).

contenuto A da rappresentare

scelta dei tratti distintivi di A

RAPPRESENTAZIONE $R^m{}_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

trasformazione di rappresentazione (*TRATTAMENTO*)

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m{}_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m

trasformazione di registro (*CONVERSIONE*)

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n{}_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)

(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

Nella didattica della matematica, la conversione deve occupare un posto centrale rispetto alle altre funzioni, ed in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico.
La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche degli stessi concetti:

⊇ di *rappresentarli* in un dato registro
⊄ di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro
⊂ di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro

L´insieme di questi tre elementi e le considerazioni precedenti mettono in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo:
"costruzione della conoscenza in matematica" può essere interepretata come l'unione di quelle tre "azioni" sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di
rappresentare i concetti
di *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito e
di *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro.

È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella “costruzione” che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione, anche metafisica.[5]

La rinuncia dello studente alla devoluzione (ovviamente inconsapevole), l’incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate alla incapacità (talvolta solo supposta) o di *rappresentare*, o di *trattare* o di *convertire*, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L’insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa del fatto che egli considera identiche la semiotica e la noetica. Questa identità è molto diffusa nel pensiero degli insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua).[6]
Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D’Amore, 1999a).[7]

A tutto quanto sopra bisogna aggiungere, secondo me, un’altra questione.
Tra i registri semiotici disponibili per la matematica c’è il linguaggio comune, l’everiday language; il linguaggio, per come lo ha conosciuto lo studente nei primi anni di scuola e per come lo usa in contesti non scolastici, ha varie e complesse funzioni:
funzione di designazione
funzione di espressione di enunciati
funzione di espansione discorsiva
funzione di riflessività (o metalinguistica).
Tutte queste funzioni sono presenti nel complesso gioco relazionale che riguarda l’apprendimento della matematica, ma il più delle volte in modo non spontaneo, dato che lo studente adatta il proprio linguaggio matematico a quello che sente usare dall’insegnante, dal libro di testo, dagli compagni che hanno successo nelle ore di matematica.
Dunque, si realizza questo paradosso: proprio l’uso di quel registro semiotico che dovrebbe essere il più naturale e spontaneo si rivela essere quello più complesso da gestire.
Il linguaggio “naturale” cessa di essere tale e diventa un registro specifico che sfugge alla capacità dello studente di gestirlo e di dominarlo. Lo studente finisce con il parlare una lingua

[5] Naturalmente questa osservazione, ma anche tutto questo articolo, sono specifici per la matematica; non so valutare quanto siano estendibili ad una teoria dei concetti o, addirittura, ad una gnoseologia.
[6] Il che rimanda ad un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell’insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in (Speranza, 1997).
[7] “Con il termine “scolarizzazione del sapere” intendo qui riferirmi a quell’atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l’allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) ed all’insegnante di scuola (come rappresentante dell’istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,…). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell’insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che (…) si chiama “scolarizzazione delle relazioni”.” (D’Amore, 1999a).

innaturale, fatta di frasi fatte, sentite e non costruite, che non domina più (Maier, 1993; D'Amore, 1996).

BIBLIOGRAFIA

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 2, 81-97.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16, 3, 349-382. [Trad. it. *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 250-269].

Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Godino J.D. & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Maier H. (1993). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86-118.

Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavignot P. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-148.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.